

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

市場リスクの予測について

- EVTとGARCHモデルを用いた
バリュー・アット・リスク算定の比較分析 -

ジョン・ダニエルソン もりもと ゆうじ
 森本 祐司

Discussion Paper No. 2000-J-15

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES
BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30号

備考： 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所、または現在両執筆者が所属する機関の公式見解を示すものではない。

市場リスクの予測について

- EVTとGARCHモデルを用いたバリュー・アット・リスク算定の比較分析 -

ジョン・ダニエルソン* もりもと ゆうじ
森本 祐司**

要 旨

本稿では、市場リスクの測定・管理、特にバリュー・アット・リスク(Value at Risk, 以下 VaR) のいくつかの計算手法について、日本の市場データを用いた比較分析を行う。特に、従来使われてきた GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) タイプの手法と極値理論(Extreme Value Theory, 以下 EVT) による推定手法を比較する。比較の基準としては、VaR を超過するデータ(バイオレーション) の発生頻度、収益率分布の対称性仮定、バイオレーションの発生の仕方(独立に発生するのか、発生にムラ(クラスタリング) があるか)、VaR のボラティリティを基準として選択する。我々の検証では、今回用いたデータに対しては、GARCH タイプの手法を用いて推定された VaR は、推定精度の低さおよびボラティリティの高さという観点で問題を含んでいることが判明した。一方、EVTにより推定された VaR は、推定精度が高い上に、推定結果が安定しており、日本市場のリスク予測指標として実務的な適用可能性の高さを示した。

キーワード：リスク、規制、極値理論、ボラティリティ、バリュー・アット・リスク

JEL classifications: G100

* FMG, ロンドン・スクール・オブ・エコノミクス (E-mail: j.danielsson@lse.ac.uk)

**東京海上火災保険株式会社 (E-mail: yuji.morimoto@alum.mit.edu)

本稿は、ダニエルソンが海外客員研究員として日本銀行金融研究所に在籍していた時に、当時金融研究所員であった森本と共同で執筆を進めたものである。日本銀行には感謝の意を表したい。本稿は、2000年1月から2月にかけて日本銀行で開催された「リスク計量に関する新たな取り組み」をテーマとする研究ワークショップへ提出された。同ワークショップ参加者及び2人のレフェリーから貴重なコメントを頂戴した。論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所、または現在両執筆者が所属する機関の公式見解を示すものではない。なお、ダニエルソンの各論文は、cep.lse.ac.uk/~jond/research または www.RiskResearch.org からダウンロードすることが出来る。

本稿の英語版は、Danielsson, J. and Y. Morimoto, "Forecasting Extreme Financial Risk: A Critical Analysis of Practical Methods for the Japanese Market," IMES Discussion Paper Series 2000-E-8, Bank of Japan, 2000 である。

目 次

1	はじめに	1
2	収益率分布とリスク予測	3
2.1	非正規性とファット・テール	4
2.2	ボラティリティ・クラスタリング	5
2.3	極値のクラスタリング	6
2.4	バイオレーション・クラスタリング	8
2.5	非対称性	9
2.6	VaR のボラティリティ	10
3	EVT	11
3.1	理論的背景	12
3.2	EVT の適用	14
3.3	パラメータの推定	14
3.4	EVT を適用する際の課題	16
3.5	EVT での予測	18
4	実証分析	18
4.1	VaR 予測	19
4.2	非対称性	19
4.3	VaR のボラティリティ	19
4.4	バイオレーションのクラスタリング	20
5	結論	21
	補論 A : EVT の数学的導出について	22
	補論 B : 図表	24
	参考文献	34

1 はじめに

金融機関およびその監督当局は、市場性のある資産に内在するリスク（市場リスク）のインパクトに強い関心を示すようになってきている。その理由としては、規制緩和により金融機関のリスク運用の自由度が増したことや、リスク運用技術やリスク測定技術が進歩したこと、さらには金融機関が競争力強化のためにリスク運用をより増大させなければならない場合があること、などが挙げられよう。結果として、近年までは金融機関業務の中でも少数の関係者だけが理解できる業務であった市場リスク測定と管理は、現在では各金融機関及び監督当局が直面する中心的課題の一つとなっている。これに対応して、監督当局は金融機関に対しリスク管理の実施およびリスク指標の報告を求めようになった。また、こうした規制によるリスク測定に加え、多くの金融機関は内部的にリスク測定および管理を行っている。金融機関のリスク管理に対するアプローチは、監督当局の要請に最低限応えるだけという消極的な対応から、統合的な内部リスク管理プログラムまで多岐に亘っている。市場リスク管理が本格化したのは近年のことであり、多くの金融機関では、最新の市場リスク計測手法が実務に導入されるには至っていない。これらの手法の多くは、世界的に見て金融機関のリスク管理が進んでいる米国において開発されたものであり、彼らの国際金融市場における卓越した役割をさらに押し進める結果となっている。

リスク管理を考える際には、規制上使用するモデルと内部管理上使用するモデルを区別する必要がある。まず、全ての主要金融センターに所在する銀行は中央銀行や日本の金融監督庁のような銀行監督機関をメンバーに持つバーゼル銀行監督委員会によって導入された、いわゆる「バーゼル規制」を遵守する必要がある（Basel Committee on Banking Supervision [1996]）。本規制のポイントは、各銀行が内部モデルを用いて計算したバリュー・アット・リスク（Value-at-Risk、以下 VaR）に基づいて自己資本額を積むことも認められたという点である。VaRはある一定期間内にある一定確率でトレーディング・ポートフォリオが被る損失額の最大値である。規制上、VaR は日々計測されなければならない。VaR という指標はリスク指標として十分ではないというリスク管理者の批判は正しいが、それは、正確にリスクを計量化したいというニーズとテクニカルな内容に詳しくない人達にもリスク指標が理解できるようにしたいというニーズを繋ぐものである。計算に必要とされる技術は最低限で済む上に、VaRの導入により、

リスク管理に積極的ではない銀行にも最低限のリスク管理を実行させることを可能としているのである。ただし、VaR という概念にはリスク管理上いくつかの欠点がある。大きなものとしては、VaR が単に最大損失額を測定しているが、これは期待損失額に比べると直観的な指標ではないという点である。例えば、VaR が 10 億円といっても、それを超えて発生する損失額が 11 億円なのか、100 億円なのかを知ることはできない。それに対し、例えば期待ショートフォール、すなわちある閾値（例えば VaR）を超過したという条件下での期待損失額、など別の指標がいくつか提案されている。なお、リスク計測モデルの性質やその規制上の資本額算出への適用については、Danielsson[2000a]を参照されたい。また、現状の VaR 測定手法による測定値はかなりボラティルであり、結果としてそれをカバーする必要資本額が大きく振れてしまうという指摘がある。しかし、実務的にみるとその指摘は該当しない。確かに殆どの VaR 測定値が非常にボラティルであるが、規制上では、その点は銀行にとって殆どないし全く問題とはなっていない。規制上の VaR は年に 2 回強程度発生する損失に該当するが、その程度の損失に対応できないような金融機関は、規制上の資本額が振れるという問題よりもさらに深刻な問題に直面するというのがその理由である。規制上必要とされる市場リスクに対する資本は、保有期間 10 日、信頼区間 99% の VaR の 3 ~ 4 倍となっているが、殆どの銀行で実際に積み上げられている自己資本額は、それよりも格段に多い。これは市場リスク以上に信用リスクに備えた資本が必要とされていることに加え、市場リスクに対する資本が最低限しか積み上げていない銀行は顧客から極めてリスクが高い先と見なされてしまうことなどによる。例えば、1996 年の J P モルガン社の平均日次 VaR は 3 千 6 百万ドルと報告されている（つまり、規制上の必要資本額は約 3 億 4 千万ドル）。この値は、1996 年に J P モルガン社が実際に積んでいた資本額と比して驚くほど小さい。

一方、内部リスク管理は異なる課題である。ここでは金融機関は、リスク管理に当り存在する多くの課題に対して、様々な技法を駆使して対応することが可能となる。その課題としては、例えば、資本の複数のリスク資産への配分、ファンド・マネージャーやトレーダーに対するモニタリングが挙げられよう。結果として、リスク計測値に内部的に求められるものは、規制に比べてより複雑かつ広範である。リスク計測値は、統合的なリスク管理からポジション限度の配分に互る広範な経営上の目的に活用される。リスク計測手法が個々のトレーダーへのポジション限度の配分やファンドマネージャーへの運用指図の設定に用いられる時には、リスク計測値のボラティリティの高さが重大な問題とな

