

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

流動性リスク評価方法の
実用化に向けた研究

ひさた よしふみ やまい やすひろ
久田祥史・山井康浩

Discussion Paper No. 2000-J-3

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES
BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

備考：日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

流動性リスク評価方法の実用化に向けた研究

ひさた よしふみ やまい やすひろ
久田祥史*・山井康浩*

要 旨

本稿では、実務への応用を念頭においたうえで、金融商品の市場流動性を織込んだ修正バリュー・アット・リスク（以下、修正 VaR）を算出するための1つの枠組みを提案する。この枠組みでは、市場流動性や投資家の保有ポジションの大きさに応じて、自己の売買に伴うマーケット・インパクトによりポートフォリオの清算価値が影響を受けるメカニズムが取込まれている。具体的には、まず、マーケット・インパクトを考慮して保有ポジションをすべて流動化する上での最適な執行戦略を算出する。次に、この最適執行戦略に基づいて流動化を完了するまでの間に価格変動により被る可能性がある最大損失額、すなわち修正 VaR を算出する。

本稿では、解析解による簡便な計算が可能な修正 VaR 算出のための具体的なモデルを提示し、数値例を算出して修正 VaR のリスク管理実務への応用可能性について考察を行う。また、ここで提示した修正 VaR 算出の枠組みは、マーケット・インパクトが不確実な場合、複数の金融資産からなるポートフォリオを扱う場合、マーケット・インパクトが取引量と非線形な関係にある場合、といったより一般的な状況にも適用可能なことを示す。

キーワード：流動性リスク、バリュー・アット・リスク、市場リスク、マーケット・インパクト、最適執行戦略、最適保有期間

JEL classification: G20

* 日本銀行金融研究所研究第1課(E-mail: yoshifumi.hisata@boj.or.jp, yasuihiro.yamai@boj.or.jp)

本稿は、2000年1月から2月にかけて日本銀行で開催された「リスク計量に関する新たな取り組み」をテーマとする研究ワークショップへの提出論文に加筆・修正を施したものである。同ワークショップ参加者から貴重なコメントを多数頂戴したことを記して感謝したい。

(目次)

1.	はじめに	1
2.	市場流動性を織込んだ修正 VaR 算出の基本的枠組み	1
3.	既存研究の紹介	3
4.	修正 VaR 算出の方法	4
4.1.	離散モデル	4
4.2.	離散モデルにおける最適執行戦略	8
4.3.	離散モデルにおける修正 VaR	10
4.4.	連続モデル	10
4.5.	連続モデルにおける最適執行戦略	11
4.6.	連続モデルにおける修正 VaR	12
5.	数値計算例によるモデルの考察	12
5.1.	従来型 VaR と修正 VaR との比較	13
5.2.	マーケット・インパクト係数の計測誤差の修正 VaR への影響	14
5.3.	連続モデルと離散モデルの差違	15
6.	モデルの一般化	16
6.1.	確率的マーケット・インパクト・モデル	16
6.2.	確率的マーケット・インパクト・モデルの数値例による検討	18
6.3.	ポートフォリオ・モデル	19
6.4.	ポートフォリオ・モデルの数値例による検討	22
6.5.	非線形マーケット・インパクト・モデル	25
6.6.	非線形マーケット・インパクト・モデルの数値例による検討	26
7.	今後の課題	27
8.	終わりに	28
	補論 A 平均・分散アプローチによる最適執行戦略の導出	29
	補論 B 取引コストの平均・分散値の導出	31
	補論 C 数値計算に用いたパラメータの値	32
	補論 D マーケット・インパクト係数の推定方法	33
	補論 E 一時的マーケット・インパクトの初期値に不確実性を導入したモデル	36
	補論 F 恒久的マーケット・インパクトに不確実性を導入したモデル	38
	補論 G マーケット・インパクトと株価の変動に相関を導入したモデル	40
	補論 H ポートフォリオ・モデルにおける取引コストの分散の導出	43
	参考文献	45

1. はじめに

本稿は、実務への応用を念頭においたうえで、金融商品の市場流動性を織込んだ修正バリュー・アット・リスク（以下、修正 VaR）を算定するための1つの枠組みを提案する。このモデルでは、市場流動性や投資家の保有ポジションの大きさに応じて、自己の売買に伴うマーケット・インパクトによりポートフォリオの清算価値が影響を受けるメカニズムが取込まれている。具体的には、マーケット・インパクトを考慮した場合に投資家がとるべき最適な保有ポートフォリオの売却戦略を導出し、この最適執行戦略の下で売却を行った場合に価格変動により被る可能性がある最大損失額、すなわち修正 VaR を算定する。本稿の内容は、小田・久田・山井（1999）で展開した考え方をもとに具体的なモデルを提示したものである。

このように本稿で提示する枠組みは、市場流動性の全ての側面を織込んでいるものではないが、特定の金融商品についてマーケット・インパクトによる影響が無視し得ない場合において、そうした影響を勘案した形でリスクを評価する方法として有効性があると考えられる。

本稿の構成は次の通りである。第2章において修正 VaR 算出の枠組みを簡単に説明し、第3章でこれまでの既存研究を紹介する。第4章では、Almgren and Chriss (1999) で提示されたモデルを実務への応用を念頭に修正したモデルを提示し、第5章では、具体例として数値計算例によりこのモデルの応用可能性について簡単な検証を行う。第6章では、第4章のモデルの前提を緩和した一般化されたモデルを提示する。第7章で今後の研究課題について述べたあと、第8章でまとめを行う。

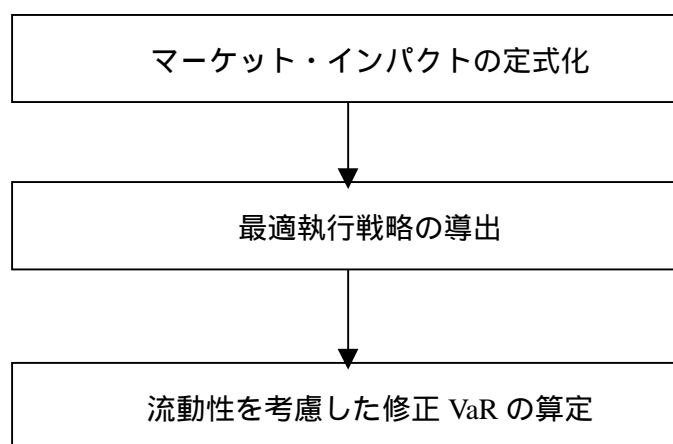
2. 市場流動性を織込んだ修正 VaR 算出の基本的枠組み

我々の提示する枠組みの具体的な説明に入る前に、本章では市場流動性を織込んだ修正 VaR 算出の基本的な考え方について整理する。

従来のバリュー・アット・リスク（以下、VaR）算定においては、保有ポジションのサイズに関係なく一定の時価、一定の期間（典型的には1日）でポジションをクローズできることが前提とされていた。すなわち、自己の取引が価格を変動させる可能性（マーケット・インパクト）を考慮しない、保有ポジションの流動化を短期間で行うことが可能である、ビッド・アスク・スプレッドの変動による影響を考慮しない、といった仮定のうえでリスクが計量されてきた。しかしながら、こうした前提は、ストレス時はいうまでもなく、平常時においても現実的な仮定とは言い難い。

これらの前提を緩めた形で VaR を算定する方法は種々提示されているが¹、本稿では、自己の取引が価格に与える影響（マーケット・インパクト）を明示的に織込む形で VaR を算出するアプローチを展開する。すなわち、自己の取引が価格に与える影響を考慮した最適執行戦略を導出し、これをもとに、流動性リスクを考慮した修正 VaR を算定する。このアプローチでは、図 1 に整理したように 3 つのステップを踏んで流動性を考慮した修正 VaR の算出を行う。

図 1 流動性リスクを考慮した市場リスク計量化の枠組み



まず、執行戦略の最適化問題を定式化するためには、マーケット・インパクトの定式化が必要である。現状、マーケット・インパクトの定式化についてはコンセンサスはなく、様々なアプローチが試みられている。本稿で展開されるモデルでは、マーケット・インパクトを一時的なものと同久的なものに分別し、それぞれが売却量の関数となることを仮定して修正 VaR を算定する。

次に、最適化手法を用いて最適執行戦略が導出される。一般的には、投資家の効用関数を仮定し、効用を最大化させる形で最適執行戦略が導出される。本稿では、保有ポジションを流動化するのにかかるコスト（これを流動化コストと呼ぶ）を定式化し、これを最小化する形で最適執行戦略を導出する。最適執行戦略を得た後には、流動性リスクを考慮した修正 VaR を算定する。具体的には、最適執行戦略に基づいて売り注文を行い保有ポジションの流動化を完了するまでの間に、価格変動により被る可能性がある最大損失額を修正 VaR として算定する。

¹ 市場流動性リスクを明示的に織込んだ修正 VaR の算定方法としては、ここで展開するマーケット・インパクトに着目する方法のほか、ビッド・アスク・スプレッドの変動をリスクとして認識して従来型の VaR に加える方法がある。後者のアプローチについては、Bangia, et al. (1999)を参照。

本稿で提示される枠組みは、トレーディングの対象となる株式・為替・債券関連を始めとした多様な金融資産に応用可能である。しかしながら、従来の VaR とは異なり、修正 VaR 算出のためには対象となる金融資産のマーケット・インパクトを定式化するため、マーケット・インパクトを推計し得るだけの十分な市場データが存在していることが必要である。従って、こうした十分な市場データが存在しない貸出債権や私募債を始めとした流動性の低い商品は本稿の対象外となる。

3. 既存研究の紹介

本稿と同様の問題意識から、保有ポートフォリオの最適執行戦略算出の枠組みを定式化した研究としては、Jarrow and Subramanian (1997)、Bertsimas and Lo (1998)、Lawrence and Robinson (1995)、Almgren and Chriss (1999)、小西 (1999)などが挙げられる。

Jarrow and Subramanian (1997)では、流動化すべき保有ポジションと流動化を行うまでの期間が外生的に与えられた場合、どのようなスケジュールで売却すれば期待売却総額を最大化できるかという問題を解くことによって最適執行戦略を導出している。しかしながら、ここでは売却を完了するまでの価格変動リスクが考慮されていないほか、売却までの期間を外生的に与えているため、修正 VaR の実務への応用といった観点からはこの売却期間を如何に客観的に設定するかが問題となる。Bertsimas and Lo (1998)でも、売却期間が外生的に与えられた場合に期待売却総額を最大化する形で動的最適化 (Dynamic Programming)の手法を用いて最適執行戦略を導出している。ここでは、マーケット・インパクトが売却量に対し線形で資産価格過程がランダム・ウォークに従う場合は均等売却が最適であるとの結論を得ている。しかし、修正 VaR の実務への応用の観点からは Jarrow and Subramanian (1997)と同様、売却を完了するまでの価格変動リスクが織込まれていない、売却期間を外生的に与える必要があるといった問題がある。一方、Lawrence and Robinson (1995)では、平均・標準偏差アプローチを用いて価格変動リスクを織込んで最適執行戦略を導出し、修正 VaR を算出する枠組みを提示している。しかしながら、導出・計算過程が明示されておらず、このまま実務に適用することは困難である。

Almgren and Chriss (1999)では、平均・分散アプローチを用いて最適執行戦略を導出する枠組みを具体的な計算方法などを含めて提示しており、実務への応用可能性が高い。しかしながら、Jarrow and Subramanian (1997)等と同様、売却までの期間は外生的に与える必要があり、実務上はこの売却期間の設定が問題となる。小西 (1999)では、実務への応用を念頭に置き、平均・標準偏差アプローチを用いて連続時点のモデルにより売却期間を内生変数として最適執行戦略を導出する枠組みを提示している。

