

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

イールドカーブ・モデルのパラメータ推定手法

よしば としなお いえだ あきら
吉羽 要直・家田 明

Discussion Paper No. 2001-J-10

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES
BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

備考： 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

イールドカーブ・モデルのパラメータ推定手法

よしば としなお いえだ あきら*
吉羽 要直・家田 明

要 旨

本稿では、金利の期間構造を表わすイールドカーブ・モデルの具体的なパラメータ推定の手法を紹介するとともに、実際の市場データを用いてパラメータを推定することによって、各種手法の方法論や実際の推定における留意点等を示す。

まず、包括的なスポットレート・モデルのパラメータ推定を一般化モーメント法（GMM）で行い、パラメータが観測期間、対象金利データ（無担コール O/N レートまたは LIBOR）、観測頻度などによって大きく相違することを示す。

さらに、2ファクターHJMモデルの推定を、瞬間フォワードレートを3次自然スプライン関数とネルソン・シーゲル法を用いてフィッティングさせることにより行う。本稿では LIBOR 及びスワップレートを用いてパラメータを求めるが、その過程で、一部のパラメータの符号が、国債データを用いた既存研究とは異なる結果を得る。

キーワード：イールドカーブ・モデル、GMM、HJM モデル

JEL classification: G13

* 日本銀行金融研究所 研究第1課（E-mail: toshinao.yoshiba@boj.or.jp, akira.ieda@boj.or.jp）

目 次

1. はじめに	1
2. 瞬間スポットレート・モデルと GMM によるパラメータ推定	2
(1) 無担コール O/N レート	4
(2) LIBOR 1 ヶ月物レート	6
(3) インプリケーション	7
3. ヒース・ジャロウ・モートン・モデルとそのパラメータ推定	8
(1) 3 次自然スプライン関数による瞬間フォワードレートの推定	9
(2) ネルソン・シーゲル法による瞬間フォワードレートの推定	12
(3) HJM モデルのパラメータ推定	13
(4) インプリケーション	16
4. おわりに	16
(補論) モーメント法と一般化モーメント法 (GMM) について	18
参考文献	21

1. はじめに

金利派生商品のプライシングやポートフォリオの金利リスク管理には、金利の期間構造を記述するモデル（イールドカーブ・モデル）が用いられる。ファイナンス理論の世界で用いられるイールドカーブ・モデルには多くのバリエーションが存在するが、そのいずれのモデルも幾つかのパラメータを含んでおり、モデルを実務で扱う際には、それらのパラメータを具体的に与える必要がある。信用リスクのプライシング・モデルを含めて、モデルのパラメータの推定は、現実の金融市場における価格情報を用いて行われる。イールドカーブ・モデルのパラメータ推定でも、実際に市場で観測される金利の期間構造などの情報が用いられることになる。

本稿の目的は、イールドカーブ・モデルの具体的なパラメータ推定手法を紹介するとともに、実際の市場データを用いてパラメータ推定を行うことによって、各種手法の方法論や実際の推定における留意点等を示すことである。なお、金利派生商品のプライシングを行う場合には、リスク中立確率が用いられるため、現実世界のイールドカーブの動きを記述するモデルのパラメータに加えて、リスクの市場価格（market price of risk）の推定が必要となるが、本稿では、リスクの市場価格の推定には踏み込まない¹。

本稿では、まず、瞬間スポットレート（instantaneous spot rate）²・モデルに

¹ 他の金利派生商品の価格からインプライドにパラメータを求める場合には、それはリスク中立確率の下のパラメータであるため、金利派生商品のプライシングに際して改めてリスクの市場価格を算出する必要はない。ここでは、原資産である金利のヒストリカル・データからパラメータを推定することを考えているため、そのパラメータを金利派生商品のプライシングに用いる際には、リスクの市場価格を算出する必要がある。

² 本稿で「瞬間スポット（ないしフォワード）レート」という場合には、連続複利ベースのスポット（ないしフォワード）レートにおいて満期までの期間を無限小に接近させたときの極限值を表す。これは仮想的な金利であるが、理論上モデルが取扱いやすいこともあって、多くのイールドカーブ・モデルはこの「瞬間スポット（ないしフォワード）レート」の変動を特定の確率過程（確率微分方程式）によって記述するスタイルを採用している。ただ、実務家の間では、こうした「瞬間スポット（ないしフォワード）レート」は仮想的であるがゆえに実務的な感覚とフィットしないとの見方もあり、近年では、現実のレートを対象としたモデル（例えば、フォワードLIBORを対象としたBGMモデル＜Brace, Gatarek, and Musiela [1997]、森本・吉羽 [1999]を参照＞）が構築されている。

焦点をあてる。瞬間スポットレート・モデルには、そのパラメータの幾つかに関して先験的な仮定を置いたバシチェック・モデル、コックス・インガソル・ロス・モデル、ブラック・ショールズ・モデル、定弾性値モデルなどがあるが、本稿では、そうした先験的な仮定を置かない、より一般的なモデルを取り上げる。パラメータの推定には、一般化モーメント法 (Generalized Method of Moments、以下、GMM)³を用いる。瞬間スポットレート・モデルは、微小時間における金利変動を記述するものであるため、ヒストリカル・データをパラメータ推定に用いる場合、データの観測頻度を可能な限り高める必要がある。本稿では、無担コール O/N レートの日次データを使って推定を行い、推定されたパラメータの安定性などを論じる。