る。大きく変動するポジション限度で個別のポジションを管理するのは極めて困難であるからである。

基本的に、すべての統計的リスク測定手法は3つのタイプないしその派生形に分類出来る。それらは、収益率分布全体のモデル化に基づく完全なパラメトリック手法（本手法には通常何らかの条件付ボラティリティ・モデルを用いることが多い）、ヒストリカル・シミュレーションによるノン・パラメトリックな手法、そして収益率分布の裾のみをパラメトリックに推定する手法である。これらの手法いずれにも、正確さ、取扱いの容易さで長所・短所がある。完全な手法は存在しない。このため手法の選択は、通常、対象としている市場が何であるかということや手法を取扱えるフィナンシャル・エンジニアリングの熟練担当者が確保できるかということに依る。

本稿では、上記手法のいくつかについて比較する。特に極値理論（Extreme Value Theory、以下 EVT）および従属性の問題に焦点を当てる。まず、2章では、金融商品の収益率の一般的性質について触れ、それらがどのようにリスク管理に関連するかについて言及する。3章では、リスク測定の観点から EVT について詳しく触れ、EVT の長所・短所について説明する。4章では実際のデータを用いた分析結果を報告し、それについて考察する。EVT に関連する数学的導出は補論 A に付し、図表は補論 B に掲載した。

2 収益率分布とリスク予測

リスクを予測するためには、金融商品価格の動きに関する確率分布をモデル化する必要がある。金融実務の観点では、通常は損益といった実額の方が扱いやすいものの、リスク管理の観点では収益率の方が望ましい測定対象である。一般に、収益率の計算には次の2つの方法がある。

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (1)$$

$$r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (2)$$

リスク分析には、価格が対数正規分布に従うという見方をすることが多いことや、派生商品のプライシング・モデルとの関連から、(2)式の連続複利収益率（対数収益率）の方が一般には好まれている。流動性のある資産について収益率の特性を実証的に分析する場合には、次の3つの特性がリスクという観点からは重要になる。

- 1．収益率の非正規性
- 2．ボラティリティのクラスタリング
- 3．収益率分布の非対称性

それらに加え、リスク予測値自体のボラティリティも実務でリスク管理を行う場合には問題となる。以下、それぞれについて触れる。

2.1 非正規性とファット・テール

収益率が正規分布でないという事実は、リスク管理の実務家および監督当局に広く認識されている。

“...as you know, the biggest problems we now have with the whole evolution of risk is the fat-tail problem, which is really creating very large conceptual difficulties. Because as we all know, the assumption of normality enables us to drop off the huge amount of complexity in our equations...Because once you start putting in non-normality assumptions, which is unfortunately what characterizes the real world, then these issues become extremely difficult, ...”

Alan Greenspan [1997]

非正規性を持つ市場データの収益率の分布は、同じ平均・分散を持つ正規分布と比較して、次のような相対的關係を持つことが知られている。

- 1．収益率分布の方が中心部分は高い
- 2．収益率分布の方が両サイド（中心部分と裾部分の間）は低い
- 3．収益率分布の方が裾部分は高い

このことは、市場が正規分布と比べて通常は極めて静かに変動している、また時として極めて大きく振れていることを意味している。リスクという観点では3つ目の点がもっとも関連が深い。ファット・テール性は、正規分布を仮定

した予測と比して、大きな損失または収益をもたらす頻度が高いことを示している。実際の収益率分布の裾部分に行けば行くほど、正規性という仮定から大きくはずれ、推定値は大きく乖離することとなる。例えば、仮に1987年の株価暴落の発生確率を、その直前一年間のデータを用い、正規分布の仮定の下で推定した場合、この規模の暴落はおおよそ地球誕生以降一度しか起きない程度の頻度となってしまふ。それにも関わらず、殆どの金融機関においては、収益率の正規性を仮定している。その理由は、他の分布と比べ、正規分布が数学的に極めて扱いやすい性質を有していることにある。正規性の仮定が置かれている実用例は金融以外の分野も含めて多く見受けられ、殆どの場合、その仮定が大きな問題となることはない。しかし、分布の裾の分析が中心課題であるリスク管理においては極めて問題であり、非正規性を考慮する必要がある。

2.2 ボラティリティ・クラスタリング

2つめの特性は、収益率の推移を見るとボラティリティが高い時期と低い時期があるということである。このことは、低ボラティリティ期であることが分かれば、将来の予想損失額も小さい、ということを示唆している。殆どのリスク・モデルは、通常 GARCH モデル (Bollerslev [1986]) のような形式で、こうした性質を取入れようとしている。この GARCH モデルが広範に使用されている理由は、それが、収益率の主要な2つの特性であるボラティリティ・クラスタリングと無条件の非正規性を考慮しているからである。最も一般的な GARCH モデルは GARCH(1,1) である。有名なリスク・メトリクス (J.P. Morgan [1995]) で用いられているのは、パラメータを $w=0$, $a+b=1$ としたものである。

$$r_t | r_{t-1} \sim N(\mathbf{m}, \mathbf{s}_t^2) \quad (3)$$

$$\text{ただし、} \mathbf{s}_t^2 = w + a\mathbf{s}_{t-1}^2 + b\mathbf{r}_{t-1}^2, w, a, b > 0, a + b < 1 \quad (4)$$

r_t : 時点 t の収益率

a, b, w : パラメータ

このモデルの望ましい特性の一つは、(3)式のように条件付分布が正規分布であっても、時点に依存しない分布 (定常分布) は正規分布とは限らないという点である¹。このモデルは通常のボラティリティ、例えば収益率分布の内側 90%

¹ 定常分布が必ず存在するとは限らない。

における予測にはかなり有用である。しかしながら、ノイズの正規性を仮定した GARCH モデル（以下、正規 GARCH モデル）における条件付分布の裾は、せいぜい予測値の中で最も高いボラティリティを分散に持つ正規分布の裾程度の厚みしか持たない。これに合わせて、GARCH モデルのパラメータがサンプルデータ全てを均等に用いて算出されていることも考慮する必要がある。すなわち、裾のデータは例えば全体の 1 % 程度しか存在しないため、パラメータ推定は裾以外のデータによって殆ど決定されてしまうのである。このことは、コルモゴロフ・スミルノフ検定がファット・テール性を持つデータに対する非正規性の検定において頑健性がないという理由にもなっている。

こうした理由から、時としてノイズが t 分布に従うことを仮定した GARCH モデル（以下、GARCH-t モデル）がリスク測定に対して用いられる。

$$\frac{r_t | r_{t-1}}{s_t} \sim t_{(n)} \quad (5)$$

ここで、 s_t は上記と同様に(4)式で表され、自由度を表すパラメータ n は他のパラメータと同様に推定される。t 分布はファット・テール性を持つので（第 3 章を参照されたい）、市場リスクの推定には、正規分布と比べて望ましいと言える。しかし、次の 3 つの理由から t 分布もリスク推定に理想的であるとはいえない。

- 1 . 収益率分布の裾の形状とは一般に異なること
- 2 . t 分布は左右対称であること
- 3 . 多変量分布の表現が困難であること

つまり、GARCH-t モデルは、多くの場合において、正規 GARCH モデルよりもよいリスク推定値を提供してくれるが、モデルの限界から実務への適用には注意が必要であることになる。

2.3 極値のクラスタリング

収益率の推移が独立でないという事実はよく知られているものの、収益率の極値、例えば上位 1 % といった値がどのように発生するか、すなわち独立に発生するのかまたはムラ（クラスタリング）が存在するのか、という点については殆ど分析がなされていない。そこで、次のような定義を導入する。

定義 1 : (極値のクラスタリング) あるデータにおいて、極値から次の極値までの間隔が IID (independent and identically distributed) でないとき、そのデータには極値のクラスタリングが存在するという。

さらに、分位点 (パーセンタイル) を極値と考えた場合のクラスタリングは、次のような特性を持つことが予想される。

仮説 1 : 分位点を極値と考えた場合、分位確率を小さくするにつれて、極値のクラスタリングは減少していく。

この仮説自体は、収益率がどのような分布に従っているかによって成立するか否かが決まる。この仮説が有効であるかどうかは、最適なリスク予測モデルの選択に大きな影響を与える。例えば、仮説 1 は GARCH モデルにおいては成立する。このことは、以下で論じるように、仮にデータが GARCH モデルから生成されているならば、分位確率が小さい場合においては条件付きでない予測技法を用いても問題ないということの意味している。さらに、分位確率を小さくしていくにしたがって、どの程度の速さで極値のクラスタリングが減少するかという点もモデル選択に影響を与える。速度が速ければ、条件付きでないリスク予測モデルが好まれるし、速度が遅い場合には条件付きのモデルが必要とされるであろう。GARCH モデルや関連する多くのモデルは極値のクラスタリングが速いクラスに属するので、リスク予測モデルは条件付きでない方が好まれるということになる。

ここではモデル選択を行うために、極値のクラスタリングが存在するかどうかの検定を行なう。すなわち、ある閾値を設け、2つの極値 (いずれもその閾値超の値) の間にあるデータ数を数え上げる。観測データが閾値を独立に超過していれば、数え上げられたデータ数は幾何分布に従うことになる²。したがって、その分布が幾何分布から大きく乖離していれば、極値のクラスタリングが存在する重要な根拠であると考えられるので、カイ 2 乗適合度検定によってそれを確かめることとする。