4. 修正 VaR 算出の方法

本章では、こうした既存研究を踏まえた上で、新しい修正 VaR 算出の方法を提案する。その基本的考え方は、簡便性・具体性ともに高い Almgren and Chriss (1999)の枠組みを売却期間が内生変数となるよう修正するものである²。以下では、離散時点、連続時点それぞれの場合について、モデルの設定、最適執行戦略の導出、修正 VaR の算出の順で説明を行う。モデルの設定は、Almgren and Chriss (1999)に全面的に依拠しているが、最適執行戦略の導出では、実務への応用可能性の観点から、売却期間の内生化、均等売却の仮定など最適化問題の設定に変更を加えた。以下、第 4.1 節から第 4.3 節において離散時点で売却を行う場合のモデル化を行い、第 4.4 節から第 4.6 節において連続時点で売却を行う場合のモデルを扱う。また、本章では保有ポートフォリオが単一の金融資産からなる場合を考え、これが複数の金融資産からなる場合については第 6.3 節、第 6.4 節にて述べることにする。

4.1. 離散モデル

このモデルは通貨、債券、株式など様々な金融資産に応用可能であるが、ここでは説明を簡単にするために対象資産を株式として説明を行うことにする。

株式 X 枚を売却する時、 X がある程度大きければ、一度にすべてを売却するとマーケット・インパクトによる大きな価格低下が生じることになる。そこで、分割して売却を行うことで価格低下を低減する戦略を考える。

具体的には以下のとおりである。売却期間を N 期間に等分割すると考え、区分時点は t_0, t_1, \dots, t_N とする。現時点を $t_0 = 0$ 、最終時点を $t_N = T$ とし各時点の間隔(売却間隔)を τ とすれば、 $k = 0, \dots, N$ に対して $t_k = k\tau$ であり、最終時点に対しては、

$$t_N = T = N\tau \quad (4.1)$$

が成立する。また、(4.1)式は初期保有量 X を売却するまでに要する期間、すなわち株式 X の保有期間と考えることができる³。

次に、各時点における株式保有量を x_0, x_1, \dots, x_N とする。初期株式保有量は $x_0 = X$ 、最終時点での株式保有量は $x_N = 0$ である。

² なお、小西(1999)でも、売却期間を生変数として連続時点の最適執行戦略の導出方法が提示されているが、本稿で行うような市場流動性を織込んだ修正 VaR の導出は行っていない。

³ 本稿では、売却開始から完了までにかかる期間を保有期間として修正 VaR の算出を行うことにする。

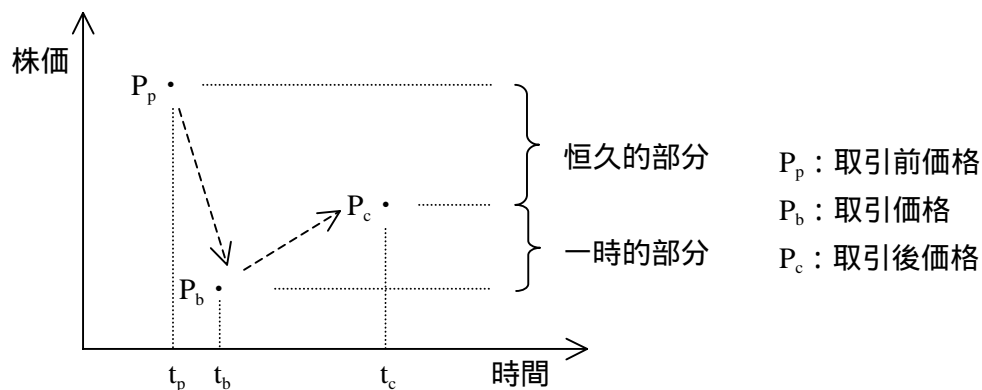
また、各期間において売却する株式量を n_1, \dots, n_N とし、 k 番目の期間における単位時間あたりの株式売却量を、

$$v_k = \frac{n_k}{\tau} \quad (4.2)$$

と定義する。

Holthausen, Leftwich, and Mayers (1987)では、マーケット・インパクトは均衡価格を低下させる恒久的マーケット・インパクトと、一時的に価格を低下させる一時的マーケット・インパクトに分解できると仮定している(図2)。つまり、売却直後に恒久的マーケット・インパクト⁴による価格低下と一時的マーケット・インパクトによる価格低下が同時に起こり、その後一時的マーケット・インパクトによる価格低下分だけ、価格は回復するというメカニズムが想定されている。Almgren and Chriss (1999)においても、このメカニズムを想定してマーケット・インパクトをモデル化しており、本論でもこのメカニズムを仮定する。

図2 売却の場合の恒久的マーケット・インパクトと一時的マーケット・インパクト



また、ここでは売却間隔 τ について、Holthausen, Leftwich and Mayers (1987)と同様の解釈を行う⁵。すなわち、売却間隔 τ は、売却を行ってからマーケット・インパクトの一時的部分の効果が解消するまでの時間($t_c - t_b$)と解釈する。この解釈では、売却間隔 τ は、売却後の価格収斂速度に依存し、価格収斂速度は各金融商品や金融市場に固有の性

⁴ 実際の市場データからマーケット・インパクトを推計する際は、売却後に価格が回復する部分を一時的マーケット・インパクトとし、これを除いた部分が恒久的マーケット・インパクトとして定義される。

⁵ Almgren and Chriss (1999)では、売却間隔を所与として議論を進めているが、その具体的な意味付けは不明である。

質によって決まると考えられることから、この売却間隔を金融商品や市場の性質から決まる外生的なパラメータとして、最適保有期間を導出することが可能となる。実際には、売却間隔を投資家の操作変数とすることにより執行戦略の最適性を高められる可能性があるが、この場合、一時的マーケット・インパクトの収斂などマーケット・インパクトのダイナミズムを定式化する必要が生じ、最適化問題が複雑化することとなる。従って、売却間隔を投資家の操作変数とすることは今後の課題とし、ここでは上記解釈の下で議論を進めることとする。

さらにここでは、Almgren and Chriss (1999)にならい、マーケット・インパクトは株式売却量に対して線形であると仮定する⁶。まず、恒久的マーケット・インパクトについては期間 k での株式売却量 n_k を用いて、 γ_k で表わされると仮定し、 γ を恒久的マーケット・インパクト係数と呼ぶ。

Almgren and Chriss (1999)では、価格はドリフト、ボラティリティ、マーケット・インパクトという3つの要因により変動すると仮定している。このうちドリフト、ボラティリティは自己の取引に関わらない変動要因(当該銘柄のファンダメンタルに係るニュースなど)、マーケット・インパクトは自己の取引を原因とした変動要因であると仮定される。自己の取引に関わらない市場全体の変動がドリフト、ボラティリティを用いて算術的ランダム・ウォークにより表現されると仮定すると、恒久的マーケット・インパクトを考慮した t_k での“市場価格” S_k は、

$$\begin{aligned} S_k &= S_{k-1} + \sigma \tau^{\frac{1}{2}} \xi_k + \mu \tau - \gamma_k \\ &= S_0 + \sigma \sum_{j=1}^k \tau^{\frac{1}{2}} \xi_j + \mu k - \gamma(X - x_k) \end{aligned} \quad (4.3)$$

として表される。 μ は株価のドリフト、 σ は株価のボラティリティ⁷を表す。 ξ_j は平均0、分散1のそれぞれ独立な正規分布に従う確率変数である。(4.3)式は、価格変動を算術的ランダム・ウォークにより表現した第1～3項と、恒久的マーケット・インパクトによる価格低下を表現した第4項からなる。ファイナンス理論においては価格変動は幾何的ランダム・ウォークで表現されることが多いが、Almgren and Chriss (1999)では、「取引期間を比較的短期間と考えれば両者による差はほとんど無視することができる」として計算上の扱いが比較的容易な算術的ランダム・ウォークによりモデル化を行っており、本論でもこれにならうこととする。

⁶ マーケット・インパクトが線形でない場合の考察は第6章において行う。

⁷ ここで用いられている算術的ランダム・ウォークにおいてはボラティリティの単位は円/株となる。ここで用いられている円/株を単位としたボラティリティを%を単位としたボラティリティに変換するためには、初期時点の資産価格などによってボラティリティを除ることが必要となる。

一方、投資家が売却可能な価格は、この“市場価格”から一時的マーケット・インパクトにより価格が低下した後の金額で行われるものと仮定する。すなわち、一時的マーケット・インパクトが単位時間当りの株式売却量 v_k により $\varepsilon + \eta v_k$ (ε : ビッド・アスク・スプレッド、 η : 一時的マーケット・インパクト係数) で表わされると仮定すると、一時的マーケット・インパクトを考慮した投資家の“売却価格” \tilde{S}_k は、売却時で一時的マーケット・インパクトによる価格低下を考慮して、

$$\tilde{S}_k = S_k - \varepsilon - \eta v_k \quad (4.4)$$

と表される⁸。恒久的マーケット・インパクトと一時的マーケット・インパクトを同時に考慮すれば、(4.3)式と(4.4)式から(4.5)式を得ることができる。

$$\tilde{S}_k = S_0 + \underbrace{\sigma \sum_{j=1}^k \tau^{\frac{1}{2}} \xi_j + \mu t_k - \gamma(X - x_k) - \varepsilon - \eta v_k}_{\text{}} \quad (4.5)$$

(4.5)式は“売却価格”が、算術的ランダム・ウォーク、恒久的マーケット・インパクトによる価格低下、一時的マーケット・インパクトによる価格低下によって構成されていることを示している。

期間 k での売却額は $n_k \tilde{S}_k$ となるため、初期保有量 X を全て売却した時、つまり最終的に得られる総売却額を $X\bar{S}$ とすれば、(4.5)式より、

$$\begin{aligned} X\bar{S} &= \sum_{k=1}^N n_k \tilde{S}_k \\ &= XS_0 + \sigma \sum_{k=1}^N \tau^{\frac{1}{2}} x_k \xi_k + \mu \sum_{k=1}^N \tau x_k - \gamma \sum_{k=1}^N n_k (X - x_k) - \varepsilon X - \eta \sum_{k=1}^N \tau v_k^2 \quad (4.6) \\ &= XS_0 + \sigma \sum_{k=1}^N \tau^{\frac{1}{2}} x_k \xi_k + \mu \sum_{k=1}^N \tau x_k - \frac{1}{2} \gamma X^2 - \varepsilon X - (\eta + \frac{1}{2} \gamma \tau) \sum_{k=1}^N \tau v_k^2 \end{aligned}$$

となる⁹。初期時点ではポジション評価額(時価) XS_0 を保有していたはずが、実際に売却を行うことによってその価値が $X\bar{S}$ になったのであるから、この差を売却のための

⁸ Almgren and Chriss(1999)では、 k 時点での売却価格は $k-1$ 時点での市場価格に一時的マーケット・インパクトを加えたものであるとして、 $\tilde{S}_k = S_{k-1} - \varepsilon - \eta v_k$ としている。しかしながら、これは Holthausen, Leftwich and Mayers (1987)によるマーケット・インパクトの定式化と一致しない。このため、Holthausen, Leftwich and Mayers (1987)にならう形で(4.4)式で一時的マーケット・インパクトを定式化した。

⁹ ここでは、売却が比較的短期間(具体的には1日~20日前後)で完了することを想定しているため、計算の簡便化のために将来の売却収入の現在価値と将来価値はほぼ等しいと仮定し、無リスク金利による将来収入の割引は行わないものとする。

コストと考え、これを取引コスト C と定義する。取引コストは、

$$\begin{aligned} C &= XS_0 - X\bar{S} \\ &= -\sigma \sum_{k=1}^N \tau^2 x_k \xi_k - \mu \sum_{k=1}^N \alpha_k + \frac{1}{2} \gamma X^2 + \varepsilon X + \left(\eta + \frac{1}{2} \gamma \tau\right) \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