次に、イールドカーブ全体の動きを記述する代表的なモデルとして、ヒース・ジャロウ・モートン・モデル (以下、HJM モデル) を取り上げる⁴。具体的には、Heath, Jarrow, and Morton [1992] で議論された 2 ファクターのモデルを推定する。HJM モデルは瞬間フォワードレートを対象としたモデルであるため、ヒストリカル・データを用いる場合、瞬間フォワードレートのイールドカーブの作成をデータ期間にわたって行う必要がある。本稿では、この瞬間フォワードレート・カーブの推定にあたって 3 次自然スプライン関数で行う方法と Nelson and Siegel [1987] の 2 種類の手法を用いる。

2. 瞬間スポットレート・モデルと GMM によるパラメータ推定

対象とする瞬間スポットレート (X で表す) モデルは、 α 、 β 、 σ 、 γ をパラメータ、 W をウィナー過程として

$$dX = (\alpha + \beta X)dt + \sigma X^\gamma dW, \quad (1)$$

という確率微分方程式で表される。このモデルはバシチェック・モデル、コックス・インガソル・ロス・モデル、ブラック・ショールズ・モデル、定弾性値モデル等

³ GMM は Hansen [1982] が広めた手法である。GMM に関しては Ogaki [1993] などを参照。

⁴ HJM モデルは、確率変動項を複数含むマルチファクター・モデルであるため、イールドカーブ変動に関する記述力が高い。一方、確率変動項を 1 つしか含まない 1 ファクター・モデルの場合、イールドカーブのダイナミックな変化を表現する力に欠けると指摘されている。

を含む包括的な瞬間スポットレート・モデルである。具体的には、バシチェック・モデル ($\gamma=0$)、コックス・インガソル・ロス・モデル ($\gamma=0.5$)、ブラック・ショールズ・モデル ($\alpha=0, \gamma=0$)、定弾性値モデル ($\alpha=0$) という対応になっている⁵。

本稿では、本邦市場で観測される金利の中で最短期物金利であると考えられる無担コール O/N レート⁶を瞬間スポットレートの代理レートとして、日次データ⁷からパラメータ推定を行う⁸。さらに月次データを用いた場合の推定結果との比較を行うほか、無担コール O/N レートの代わりに LIBOR 1 ヶ月物を用いた場合の推定結果との比較も行う。なお、金利派生商品のプライシングには、パラメータの 1 つとしてリスクの市場価格が必要となるが、本稿ではこの推定には踏み込まない⁹。

さて(1)式を離散化すると

$$X_{t+1} - X_t = (\alpha + \beta X_t) \Delta t + \varepsilon_t, \quad (2)$$

但し、

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2 X_t^{2\gamma} \Delta t), \quad (3)$$

となる。そこで

$$E[\varepsilon_t] = 0, \quad (4)$$

$$E[\varepsilon_t X_t] = 0, \quad (5)$$

$$E[\varepsilon_t^2 - \sigma^2 X_t^{2\gamma} \Delta t] = 0, \quad (6)$$

⁵ 他の瞬間スポットレート・モデルとの関係は、Chan, Karolyi, Longstaff, and Sanders [1992] を参照。

⁶ 市場では半日物のコール取引もあるが、レートが公表されていない等の制約があることから、本稿では O/N 物を使用することとした。

⁷ (1)式は微小時間におけるレートの変動を記述する確率微分方程式であるため(離散化モデルが(2)式)、本稿では基本的に日次データを用いることとした。

⁸ 無担コール O/N レートは現在日本銀行が誘導対象としている金利であるため、瞬間スポットレートの代理レートとするのは必ずしも適当ではない可能性もある。

⁹ 具体的な推定は、例えば、実際に市場で観測される金利の期間構造にモデルから計算される金利の期間構造をフィットさせる形で行う。

$$E[(\varepsilon_t^2 - \sigma^2 X_t^{2\gamma} \Delta t) X_t] = 0, \quad (7)$$

という条件（「直交条件」と呼ばれる）の下で、パラメータ α 、 β 、 σ 、 γ を一般化モーメント法（Generalized Method of Moments、以下 GMM）により推定する。推定には、計量分析ソフト TSP を使用する¹⁰。

（１）無担コール O/N レート

データ観測期間は無担コール O/N 取引が開始された直後の 1985 年 7 月 31 日から 1998 年 10 月 30 日までとした¹¹。それまでの平均的水準を割り込んで金利が低下した 1993 年以降を除外した 1985 年 7 月 31 日～1992 年 12 月 31 日、全サンプル 1985 年 7 月 31 日～1998 年 10 月 30 日、データ観測期間の最後の 1 年間である 1997 年 11 月 4 日～1998 年 10 月 30 日の 3 つに分けて分析を行う。

イ．1985 年 7 月 31 日～1992 年 12 月 31 日の場合

1985 年 7 月 31 日～1992 年 12 月 31 日の無担コール O/N レートの日次データを用いた場合、推定結果は以下のとおりとなった¹²。

表 1 推定結果（1985 年 7 月 31 日～1992 年 12 月 31 日）

α	β	σ	γ
0.086248 (2.00602)	-1.69754 (-2.20281)	0.032777 (1.45615)	0.034481 (0.153221)

ここで(1)式を書き換えてみると

$$dX = -\beta \left\{ \left(-\frac{\alpha}{\beta} \right) - X \right\} dt + \sigma X^\gamma dW, \quad (8)$$

となるため、中長期的に金利が回帰するレート（中心回帰レート）は $-\frac{\alpha}{\beta}$ で表

¹⁰ GMM 及び本稿の推計に用いたプログラム例は補論を参照。なお、本章と同様の分析は、乾・室町 [2000] でも行われている。

¹¹ 1999 年 2 月～2000 年 8 月は日本銀行のいわゆるゼロ金利政策により、無担コール O/N レートはゼロ近傍の水準に落ち着いた。このこともあり、データ観測期間を 1998 年 10 月までとした。