具体的には、 r_t を収益率とし、 f_t を次のように定義される統計量とする。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & r_t > I \text{ の場合} \\ 1 & r_t \leq I \text{ の場合} \end{cases} \quad I \gg 0 \quad (6)$$

² 幾何分布がこのような特性を持つことについては、例えば、Feller [1957] 等、確率論の基礎的テキストを参照されたい。

この統計量が I を大きくするにつれて IID となるかどうかを検定するのである。

用いたデータは東証株価指数 (TOPIX)、原油のインデックス (WTI)、米国の株価指数 (SP-500)、ドル・円の為替レート (以下、JPY/USD)、東証 2 部株価指数 (以下、TSE2) である。データの各種統計量に関するサマリーは表 1 (21 ページ) に掲げた。ここでは、それらのデータの収益率に対して極値の独立性に関する検定を行なった。同時に、それらのデータを正規 GARCH モデルや、GARCH-t モデル (いずれも GARCH(1,1)モデル) に当てはめ、その残差についても同様の検定を行なった。閾値には両裾における 5%、2.5%、1%、0.5% に相当する分位点を選択した。それらの結果は、表 2 ~ 表 4 (25 ~ 27 ページ) の通りである。

表 2 は、収益率そのものの独立性に関するものである。仮説通り、分位点が相対的に高いもの (5%、2.5%) では明確な従属性が見られる (独立性が棄却されている) のに対し、0.5% レベルでは独立性が棄却されていない部分も見られる。興味深いことに、1% レベルでは左裾の方は多くで明確な従属性が見られるのに対し、右裾はそれほどでもない。このことは、一般に右裾の方が薄いという経験的な事実と整合していると思われる。なお、データ数が多いもの (全期間で検定を行なっているもの) は 0.5% レベルでも棄却されているものがほとんどであるが、このことは極値のクラスタリング消滅の速度が遅いことを意味していると考えられ、長期間に亘るリスク予測に対しては条件付きのモデルが適しているという可能性を示している。

表 3 は、正規 GARCH モデルの残差の独立性について検定を行なったものである。また表 4 は、GARCH-t モデルについて同様のことを行なった結果である。これも予想通り、全体として残差の従属性はかなり薄らいでいる。ただし、中には GARCH モデルでも従属性の除去ができていないデータもある。極値の発生が GARCH タイプでない場合には、GARCH モデルを使うことによって、残差の中に擬似的な極値のクラスタリングが現れてしまう可能性もある。

2.4 バイオレーション・クラスタリング

極値のクラスタリングと同様、VaR 等のリスク指標を超えるデータ、すなわちバイオレーションのクラスタリングに関する考察も意義があるものと考えら

れる。ここでは次のような定義を導入する。

定義 2 : (バイオレーション・クラスタリング) VaR のバイオレーション間の間隔が IID でないとき、バイオレーション・クラスタリングが存在するという。

バイオレーション・クラスタリングもデータと VaR の予測手法に依存する。実務では、全期間を通じたバイオレーション・クラスタリングはもちろん、局所的にも全くクラスタリングを生じさせないような予測手法を構築することはほとんど不可能である。局所的なバイオレーション・クラスタリングの例として、TOPIX の VaR (保有期間 1 日、信頼区間 99%) を正規 GARCH モデルと EVT 手法 (EVT およびそれを用いた VaR 推定手法の詳細については後述) によって予測した結果を図 3 (33 ページ) に示した。GARCH モデルによる VaR は収益率に対してラグがあるものの、一度大きな負の収益率が生じると、VaR を極めて大きくすることでそれ以降のバイオレーションを過剰なまでに防ごうとしている。EVT 手法ではそうしたイベントからは影響を受けていない。こうした GARCH モデルの過剰反応性からは、より過去の変動の影響も受けるモデルが好まれるかもしれないし、そうしたモデルが使用し難い場合には EVT 手法が好まれよう。

2.5 非対称性

GARCH モデルのような多くの条件付きボラティリティ・モデルの特徴の一つは、収益率分布の対称性を仮定していることである。以下に述べる通り、これは正しい仮定ではない。例えば、株式について言えば、収益率分布の左裾の方が右裾よりも厚い。一般に市場が上昇トレンドにある時は左裾の方が厚くなる傾向があるが、これは、トレンド方向に少しずつ進んでいき、時々大きく下落する、という動きを表していると考えられる。実際、1990 年代について調べると、日経平均を除く殆どの株価指数では、分布の左裾の方が厚くなっている。GARCH モデルなどは、条件付き正規分布や t -分布を仮定しているために対称となっているが、その場合、左裾、すなわち損失の方の予測が甘目に出る可能性があり、リスク管理者に誤った安心感 (false comfort) を提供してしまうことになる。理論的には非対称性を導入するのは困難ではないが、実際にはモデルがかなり複雑となる。

Nelson[1991]によって導入された EGARCH モデルは、非対称性を表現できるモデルとして、ボラティリティ予測に用いられることがある。

$$y_t = \sqrt{h_t} z_t, \quad z_t \sim N(0,1)$$

$$\log(h_t) = w \left(1 + \sum_{i=1}^q a_i L^i \right) \left(1 - \sum_{i=1}^p b_i L^i \right)^{-1} \{ q z_{t-1} + g [|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|] \}$$

ここで、 q や g は非対称性を表すパラメータであり、 L はラグ作用素である。本モデルは確率ボラティリティモデルとの関連性から、GARCHなどの離散時間モデルと、ファイナンスでよく用いられる連続時間モデルとのつながりを与えてくれる、というのが利点である。リスク予測への適用に関しては、非対称性を表現できるということがこのモデルの長所である。しかし、実際にデータに当てはめた場合、非対称性を表すパラメータの値が有意にならず、非対称性を表現できないことが多い。結果として、リスク測定への適用という観点では、このモデルが GARCH モデルと比較して明らかに優位であるとはいえず、モデルの複雑さを勘案するとあまり推奨できるモデルとはいえない。

条件付き分布として、最初から非対称な分布を用いることも考えられるが、適切な非対称分布の選択やそのパラメータ推定の困難さから、これも一般には行われていない。

2.6 VaR のボラティリティ

GARCHモデルのような条件付きボラティリティ・モデルの他の特徴として、リスク予測値そのもののボラティリティが非常に高い、ということが挙げられる。表5(28ページ)の下2段に、1999年の2四半期におけるTOPIXのVaR(保有期間1日、信頼区間99%)に関する統計量を掲げている。この表は、例えば、第一四半期において1億円のTOPIXポートフォリオを保有している場合、正規GARCHモデルでのVaRはこの四半期中に180万円から412万円までかなり大きく変動するということが示されている。このため規制上の必要自己資本額(VaRの3倍~)も、かなり大きく変動することになるので、銀行は、この変動を考慮して必要以上に多めの規制上の自己資本を積んでおこうとすることになるであろう。また、内部リスク管理では、一般的にトレーダーのポジション限度としてVaRが用いられており、あまりVaRが大きく変動するようであると、実務上の対応が困難になる。すなわち、VaRを用いたポジション限度が頻繁に

大きく変動すると、ポジション調節の頻度およびボリュームも、ほとんど対応不可能なレベルとなってしまふのである。こうした結果、殆どの銀行で、こうしたボラティリティを低減させるための各種手法が用いられている。多くの場合、分散・共分散行列の更新頻度を少なくする、例えば3ヶ月に一度とする、といったことが行われている。もちろん、これでも年に4回はポジション限度が大きくジャンプする可能性がある。代替的手法としては、分散・共分散行列の変動を抑えるような手法、例えば移動平均を用いること、などが考えられる。ボラティリティに関する長期記憶モデルを用いるという手段もあろう。この場合、分散は定常でも非定常でもなく、フラクタル的次元を持つことになる。市場変動がボラティリティ予測に影響を与える期間は、GARCHでは極めて短期間である一方、リスクメトリクスのようなI(1)モデル³では永続的になるが、このモデルではその間となる、という長所がある。しかしながら、長期記憶モデルの取扱いは極めて難しく、リスク管理の実務に適用するには至っていないと思われる。その他の手法としては、条件付きボラティリティ手法をあきらめ、その代わりにヒストリカルシミュレーションもしくはEVTを用いるということが考えられる。リスク量のボラティリティに関する詳細な議論についてはDanielsson [2000b]を参照のこと。

3 EVT

GARCHモデルを含む通常の統計手法では、リスクが仮に100の観測値のうち1度しか発生しないものであったとしても、その予測のために全観測値を用いている。このことは、リスクの予測としては明らかに効率的な手法とは言えない。EVTの基本概念は、ある確率分布の裾部分のみに注目している場合、すべてのデータを用いて全体の分布形を推定するよりも、裾に関連したデータのみを用いて、裾の形状自体をモデル化した方が良いということも有り得る、という点にある。例えば、ダムを設計するエンジニアは最も高い水位に対してダムの高