と表すことができる¹⁰。

(4.7)式において、 ξ_k が正規分布に従う確率変数であるので、その和を項として含む C も正規分布に従う確率変数である。正規分布の性質は二次までのモーメントで記述できるため、取引コストの期待値と分散を計算するとそれぞれ、

$$E[C] = -\mu \sum_{k=1}^N \alpha_k + \frac{1}{2} \gamma X^2 + \varepsilon X + \left(\eta + \frac{1}{2} \gamma \tau\right) \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 \quad (4.8)$$

$$V[C] = \sigma^2 \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 \quad (4.9)$$

となる。ただし、 $E[\bullet]$ 、 $V[\bullet]$ はそれぞれ期待値、分散を算出する演算子を表す。

4.2 離散モデルにおける最適執行戦略

本節では、第4.1節でのモデルを用いて最適執行戦略を導出する。そのエッセンスは、保有ポジションを流動化するのにかかるコスト（流動化コスト）を最小化するものである。Almgren and Chriss (1999)のアプローチは保有期間を外生変数として最適執行戦略を求めるものであるが、本稿では VaR の保有期間を客観的に決定するために、均等売却を仮定して最適保有期間を求めるアプローチを取る。また、当初導出された最適執行戦略は、執行途中にマーケットなどの状況変化に応じて変更されることはないとは仮定する。

本稿では、投資家が保有ポジションを流動化するのにかかるコストを最小化する形で最適執行戦略を決定すると考える。ここでそのコストを取引コストの平均値と保有ポジションのリスク（標準偏差）に起因するコストの和と考え、(4.10)式のように最適執行戦略を決める目的関数を定式化する。

$$L = E[C] + r Z_\alpha \sqrt{V[C]} \quad (4.10)$$

但し、 r は資本コスト率、 Z_α は標準正規分布における上側 $100\alpha\%$ 点を表わす。

右辺第一項は、取引コスト C の平均値であり、(4.8)式から分かるようにビッドアスク・スプレッドやマーケット・インパクトに伴う平均的な価格低下などから構成される。

¹⁰ 取引コスト C は、負の値も取り得る。

一方、右辺第二項は、取引コスト C の標準偏差に資本コスト率 r 、標準正規分布における上側 $100\alpha\%$ 点 Z_α を乗じたものであり、保有ポジションのリスクに起因するコストを金額ベースで表わしている。すなわち、(4.10)式の $\sqrt{V[C]}$ は取引コストの標準偏差を表わしているが、当初ポジション評価額（時価） XS_0 が確定的であることから、これは売却総額 $X\bar{S}$ の標準偏差に一致し、売却開始から完了までに保有ポジションの抱える市場リスクを表わしていることが分かる。従って、これに標準正規分布における上側 $100\alpha\%$ 点 Z_α ¹¹ を乗じた $Z_\alpha\sqrt{V[C]}$ は保有ポジションの上側 $100\alpha\%$ における VaR を表わす。ここでリスク・キャピタルに対する資本コスト率を r とすると、VaR 値 $Z_\alpha\sqrt{V[C]}$ に資本コスト率 r を乗じた値 $rZ_\alpha\sqrt{V[C]}$ は保有ポジションのリスクに起因するコストを表わしている。本稿では、投資家は保有ポジションの売却に係る意思決定を行う際はこの流動化コストを最小化する執行戦略を最適執行戦略として採用するものとする¹²。

均等売却を仮定したので、(4.8)式、(4.9)式は、

$$E[C] = -\frac{1}{2}\mu\tau X(N-1) + \frac{1}{2}\gamma X^2 + \varepsilon X + \frac{\eta X^2}{\tau N} + \frac{\gamma X^2}{2N} \quad (4.11)$$

$$V[C] = \frac{1}{3}\sigma^2\tau X^2 N\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{1}{2N}\right) \quad (4.12)$$

となる¹³。(4.10)式、(4.11)式、(4.12)式より流動化コストは、

$$\begin{aligned} L &= E[C] + rZ_\alpha\sqrt{V[C]} \\ &= -\frac{\mu\tau X(N-1)}{2} + \frac{\gamma X^2}{2} + \varepsilon X + \frac{\eta X^2}{\tau N} + \frac{\gamma X^2}{2N} + rZ_\alpha\sqrt{\frac{\sigma^2\tau X^2}{3}N\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{1}{2N}\right)} \quad (4.13) \end{aligned}$$

となる。この流動化コストを最小にするような、最適な分割回数 N についての条件は、

¹¹ Z_α は投資家のリスク回避度に応じて決められるものである。

¹² 本稿では、Lawrence and Robinson (1995)にならい、標準偏差を使って目的関数の定式化を行った。しかし、これとは異なった目的関数の設定が考えられる。すなわち、標準偏差の代わりに分散を用いる場合、期待効用仮説と整合的な形で目的関数を定式化することができる（補論A参照）。ただし、分散を使って定式化する場合は、投資家のリスク回避度を表わすパラメータを別途推計する必要があるが生じる。一方、本稿の標準偏差を使った定式化を用いれば、投資家のリスク回避度を Z_α というパラメータで織込むことができる。また、(4.10)式は単位が金額ベースとなるため実務上の意味付けが与え易いという面もある。

¹³ 均等売却の場合 $v_k = \frac{X}{T} = \frac{X}{\tau N}$ 、 $x_k = \left(1 - \frac{k}{N}\right)X$ となることから、これを(4.8)式、(4.9)式に代入することで(4.11)式、(4.12)式を得る。

$$\frac{\partial L}{\partial N} = -\frac{\mu\tau X}{2} - \frac{\eta X^2}{\tau N^2} - \frac{\gamma X^2}{2N^2} + \frac{rZ_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2 \tau X^2}{3} \left(1 - \frac{1}{2N^2}\right)}}{2\sqrt{N - \frac{3}{2} + \frac{1}{2N}}} = 0 \quad (4.14)$$

である。この条件は N についての 6 次多項方程式に整理できるが、解析的な一意解を得ることは困難であるため、解は数値計算によって求める必要がある。なお、仮に売却までの短期間においては株価の期待収益率は無視し得ると仮定した場合 ($\mu = 0$)、この条件は、以下のように簡便化できる。

$$\frac{(N^2 - \frac{1}{2})}{2\sqrt{N - \frac{3}{2} + \frac{1}{2N}}} = \left(\frac{\eta}{\tau} + \frac{\gamma}{2}\right) \frac{\sqrt{3}X}{rZ_\alpha \sigma \sqrt{\tau}} \quad (4.15)$$

(4.15)式から導出される最適分割回数 N を(4.1)式に代入することで最適保有期間を求めることができる。

4.3. 離散モデルにおける修正 VaR

第 4.2 節でも触れたように、(4.10)式の $\sqrt{V[C]}$ は保有ポジションの抱える市場リスクを表わし、標準正規分布の上側 100 $\alpha\%$ 点 Z_α を乗じた $Z_\alpha \sqrt{V[C]}$ は保有ポジションの上側 100 $\alpha\%$ における VaR を表わすことから、修正 VaR は、最適執行戦略に基づいて売却を行った場合の(4.16)式として算出される。

$$\text{修正 VaR} = Z_\alpha \sqrt{V[C]} \quad (4.16)$$

4.4. 連続モデル

第 4.1 節から第 4.3 節で見たように離散モデルの場合、解析解が得られない。実務への応用を考えた場合、近似的な方法であっても解析解が求まることが望ましいケースもあると考えられる。このため、本節では前節の離散時点モデルの連続極限をとった連続時点モデルについて検討することとする。以下でみるとおり、連続時点モデルでは、最適保有期間および修正 VaR について解析解を得ることができる。

枠組みは離散モデルの場合と同様であり、記号についても離散モデルと同様な設定を行うこととする。以下では、時点 t における各変数の値をカッコを付して表記し¹⁴、 $z(t)$ を標準ブラウン運動とする。

¹⁴ 例えば、時点 t での価格 \tilde{S}_t を $\tilde{S}(t)$ と表記した。

マーケット・インパクトを考慮した“売却価格”過程は、各パラメータを一定にしたうえで(4.5)式の売却時点に関して連続極限をとる($\tau \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$)ことにより次のように表すことができる。

$$\tilde{S}(t) = S(0) + \mu t + \sigma z(t) - \varepsilon - \eta v(t) - \gamma \int_0^t v(s) ds \quad (4.17)$$

売却を行うので dx が負値であることを考慮すると、総売却額は $-\int_0^T \tilde{S}(t) dx$ である。

$v(t) = v$ (一定) つまり均等売却の場合、 $dx = -v dt$ であるので、

$$\begin{aligned} -\int_0^T \tilde{S}(t) dx &= v \int_0^T \tilde{S}(t) dt \\ &= v \int_0^T \left\{ S(0) + \mu t + \sigma z(t) - \varepsilon - \eta v - \gamma \int_0^t v ds \right\} dt \\ &= XS(0) + \frac{1}{2} \mu v T^2 + v \sigma \int_0^T z(t) dt - \varepsilon v T - \eta v^2 T - \frac{1}{2} \gamma v^2 T^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

となる¹⁵。これより、連続モデルでの取引コストは、

$$\begin{aligned} C &= XS(0) - \left(-\int_0^T \tilde{S}(t) dx \right) \\ &= -\frac{1}{2} \mu v T^2 - v \sigma \int_0^T z(t) dt + \varepsilon v T + \eta v^2 T + \frac{1}{2} \gamma v^2 T^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

と表すことができる。取引コストの期待値と分散は、若干の計算により¹⁶、

$$E[C] = -\frac{1}{2} \mu v T^2 + \varepsilon v T + \eta v^2 T + \frac{1}{2} \gamma v^2 T^2 = -\frac{1}{2} \mu X T + \varepsilon X + \frac{\eta X^2}{T} + \frac{1}{2} \gamma X^2 \quad (4.20)$$

$$V[C] = v^2 \sigma^2 V \left[\int_0^T z(t) dt \right] = \frac{1}{3} v^2 \sigma^2 T^3 = \frac{1}{3} T \sigma^2 X^2 \quad (4.21)$$

と計算できる(補論B参照)。

4.5. 連続モデルにおける最適執行戦略

離散モデルと同様に投資家の流動化コストを以下のように考える。

¹⁵ 第一項の導出には、 $X = \int_0^T v dt$ を用いた。

¹⁶ 式の変形には $X = vT$ を用いた。

$$L = E[C] + rZ_\alpha \sqrt{V[C]} = -\frac{1}{2}\mu XT + \varepsilon X + \frac{\eta X^2}{T} + \frac{1}{2}\gamma X^2 + rZ_\alpha \sqrt{\frac{1}{3}T}\sigma X \quad (4.22)$$

流動化コストを最小にするような T についての条件は、

$$\frac{\partial L}{\partial T} = -\frac{1}{2}\mu X - \frac{\eta X^2}{T^2} + \frac{rZ_\alpha}{2} \sqrt{\frac{1}{3T}}\sigma X = 0 \quad (4.23)$$

であるので、 $\mu = 0$ の場合、最適保有期間は、

$$T = \left(\frac{2\sqrt{3}\eta X}{rZ_\alpha \sigma} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.24)$$

と求めることができる。 $\mu = 0$ の場合、最適保有期間は保有ポジション X および一時的マーケット・インパクト係数 η の 3 分の 2 乗に比例することが分かる。

4.6 .連続モデルにおける修正 VaR

修正 VaR は、(4.24) 式の最適保有期間を(4.16)式および(4.21)式に代入することにより、

$$\text{修正VaR} = \left(\frac{2\eta\sigma^2 Z_\alpha^2 X^4}{3r} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.25)$$