¹² 表中の括弧は t 値を表す。

される。推定結果から $-\frac{\alpha}{\beta} = 0.051032$ であり、中心回帰レートは約 5%となること
 とがわかる（この期間の無担コール O/N レートの平均は 5.36%である）。

また、 γ は確率変動を表す項が X の何乗に比例するかを示しており（ $\gamma \geq 0$ が
 前提）、 X の水準が大きいほど変動が大きいことを示している。 $\gamma > 0$ であれば
 負の金利は発生しないが、 $\gamma = 0$ （バシチェック・モデル）の時は負の金利が発生
 し得る。ここでは、 γ は有意には 0 とは異ならなかった。但し、 γ の水準自体は
 0.03 と低く、これは当該期間のスポットレートの変動がバシチェック・モデルで
 表される変動に近かったことを示唆している。

なお、日次データ期間と同じ 1985 年 7 月～1992 年 12 月について、無担コー
 ル O/N レートの月末値を用いた場合の推定結果は以下のとおりとなった。

表 2 推定結果（1985 年 7 月～1992 年 12 月＜月次データ＞）

α	β	σ	γ
0.034376 (1.34515)	-0.673617 (-1.41748)	0.091549 (0.767951)	0.546778 (1.23168)

月次データを用いた場合、 γ はほぼ 0.5 であり、コックス・インガソル・ロス・
 モデルに近くなっている。小暮 [1995]、Kogure [1997] では、1982 年 1 月～1991
 年 12 月のコール O/N レートの月次データを用いて γ を 0.5～0.6 と推定してお
 り、本稿の場合とデータ期間は一致しない（重なる部分は大きい）ものの、 γ の
 水準は本稿の推定結果とほぼ同様である¹³。

□ . 1985 年 7 月 31 日～1998 年 10 月 30 日の場合

また、1985 年 7 月 31 日～1998 年 10 月 30 日の無担コール O/N レートの日
 次データを用いた場合には、推定結果は以下のとおりとなった。

¹³ この他、Hiraki and Takezawa [1997] では TIBOR データ（1 週間～12 ヶ月物レート）の 1987
 年～1995 年の週次、隔週次のデータでの推定結果を示しており、パラメータ γ は 0.5 近辺であ
 ると結論づけている。

表 3 推定結果 (1985 年 7 月 31 日 ~ 1998 年 10 月 30 日)

α	β	σ	γ
0.013912 (1.41261)	-0.562294 (-1.83185)	0.072838 (3.36334)	0.295245 (3.07940)

この場合 α が有意に 0 から異なっており、 β の 1992 年までのデータと異なり、バシチェック・モデルには従っていないことがわかる。なお、中心回帰レートは 2.47% である (この期間の無担コール O/N レートの平均は 3.64%)。

八 . 1997 年 11 月 4 日 ~ 1998 年 10 月 30 日の場合

1997 年 11 月 4 日 ~ 1998 年 10 月 30 日の日次データを用いた場合の推定結果は次のとおりとなった。

表 4 推定結果 (1997 年 11 月 4 日 ~ 1998 年 10 月 30 日)

α	β	σ	γ
0.305118 (3.56711)	-75.8573 (-3.56205)	0.183284 (0.251698)	0.538776 (0.740374)

この場合、 β は 0 から有意には異ならない。なお、中心回帰レートは 0.4% 台である (この期間の無担コール O/N レートの平均は 0.41%)。

以上のイ . ~ 八 . の結果から、特に γ はデータの観測期間によって、かなり異なり、不安定であることが判明した。

(2) LIBOR 1 ヶ月物レート

ここでは、無担コール O/N レートの代わりに LIBOR 1 ヶ月物レートを用いる¹⁴。データは Bloomberg 社から取得できる最も古いデータである 1989 年 11 月 1 日から 1998 年 10 月 30 日までであり、1989 年 11 月 1 日 ~ 1998 年 10 月 30 日、1997 年 11 月 4 日 ~ 1998 年 10 月 30 日の 2 つに分けて分析した。

¹⁴ 推計にあたっては LIBOR のデータそのものではなく、補論(A-11)式と同様にスポットレートに変換した金利を用いる。

イ . 1989 年 11 月 1 日 ~ 1998 年 10 月 30 日の場合

1989 年 11 月 1 日 ~ 1998 年 10 月 30 日の日次データでは次の結果を得た。

表 5 推定結果 (1989 年 11 月 1 日 ~ 1998 年 10 月 30 日)

α	β	σ	γ
-0.006368 (-1.32408)	-0.097671 (-0.488526)	0.054464 (3.62232)	0.451185 (5.53253)

この場合、中心回帰レートが若干ながら負の値をとるという問題が生じる。また、パラメータ β は有意に 0 とは異なり、水準が 0.45 とコックス・インガソル・ロス・モデルにほぼ近いことがわかる。

ロ . 1997 年 11 月 4 日 ~ 1998 年 10 月 30 日の場合

また、1997 年 11 月 4 日 ~ 1998 年 10 月 30 日では次の結果を得た。

表 6 推定結果 (1997 年 11 月 4 日 ~ 1998 年 10 月 30 日)

α	β	σ	γ
0.051104 (1.75180)	-8.95048 (-1.62961)	12.4945 (0.444377)	1.50699 (3.36477)

中心回帰レート (0.57%) は、無担コール O/N レートの場合と同様にデータ期間の LIBOR 1 ヶ月物レート (データ期間中の LIBOR 1 ヶ月物レートの平均は 0.60%) と整合的であるが、パラメータ γ は 1.5 と (1) 八 . の無担コール O/N レートの場合と大きく異なる結果となった。また、中心回帰のスピードを表す “ $-\beta$ ” をみると、無担コール O/N レート (75.9) に比べて、LIBOR 1 ヶ月物 (8.95) はかなり低めの値となった。