³ IGARCH(1,1)モデルのこと。リスクメトリクスでは、 $a + b = 1$ となっているため、明示的にはIGARCHモデルでモデル化される。

さが十分であるかのみを考慮していればよく、平常時の水位などは考える必要がない。EVT は、確率変数の中で中心から大きくはずれた値、すなわち極値の振舞いに関する理論であり、観測された極値を用いて確率変数の裾部分のみをモデル化する（32ページの図1参照）。EVTは工学、物理学、化学、保険など、さまざまな分野で広く適用されているが、金融のリスク管理への応用が展望されたのはここ2～3年のことである。

3.1 理論的背景

分布の裾の分類方法は様々である。例えば、一般に広く用いられているのは尖度が裾の厚さを表しているというものである。しかし、尖度は分布の形状全体に対する指標であることから、裾の厚みの指標として用いるのは正しくない。その点を示すために簡単なシミュレーションを行った。裾の厚い分布の例として自由度3のt分布を採用し、その分布から2,000個のサンプル・データを繰り返し抽出する。各サンプル・データの中から、最大および最小の各々40データを排除する。したがって、このサンプル・データは両裾が切り取られた形となっており、明らかに裾が薄いはずである。しかしながら、このサンプルデータの平均的超過尖度は7.1であり、裾の厚い分布に分類されてしまう。さらに、多くのモデル（例えば条件付き正規確率ボラティリティモデル）による分布は、裾が厚いファット・テール性を持つとしばしば分類されている。しかし、後述する分類では、確率ボラティリティモデルによる分布は裾が薄いことが示される。対照的に、GARCHモデルによる分布は、収益率過程がボラティリティ過程へ影響を与えることを背景に、ファット・テール性を有する。

正式には、確率分布の裾は次の3つの形状の何れかに分類される⁴。

- 1．裾が薄い、すなわち裾が切断されている（死亡率など）。
- 2．裾が通常の厚みを持つ、つまり裾が指数関数形で示される。正規分布がこの分類の代表例である。
- 3．裾が厚い、すなわち裾が冪分布に従う。

金融商品の収益率は裾が厚い分布であるというのはよく知られており、よっ

⁴ この3分類に属する分布の集合は、3種類の極値分布（Extreme Value Distribution）の最大値吸引域（Maximum Domain of Attraction）に一致する。極値分布並びに最大値吸引域の詳細については森本 [1999]を参照のこと。

て以下では第3のケースのみを考えることにする。EVTにおける非常に重要な結果として、裾の厚い分布の確率変数 x においては、右裾⁵は必ず次の性質を持つ、という点である。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-a}, \quad a > 0, \quad x > 0 \quad (7)$$

ここで a はテール・インデックスとして知られるもので、 $F(\cdot)$ は分布関数を表す。この事実が重要であるのは x が従う分布が何であっても、裾は共通の形状を持ち、関連するパラメータは一つ、すなわち a のみである、という点である。データが裾の厚い分布から生成されていれば、その分布は一次近似としてパレート・タイプの裾、すなわち $x \rightarrow \infty$ となるに連れ、

$$P\{X > x\} \approx ax^{-a}, \quad a > 0, a > 0 \quad (8)$$

となる。Danielsson and de Vries [1997b]と Danielsson and de Vries [1997a]では、左裾部分の分布形が

$$F(x) \cong \frac{m}{n} \left(\frac{x}{X_{m+1}} \right)^{-a} \quad (9)$$

と表せることが示されている。ここで、 n は観測値の数、 m は裾として認識しているデータ数、 X_{m+1} は観測値の順序統計量、つまり

$$X_1 \geq X_2 \geq \dots \geq X_m \geq \dots \geq X_n$$

から選択されたものである⁶。また、パラメータ a は裾の厚みを表す重要なものである。すなわち、

- $a = \infty$ ならば、裾は指数的に減少する。つまり正規分布とほぼ同様となる。
- $a < \infty$ ならば、裾は厚いことになり、
 - a は有限なモーメント数を表す
 - 例えば t 分布の場合、 a は自由度を表す
 - (正規分布を除く) 安定分布の場合、 a は特性指数を表す

⁵ 左裾についての応用もデータの符号を換えることで容易に行える。

⁶ ここでは、左裾を考えるため脚注5にあるとおり全てのデータの符号を換えていると考えていただきたい。つまり、 X_1 は観測値中最も低い値の符号を反転させたものである。

ということが知られている⁷。

3.2 EVT の適用

金融機関にとって、EVT を適用出来得る対象は多く存在している。収益率分布の裾を推定することにより、金融機関はサンプル外の事象の推定精度を高めることができ、さらにサンプル内においてもその分位点の測定精度を高められる。本稿でも EVT のリスク管理への適用を議論の対象としているが、そのほかにも幾つかの応用事例が考えられる。例えば、EVT はファット・テール性がある場合の分散効果の測定において重要な示唆を与える。つまり、EVT は平均 - 分散アプローチに基づく標準的なポートフォリオ理論が厳密には正確ではないとの示唆を与える。さらに、派生商品、特にエキゾチック・オプションのプライシングにはファット・テールの存在が大きく影響する場合が多いと考えられ、そこでも EVT の適用可能性があると考えられる。しかしながら、金融業界においては、リスク管理が EVT の最大の活用先である。

EVT を VaR の予測に用いる際には、左裾の推定、すなわち a と m を推定することになる。(9)式は VaR 予測における基礎をなす式である。 a と m が推定できれば、 X_{m+1} が得られる。これらにサンプル数 n を加えた 3 つの変数があれば、どのような確率、すなわち分位点と確率の組み合わせ (P, Q) も計算ができる (ここで、 $P < m/n$)。実際に $\text{VaR}^{p\%}$ を求める場合には、 $P \geq m/n$ かどうかを確かめる必要がある。もしその場合には、サンプル・データの p -分位点、すなわちヒストリカルシミュレーション法と同じ方法で $q(p)$ を求める。もし $P < m/n$ ならば、(9)式を用い、対応する分位点 $q(p)$ を求める。分位点の予測値 $q(p)$ が分かれば、VaR の算出ができることになる。

3.3 パラメータの推定

裾が(8)式にあるようなパレート分布に正確に従っている、つまり、

$$F(x) = 1 - ax^{-a} \quad (10)$$

となるならば、パラメータ a の推定は容易である。Hill [1975]はこのパラメータの最尤法による推定値が次のとおりとなることを示した。

⁷ 安定分布および特性指数については、例えば森本 [1999]を参照のこと。

$$\frac{1}{\hat{a}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log \frac{X_i}{X_{m+1}} \quad (11)$$

(11)式の推定値はヒル推定量として知られているものである。ここで、 m は裾部分に属する観測値の数であり、 X_{m+1} は裾を規定する閾値である。(10)式のパレート近似が単に漸近的に成立している場合には、ヒル推定量はモーメント法の推定量と一致することになる。 m が的確に選択されれば、ヒル推定量は収益率分布を表す最適な裾のパラメータとなることが知られているが、 m の的確な選択は容易ではない。 m を選ぶことは裾がどこから始まるかを規定することであり、任意に、例えばサンプル数の上位 1 % 点のデータを選ぶといった方法は推奨できない。Hall [1990]は、サブ・サンプルを用いたブートストラップ法によって m を決定する方法を提案しているが、そこでは裾の形状に対して強い仮定が置かれている。一方、Danielsson and de Vries [1997a]では、最適な閾値レベル m^* を決定するための二重サブ・サンプルを用いたブートストラップ法を提言している。

m を変えると a の推定値、さらにはリスク推定値そのものも大きく変わることから、最適な閾値 m^* を選択することは非常に重要である。最適な閾値 m^* を選択するにあたっては、次のような手法を用いることになる。

- 1 . パラメータの逆数 $1/\hat{a}$ は漸近的に正規分布に従う
- 2 . 従って、 $1/\hat{a}$ の漸近的平均二乗誤差 (Asymptotic Mean Square Error、以下 AMSE) を構築する
- 3 . ただし、通常 $1/\hat{a}$ にはバイアスや分散が含まれていることから、それを考慮し、
 - a) 分散とバイアスの両方が m の選択によって影響されることから、バイアスと分散が同じ割合で消滅していくように m を選ぶのが最適。
 - b) 従って、AMSE が最小化される水準が、最適な閾値レベル m^* を与えてくれる、すなわち、以下が成立する。

$$m^* = \min AMSE \left[\left(\frac{1}{\hat{a}} - \frac{1}{a} \right)^2 \right]$$

AMSE はブートストラップ法によって与えられる。しかしながら、リサンプルするだけでは、AMSE のブレを消去することはできないので、サブ・サンプル

ル法が必要となる。Hall [1990]は、AMSEにおける $1/a$ の代替としての a の初期値を定めるために m の初期値を決める必要があることから、サブ・サンプル法を提案した。各サブ・サンプルのブートストラップ法に対して $1/\hat{a}$ の推定値が得られ、そのサブ・サンプルに対して平均を最小化するように m_{sub}^* を選ぶというものである。そして、 \hat{a}_{sub} および $\hat{b}_{sub} = \hat{a}_{sub}$ (ここで b は(7)式を極限分布を二次まで展開した場合のパラメータ)という仮定から全体のサンプルでの m^* を導くことになる。しかしながらこの手法は2つの欠点がある。