と求めることができる。 $\mu = 0$ の場合、最適保有期間は保有ポジション X の 3 分の 4 乗、および一時的マーケット・インパクト係数 η の 3 分の 1 乗に比例することが分かる。

5 . 数値計算例によるモデルの考察

本章では、第4章において提案した枠組みを基に修正 VaR の数値例を算出し、この枠組みの実務への応用可能性の考察を行う。なお、本稿はマーケット・インパクトの実証的な計測方法を提案するものではなく、マーケット・インパクトの定式化に一定の前提をおいたうえで、如何にして修正 VaR を算出することができるかを示したものである。本稿では、マーケット・インパクトを簡便に計測する方法の一つとして、各銘柄の板の形状¹⁷からマーケット・インパクト係数を推定するという方法を用いて数値例の計算に適用した。なお、具体的に用いた数値およびパラメータ推定の方法は各々補論C、

¹⁷ 板の形状を推定するためのデータは、東京証券取引所のティック・データを Bloomberg 社から入手。

Dに詳述した。

本章では、実務への応用の観点から、以下の3点について考察を加える。まず、第5.1節では、連続時点モデルを用いて従来型の VaR と修正 VaR との比較を行い、修正 VaR の持つ性質について簡単な考察を加える。次に第5.2節では、マーケット・インパクト係数の振れがどの程度修正 VaR の算出に影響を及ぼすかについて考察する。最後に第5.3節において、解析解の得られる連続時点モデルを離散時点モデルの近似として位置づけ、修正 VaR 値の乖離度合いから連続モデルと離散モデルの相違について考察を行うこととする。

5.1.従来型 VaR と修正 VaR との比較

本節では、従来型の VaR と修正 VaR の具体的な数値例を計算し、従来型の VaR と比べた修正 VaR の特徴について簡単な考察を行う。具体的には、本邦の株式銘柄からマーケット・インパクトが小さいと考えられる銘柄として A 社株、大きいと考えられる銘柄として B 社株を取上げ、それぞれについて2つの保有ポジション額での従来型の VaR と修正 VaR および最適保有期間を算出した。表1に算出した結果を示す。なお、従来型の VaR の保有期間については、短期間の売却を想定して1日と仮定した。

表 1 従来型の VaR と修正 VaR の試算結果（時点：連続）

	保有ポジション額 (千円)	従来型のVaR		修正VaR		(b)/(a)
		保有期間(日)	VaR(千円)(a)	保有期間(日)	VaR(千円)(b)	
A社株 (1999.9.29)	165,500	1.00	8,567	0.09	1,472	0.17
	1,655,000	1.00	85,669	0.41	31,714	0.37
B社株 (1999.9.29)	165,500	1.00	11,846	4.32	14,208	1.20
	1,655,000	1.00	118,464	20.03	306,105	2.58

まず、表1によると、修正 VaR においては、保有期間は各銘柄のマーケット・インパクトの大小やポジション額の大きさに応じて大きく変化していることが分かる。特に、保有ポジション額が大きい場合、保有期間もこれに応じて長期化する。このため、従来型の VaR は保有ポジション額に線形であるのに対して、修正 VaR は保有ポジション額に非線形となる。例えば、A 社株・B 社株ともに保有ポジション額が10倍になると、修正 VaR は約22倍となっている¹⁸。

また、A 社、B 社を比較することで、相対的に流動性が高い(低い)銘柄については従来型の VaR は修正 VaR に対しリスク量を過大(過小)評価する可能性があることが分

¹⁸ 連続時点モデルでの修正 VaR は(4.25)式から初期保有ポジション額の3分の4乗に比例する。従って、ポジション額が10倍となった場合、修正 VaR は $10^{\frac{4}{3}} = 21.5$ 倍となる。

かる。

5.2.マーケット・インパクト係数の計測誤差の修正 VaR への影響

第4章で述べたように、マーケット・インパクトにコンセンサスのある計測手法は存在しないのが現状である。そこで、本章での数値計算では当該銘柄の板の形状からマーケット・インパクト係数を推定するという簡便な方法を用いた。しかしながら、こうした方法は、マーケット・インパクトの計測方法としては必ずしも満足できるものではなく、計測誤差も無視できないものである可能性がある。このため、本節ではマーケット・インパクトの計測誤差がどの程度修正 VaR 値に影響を与えるかを、マーケット・インパクト係数の変化率に対する修正 VaR の変化率を調べることによって考察する。

(4.25)式から、一時的マーケット・インパクト係数は3分の1乗のオーダーで修正 VaR に影響を与えることが分かる。このことを、一時的マーケット・インパクト係数の変化率に対する修正 VaR の変化率として数値的に示すと、表2のようになる。

表2 マーケット・インパクト係数の変化率に対する修正 VaR の変化率

マーケット・インパクトの変化率	修正 VaR の変化率
▲90%	▲54%
▲50%	▲21%
▲25%	▲9%
▲10%	▲3%
▲5%	▲2%
±0%	±0%
+5%	+2%
+10%	+3%
+25%	+8%
+50%	+14%
2倍	+26%
5倍	+71%
10倍	2.15倍

表2によれば、修正 VaR の変化率はマーケット・インパクト係数の変化率ほどは大きくないことが分かる。特に、マーケット・インパクト係数の変化が±25%以内に収まる場合は、修正 VaR の変化は±10%以内に収まるほか、マーケット・インパクト係数が2倍となった場合でも、修正 VaR の変化は+26%に収まっている。このように修正 VaR の変動がマーケット・インパクト係数の変動に比べて小さいという点では、本稿で提示されたモデルは係数の計測誤差に対してある程度頑健性があるとみることができる。

5.3.連続モデルと離散モデルの差違

第5.1節では、修正 VaR 算出の枠組みの一つとして連続時点モデルを提示したが、実際の市場では連続時点で売却を行うことは不可能であり、現実をより正確にモデル化しているのは離散時点モデルであるといえる。しかしながら、連続時点モデルは解析解が得られるというメリットを有しており、より簡便な修正 VaR 算出の枠組みを提示するという本稿の目的からは、離散時点モデルよりも連続時点モデルの方が望ましい。したがって、実務への応用を考えると、連続時点モデルを離散時点モデルの近似として捉え、この近似誤差の評価によって、連続時点モデルをリスク計量に用いるとの考え方が有り得る。こうした観点から、本節ではこの近似誤差、すなわち連続時点と離散時点でそれぞれ算出した場合の修正 VaR の差異について検討する。

表 3 連続時点モデルの近似誤差（ポジション額 1.7 億円）

A 社株		B 社株	
τ (日*)	(連続-離散)/離散*100	τ (日*)	(連続-離散)/離散*100
0.000	0.000%	0.000	0.000%
0.005	6.076%	0.005	0.116%
0.010	13.169%	0.010	0.232%
0.015	21.589%	0.015	0.349%
0.020	31.803%	0.020	0.466%
0.025	44.560%	0.025	0.584%
0.030	61.191%	0.030	0.701%

*0.02 日 = 約 5 分 (1 日 = 4.5 時間<取引所の営業時間> = 270 分)

表 3は、表 1での初期保有ポジション額 1.7 億円のケース（A 社株、B 社株）において、各パラメータを一定として売却間隔 τ ($0 \leq \tau \leq 0.03$) が異なる場合の連続時点モデルによる近似誤差を示したものである。例えば、表 3において、売却間隔 $\tau = 0.02$ 日で A 社株の売却を行う場合の修正 VaR を連続時点モデルで近似した場合、その誤差は +30% 強となる一方、B 社株の売却を行う場合の修正 VaR の連続時点モデルによる近似誤差は +0.5% 弱に過ぎないことが分かる。第 4.1 節で述べたとおり、売却間隔 τ は各金融商品の価格収斂速度に依存すると考えられるため、価格収斂速度が速く（売却間隔が短く）マーケット・インパクトが大きい場合は連続時点モデルによる近似誤差は小さくなる一方、価格収斂速度が遅く（売却間隔が長く）マーケット・インパクトが小さい場合は近似誤差は大きくなることが分かる。

このように連続時点モデルを使うことに伴う誤差は τ に依存する。この点については、Holthausen, Leftwich and Mayers (1987)では売却後価格が回復するまでの時間はきわめて

短時間¹⁹であるとしており、 τ を比較的短時間に設定できると考えられる。したがって離散時点モデルの近似として連続時点モデルを用いることにはある程度妥当性があると考えられる。

6. モデルの一般化

本章では、第4章で展開したモデルの前提を緩め、より一般的なケースに適用できるよう拡張を行う。その拡張は、マーケット・インパクトに不確実性を導入する(第6.1、第6.2節)、ポートフォリオ(複数金融資産)を扱う(第6.3、第6.4節)、売却量と非線形なマーケット・インパクトを導入する(第6.5、第6.6節)の3点である。それぞれはじめにモデルの設定を行い、その後修正 VaR の数値計算例を用いて考察を加える。例として使用するパラメータの数値は、特に言及されている場合を除き、第5章と同じ値を使うこととする。また、本章では、計算を簡便化するため、すべて連続時点モデルによって議論を行う。

6.1. 確率的マーケット・インパクト・モデル

第4章で展開したモデルでは、マーケット・インパクトのパラメータは全て定数であり、マーケット・インパクト関数は確定的であることを仮定した。しかしながら、現実にはマーケット・インパクトのパラメータは変動すると考えられる。これを踏まえて、本節では、一時的マーケット・インパクトに不確実性を導入した連続時点のモデルを提示する。

ここでは一時的マーケット・インパクト係数が算術的ランダム・ウォークに従うとして不確実性を導入することとする²⁰。すなわち、 t 時点での一時的マーケット・インパクト係数を、

$$\eta_t = \eta_0 + \sigma_\eta z_\eta(t) \quad (6.1)$$

と定義する²¹。但し、 η_0 は時点0での一時的マーケット・インパクト、 σ_η は一時的マ

¹⁹ 具体的には、売却の場合の一時的マーケット・インパクトによる価格低下からの回復は、売却から数えて3回目までにはすべて完了するとされている。

²⁰ 一時的マーケット・インパクトに不確実性を導入する方法としては、マーケット・インパクト係数の初期値 η_0 が正規分布に従い、以降は初期値で執行終了まで一定となるとして定式化する方法も考えられる。この場合の考察については、補論E参照。

²¹ 恒久的マーケット・インパクトに不確実性を導入したモデルも同様に考えることができる(補論F参照)。

マーケット・インパクトのボラティリティ、 $z_\eta(t)$ は標準ブラウン運動とする。

“売却価格”過程は(6.2)式のように表すことができる。

$$\tilde{S}(t) = S(0) + \mu t + \sigma z(t) - \varepsilon - \{\eta_0 + \sigma_\eta z_\eta(t)\}v(t) - \gamma \int_0^t v(s) ds \quad (6.2)$$

ここで、マーケット・インパクトの変動と株価の変動は互いに影響しないと考え、 $z(t)$ と $z_\eta(t)$ は独立であると仮定する²²。(6.2)式の下での総売却額は、

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \tilde{S}(t) dx \\ & = XS(0) + \frac{1}{2} \mu v T^2 + v \sigma \int_0^T z(t) dt - \varepsilon v T - \eta_0 v^2 T - v^2 \sigma_\eta \int_0^T z_\eta(t) dt - \frac{1}{2} \gamma v^2 T^2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

となる。取引コストは、

$$C = -\frac{1}{2} \mu v T^2 - v \sigma \int_0^T z(t) dt + \varepsilon v T + \eta_0 v^2 T + v^2 \sigma_\eta \int_0^T z_\eta(t) dt + \frac{1}{2} \gamma v^2 T^2 \quad (6.4)$$