(3) インプリケーション

このように瞬間スポットレートの変動を記述する(1)式の各パラメータを推定する場合、どの時期のデータを用いるか、どの金利を瞬間スポットレートの代理レートとするか (コールレートか LIBOR か等)、データの観測頻度をどうするか (日次か月次か等) に大きく依存することがわかった。したがって、リスク管理やプライシングにおいて、推定されたパラメータを利用する場合には、推定をどの程度さかのぼって行うか (ヒストリカル・データを 1 年分にする

のか、3ヵ月分にするのか等)、またそうして推定されたパラメータを用いたモデルが市場(市場価格)をどの程度表現し得るか、という点に留意する必要がある。

また、パラメータ α 、 β から導かれる中心回帰レートは、殆どの場合、対象期間の金利の平均値に近く、モデルと整合的になっている。

さらに、 γ の推定結果が、日次データを用いる場合と月次データを用いる場合で大きく異なる点にも留意する必要がある。本来、(1)式のモデルは微小時間での瞬間スポットレートの変動過程を表したものである。このため、このモデルを前提に金利派生商品のプライシングを行う場合には、少なくとも日次データの方がパラメータ推定のためのデータとしてはより望ましいと考えられる¹⁵。

3. ヒース・ジャロウ・モートン・モデルとそのパラメータ推定

本章では、ヒース・ジャロウ・モートン・モデル(HJMモデル)のパラメータ推定を行う。

時点 s で時点 t から $t+dt$ の期間($s < t$)に適用される瞬間フォワードレートを $f(s,t)$ と表す。イールドカーブを記述するボラティリティのファクター数が m 個である時、 m ファクターのヒース・ジャロウ・モートン・モデル(HJMモデル)は、

$$df(s,t) = \mu(s,t)dt + \sum_{i=1}^m \sigma_i(s,t)dB_i(s), \quad (9)$$

と表すことができる。但し、 $B_i(s)$ はそれぞれ互いに独立なウィナー過程とする。また、無裁定条件(no arbitrage condition)から、

$$\mu(s,t) = \sum_{i=1}^m \sigma_i(s,t) \{ \lambda_i(s) + \int_s^t \sigma_i(s,v)dv \}, \quad (10)$$

となる。但し、 $\lambda_i(s)$ はリスクの市場価格(market price of risk)である。

ここでは、ボラティリティ構造を Ritchken and Sankarasubramanian [1995]

¹⁵ 但し、日次データにしても、瞬間的なレートの代理データとして実務的に問題なく使えるかという点は必ずしも明らかではない。

に従って、次のような2ファクター・モデルであると仮定する¹⁶。

$$\sigma_1(t, T) = \sigma_1 e^{-\kappa(T-t)}, \quad \sigma_2(t, T) = \sigma_2. \quad (11)$$

この2ファクターのボラティリティ構造は、(11)式の2番目の式が期近スタートか期先スタートに依らずボラティリティが一定であることを示し、最初の式はボラティリティが時間依存性を持っていることを示している。すなわち、2番目の式が、瞬間フォワードレート・カーブの平行移動を、最初の式がねじれを表していることになる^{17,18}。

本稿ではHJMモデルのパラメータ推定にあたり、LIBORとスワップレートの変動をモデル化しているため、まずLIBORとスワップレートのデータからどのようにして瞬間フォワードレート・カーブを導くかが問題となる。本稿では、(1)瞬間フォワードレートを3次自然スプライン関数でフィットさせる方法と(2)Nelson and Siegel [1987]の方法の2種類を取り上げる。なお、ここでも2章と同様に、リスクの市場価格 $\lambda_i(s)$ の推定には踏み込まない。

(1) 3次自然スプライン関数による瞬間フォワードレートの推定

x 期先の瞬間フォワードレートを $f(x)$ とする。これを3次自然スプライン関数で表現すると、節点 x_i で $y_i = f(x_i)$ が与えられれば

$$f(x) = ax + b + \sum_{i=1}^n c_i (x - x_i)_+^3, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i^r = 0 \quad r = 0, 1, \quad (13)$$

となる。但し、

$$(x - x_i)_+^3 = \begin{cases} (x - x_i)^3, & x > x_i \text{の場合,} \\ 0, & \text{その他の場合,} \end{cases} \quad (14)$$

¹⁶ このボラティリティ構造は、Heath, Jarrow, and Morton [1992]でも議論されている。

¹⁷ これら「平行移動」と「ねじれ」の2つの効果によって、スポットレートの変動の9割程度を説明できるといわれている。

¹⁸ の符号については後述。

である。なお、曲線が全ての節点 $(x_i, y_i = f(x_i))$ を通る場合、この3次自然スプライン関数曲線が一番滑らかな曲線であることがわかっている。

データとして与える金利データは、LIBORが1M、3M、6M、12M、スワップレートが2Y、3Y、4Y、5Y、7Y、10Yである。これに対して、節点は0Y、0.75Y、1.5Y、2.5Y、3.5Y、4.5Y、6Y、8.5Y、11Yとする。

本稿では、節点の瞬間フォワードレート y_i を、スポットレートの線形補間から暫定的な瞬間フォワードレート（「1日フォワードレート」）を算出し、それが実際の市場データ（LIBOR、スワップレート）と整合的となるように調整を加える、という手順によって求める。