1. 初期値 a を推定する必要があること
2. 二次のパラメータ b に仮定を置く必要があること (Hall は $b = a$ をよい仮定であるとしているが、例えば学生-tでは $b = 2$ である)

Danielsson and de Vries [1997a]は m^* を決めるためのアルゴリズムとして二重サブ・サンプル・ブートストラップ法を用いることで、初期値 a および \hat{b} の仮定の影響を回避することを提唱している。Hill推定量とDanielsson-de Vries推定量の差異は一樣に、ある理論的な値(極限的にゼロ)に収束していく。この差異の二乗は $MSE[1/a]$ の有用な推定量となり、閾値をうまく選ぶことによって最小化される。さらに、通常のフル・サンプルのブートストラップでは法則収束しか導かれないが、それ以上に望ましい確率収束を得るために、サブ・サンプル・ブートストラップ法において元のサンプル数よりも少ないサンプル数を選ぶべきであることも示されている。その理由は、サブ・サンプルでの最適な閾値からフル・サンプルでの閾値(これを用いてフルサンプルでの a 推定量を導くためにHill推定量を使う)を推定する際に用いる二次パラメータ b を推定するために、異なったサンプリング特性を持つ二つのサンプルが必要となるからである。

3.4 EVTを適用する際の課題

時として、EVTはリスク管理に対する万能薬であるかのように表現されることもあるが、それは正しくない。EVTを金融データに適用する際の制約となるいくつかの課題がある。

3.4.1 サンプル数

EVTの適用に際し、サンプル数についての本源的な制約はないが、実務上で

は存在する。今回掲げた推定手法を用いる上では、主に次の2つの観点でサンプル数が制約となる。

1. 極値となる事象を観測する必要があること
2. 閾値、つまり m の推定は通常サブ・サンプルのブートストラップ法やさらには2重サブ・サンプルのブートストラップ法によるため、極値が各サブ・サンプルで観測される必要があること

ヒル推定量が m の決定に用いられるならば、裾部分に属する観測値の数が $m + 1$ である必要がある。しかし、 m はサブ・サンプルから求められることになるが、このサンプルのサイズは可能な限り小さくすることが求められる。実証分析などによる経験的結果から、サブ・サンプルはサンプル数の10%程度は必要であることが指摘されている。よって、サンプル数が1,000であれば、サブ・サンプルは100となり、そこには平均的にみて50個の正值が含まれる。しかし、最小限の正值を用いて反復されるブートストラップにおいては、使用できるサブ・サンプル数を一定値以上に多くすることは出来ない。実務上は、1,000が最低必要なデータ数であり、一般的には1,500程度が望ましいと考えられる。データ数が6,000以上になると、それ以上はあまり違いはないと言われている。従って、リスク管理者は、典型的な八方塞がり状態、すなわち統計的要請からデータを多くしたいが、そうすると現状の市場実勢に合っていないデータも使わなければならない、という問題に直面する。また、多くの市場、特にエマージング市場では、そもそもそれだけのデータ数がないため、EVTに関わらず分析が困難である、という問題もある。おそらくこうした理由から、これまでリスク管理に関して発表されている研究は、流動性が高く長期に亘るデータ取得が可能なSP500のようなデータを分析の対象とせざるを得なかったと考えられる。

3.4.2 多次元への適用

多次元EVTの研究は精力的に進められているが、GARCHモデル等多くの技法同様、次元を増やすと複雑さが増すという問題がある。現時点では、EVTを用いたリスク管理へ多次元的手法を適用する範囲は極めて限られているが、Longin [1999]において裾に近づく際に共分散がどのように変化するかに関する考察がなされるなど、興味深い研究もいくつか見られるようになってきている。

3.4.3 独立性

EVT はデータが IID であることを仮定しており、これも制約である。しかし、Resnick and Starica [1996]は、GARCH のようなある種の従属性の下では、独立性の前提から導かれた Hill 推定量を用いても問題にはならないということを示しており、IID か否かという点がそれほど制約にならない場合もある。

3.5 EVT での予測

EVT を用いた推定結果を表 6 (29ページ) に、そして 1990 年代の TOPIX の日次対数収益率における左裾のプロットを図 2 (32ページ) に示した。表 6 には、EVT によって予測される 20 年間で発生しうる最大および最小の収益率 (それぞれ表中の Max20 および Min20) も付した。データセットの中では、WTI が最もボラタイルであり、20 年に一度は一日に 29% 程度上昇し、19% 程度下落するという予測になっている。また、90 年代に入ると為替レートの変動幅が大きくなっており、9% 程度の上昇率が 20 年に一度起こり得るという結果になっている。東証 2 部指数の方が TOPIX よりもリスクが小さい点は興味深い。90 年代において SP500 と比べて TOPIX の下落リスクがかなり大きいというのも特徴的である。

4 実証分析

本章では、いくつかのデータおよび期間を用いた実証分析を行う。使用データは、東証株価指数 (TOPIX)、原油のインデックス (WTI)、米国の株価指数 (SP500)、ドル・円の為替レート (以下、JPY/USD)、東証 2 部株価指数 (以下、TSE2) である⁸。表 1 (24ページ) にそれぞれのデータに関する主要統計値をまとめた。

⁸ なお、ここでは、有意性によって使用するデータを選択することにより生じる問題 (Data Snooping Bias) を回避するため、分析を行ったデータ全てについてその分析結果を示した。

4.1 VaR 予測

VaR 予測で用いられているモデルは、上述したように GARCH タイプのモデルである。本稿では、正規 GARCH および GARCH-t を採用し、さらに比較のために単にデータから平均と分散を計算し、正規分布性を仮定した推定値も用いた。ある時点の VaR 推定に使用するデータ数はその直前の 1,000 日分とし、それを一日ずつずらしていく。すなわち、日々 VaR の推定値を洗い替えていることになる。各 VaR について、翌日の収益率がその VaR を超過（バイオレート）しているかどうかを調べた⁹。結果は表 7（30 ページ）に示しているが、他の VaR に関する研究と同様の結果となっている。すなわち、単なる正規分布および正規 GARCH モデルの推定精度はあまり高くなく、次いで GARCH-t モデル、そして EVT が結果として最も高い推定精度を示している。この結果は後述する VaR 自体のボラティリティの結果を考え合わせると極めて興味深い。

4.2 非対称性

正規分布、正規 GARCH モデル、GARCH-t モデルでは（条件付き）分布が対称性をもつことが仮定されている。このことは 2 つの点で問題である。第一に、対称性の仮定から、左右の裾の形状を同一としていることになるが、通常の収益率分布は対称でなく、通常は右裾の方が左裾よりも薄い。表 6 からそれが見て取れる。第二に、正規 GARCH モデルにおける推定では、薄い裾の方がパラメータ推定により大きな影響を与え、厚い裾（通常は左裾）の形状が推定にはあまり反映されないという問題もある。分析の結果として、GARCH モデルを使った推定には顕著な非対称性が現れている。すなわち、右裾では VaR が高くなっている結果、VaR 超過率が低く出ているのに対し、左裾では VaR が低くなっている結果、VaR を超過するデータが多く発生している。

4.3 VaR のボラティリティ

VaR のボラティリティも重要な問題である。表 5（28 ページ）は、1 億円の TOPIX ポートフォリオに対する保有期間 1 日の 1% VaR を示している。まず、サンプル期間全体で見ると、正規 GARCH モデルを用いた場合、VaR は最大で 2,828 万円になっているのに対し、その間の実際の最大損失額は 1,581 万円にとどまっ

⁹ VaR は保有期間 1 日、信頼区間としては 95%、97.5%、99%、99.5% を用いた。

ている。ヒストリカル・データから単純に 1,581 万円という損失額の発生確率を計算すると 0.007%に過ぎないことから、GARCH モデルの推定結果がかなり実際と乖離していることが分かる。GARCH-t モデルによる推定でも最大損失額は 2,230 万円となっており、あまり改善されていない。これに対して、EVT による推定結果ではそうした問題は発生していない。次に、VaR の標準誤差をみると、正規 GARCH モデルで 104 万円、GARCH-t モデルでは 109 万円であるのに対し、EVT では 70 万円に過ぎず、相対的に安定していることがわかる。

同様の結果を、1999 年の第一および第二四半期のデータを用いた分析で見ることが出来る。例えば、第一四半期の場合、正規 GARCH モデルによる推定では、VaR の推計値は 180 万円から 412 万円の間で大きく変動する。3 ヶ月の間で VaR が 3 倍近くも変動するというのは、内部管理上の自己資本額算出を VaR に基づいて行っている金融機関にとっては問題である。GARCH-t モデルでも 204 万円から 421 万円と変動が大きいのが、これに対して EVT では 309 万円から 331 万円と極めて小さなレンジに収まっている。