と表される。取引コストの期待値と分散は、 $z(t)$ と $z_\eta(t)$ の独立性から、

$$E[C] = -\frac{1}{2} \mu v T^2 + \varepsilon v T + \eta_0 v^2 T + \frac{1}{2} \gamma v^2 T^2 = -\frac{1}{2} \mu X T + \varepsilon X + \frac{\eta_0 X^2}{T} + \frac{1}{2} \gamma X^2 \quad (6.5)$$

$$V[C] = \frac{1}{3} v^2 \sigma^2 T^3 + \frac{1}{3} v^4 \sigma_\eta^2 T^3 = \frac{1}{3} X^2 \left(\sigma^2 T + \frac{\sigma_\eta^2 X^2}{T} \right) \quad (6.6)$$

となる。次に、流動化コストを以下のように考える。

$$L = -\frac{1}{2} \mu X T + \varepsilon X + \frac{\eta_0 X^2}{T} + \frac{1}{2} \gamma X^2 + r Z_\alpha \sqrt{\frac{1}{3} X^2 \left(\sigma^2 T + \frac{\sigma_\eta^2 X^2}{T} \right)} \quad (6.7)$$

最適保有期間は(6.8)式で与えられる。これには解析解は存在しないため、解は数値計算によって求める必要がある。

$$\frac{\partial L}{\partial T} = -\frac{1}{2} \mu X - \frac{\eta_0 X^2}{T^2} + \frac{r Z_\alpha X^2}{3} \left(\sigma^2 - \frac{\sigma_\eta^2 X^2}{T^2} \right) \left\{ \frac{X^2}{3} \left(\sigma^2 T + \frac{\sigma_\eta^2 X^2}{T} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (6.8)$$

修正 VaR は(6.8)式を T について解いた解を(6.6)式に代入して平方根をとり、標準正規分布の上側100 α %点 Z_α を乗じて得ることができる。

²² ここでは、計算の簡便化のために独立性の仮定をおいたが、 $z(t)$ と $z_\eta(t)$ との間に相関を導入してモデルの一般化を行うことも可能である(補論G参照)。

6.2. 確率的マーケット・インパクト・モデルの数値例による検討

本節では、第5章で用いたパラメータの数値例を使って確率的マーケット・インパクト・モデルでの数値計算を行い、前節で提示したモデルについて考察を行う。

まず、マーケット・インパクトが小さいと考えられる銘柄としてA社株、大きいと考えられる銘柄としてB社株の数値計算例をそれぞれ表4に示す。表中の比率ボラティリティは、一時的マーケット・インパクト係数の1年間の変動の標準偏差を現在の一時的マーケット・インパクト係数で除したものである。

表4 確率的マーケット・インパクト下での修正 VaR

保有ポジション額: 1,655 百万円

▽A 社株

比率ボラティリティ*	最適保有期間 (日)	修正VaR (千円)
0%	0.411	31,714
25%	0.411	31,714
50%	0.411	31,714
75%	0.411	31,714
100%	0.411	31,714
125%	0.411	31,715
150%	0.411	31,715
200%	0.411	31,716
500%	0.411	31,727

▽B 社株

比率ボラティリティ*	最適保有期間 (日)	修正VaR (千円)
0%	20.03	306,105
25%	20.03	306,121
50%	20.03	306,168
75%	20.04	306,246
100%	20.05	306,355
125%	20.06	306,495
150%	20.07	306,665
200%	20.10	307,099
500%	20.43	312,146

* 比率ボラティリティ=(一時的マーケット・インパクトの年率標準偏差)/(一時的マーケット・インパクト)

この結果から分かるように、マーケット・インパクトの不確実性が極めて高い場合を除いては、マーケット・インパクトの不確実性が修正 VaR 値に与える影響は限定的であることが分かる。この理由としては、株価の変動に伴う取引コストの変動に比べ、マーケット・インパクトの変動に伴う取引コストの変動が極めて小さいことが挙げられる。すなわち、取引コストの分散 $V[C]$ を株価の変動による部分 $V_{price}[C]$ とマーケット・インパクトの変動による部分 $V_{MI}[C]$ に分けると、その比は

$$\frac{V_{MI}[C]}{V_{price}[C]} = \frac{\frac{1}{3}v^4\sigma_\eta^2T^3}{\frac{1}{3}v^2\sigma^2T^3} = \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma^2}v^2 = \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma^2} \frac{X^2}{T^2}$$

となる。この比は、現実的に存在する銘柄では極めて小さいものとなると考えられる。例えば、B社株に関して一時的マーケット・インパクトの年率ボラティリティを100%としてこの比を計算すると、

$$\frac{V_{MI}[C]}{V_{price}[C]} = \frac{\sigma_{\eta}^2 X^2}{\sigma^2 T^2} = 0.081\%$$

となり、マーケット・インパクトの変動による影響が価格変動による影響に比べ極めて小さいことがみてとれる。

しかしながら、このモデルでは、投資家が最適執行戦略を保有期間中に変更しないことを前提としていることに注意する必要がある。つまり、マーケット・インパクトが確率的に変動する場合はここで展開したモデルに比べてマーケット・インパクトの変化に応じて執行戦略を適宜修正する方がよりコストを低くできる可能性が高く、この場合、修正 VaR も大きく変わる可能性が高い。しかし、この点はここでは検討を行わず、今後の研究課題とする。

6.3. ポートフォリオ・モデル

第4章で展開したモデルでは、保有するポートフォリオは単一の証券（株式）のみからなることを仮定した。しかしながら、実務上はこうした枠組みは証券価格間の相関を織込んだ上で多種類の証券からなるポートフォリオにも適用できることが望ましい。そこで本節では、複数の株式からなるポートフォリオの最適執行戦略の算出の枠組みを連続時点のモデルを用いて提示する。モデルの設定は Almgren and Chriss(1999)を基本とし、これを連続化したうえで、均等売却を前提とした最適執行戦略を導出する。複数の株式からなるポートフォリオの修正 VaR を算出する場合、株価の相関を、VaR 算出の際のみならず、最適執行戦略導出の際も考慮する必要がある。本節ではこの点も織込んだモデルを提示する。

ポートフォリオとして m 種類の株式を保有し、それぞれ j ($1 \leq j \leq m$) によって番号付けがされているものとする。記号は、株式 j の初期保有量を X_j 、保有期間を T_j 、 t 時点での株式保有量 x_{ij} 、単位時間あたりの売却量を v_{ij} とする。また、株価の分散共分散行列²³を、

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \cdots & \sigma_{mm} \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

とし、分散共分散行列にコレスキー分解を施して得られた下三角行列を、

²³ 仮に、投資家が当該ポートフォリオのシステムティック・リスクを株式先物などによりヘッジする場合は、この分散共分散行列はヘッジの対象となっていないアンシステムティック・リスク（個別リスク）の分散共分散行列として捉えることができる。

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

とする（すなわち、 $\Sigma = AA^T$ ²⁴、 $j > i$ については $\alpha_{ij} = 0$ ）

市場価格は算術的ランダム・ウォークに従い、株価間の相関関係は分散共分散行列により与えられるものとする。また、ある株式の売却は、当該株価に影響を与えるが他の株価には影響を与えないものとする。この時、時点 t における証券 j の“売却価格”は、以下のように表わされる。

$$\tilde{S}_j(t) = S_j(0) + \mu_j t + \begin{pmatrix} \alpha_{j1} & \cdots & \alpha_{jm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \end{pmatrix} - \varepsilon_j - \eta_j v_j - \gamma_j \int_0^t v_j ds \quad (6.11)$$

但し、 $z_1(t), \dots, z_m(t)$ は互いに独立なブラウン運動である。均等売却より $dx_j = -v_j dt$ 、 v_j は定数であるので総売却額は、

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m X_j \bar{S}_j \\ &= \sum_{j=1}^m \left\{ X_j S_j(0) + \frac{1}{2} \mu_j X_j T_j - \varepsilon_j X_j - \frac{\eta_j X_j^2}{T_j} - \frac{1}{2} \gamma_j X_j^2 + v_j \int_0^{T_j} \sum_{i=1}^m \alpha_{ji} z_i(t) dt \right\} \end{aligned} \quad (6.12)$$

である²⁵。これより、取引コストは、

$$C = \sum_{j=1}^m \left\{ -\frac{1}{2} \mu_j X_j T_j + \varepsilon_j X_j + \frac{\eta_j X_j^2}{T_j} + \frac{1}{2} \gamma_j X_j^2 - v_j \int_0^{T_j} \sum_{i=1}^m \alpha_{ji} z_i(t) dt \right\} \quad (6.13)$$

となる。従って、取引コストの期待値と分散は、

$$E[C] = \sum_{j=1}^m \left\{ -\frac{1}{2} \mu_j X_j T_j + \varepsilon_j X_j + \frac{\eta_j X_j^2}{T_j} + \frac{1}{2} \gamma_j X_j^2 \right\} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} V[C] &= V \left[\sum_{j=1}^m v_j \int_0^{T_j} \sum_{i=1}^m \alpha_{ji} z_i(t) dt \right] = V \left[\sum_{i,j=1}^m v_j \alpha_{ji} \int_0^{T_j} z_i(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \sigma_{jj} X_j^2 T_j + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m I_{\{T_j \leq T_k\}} \sigma_{jk} X_j X_k \frac{T_j^2}{T_k} + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^m \sum_{k=j+1}^m I_{\{T_j > T_k\}} \sigma_{jk} X_j X_k \frac{T_k^2}{T_j} \end{aligned} \quad (6.15)$$

²⁴ ここで、 A^T は行列 A の転置行列を表わす。

²⁵ 変形には $v_j T_j = X_j$ を用いた。

と計算できる（補論H参照）²⁶。但し、 $\sigma_{jj} = \sum_{i=1}^m \alpha_{ji}^2$ 、 $\sigma_{jk} = \sum_{i=1}^m \alpha_{ji} \alpha_{ki}$ であることを利用した。

投資家の流動化コストを、

$$\begin{aligned}
 L &= E[C] + rZ_\alpha \sqrt{V[C]} \\
 &= \sum_{j=1}^m \left\{ -\frac{1}{2} \mu_j X_j T_j + \varepsilon_j X_j + \frac{\eta_j X_j^2}{T_j} + \frac{1}{2} \gamma_j X_j^2 \right\} \\
 &\quad + rZ_\alpha \sqrt{ \frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \sigma_{jj} X_j^2 T_j + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m I_{\{T_j \leq T_k\}} \sigma_{jk} X_j X_k \frac{T_j^2}{T_k} } \\
 &\quad + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m I_{\{T_j > T_k\}} \sigma_{jk} X_j X_k \frac{T_k^2}{T_j}
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

とする。

これを最小化するための条件は株式 l ($1 \leq l \leq m$) に対して、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial T_l} &= -\frac{\mu_l X_l}{2} - \frac{\eta_l X_l^2}{T_l^2} \\
 &\quad + \frac{rZ_\alpha}{6} \left\{ \begin{aligned} &\sigma_{ll} X_l^2 \\ &+ 4 \sum_{k=l+1}^m I_{\{T_l \leq T_k\}} \sigma_{lk} X_l X_k \frac{T_l}{T_k} - 2 \sum_{n=1}^{l-1} I_{\{T_l \leq T_n\}} \sigma_{nl} X_n X_l \frac{T_n^2}{T_l^2} \\ &- 2 \sum_{k=l+1}^m I_{\{T_l > T_k\}} \sigma_{lk} X_l X_k \frac{T_k^2}{T_l^2} + 4 \sum_{n=1}^{l-1} I_{\{T_l > T_n\}} \sigma_{nl} X_n X_l \frac{T_l}{T_n} \end{aligned} \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \sigma_{jj} X_j^2 T_j + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m I_{\{T_j \leq T_k\}} \sigma_{jk} X_j X_k \frac{T_j^2}{T_k} \\ &+ \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m I_{\{T_j > T_k\}} \sigma_{jk} X_j X_k \frac{T_k^2}{T_j} \end{aligned} \right\}^{\frac{1}{2}} = 0
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