暫定的な瞬間フォワードレートを算出

まずはLIBOR及びスワップレートを線形補間し、1M、3M、6M、12M及び1年以上は半年ごとのスポットレートを求める。節点を含め任意の期のスポットレートは、これらのスポットレートを線形補間して求める（但し、1ヵ月未満のスポットレートはLIBOR 1ヵ月物レートから導かれるスポットレートで代用する）。このようにして任意の期のスポットレートが求められるので、瞬間フォワードレートの近似として、1日間のフォワードレート $(f(t, t+1/365))$ を算出する（以下では、これを「1日フォワードレート」と呼ぶ）。

具体的には、スポットレートを $r(x)$ 、1日を Δx として、1日フォワードレート $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{r(x + \Delta x) \cdot (x + \Delta x) - r(x)x}{\Delta x}, \quad (15)$$

という関係式から求める。

なお、瞬間フォワードレート、スポットレート、割引率（ディスカウント・ファクター）、市場レート（LIBOR、スワップレート）には、以下のような関係が成立する。まず、瞬間フォワードレート $f(x)$ とスポットレート $r(x)$ の間には

$$r(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy, \quad (16)$$

という関係があることから、(12)式より

$$r(x) = \frac{1}{2}ax + b + \sum_{i=1}^n \frac{1}{4x} c_i (x - x_i)_+^4 \quad (17)$$

となる。割引率 $D(x)$ とスポットレート $r(x)$ の間には

$$D(x) = \exp(-r(x)x) \quad (18)$$

という関係がある。LIBOR $R(x)$ は割引率 $D(x)$ を用いて

$$R(x) = \left(\frac{1}{D(x)} - 1 \right) \frac{1}{x} \frac{360}{365} \quad (19)$$

と表せる。また、 m 年のスワップレート（パーレートとも呼ばれる） $p(m)$ は、

$$p(m) = \frac{2(1 - D(m))}{\sum_{i=1}^{2m} D\left(\frac{i}{2}\right)} \quad (20)$$

として求められる。

次に、節点の瞬間フォワードレート y_i を 1 日フォワードレートで代用し暫定的に求める。(12)式で表される瞬間フォワードレートカーブの関数を特定するには、 $n+2$ 個の係数 a 、 b 、 c_i を定めればよいが、これは(13)式で示される 2 本の方程式（制約条件）と $y_i = f(x_i)$ で表される n 本の方程式を連立させることにより求めることができる。

但し、本稿では 11 年目(11Y)の節点については、市場レートを 10 年物までしか採用していないことから、方程式 $y_n = f(x_n)$ は使用しない。その代わりに、 x_i が 10 年を越えるとフォワードレートは安定すると想定し、 $f'(x_n) = 0$ すなわち、

$$a + \sum_{i=1}^n 3c_i (x_n - x_i)_+^2 = 0 \quad (21)$$

と仮定する。

実際の市場データと整合的となるように調整を加える

上記の連立方程式を解くことによって、瞬間フォワードレートのカーブ $f(x)$ が暫定的に求められるが、ここで 1 日フォワードレートをスポットレートの線形補間で求めているため、得られたフォワードレート・カーブから(17)～(20)式の関

係を用いて逆算される市場レート（LIBOR、スワップレート）は、実際の市場レートと必ずしも一致しない。そこで、逆算される市場レートが実際の市場レートと整合的になるように調節を行うことにより、(12)式で表される瞬間フォワードレート・カーブ関数の $n+2$ 個の係数 a 、 b 、 c_i を確定させる。

具体的な手法は、ややテクニカルであるが、以下のような手順で行う。まず、求めた $f(x)$ から逆算された市場レートと実際の市場レート（12MのLIBOR、2Y、3Y、4Y、5Y、7Y、10Yのスワップレート）との差を求める（これらを要素とするベクトルを「乖離ベクトル」と呼ぶ）。一方、節点0.75Y、1.5Y、2.5Y、3.5Y、4.5Y、6Y、8.5Yの値を各々0.1 ベーシス・ポイントずつ独立に動かした時のLIBOR、スワップレートの初期値からの変化度合い（微係数）を要素とする行列（ヤコビアン行列）を生成する。前出の乖離ベクトルに、このヤコビアン行列の逆行列を掛け合わせることによって、節点のフォワードレートの調整幅を算出し、その調整幅を各節点のこれまでの値に加えて、新規の値 y_i とする。その上で、前述と同様にスプライン補間を行う。得られた $f(x)$ が最終的に得られる瞬間フォワードレートのカーブである。

（2）ネルソン・シーゲル法による瞬間フォワードレートの推定

Nelson and Siegel [1987]では、瞬間フォワードレートを指数関数の和で近似するという手法が取り入れられている。ここでは、瞬間フォワードレートのカーブ $f(x)$ が次のようになっていると仮定する。ここで β_0 、 β_1 、 β_2 、 τ はパラメータである。

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 \exp(-x/\tau) + \beta_2 [(x/\tau) \exp(-x/\tau)] \quad (22)$$

この時、スポットレート $r(x)$ は、(16)式より、

$$r(x) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) [1 - \exp(-x/\tau)] / (x/\tau) - \beta_2 \exp(-x/\tau) \quad (23)$$

となる。一方、LIBOR $R(x)$ は、次のようにスポットレート $r(x)$ に変換できる。

$$r(x) = \frac{1}{x} \ln \left(1 + R(x)x \frac{365}{360} \right) \quad (24)$$

(23)式及び(18)式、(20)式より、パラメータ β_0 、 β_1 、 β_2 、 τ が与えられれば任意の時点のスポットレート、任意の年数のスワップレートを求めることができる。