4.4 バイオレーションのクラスタリング

さらに、VaR を超過するデータ、すなわち上述したようなバイオレーションのクラスタリングについても検討した。結果は表 8 (31 ページ) の通りである。観測期間全体を見ると、EVT による予測において明らかなクラスタリングがある一方、予想されたとおり GARCH モデルではクラスタリングが大幅に減少していることがわかる。しかしながら、局所的なクラスタリング状況を見ると、別の見方ができる。図 3 (33 ページ) は、正規 GARCH モデルと EVT を用いて TOPIX の VaR を推定した結果を図示している。GARCH モデルでは、分析期間の最初の大きな負の収益率には対応できないものの、その後急激に増加し、暫くの間リスクを過大推計する結果となっている。これに対して、EVT ではこのような現象は殆ど見られていない。こうした GARCH モデルの過剰反応性からは、より過去の変動の影響も受けるモデルが好まれるかもしれないし、そうしたモデルが使用し難い場合には EVT 手法が好まれよう。

5 結論

リスク管理はここ数年で大きく変貌している。GARCHモデル等の金融データの時系列分析において伝統的な手法が導入され、さらにEVTなどの新手法の適用も始まっている。この分野には唯一の正解というものは存在せず、精密さと複雑さといったよくあるトレード・オフ関係に直面することになる。本稿では、本邦の金融データを用いて幾つかのVaR予測手法を比較した。

我々の分析結果からは、今回使用したデータに関して言えば、単純に収益率に正規分布を仮定した手法やGARCHモデルタイプの手法に比べ、EVTがより望ましいことが判明した。また、EVTを用いることで、VaRの予測値はより正確になり、また時間的に安定することもわかった。これらから、本邦金融機関並びに本邦金融市場への投資を行っている投資家はEVTを使用することが望ましいと考えられる。

一方、GARCHタイプのモデルによるVaR推定は、EVTよりも精度の点で見劣りし、また実際のデータ以上に大きく振れるといった問題点が明らかになった。こうした点からも、実務的にVaRを推定する際には、GARCHタイプのモデルは勧められない。EVTとGARCHタイプのモデルによるVaR推定値を詳細に検討した結果、後者による推定値の大きな振れは、データではなく、モデル自体に基づくものであることが示された。最後に、より過去の変動の影響も受けるモデルが最もよいリスク推定値を与えるかもしれないが、このモデルは推奨できないことも指摘した。これは、モデルの推定は非常に困難であり、推定には非常に長期間のヒストリカル・データが必要となるため、事実上、このモデルは、最も実務的なリスク推定には適用できないためである。

以上

補論 A : EVT の数学的導出について

補論では、裾の分布を推定する統計手法についての概要を説明する。この内容の詳細および証明は Danielsson and de Vries [1997a]を、この手法の適用例は Danielsson and de Vries [1997b]を各々参照されたい。

x をファット・テールの分布を持つ金融資産の収益率とする。その分布関数 $F(x)$ が次のような形で収束する（これを正則変動¹⁰という）と仮定する。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-a}, \quad a > 0, x > 0 \quad (12)$$

この仮定が成立するならば、収益率分布はファット・テール性を持ち、 a よりも大きなモーメントは発散してしまうことになる。(12)式で示されるような正則変動の仮定は、収益率 x の裾部分の振舞いを分析するのに必要となる唯一の仮定である。上記のような正則変動性をもつということと、フレシェ分布の最大値吸引域に属するということは同値である（森本 [1999]を参照のこと）。

$F(x)$ の裾形状のパラメトリックな表現は、例えば高次まで展開することによって得られる。ある前提下では次のように表現できる。

$$F(x) = 1 - ax^{-a} [1 + bx^{-b} + o(x^{-b})], \quad b > 0, x \rightarrow \infty \quad (13)$$

パラメータ a は次のように示される Hill 推定量 (Hill [1975]) によって推定することができる。ここで、 m は極値として定めたある閾値を超過するデータ数を表しており、 X_i は上から i 番目のデータを表している。

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log \frac{X_i}{X_{m+1}} \quad (14)$$

この推定量については、漸近的に正規分布に従うことや、分散およびバイアスの存在が知られている。さらに、漸近的平均二乗誤差 (Asymptotic Mean Square Error) を最小にするような閾値が存在することも知られており、この閾値からパラメータおよび超過データ数を求めることができる。Danielsson and de Vries [1997a]は、この特性を用いて、最適な超過データ数をブートストラップ法によって求める手法を提言している。

¹⁰ 正則変動については、森本 [1999]を参照のこと。

ファット・テール性を持つ分布からサンプル・データが抽出されているとすれば、(13)式および(14)式から、サンプル・データを超過する分位点と確率の組み合わせ (P, Q) を推定することができる。これらの推定値の下記に述べるような特性は、 $1/\hat{a}$ の特性から直接導かれるものである。また、サンプル内の (P, Q) についても同様の手法により導くことが可能である。

サンプル外の (P, Q) を推定するためには、2つの確率 p, t (ただし、サンプル数を n として、 $p < 1/n < t$) を考える。確率 p と t に対応して、 x_p と x_t を分位点、すなわち、 $1 - F(x_i) = i, i = t, p$ とする。(13)式で得られた $F(x)$ の展開式を用い、高位の次数を無視し、 t を $(m+1)/n$ 、 x_t を X_{m+1} で置き換えることにより、

$$\hat{x}_p = X_{m+1} \left(\frac{m}{np} \right)^{\frac{1}{\hat{a}}} \quad (15)$$

と表せる。この \hat{x}_p は漸近的に正規分布に従うことが知られている。同様に変形することで、

$$\hat{p} = \frac{m}{n} \left(\frac{x_t}{x_p} \right)^{\hat{a}} \quad (16)$$

も得られる。ここで得られた推定値 \hat{p} もまた漸近的に正規分布に従う。

補論 B : 図表

【表 1】使用データの主要統計値

データ	観測 開始日	観測 終了日	データ 数	平均	標準 偏差	歪度	尖度	一次自己 相関
TOPIX	8/1/49	7/30/99	14,179	0.03%	0.88%	-0.44	19.30	0.16
TOPIX	8/1/49	7/31/59	3,007	0.05%	0.90%	-0.12	12.41	0.25
TOPIX	8/1/59	7/31/69	3,006	0.02%	0.72%	-0.36	6.46	0.16
TOPIX	8/1/69	7/31/79	2,896	0.04%	0.69%	-1.44	17.28	0.22
TOPIX	8/1/79	7/31/89	2,803	0.06%	0.79%	-2.41	70.62	0.10
TOPIX	8/1/89	7/30/99	2,467	-0.02%	1.25%	0.30	7.81	0.11
WTI	6/1/83	7/30/99	4,021	-0.01%	2.45%	-1.38	28.87	0.01
SP500	8/1/49	7/30/99	12,632	0.04%	0.85%	-1.78	50.89	0.10
SP500	8/1/49	7/31/59	2,518	0.06%	0.71%	-0.83	10.27	0.10
SP500	8/3/59	7/31/69	2,515	0.02%	0.63%	-0.50	12.82	0.16
SP500	8/1/69	7/31/79	2,543	0.01%	0.86%	0.29	5.45	0.24
SP500	8/1/79	7/31/89	2,529	0.05%	1.09%	-3.75	83.59	0.06
SP500	8/1/89	7/30/99	2,527	0.05%	0.88%	-0.50	9.31	0.01
JPY/USD	8/1/79	7/30/99	5,093	-0.01%	0.71%	-0.81	10.65	0.02
JPY/USD	8/1/79	7/31/89	2,489	-0.02%	0.66%	-0.39	5.48	0.04
JPY/USD	8/1/89	7/30/99	2,604	-0.01%	0.76%	-1.06	13.20	0.00
TSE2	8/1/69	7/30/99	8,166	0.03%	0.70%	-0.79	13.10	0.43
TSE2	8/1/69	7/31/79	2,896	0.05%	0.63%	-1.02	13.96	0.47
TSE2	8/1/79	7/31/89	2,803	0.05%	0.54%	-1.76	30.21	0.32
TSE2	8/1/89	7/30/99	2,467	-0.01%	0.91%	-0.31	7.29	0.45