である。この方程式を T_l について解くためには、 T_l に関して場合分けを行った上でそれぞれの方程式を解き、その解が当初の場合分けと整合的であるか検証するといった手続きを踏むことが必要となるなど、大変煩雑な数値計算が必要となる。さらに、価格の相関がないとして $\sigma_{jk} = 0$ ($j \neq k$) としても、条件は

²⁶ $I_{\{A\}}$ は、A が真の時に 1、偽の時に 0 をとる指示関数である。

$$\frac{\partial L}{\partial T_l} = -\frac{\mu_l X_l}{2} - \frac{\eta_l X_l^2}{T_l^2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} r Z_\alpha \sigma_{ll} X_l^2 \left\{ \sum_{j=1}^m \sigma_{jj} X_j^2 T_j \right\}^{-\frac{1}{2}} = 0 \quad (6.18)$$

となり、 T_l ($l=1, \dots, m$) の連立方程式となる。従って、株価の相関がゼロの場合でも、ポートフォリオにおける各株式の最適保有期間は、ポートフォリオが単一資産のみからなる場合の最適保有期間とは異なり、他の資産の流動性やボラティリティに影響を受けることが分かる。

修正 VaR は、(6.17)式で得られた最適保有期間を以下に代入することにより得ることができる。

$$\begin{aligned} \text{修正 VaR} &= Z_\alpha \sqrt{V[C]} \\ &= Z_\alpha \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \sigma_{jj} X_j^2 T_j + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m I_{\{T_j \leq T_k\}} \sigma_{jk} X_j X_k \frac{T_j^2}{T_k} + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m I_{\{T_j > T_k\}} \sigma_{jk} X_j X_k \frac{T_k^2}{T_j}} \end{aligned} \quad (6.19)$$

6.4. ポートフォリオ・モデルの数値例による検討

本節では、(6.17)式を二資産の場合に適用し、数値計算例を通じて考察を行う。

基本的な問題意識は、(6.17)式により最適保有期間を得ることは計算負担が大きい
ため、最適保有期間を導出する際は(4.24)式を使って、各資産が独立であるかのよう
に計算を行い、これを(6.19)に代入することによってポートフォリオの近似的な修正
VaR を算出できないかというものである。仮にこうした近似が可能であれば、比較的簡
便な形でポートフォリオの修正 VaR を算出することができることとなる。

数値例としては、第5章で用いた A 社株および B 社株の数値を用いるほか、マーケ
ット・インパクトなどのプロファイルが類似した株式からなるポートフォリオの修正
VaR を考察するため、A 社株のデータのうち、一時的マーケット・インパクト係数の数
値のみを僅かに下げた ($\eta = 3.91 \times 10^{-6} \rightarrow 3.81 \times 10^{-6}$) 架空の銘柄 C 社を想定し、ポ
ートフォリオがそれぞれ A 社株と B 社株、A 社株と C 社株の 2 資産からなる場合の修
正 VaR を算出した。また、同じ証券で相関が異なる場合の修正 VaR をそれぞれ比較し
て考察するために、相関係数を変えた場合の修正 VaR を計算している。

株価の相関がゼロの場合、(6.17)式で計算した最適保有期間は(4.24)式で計算し
た最適保有期間に比べ大きくなる。つまり、相関ゼロの場合でも、(4.24)式で計算し
た修正 VaR は(6.17)式でより精緻に計算した場合に比べ過少評価となっている。但し、
その誤差は二つの株式の特性が近い場合(表 6)で 12%、二つの株式の特性が異なる場
合(表 5)は 2%前後である。

一方、株価に相関がある場合は、相関ゼロの場合に比べて誤差が大きくなるか小さくなるか一般的な結論を得ることは難しい。しかしながら、A社株とC社株の例から分かるように、株式の特性が類似し、かつ株価に高い負の相関がある場合は、その誤差は著しく大きくなる場合がある点には注意する必要があるであろう。

表 5 二資産ポートフォリオの修正 VaR (A 社・B 社)

保有ポジション額: A 社 1,655 百万円、B 社 1,655 百万円

	相関係数	最適保有期間(日)		修正VaR (千円)
		A社	B社	
個別に最適化*	-1.00	0.41	20.03	307,651
	-0.75	0.41	20.03	307,674
	-0.50	0.41	20.03	307,697
	-0.25	0.41	20.03	307,721
	0.00	0.41	20.03	307,744
	0.25	0.41	20.03	307,767
	0.50	0.41	20.03	307,790
	0.75	0.41	20.03	307,813
	1.00	0.41	20.03	307,837
ポートフォリオとして最適化	-1.00	1.83	20.11	312,091
	-0.75	1.57	20.17	312,343
	-0.50	1.44	20.20	312,544
	-0.25	1.36	20.23	312,718
	0.00	1.29	20.25	312,873
	0.25	1.24	20.27	313,016
	0.50	1.20	20.28	313,147
	0.75	1.16	20.30	313,271
	1.00	1.13	20.31	313,387

*それぞれの単一株式の最適保有期間を算出し、これによりのポートフォリオの修正 VaR を算出。

表 6 二資産ポートフォリオの修正 VaR (A 社・C 社)

保有ポジション額: A 社 1,655 百万円、C 社 1,655 百万円

	相関係数	最適保有期間(日)		修正VaR (千円)
		C社	A社	
個別に最適化*	-1.00	0.40	0.41	7,146
	-0.75	0.40	0.41	23,171
	-0.50	0.40	0.41	31,980
	-0.25	0.40	0.41	38,840
	0.00	0.40	0.41	44,658
	0.25	0.40	0.41	49,801
	0.50	0.40	0.41	54,461
	0.75	0.40	0.41	58,752
	1.00	0.40	0.41	62,750
ポートフォリオとして最適化	-0.75	0.82	0.82	31,579
	-0.50	0.65	0.65	39,786
	-0.25	0.57	0.57	45,544
	0.00	0.51	0.52	50,127
	0.25	0.41	0.60	52,933
	0.50	0.37	0.65	54,709
	0.75	0.34	0.69	56,079
	1.00	0.33	0.72	57,215

*それぞれの単一株式の最適保有期間を算出し、これによりのポートフォリオの修正 VaR を算出。

6.5.非線形マーケット・インパクト・モデル

第4章で展開したモデルでは、マーケット・インパクトは売却量の線形関数として定式化できると仮定した。しかしながら、中塚(1998)などの実証分析で示されているとおり、実際のマーケット・インパクトは線形関数でない可能性が高い。そこで、本節では、非線形なマーケット・インパクトの定式化の一例として、マーケット・インパクト関数が平方根関数 ($y = b\sqrt{x}$) である場合について考察する。平方根関数がマーケット・インパクト定式化として妥当である点については、中塚(1998)のほかいくつかの実証分析でも示されている。

マーケット・インパクトを平方根関数で定式化した際の連続時点での“売却価格”過程は(6.20)式のようにモデル化される。

$$\tilde{S}(t) = S(0) + \mu t + \sigma z(t) - \varepsilon - \eta\sqrt{v(t)} - \gamma \int_0^t \sqrt{v(s)} ds \quad (6.20)$$

この下で総売却額は、

$$-\int_0^T \tilde{S}(t) dx = XS(0) + \frac{1}{2}\mu v T^2 + v\sigma \int_0^T z(t) dt - \varepsilon v T - \eta v^{\frac{3}{2}} T - \frac{1}{2}\gamma v^{\frac{3}{2}} T^2 \quad (6.21)$$

となる。取引コストは、

$$C = -\frac{1}{2}\mu v T^2 - v\sigma \int_0^T z(t) dt + \varepsilon v T + \eta v^{\frac{3}{2}} T + \frac{1}{2}\gamma v^{\frac{3}{2}} T^2 \quad (6.22)$$

となり、取引コストの期待値と分散は、

$$\begin{aligned} E[C] &= -\frac{1}{2}\mu v T^2 + \varepsilon v T + \eta v^{\frac{3}{2}} T + \frac{1}{2}\gamma v^{\frac{3}{2}} T^2 \\ &= -\frac{1}{2}\mu X T + \varepsilon X + \eta X^{\frac{3}{2}} T^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\gamma X^{\frac{3}{2}} T^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$V[C] = v^2 \sigma^2 V\left[\int_0^T z(t) dt\right] = \frac{1}{3} v^2 \sigma^2 T^3 = \frac{1}{3} T \sigma^2 X^2 \quad (6.24)$$

となる。最小化すべき投資家の流動化コストを以下のように定める。

$$L = -\frac{1}{2}\mu X T + \varepsilon X + \eta X^{\frac{3}{2}} T^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\gamma X^{\frac{3}{2}} T^{\frac{1}{2}} + r Z_\alpha \sqrt{\frac{1}{3} T^{\frac{1}{2}} \sigma X} \quad (6.25)$$

最適保有期間のための条件は、

$$\frac{\partial L}{\partial T} = -\frac{1}{2}\mu X - \frac{1}{2}\eta X^{\frac{3}{2}} T^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}\gamma X^{\frac{3}{2}} T^{-\frac{1}{2}} + \frac{r Z_\alpha}{2\sqrt{3}} T^{-\frac{1}{2}} \sigma X = 0 \quad (6.26)$$

となる。 $\mu = 0$ の場合、最適保有期間は、

$$T = \frac{6\sqrt{X}\eta}{3\sqrt{X}\gamma + 2\sqrt{3r}Z_\alpha\sigma} \quad (6.27)$$

である。修正 VaR は、

$$\text{修正VaR} = Z_\alpha\sigma X \left(\frac{2\sqrt{X}\eta}{3\sqrt{X}\gamma + 2\sqrt{3r}Z_\alpha\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.28)$$

と求めることができる。

6.6.非線形マーケット・インパクト・モデルの数値例による検討

本節では、マーケット・インパクトが線形関数である場合と、いくつかの実証分析で示されているように平方根関数である場合とで、修正 VaR 等がどのように異なるかを数値的に比較する。平方根関数の係数については、線形関数の場合と比較するために、第5章での数値計算例と同様、板の形状からこれを推計する方法をとった(詳細は補論D参照)。この結果得られる最適保有期間と修正 VaR は以下の通りとなる。

表 7 非線形マーケット・インパクトの下での修正 VaR

▽A 社株

線形関数での一時的マーケット・インパクト:	3.91×10^{-6} (円・日)/株 ²
永続的マーケット・インパクト:	0
非線形関数での一時的マーケット・インパクト:	6.25×10^{-3} (円・日 ^{0.5})/株
保有ポジション額:	1,655 百万円

マーケット・インパクト	最適保有期間(日)	修正VaR(千円)
線形	0.411	31,714
平方根	0.298	27,002

▽B 社株

線形関数での一時的マーケット・インパクト:	1.88×10^{-3} (円・日)/株 ²
永続的マーケット・インパクト:	0
非線形関数での一時的マーケット・インパクト:	1.37×10^{-2} (円・日 ^{0.5})/株
保有ポジション額:	1,655 百万円

マーケット・インパクト	最適保有期間(日)	修正VaR(千円)
線形	20.03	306,105
平方根	4.65	147,422

表 7からわかるとおり、マーケット・インパクト関数が線形関数であると仮定した場合に比べ保有期間・修正 VaR とともに大幅に小さい値となった。特に、流動性の小さい B 社株のケースでは、マーケット・インパクトに平方根関数を仮定した修正 VaR が線形関数を仮定した修正 VaR の約 2 分の 1 となっている。従って、この結果は、マーケッ