そこで、まず、市場データの LIBOR から(24)式を用いて算出した 1M、3M、6M、12M の各スポットレートとそれに対応する(23)式による各スポットレートの差の 2 乗和、市場データの各スワップレート (2Y、3Y、4Y、5Y、7Y、10Y) とそれに対応する(20)式による各スワップレート¹⁹の差の 2 乗和を考える。次に、及び の和を最小化する係数 β_0 、 β_1 、 β_2 、 τ を求める。これにより瞬間フォワードレート・カーブ $f(x)$ を得ることができる。

(3) HJM モデルのパラメータ推定

さて、ここでは (1) (2) による瞬間フォワードレートの関数を使って、HJM モデルのパラメータ推定を行う。

第 i 期時点での k 期先の瞬間フォワードレートを $g(i, k)$ とし、 $\Delta g(i, k) = g(i+1, k) - g(i, k)$ とすると、その分散は、2 ファクターの HJM モデルを表す(9)式、(11)式より

$$\zeta^2(k) \stackrel{def}{=} \text{Var}[\Delta g(i, k)] = \sigma_1^2 e^{-2\kappa k} \Delta t + \sigma_2^2 \Delta t, \quad (25)$$

となる。一方、 $\zeta^2(k)$ の推定値は、

$$\hat{\zeta}^2(k) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [\Delta g(i, k) - \overline{\Delta g}(k)]^2, \quad (26)$$

である。但し、ここで

$$\overline{\Delta g}(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta g(i, k), \quad (27)$$

とする。

そこで、 $k=0$ 、1M、3M、6M、1Y、2Y、3Y、4Y、5Y、7Y、9Y として瞬間フォワードレートの前日差分散 $\hat{\zeta}^2(k)$ を(26)式によって求める (なお、ここでは日次データを用いるため $\Delta t = 1/365$ とする)。パラメータ σ_1 、 κ 、 σ_2 は、次の関数 $L(\sigma_1, \kappa, \sigma_2)$ を最小化するように選ぶ。

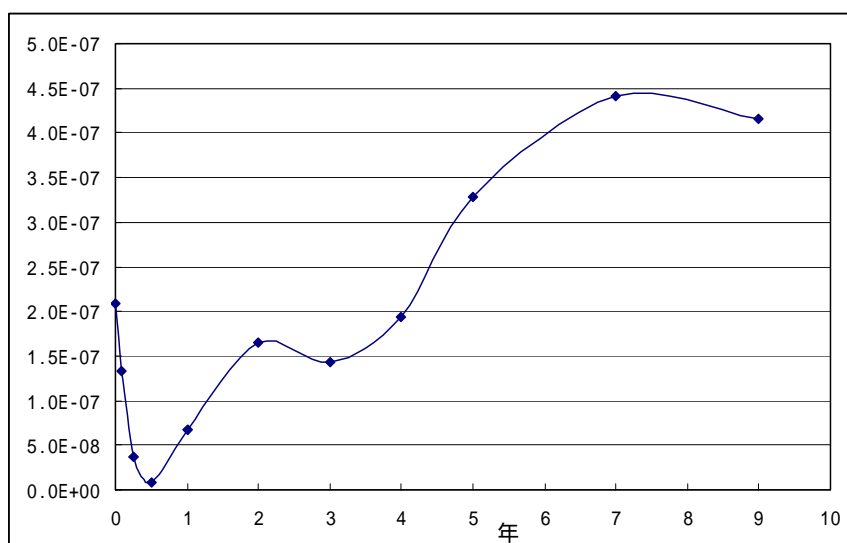
$$L(\sigma_1, \kappa, \sigma_2) = \sum_k \left[\hat{\zeta}^2(k) - \sigma_1^2 e^{-2\kappa k} \frac{1}{365} - \sigma_2^2 \frac{1}{365} \right]^2, \quad (28)$$

¹⁹ (23)式で表わされるスポットレートのカーブを(18)式と(20)式を用いてスワップレートに換算したものの。

イ . 3次自然スプライン関数によるフィッティング

瞬間フォワードレートを3次自然スプライン関数でフィットさせる方法を用い、それを2000年1月3日~2000年12月29日の日次データに適用すると、 $\hat{\zeta}^2(k)$ は図1のような形状を描いた。

図1 $\hat{\zeta}^2(k)$ の形状(3次自然スプライン関数の場合)



(28)式を最小化するHJMモデルのパラメータをいくつかのデータ観測期間で推定した結果が表7~表9である。

表7 推定結果(2000年1月3日~2000年12月29日)

σ_1	κ	σ_2
6.23E-03	-8.40E-02	2.13E-07

表8 推定結果(1999年1月4日~1999年12月31日)

σ_1	κ	σ_2
1.34E-02	-2.20E-02	1.26E-07

表9 推定結果(1997年9月1日~1998年8月31日)

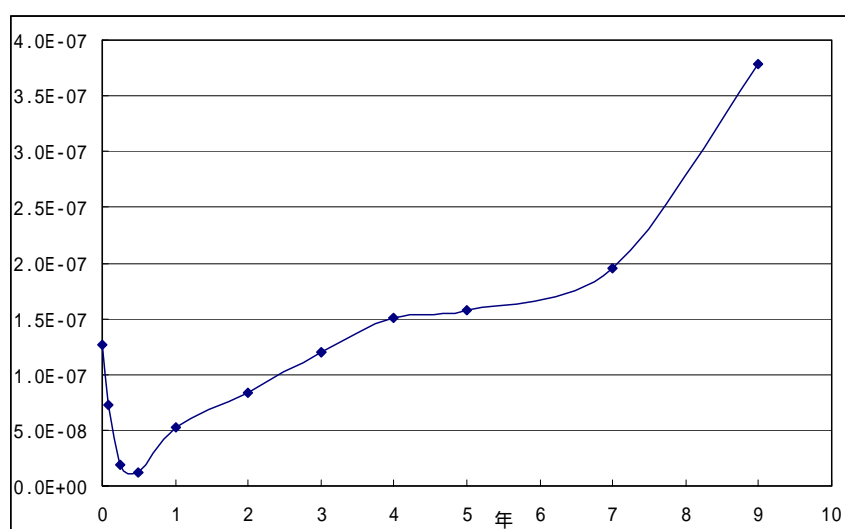
σ_1	κ	σ_2
6.25E-3	-7.09E-2	7.55E-8

これらを見ると、パラメータ κ は負になることがわかる²⁰。これは、図 1 で示したとおり、前日差分散 $\hat{\zeta}^2(k)$ が概ね期先ほど大きくなる傾向があるためである。