【表 2】収益率の極値発生 of 独立性検定結果

データ	期間	左裾				右裾			
		5.0%	2.5%	1.0%	0.5%	5.0%	2.5%	1.0%	0.5%
TOPIX	49-99	***	***	***	***	***	***	***	***
TOPIX	49-59	***	***	***		***	***	***	***
TOPIX	59-69	***	***	***		***	***		
TOPIX	69-79	***	***	***		***	***		
TOPIX	79-89	***	***	***	***	***	***	**	***
TOPIX	89-99	***	***	***		***	**		
WTI	83-99	***	***	***	***	***	***	***	***
SP500	49-99	***	***	***	***	***	***	***	***
SP500	49-59		**						
SP500	59-69	***	***	***		***	**	**	
SP500	69-79	***	***	***	***	***	***	***	***
SP500	79-89	***	***	***		***	***	***	***
SP500	89-99	***	***	***		***	***		
JPY/USD	79-99	***	***	***		***	***		
JPY/USD	79-89	***	***	***	***	***	***	**	***
JPY/USD	89-99	***	***	***		***	**		
TSE2	69-99	***	***	***	***	***	***	***	***
TSE2	69-79	***	***	***	***	***	***	***	***
TSE2	79-89		**						
TSE2	89-99	***	***	***		***	**	**	

注：***は 1%、**は 2.5%、*は 5% レベルでそれぞれ独立性が棄却されていることを表す。

【表 3】正規 GARCH モデルの残差に関する極値発生 of 独立性検定結果

データ	期間	左裾				右裾			
		5.0%	2.5%	1.0%	0.5%	5.0%	2.5%	1.0%	0.5%
TOPIX	49-99	**				**			**
TOPIX	49-59					***	**		
TOPIX	59-69	***							
TOPIX	69-79								
TOPIX	79-89								
TOPIX	89-99							**	
WTI	83-99								
SP500	49-99	***							
SP500	49-59								
SP500	59-69					*	*		
SP500	69-79	**				**			**
SP500	79-89					***	**		
SP500	89-99	***							
JPY/USD	79-99								
JPY/USD	79-89								
JPY/USD	89-99							**	
TSE2	69-99								
TSE2	69-79	***							
TSE2	79-89								
TSE2	89-99					*	*		

注：***は 1%、**は 2.5%、*は 5% レベルでそれぞれ独立性が棄却されていることを表す。

【表 4】 GARCH-t モデルの残差に関する極値発生 の独立性検定結果

データ	期間	左裾				右裾			
		5.0%	2.5%	1.0%	0.5%	5.0%	2.5%	1.0%	0.5%
TOPIX	49-99	**				**	**		**
TOPIX	49-59					***	***		
TOPIX	59-69	***							
TOPIX	69-79								
TOPIX	79-89								
TOPIX	89-99							**	
WTI	83-99								
SP500	49-99	***							
SP500	49-59								
SP500	59-69					**	*		
SP500	69-79	**				**			
SP500	79-89								
SP500	89-99							**	
JPY/USD	79-99								
JPY/USD	79-89	**							
JPY/USD	89-99								
TSE2	69-99	***	**			***			
TSE2	69-79	**							
TSE2	79-89	**	**			**			
TSE2	89-99	*				**			

注：***は 1%、**は 2.5%、*は 5% レベルでそれぞれ独立性が棄却されていることを表す。

【表 5】 TOPIX における VaR のボラティリティ

データ / モデル	観測 開始日	観測 終了日	平均値	標準 誤差	最小値	最大値
日次損益	1954/7/29	1999/7/30	3	85	-1,581	912
VaR 正規GARCH			-171	104	-2,828	-59
GARCH t			-186	109	-2,230	-65
EVT			-220	70	-394	-103
日次損益	1996/1/4	1999/7/30	-1	120	-525	660
VaR 正規GARCH			-264	91	-756	-143
GARCH t			-290	92	-713	-175
EVT			-325	21	-394	-290
日次損益	1999/1/4	1999/3/31	26	118	-241	370
VaR 正規GARCH			-259	64	-412	-180
GARCH t			-279	61	-421	-204
EVT			-318	3	-331	-309
日次損益	1999/4/1	1999/6/30	18	100	-201	324
VaR 正規GARCH			-257	37	-357	-202
GARCH t			-282	40	-384	-223
EVT			-317	3	-319	-309

注： 数値は万円。1億円のポートフォリオに対する日次の損益額を示している。

【表 6】EVT による裾の推定例

データ	観測 開始日	観測 終了日	u	l	m_u	m_l	Max20	Min20
TOPIX	8/1/49	7/30/99	3.83	4.02	37	30	7.34	-7.37
TOPIX	8/1/49	7/31/59	3.27	4.70	32	17	6.27	-8.26
TOPIX	8/1/59	7/31/69	4.74	3.15	20	36	6.85	-4.29
TOPIX	8/1/69	7/31/79	3.44	2.68	28	41	8.89	-5.34
TOPIX	8/1/79	7/31/89	2.92	2.88	48	29	8.26	-7.63
TOPIX	8/1/89	7/30/99	4.00	5.57	22	12	7.51	-9.73
WTI	6/1/83	7/30/99	4.25	2.82	14	32	29.50	-18.90
SP500	8/1/49	7/30/99	3.89	3.25	61	163	7.18	-6.01
SP500	8/1/49	7/31/59	4.59	2.85	33	32	7.57	-4.02
SP500	8/3/59	7/31/69	2.97	3.59	76	25	5.07	-5.78
SP500	8/1/69	7/31/79	3.46	4.81	31	23	4.79	-7.13
SP500	8/1/79	7/31/89	3.97	2.80	33	56	10.40	-6.83
SP500	8/1/89	7/30/99	3.91	3.33	29	28	7.51	-6.15
JPY/USD	8/1/79	7/30/99	4.60	3.61	25	34	6.29	-4.08
JPY/USD	8/1/79	7/31/89	6.89	6.61	14	11	3.80	-3.02
JPY/USD	8/1/89	7/30/99	3.98	2.66	29	36	9.46	-4.91
TSE2	8/1/69	7/30/99	5.20	3.13	20	34	7.56	-4.35
TSE2	8/1/69	7/31/79	4.69	2.41	23	51	8.50	-3.86
TSE2	8/1/79	7/31/89	5.95	3.37	16	32	4.53	-2.81
TSE2	8/1/89	7/30/99	4.55	7.97	17	11	5.71	-5.67

- 注： 1 . u は裾に関するパラメータ、 m はブートストラップ法により求められた閾値を超過するデータ数を表す。
- 2 . 添え字 (u または l) はそれぞれ右裾 (upper)、左裾 (lower) を表す。
- 3 . Max20 と Min20 は計算されたパラメータに基づいて推定された 20 年間での日次最大上昇率および下落率である (パーセント表示)。

【表 7】 VaR を超過したデータ発生率（バイオレーション率）の比較

モデル	データ	左裾				右裾			
		95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%
正規	TOPIX	4.50%	3.07%	1.98%	1.47%	4.10%	2.71%	1.59%	1.21%
	SP500	5.13%	3.40%	1.96%	1.41%	4.81%	2.93%	1.66%	1.19%
	JPY/USD	5.65%	3.84%	2.50%	1.89%	5.15%	3.23%	2.09%	1.53%
	WTI	5.08%	3.05%	1.98%	1.39%	4.80%	2.86%	1.90%	1.51%
	TSE2	4.76%	3.05%	2.04%	1.53%	5.06%	3.29%	1.86%	1.35%
正規GARCH	TOPIX	5.14%	3.01%	1.65%	1.25%	4.05%	2.19%	1.05%	0.63%
	SP500	5.47%	3.33%	1.81%	1.12%	4.30%	2.31%	0.99%	0.59%
	JPY/USD	5.57%	3.42%	2.12%	1.64%	4.90%	2.84%	1.50%	1.00%
	WTI	5.04%	2.98%	1.71%	1.27%	4.40%	2.66%	1.43%	1.15%
	TSE2	5.25%	3.26%	1.82%	1.26%	4.34%	2.54%	1.22%	0.72%
GARCH-t	TOPIX	5.80%	3.02%	1.25%	0.76%	4.44%	2.11%	0.71%	0.28%
	SP500	6.01%	3.18%	1.28%	0.60%	4.62%	2.11%	0.71%	0.34%
	JPY/USD	6.26%	3.01%	1.34%	0.92%	5.23%	2.31%	0.86%	0.19%
	WTI	6.27%	2.82%	1.15%	0.48%	4.68%	2.30%	0.99%	0.63%
	TSE2	5.39%	2.91%	1.29%	0.69%	4.76%	2.33%	0.89%	0.21%
EVT	TOPIX	5.23%	2.68%	1.18%	0.69%	5.38%	2.90%	1.30%	0.72%
	SP500	5.61%	3.11%	1.27%	0.69%	5.55%	3.12%	1.27%	0.70%
	JPY/USD	5.51%	2.98%	1.31%	0.95%	6.43%	3.03%	1.53%	0.81%
	WTI	5.08%	2.94%	0.87%	0.48%	5.32%	2.78%	1.23%	0.63%
	TSE2	5.45%	2.72%	1.23%	0.72%	5.75%	2.99%	1.38%	0.78%