ト・インパクトの推計における定式化を誤った場合には、修正 VaR の算定に大きな誤差が発生する可能性があることを示唆している。

7. 今後の課題

本稿では、金融商品の市場流動性を織込んだ修正 VaR を算定するための 1 つの枠組みを提示した。この枠組みを用いれば、一定の前提の下で市場流動性リスクを織込んだ修正 VaR を比較的簡便な形で算出することができる。しかしながら、これを用いる際は、これまでに指摘したように以下の点に留意することが必要であり、これらについて、さらなる研究が進むことが期待される。

まず、マーケット・インパクト関数推計の正確性が挙げられる。本稿ではマーケット・インパクトが、一時的なものと恒久的なものに分けた形で安定的に推計できると仮定した。しかしながら、実際には多様な要因により発生するマーケット・インパクトを推計するのは必ずしも容易ではなく、今のところ決定的な推計方法は存在していない。本稿では、マーケット・インパクト関数推計のための簡便な方法として、板の形状から推計する方法を用いて数値例計算を行ったが、より正確なリスク量の計量といった観点からは、より精緻な計測方法が必要となるケースもあると思われる。また、第 6.6 節で述べたとおり、マーケット・インパクトの関数形について誤った前提をおくと修正 VaR の値について大幅な誤差が発生する。したがって、マーケット・インパクトについて理論・実証両面でさらに研究が進み、より精緻な計測方法が開発されることが期待される。

次に、最適執行戦略の決定において、投資家は当初決定した執行戦略を執行途中に変えないと仮定している点が挙げられる²⁷。こうした前提は場合によっては修正 VaR 計測の大幅な誤差に繋がる可能性がある。例えば、マーケット・インパクト係数が不確実な場合、執行途中にマーケット・インパクトが当初の予想に比べ大きいことが判明したとすれば、当初の執行戦略を修正して保有期間を長期化することが最適となるであろう。この場合は、執行戦略の変更に伴い修正 VaR の値も大きく変化する可能性が高い。仮に、こうした問題に対処するために執行途中での戦略変更を織込んだうえで最適執行戦略を導出するとすれば、一般的には動学的最適化の手法を用いることが必要になるが、本稿のように保有期間が内生的に決定されるようなケースでは、こうした手法を用いることは困難である。

さらにこのモデルの問題点として、保有ポートフォリオが複数資産で構成される場合、リスク量等の計算が非常に煩雑になる点が指摘できる。第 6.4 節では、簡便な計算方法の一つとして、最適保有期間をそれぞれの資産毎に独立に算出する方法を提示し、数

²⁷ この点については、Almgren and Chriss (1999)においても指摘されている。

値計算例を用いてその妥当性を考察した。しかしながら、本稿では必ずしもこの簡便な方法を用いることによる誤差についての包括的な検証は行っていない。従って、この検証を行う必要があるほか、さらには、この他に実務に応用可能なポートフォリオに対する修正 VaR の簡便な算出方法がないか研究を進めることが望まれる。

最後に、マーケット・ストレス時にはここで提示された枠組みは適用できない可能性がある点が指摘できる。すなわち、ここで提示されたアプローチでは、定式化されたマーケット・インパクト関数が安定していること、および最適執行戦略の実行が常時可能であることが仮定されているが、流動性が枯渇するようなマーケット・ストレスの発生時には、こうした前提が崩れている可能性が高い。このため、平常時のモデルとは別に、マーケット・ストレス時の市場流動性リスクを計量する枠組みを別途構築する必要がある。

8. おわりに

本稿では、一定の前提の下で、平均・標準偏差アプローチを用いてマーケット・インパクトを考慮した最適執行戦略を導出し、市場流動性を織込んだ修正 VaR を算出する方法を提示した。この枠組みは、マーケット・インパクトが不確実な場合、複数の金融資産からなるポートフォリオを扱う場合、マーケット・インパクトが売却量と非線形な関係にある場合、にも適用可能であり、実務への応用可能性も高いことが示された。

しかしながら、ここで用いた枠組みにより精度の高いリスク計測を行うためには、第7章でも指摘したとおり、マーケット・インパクトの正確な計測など様々な課題が残されている。また、冒頭でも述べたとおり、ここで提示された枠組みはマーケット・インパクトという市場流動性の一側面にのみ焦点を当てたものであり、もとより市場流動性を包括的に捉えることは意図されていない。したがって、今後市場流動性に関してさらに研究が発展していくとともに、将来的にこの枠組みをもとに市場流動性リスクを包括的に評価する方法に発展させていくことが期待される。

以 上

補論 A 平均・分散アプローチによる最適執行戦略の導出

第4章においては、取引コストの平均値と標準偏差によって目的関数を定式化し、最適執行戦略を導出した。しかし、これとは異なった目的関数の設定が考えられる。すなわち、取引コストの平均値と分散により目的関数を定式化する方法である。以下では、この方法について考察を加える。

まず、平均と分散で定式化することのメリットとしては、期待効用仮説と整合的な形で目的関数を定式化できることである。投資家の得る富の大きさを W として、投資家の効用関数 U が指数型の効用関数である場合は、期待効用 ($E[U(W)]$) は以下のように、 W の平均と分散によって表わされる²⁸。

$$E[U(W)] = E[W] - \lambda V[W]$$

ここで、 λ は投資家のリスク回避度を表すパラメータとして解釈することができる。本稿の枠組みにおいてこの効用関数を捉え直すと、富は最終的に得られる総売却額 ($X\bar{S}$) であるため、当初ポジション評価額 (XS_0) が確定的であることを利用すると、

$$\begin{aligned} E[U(X\bar{S})] &= E[X\bar{S}] - \lambda V[X\bar{S}] \\ &= E[XS_0 - C] - \lambda V[XS_0 - C] \\ &= XS_0 - E[C] - \lambda V[C] \end{aligned}$$

である。よって、上式を最大化することは以下の目的関数 f を最小化することと同値である。

$$f = E[C] + \lambda V[C]$$

つまり、取引コストの平均と分散により目的関数の定式化を行えば、期待効用仮説と整合的な形で最適執行戦略を導くことができる。

以下では、平均・分散による定式化により修正 VaR を算出する方法について具体的に考察する。なお、簡単のため連続モデルでの考察を行った。

平均・分散アプローチにおける目的関数は、本論での(4.20)式、(4.21)式より、

$$f = E[C] + \lambda V[C] = -\frac{1}{2}\mu XT + \varepsilon X + \frac{\eta X^2}{T} + \frac{1}{2}\gamma X^2 + \lambda \frac{1}{3} X^2 \sigma^2 T$$

と表すことができる。この目的関数を最小化するような保有期間は、

$$\frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{1}{2}\mu X - \frac{\eta X^2}{T^2} + \lambda \frac{1}{3} X^2 \sigma^2 = 0$$

となる。 $\mu = 0$ の場合、これを解いて

²⁸ 榊原・青山・浅野 (1998) p.p.472-475 参照。

$$T = \left(\frac{3\eta}{\lambda\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

が最適保有期間となる。修正 VaR は、(4.16)式より、

$$\text{修正VaR} = Z_{\alpha} X \left(\frac{\eta\sigma^2}{3\lambda} \right)^{\frac{1}{4}}$$

となる。平均・分散アプローチでは $\mu = 0$ の場合、保有期間は保有ポジション量と独立、修正 VaR は保有ポジション量と線形関係にあることがわかる。

次に、第5章で用いたパラメータの数値例（補論C参照）を使って修正 VaR の数値例を示す。マーケット・インパクトの小さい銘柄としてA社株、大きい銘柄としてB社株を取上げた²⁹。

表 8 平均・分散アプローチの試算結果（時点：連続）

	保有ポジション額 (千円)	従来型のVaR		修正VaR(平均・分散)	
		保有期間(日)	VaR(千円)(a)	保有期間(日)	VaR(千円)(b)
A社株 (1999.9.29)	165,500	1.00	8,567	0.28	2,595
	1,655,000	1.00	85,669	0.28	25,948
B社株 (1999.9.29)	165,500	1.00	11,846	4.32	14,209
	1,655,000	1.00	118,464	4.32	142,090

表 8から、流動性の高いA社株は低いB社株に比べてリスク量が小さくなることがわかる。これから、平均・分散アプローチによっても流動性に依ってリスク量が決定できることがわかる。しかし、平均・標準偏差アプローチでは保有ポジション量が保有期間に対して与える影響を取り込んでいるのに比べ、 $\mu = 0$ の場合に限ってではあるが、平均・分散アプローチでは保有期間が保有ポジション量に依存しないために、こうした効果は取り込めないことに留意する必要がある。

なお、ここでは投資家のリスク回避度を表すパラメータ λ は脚注29のように置いたが、正確には λ を別途推計する必要がある。本稿では、こういった点を勘案して、投資家のリスク回避度を Z_{α} というパラメータで織込むことができる平均・標準偏差アプローチを採用した。

²⁹ここではB社株、保有ポジション額1.65億円の場合に表1での修正VaRと平均・分散アプローチの修正VaRが等しくなるよう $\lambda = 2.9 \times 10^{-8}$ とした。

補論 B 取引コストの平均・分散値の導出

ここでは、本論での(4.20)式、(4.21)式の導出方法を説明する。

(4.20)式は、

$$\begin{aligned} E[C] &= E\left[-\frac{1}{2}\mu v T^2 - v\sigma \int_0^T z(t)dt + \varepsilon v T + \eta v^2 T + \frac{1}{2}\gamma^2 T^2\right] \\ &= -\frac{1}{2}\mu v T^2 + \varepsilon v T + \eta v^2 T + \frac{1}{2}\gamma^2 T^2 - v\sigma E\left[\int_0^T z(t)dt\right] \end{aligned}$$

より、 $E\left[\int_0^T z(t)dt\right] = 0$ を示せばよい。

Øksendal (1995) p.p. 46 Theorem 4.1.5 より、

$$\begin{aligned} \int_0^T z(t)dt &= [tz(t)]_0^T - \int_0^T t dz(t) = Tz(T) - \int_0^T t dz(t) \\ &= T \int_0^T dz(t) - \int_0^T t dz(t) = \int_0^T (T-t) dz(t) \end{aligned}$$

よって、積分の順序交換 (Fubini の定理) を用れば、

$$E\left[\int_0^T z(t)dt\right] = E\left[\int_0^T (T-t) dz(t)\right] = \int_0^T (T-t) E[dz(t)] = 0$$

となり、(4.20)式は示された。

(4.21)式は、

$$\begin{aligned} V[C] &= V\left[-\frac{1}{2}\mu v T^2 - v\sigma \int_0^T z(t)dt + \varepsilon v T + \eta v^2 T + \frac{1}{2}\gamma^2 T^2\right] \\ &= v^2 \sigma^2 V\left[\int_0^T z(t)dt\right] \end{aligned}$$

より、 $V\left[\int_0^T z(t)dt\right] = \frac{T^3}{3}$ を示せばよい。

Øksendal(1995) p.p. 29 Corollary 3.1.7 より、

$$\begin{aligned} V\left[\int_0^T z(t)dt\right] &= E\left[\left(\int_0^T z(t)dt\right)^2\right] - E\left[\int_0^T z(t)dt\right]^2 = E\left[\left(\int_0^T z(t)dt\right)^2\right] = E\left[\left(\int_0^T (T-t) dz(t)\right)^2\right] \\ &= E\left[\int_0^T (T-t)^2 dt\right] = \int_0^T (T-t)^2 dt = \left[T^2 t - 2T \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_0^T = \frac{T^3}{3} \end{aligned}$$