ロ．ネルソン・シーゲル法によるフィッティング

一方、ネルソン・シーゲル法で瞬間フォワードレートを推定した場合、2000年1月3日～2000年12月29日のデータで $\hat{\zeta}^2(k)$ は図 2 のようになった。

図 2 $\hat{\zeta}^2(k)$ の形状 (ネルソン・シーゲル法の場合)



これより(28)式を最小化する HJM モデルのパラメータを推定した結果が表 10 である。

²⁰ なお、 κ の符号については、Miyazaki and Yoshida [1998]が本邦国債のデータを用いて HJM モデルのパラメータ推定を行い、正符号の κ を得ている。具体的には 1995 年 11 月～1996 年 11 月の本邦国債データから各パラメータを次のように推定している。

σ_1	κ	σ_2
1.87E-4	9.83E-2	7.63E-5

これに対し、本稿の分析では同一のデータ観測期間に対しても κ は負となった。ただし、本稿でのフォワード期間は最長で 10 年であるのに対し、Miyazaki and Yoshida [1998]では 15 年のイールド・スプレッド・オプションを評価するためにより長期のフォワード期間を考えている。

表 10 推定結果 (2000 年 1 月 3 日 ~ 2000 年 12 月 29 日)

σ_1	κ	σ_2
1.11E-7	-1.26E+0	5.75E-3

この場合も、イ . の 3 次自然スプライン関数でフィットさせた場合と同様、パラメータ κ は負の値をとることがわかる。

(4) インプリケーション

本章では、瞬間フォワードレートを記述する HJM モデルのパラメータ推定を行った。具体的には、3 次自然スプライン関数やネルソン・シーゲル法を用いて瞬間フォワードレート関数を導出し、ヒストリカル・データから各種パラメータを推定した。

やや意外であったのは、パラメータ κ は負の値をとるとの結果が得られたことである²¹。パラメータ κ の符号は先験的に与えられないものの²²、脚注 20 で触れたように本邦国債のデータを用いた既存研究 (Miyazaki and Yoshida [1998]) では、 κ が正になると報告されている (本稿の分析結果とは符号が逆)。本来、国債金利とマネー市場金利 (円 LIBOR 及びスワップレート) の間には裁定が十分働いているとすると、瞬間フォワードレートも、国債金利が、マネー市場金利かに依らず、その変動メカニズムは同様のものになる可能性が高い筈である。そうであるとすると、本稿の分析結果は、そうした裁定が必ずしも十分には働いていない可能性があることを示唆するものであるともいえる。

4. おわりに

本稿では、イールドカーブ・モデルの具体的なパラメータ推定の手法を紹介するとともに、実際の市場データを用いてパラメータを推定することによって、

²¹ 節点を通るスプライン補間以外に、平滑化スプライン関数を用いた補間を行って、同様の推定を試みたが、パラメータ κ が負という結果には変化がなかった。

²² パラメータ κ が負である場合、フォワード期間を長くすると、レートが非常に大きく変動することになる。したがって、フォワード期間を超長期に伸ばした場合には κ は負になりにくくなると考えられる。しかし、ここではフォワード期間を 10 年までの期間とした。このことも、 κ が負になった一因となっている可能性がある。

各種手法の方法論や実際の推定における留意点等を示した。

まず、包括的なスポットレート・モデルのパラメータ推定を GMM で行い、パラメータが観測期間、対象金利データ(無担コール O/N レートまたは LIBOR)、観測頻度などによって大きく相違することを示した。つまり、市場データを用いたパラメータ推定により瞬間スポットレートの変動過程を特定化しようとした場合、データの観測期間等により、結果として得られるモデルは異なり得ることになる。

さらに、2ファクターHJMモデルの推定を、瞬間フォワードレートを3次元自然スプライン関数とネルソン・シーゲル法を用いてフィッティングさせることにより行った。本稿では LIBOR 及びスワップレートを用いてパラメータを求めたが、その過程で、一部のパラメータの符号が、国債データを用いた既存研究とは異なる結果を得た。

このように、イールドカーブ・モデルのパラメータ推定を行う場合には、対象データや推定手法によって、推定結果が有意に相違することがある。したがって、推定結果を実務に使用する場合には、算出されたパラメータを用いたモデルがどの程度イールドカーブの動きを正確に記述するかを確認する必要があるといえよう。

以 上

(補論) モーメント法と一般化モーメント法 (GMM) について

確率変数 X の i 次のモーメントを $\mu_i = E[X^i]$ とする。推定すべきパラメータが

$$\theta = g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r) \quad (\text{A-1})$$

のようにモーメントの関数となっている場合、 μ_j を $\hat{\mu}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^j$ に置き換えて得られる推定量

$$\hat{\theta} = g(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_r) \quad (\text{A-2})$$

がモーメント推定量である。例えば X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う時には、

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ \hat{\sigma}^2 &= \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