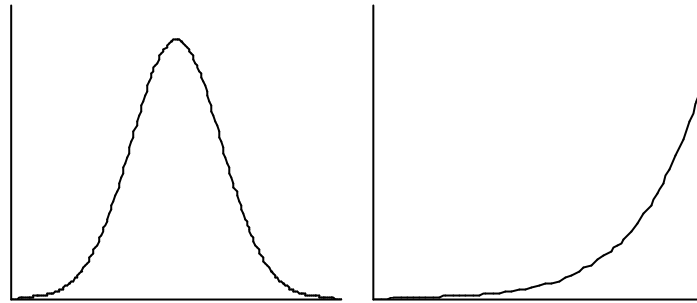
注： チェックした VaR の数は TOPIX = 12,679、 SP500=11,133、 JPY/USD=3,593、
WTI=2,521、 TSE2=6,666 である。

【表 8】バイオレーション・データ発生 of 独立性検定結果

モデル	データ	左裾				右裾			
		95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%
正規	TOPIX	***	***	***	***	***	***	***	***
	SP500	***	***	***	***	***	***	***	***
	JPY/USD	***	***	**	***	**	**		*
	WTI	***	***	***	***	***	***	***	***
	TSE2	***	***	***	***	***	***	***	***
正規GARCH	TOPIX	***	***	*					
	SP500	***	***						
	JPY/USD								
	WTI		***						
	TSE2	***	***		*	*			
GARCH-t	TOPIX	***	***						
	SP500	***	**				**		
	JPY/USD								
	WTI								
	TSE2	***	*			**			
EVT	TOPIX	***	***	***	***	***	***	***	***
	SP500	***	***	***	***	***	***	***	***
	JPY/USD	***	***	***	***	***		***	
	WTI	***	***	***		***	***	***	***
	TSE2	***	***	***	***	***	***	***	***

注：***は 1%、**は 2.5%、*は 5% レベルでそれぞれ独立性が棄却されていることを表す。

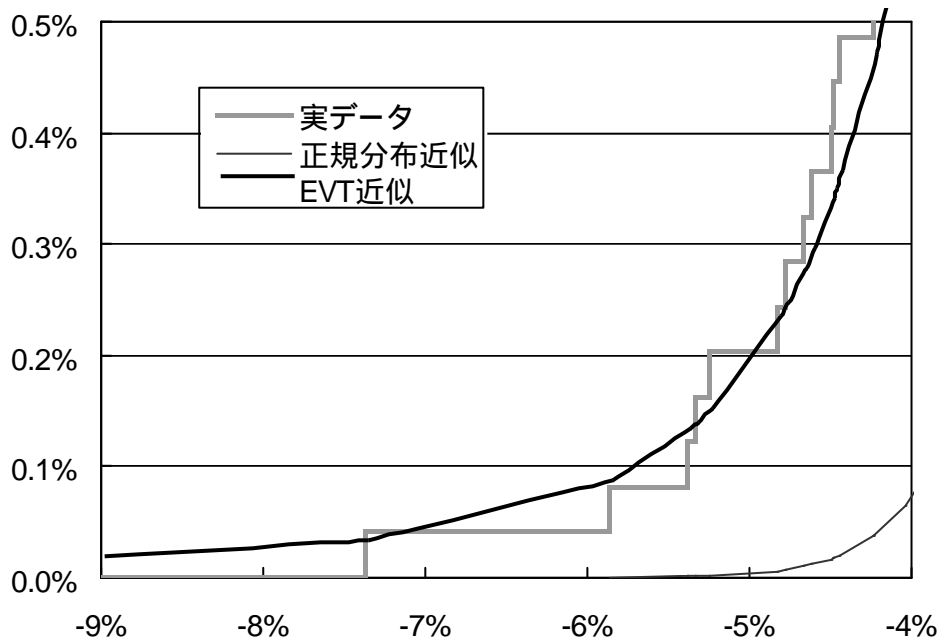
【図 1】裾について



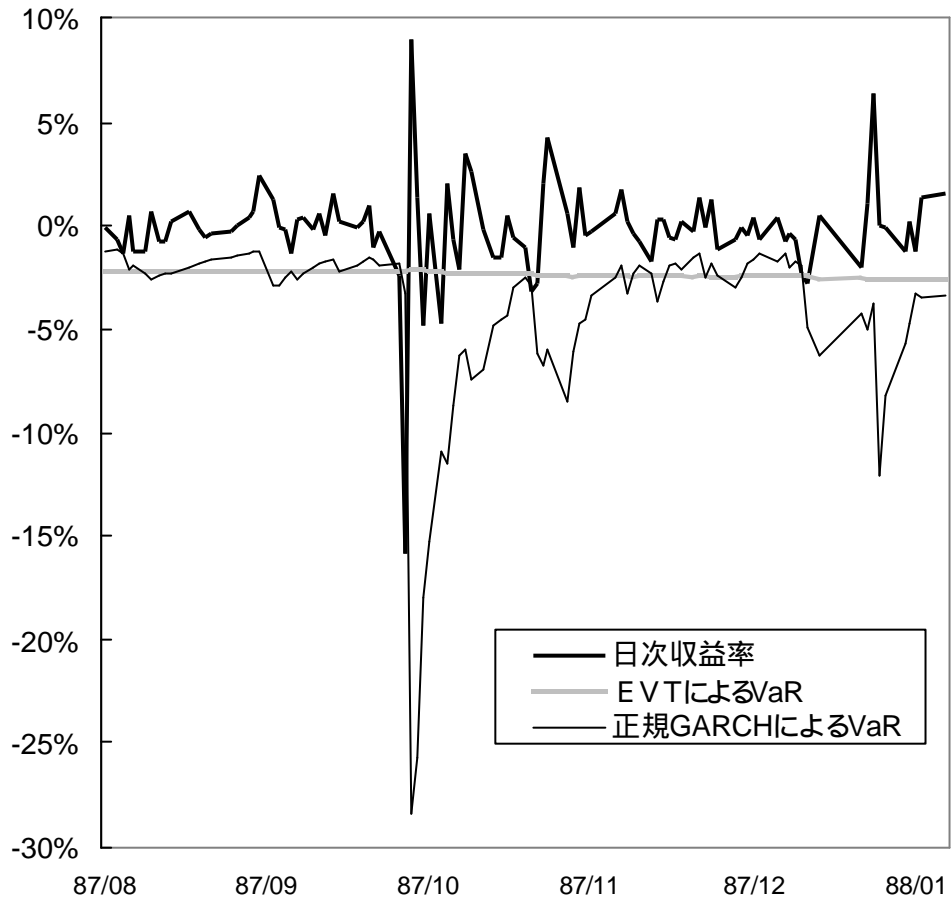
(a) 分布全体

(b) 左裾

【図 2】TOPIX データによる累積度数分布の比較
1989 年 ~ 1999 年



【図 3】 TOPIX の 99%VaR 推定値
- EVT と正規 GARCH の比較 -



参考文献

- 森本祐司、「金融と保険の融合について」、『金融研究』、第19巻別冊第1号、日本銀行金融研究所、2000年
- Basel Committee on Banking Supervision, *Overview of the amendment to the capital accord to incorporate market risk*, 1996.
- Bollerslev, T., “Generalised autoregressive conditional heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 51, 307-327, 1986.
- Danielsson J., “Limits to Risk Modelling,” mimeo, London School of Economics (www.RiskResearch.org), 2000a.
- Danielsson J., “(Un)Conditionality and Risk Forecasting,” mimeo, London School of Economics (www.RiskResearch.org), 2000b.
- Danielsson J., and C.G. de Vries, “Beyond the sample: Extreme quantile and probability estimation,” mimeo, Tinbergen Institute Rotterdam, 1997a.
- Danielsson J., and C.G. de Vries, “Tail index and quantile estimation with very high frequency data,” *Journal of Empirical Finance*, 4, 241-257, 1997b.
- Embrechts, P., A. McNeil, and D. Straumann, “Pitfalls and Alternatives,” *Risk*, Vol.12/No. 5, May, 69-71 1999.
- Feller, W., *An introduction to probability theory and its applications, Volume 1, 2nd Edition*, John Wiley & Sons, Inc., 1957
- Greenspan, A., “Discussion at Symposium: Maintaining Financial Stability in a Global Economy,” p. 54, The Federal Reserve Bank of Kansas City, 1997.
- Hall, P., “Using the bootstrap to estimate mean square error and select smoothing parameter in nonparametric problems,” *Journal of Multivariate Analysis*, 32, 177-203, 1990.
- Hill, B. M., “A simple general approach to inference about the tail of a distribution,” *Annals of Statistics*, 35, 1163-1173, 1975.
- J. P. Morgan, *RiskMetrics-technical manual*, Third Edition, 1995.
- Longin, F., “From value at risk to stress testing: the extreme value approach,” Discussion Paper No. 2161, Center for Economic Policy Research, 1999.

Nelson, D.B., "Conditional heteroskedasticity in asset pricing: a new approach," *Econometrica*, 59, 347-370, 1991.

Resnick S., and C. Starica, "Tail index estimation for dependent data," mimeo, School of ORIE, Cornell University, 1996.