がモーメント推定量になる。このような推定方法は「モーメント法」と呼ばれる。

このモーメント法による推定値 $\theta = (\mu, \sigma^2)$ の推定は

$$E[X - \mu] = 0 \quad (\text{A-4})$$

$$E[X^2 - \mu^2 - \sigma^2] = 0 \quad (\text{A-5})$$

の2つの方程式に基づいている。この他にも例えば

$$E[(X - \mu)^3] = E[X^3 - 3\sigma^2\mu - \mu^3] = 0 \quad (\text{A-6})$$

が成立する。(A-4)式 ~ (A-6)式は、

$$(E[X - \mu])^2 + (E[X^2 - \mu^2 - \sigma^2])^2 + (E[X^3 - 3\sigma^2\mu - \mu^3])^2 = 0 \quad (\text{A-7})$$

とまとめることができ、

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \right)^2 + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - \mu^2 - \sigma^2) \right)^2 + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^3 - 3\sigma^2\mu - \mu^3) \right)^2 \quad (\text{A-8})$$

を最小化することによってもモーメント推定が行える。これが、「一般化モーメ

ント法」(Generalized Method of Moments、GMM)の一例である。

より一般に、

$$\begin{aligned} E[g_1(X, \theta)] &= 0 \\ E[g_2(X, \theta)] &= 0 \\ &\dots \\ E[g_r(X, \theta)] &= 0 \end{aligned} \tag{A-9}$$

が成立するような r 本の方程式 (これを「直交条件」と呼ぶ) を選択する。なお、 r は未知パラメータ数以上とする。このとき、

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_1(X_i, \theta) \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_2(X_i, \theta) \\ \dots \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_r(X_i, \theta) \end{pmatrix} \tag{A-10}$$

と置く。 D を $r \times r$ 正定値行列²³ とするとき、 $G'DG$ を最小化する推定量が GMM 推定量である。但し、'は転置を表す。詳細は小暮 [1996] を参照。

本稿の推計で用いた具体的なプログラム例は表 A-1 のとおりである。なお、プログラム中に出てくるエクセルファイル“mutanr.xls”には、無担コール O/N レートを(A-11)式によってスポットレートに変換したデータ (データ系列名を“MUTANR”とした) が格納されている²⁴。

$$MUTANR = \ln \left(1 + \frac{O/N_rate}{365} \right) \times 365 \tag{A-11}$$

²³ Hansen [1982]によれば最適な D が一意に求められる。

²⁴ TSP の具体的な使用方法は、例えば、和合・伴 [1995] を参照。

表 A-1 TSP のプログラム例

```
READ(FILE='mutanr.xls');
FRML EQ1 MUTANR(+1)-MUTANR-(ALPHA+BETA*MUTANR)*1/365;
FRML EQ2 (MUTANR(+1)-MUTANR-(ALPHA+BETA*MUTANR)*1/365)**2-
(SIGMA*MUTANR**GAMMA)**2*1/365;
PARAM ALPHA 0.0 BETA 1.0 SIGMA 0.1 GAMMA 0.0;
SMPL 1 1945;
GMM(INST=(C,MUTANR)) EQ1 EQ2;
```


参考文献

- Brace, A., D. Gatarek, and M. Musiela, "The Market Model of Interest Rate Dynamics," *Mathematical Finance*, 7(2), 1997, pp. 127-155.
- Chan, K. C., G. A. Karolyi, F. A. Longstaff, and A. B. Sanders, "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate," *The Journal of Finance*, 47(3), July 1992, pp. 1209-1227.
- Hansen, L. P., "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators," *Econometrica*, 50, 1982, pp. 1029-1054.
- Heath, D., R. A. Jarrow and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claim Valuation," *Econometrica*, 60(1), 1992, pp. 77-105.
- Hiraki, T. and N. Takezawa, "How sensitive is short-term Japanese interest rate volatility to the level of the interest rate?" *Economics Letters*, 56, November 1997, pp. 325-332.
- Kogure, A., "A New Approach to the Estimation of Stochastic Differential Equations with an Application to the Japanese Interest Rates," IMES Discussion Paper, 97-E-8, Bank of Japan, 1997.
- Miyazaki, K. and T. Yoshida, "Valuation Model of Yield-Spread Options in the HJM Framework," *The Journal of Financial Engineering*, 7(2), 1998, pp. 89-107.
- Nelson, C. and A. Siegel, "Parsimonious Modeling of Yield Curves," *Journal of Business*, 60(4), 1987, pp. 473-489.
- Ogaki, M., "Generalized Method of Moments: Econometric Applications," in *Handbook of Statistics, Vol.11: Econometrics*, edited by G.S. Maddala, C.R.Rao, and H.D. Vinod, North-Holland, Amsterdam, 1993, pp. 455-488.
- Ritchken, P. and L. Sankarasubramanian, "A Multifactor Model of the Quality Option in Treasury Futures Contracts," *The Journal of Financial Research*, 18(3), 1995, pp. 261-279.
- Vasicek, O. A. and H. G. Fong, "Term Structure Estimation Using Exponential Splines," *The Journal of Finance*, 37(2), 1982, pp. 339-348.

- 乾 孝治、室町 幸雄、『金融モデルにおける推定と最適化』、朝倉書店、2000年.
- 小暮 厚之、「経済データからの確率微分方程式の推定について:離散化とその問題点」、『千葉大学 経済研究』、第10巻第2号、1995年.
- 小暮 厚之、『ファイナンスへの計量分析』、ファイナンス講座1、朝倉書店、1996年.
- 森本 祐司、吉羽 要直、「BGM 金利モデルの実用化に向けて」、日本銀行金融研究所 ディスカッションペーパー、99-J-39、1999年.
- 和合 肇、伴 金美、『TSP による経済データの分析』、第2版、東京大学出版会、1995年.