により(4.21)式は示された。

補論 C 数値例計算に用いたパラメータの値

記号 説明(単位)	A社 ³⁰		B社		C社 ³¹
$S(0)$ 初期株価 (円/枚)	3,310		3,350		3,310
X 初期株式保有量 (枚)	50,000	500,000	49,403	494,031	50,000
$XS(0)$ 初期保有ポジション (円)	$1,655 \times 10^6$	$1,655 \times 10^7$	$1,655 \times 10^6$	$1,655 \times 10^7$	$1,655 \times 10^6$
μ ドリフト ((円/枚)/日) ³²	0		0		0
σ ボラティリティ $\left(\frac{1}{(\text{円/枚}/\text{日}^2)} \right)$	74		103		74
ε ビッド・アスク・スプレッド (円/枚) ³³	0		0		0
η 一時的マーケット・インパクト 係数 ((円/枚)/(枚/日))	3.91×10^{-6}		1.88×10^{-3}		3.81×10^{-6}
γ 恒久的マーケット・インパクト 係数 (円/日 ²) ³⁴	0		0		0
r 資本コスト率	0.15		0.15		0.15
Z_α 標準正規分布の上側 100 α % 点 ($\alpha=0.99$)	2.33		2.33		2.33
観測日(参考)	1999.9.29		1999.9.29		

³⁰ A社、B社のデータはBloomberg社から取得。

³¹ C社は、A社と特性の近い株式について検討するため、マーケット・インパクト係数を若干変える形で架空に設定したものである。

³² 売却が終了するまでの期間が比較的短時間であることから、計算の簡便化のため近似的にドリフトをゼロとした。

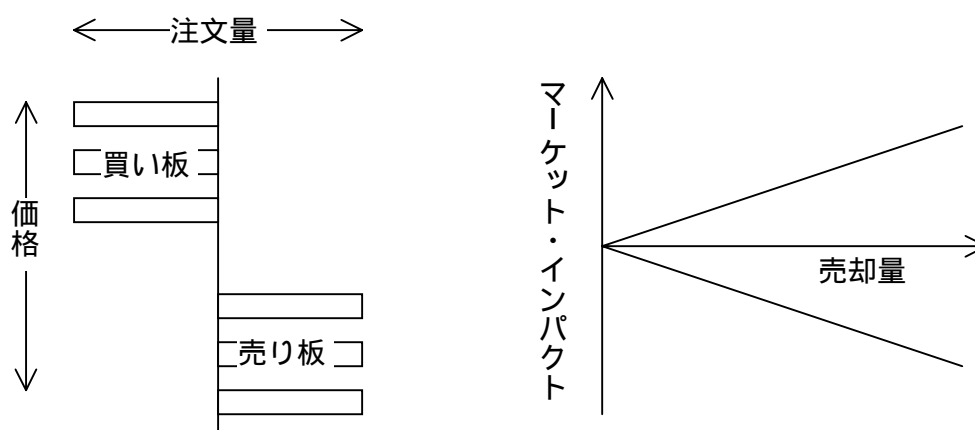
³³ 修正VaRの計算に影響しないことからビッド・アスク・スプレッドはゼロとした。

³⁴ 計算の簡便化のために恒久的マーケット・インパクトはゼロとした。

補論 D マーケット・インパクト係数の推定方法

ここでは、本論で用いたマーケットの板の形状からマーケット・インパクト係数を推定する方法を説明する。中塚(1998)によれば、マーケット・インパクトの大きさは売却量の大小に応じて変化するが、同じ売却量でも注文を出した際の板の形状および厚さ(depth)によってマーケット・インパクトの現われ方が異なると考えられる。仮に、板上の売り指し値注文量(ビッド注文量)がどの株価でも一定であれば、マーケット・インパクトの大きさは売却量に比例して生じることになる(図3)。

図3 売却量とマーケット・インパクトの関係(線形)



本論では、このように板上の売り指し値注文量がどの株価水準でも一定であると仮定してマーケット・インパクトを推計する。板の厚さを当該日のベスト・ビッド注文量の時間加重平均とし、価格変化の幅を当該銘柄の1ティックとした。この二つの変数を用いて、板の厚さ分の売却量が入るごとに1ティック分価格低下が生じると考えることとする。すなわち、

$$\text{マーケット・インパクト係数} = \frac{\text{価格変化幅}}{\text{板の厚さ}} = \frac{\text{当該銘柄の1ティック}}{\text{ベスト・ビッド注文量の時間加重平均}}$$

として推定を行った。

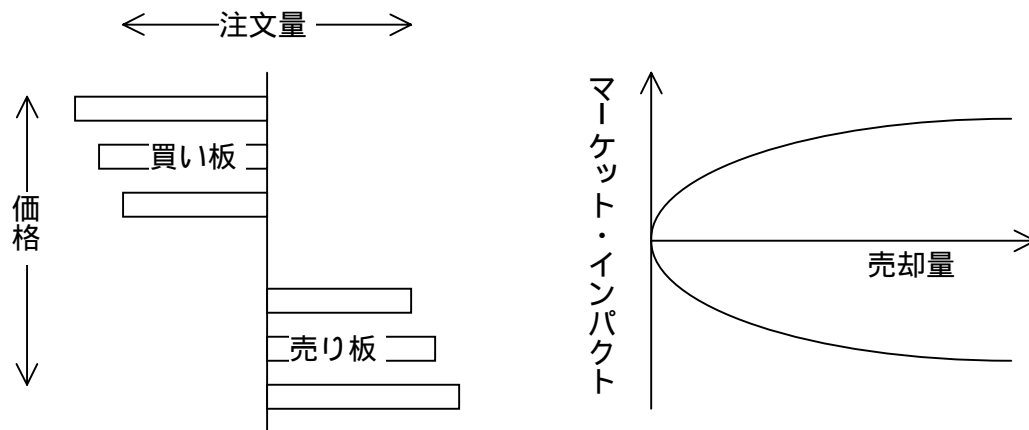
ここで注意すべき点は、一時的マーケット・インパクト係数 η は、あくまで単位時間(ここでは1日とした)あたり1株売却した場合の価格変化を表わしており、その定義より単位が((円/枚)/(枚/日))となることである。単位に時間(日)が含まれているため、板の形状により推計された上記のマーケット・インパクトの値を一時的マーケッ

ト・インパクト係数 η に変換するためには、価格収斂速度に依存した回復時間³⁵ を乗ずることにより単位時間あたりのマーケット・インパクト係数に変換することが必要となる。

回復時間は金融商品や市場の性質から決まるものと考えられるため、本来は銘柄によって適切な値を推定する必要があるが、本論ではこれを 0.02 日（約 5 分）と考えることにする。なお、計算を簡便化するためにここでは恒久的マーケット・インパクトはゼロとしている。

また、売却量とマーケット・インパクトの関係を非線形と想定した場合は、図 4 のような板形状を考えていることになる。

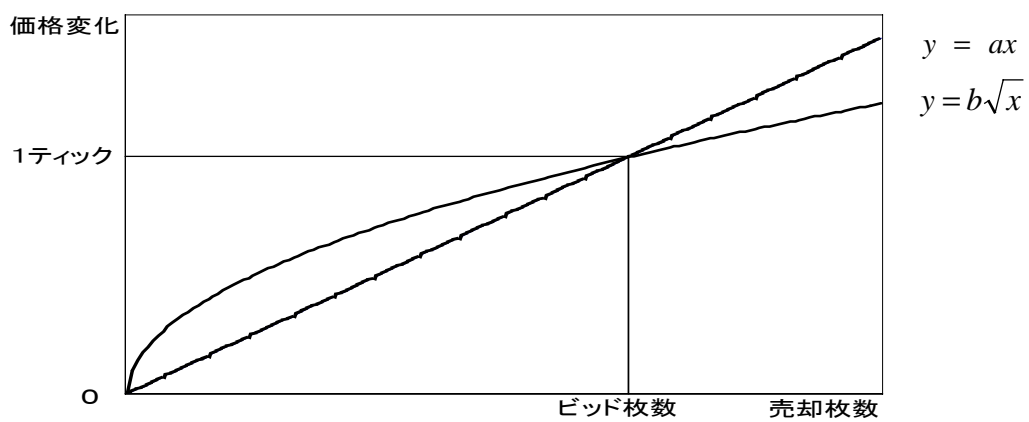
図 4 売却量とマーケット・インパクトの関係（非線形）



第 6.6 節では、マーケット・インパクトが平方根関数 $y = b\sqrt{x}$ として定式化される場合の修正 VaR を算出したが、ここでの b の推計方法は線形関数を推計した時と同様の考え方を採用した。すなわち、平方根関数が線形関数とともに、図 5 の売却枚数と価格変化からなる平面上でビッド枚数と 1 ティックの値を通るとして b の推計を行い、回復時間を 0.02 日として単位時間当りの b を算出した。ここでも、計算の簡便化のために、恒久的マーケット・インパクトはゼロとした。

³⁵ 第 4.1 節で用いている「売却を行ってからマーケット・インパクトの一時的部分の効果が解消するまでの時間」をここでは回復時間と呼ぶ。

図 5 非線形マーケット・インパクト係数決定方法



補論 E 一時的マーケット・インパクトの初期値に不確実性を導入したモデル

ここでは、本論におけるマーケット・インパクトの不確実性の定式化方法とは異なり、一時的マーケット・インパクト係数 η は初期値のみ不確定で、その後は保有期間終了まで初期値で一定であるといった形で不確実性を定式化した場合のモデルについて説明する。

まず、一時的マーケット・インパクト係数 η が、初期時点では不確定であるが最初の売却を行った際に確定するものとし、以下のように表わされるとする。

$$\eta_t = \eta_0 + \sigma_\eta \xi_\eta$$

但し、 ξ_η は標準正規分布に従う確率変数で、最初の売却と同時に確定し以降同じ値をとるものとする。 σ_η は一時的マーケット・インパクト係数の標準偏差である。この際、投資家にとっての売却価格過程は、

$$\tilde{S}(t) = S(0) + \mu t + \sigma z(t) - \varepsilon - \{\eta_0 + \sigma_\eta \xi_\eta\} v(t) - \gamma \int_0^t v(s) ds$$

となる。総売却額は、均等売却 ($v(u) = v$ <定数>) を仮定した場合 $dx = -v dt$ となることを考慮すると、

$$\begin{aligned} -\int_0^T \tilde{S}(t) dx &= v \int_0^T \tilde{S}(t) dt \\ &= v \int_0^T \left\{ S(0) + \mu t + \sigma z(t) - \varepsilon - \{\eta_0 + \sigma_\eta \xi_\eta\} v - \gamma \int_0^t v ds \right\} dt \\ &= XS(0) + \frac{1}{2} \mu v T^2 + v \sigma \int_0^T z(t) dt - \varepsilon v T - \eta_0 v^2 T - v^2 \xi_\eta \sigma_\eta T - \frac{1}{2} \gamma v^2 T^2 \end{aligned}$$

となる。取引コストは、

$$\begin{aligned} C &= XS(0) - \left(-\int_0^T \tilde{S}(t) dx \right) \\ &= -\frac{1}{2} \mu v T^2 - v \sigma \int_0^T z(t) dt + \varepsilon v T + \eta_0 v^2 T + v^2 \sigma_\eta \xi_\eta T + \frac{1}{2} \gamma v^2 T^2 \end{aligned}$$

となり、その期待値と分散は、

$$\begin{aligned} E[C] &= -\frac{1}{2} \mu v T^2 + \varepsilon v T + \eta_0 v^2 T + \frac{1}{2} \gamma v^2 T^2 = -\frac{1}{2} \mu X T + \varepsilon X + \frac{\eta_0 X^2}{T} + \frac{1}{2} \gamma X^2 \\ V[C] &= v^2 \sigma^2 V \left[\int_0^T z(t) dt \right] + v^4 \sigma_\eta^2 T^2 = \frac{1}{3} v^2 \sigma^2 T^3 + v^4 \sigma_\eta^2 T^2 = \frac{1}{3} X^2 \sigma^2 T + \frac{X^4 \sigma_\eta^2}{T^2} \end{aligned}$$

として表わされる。

従って、最小化すべき流動化コストは、

$$L = E[C] + rZ_\alpha \sqrt{V[C]} = -\frac{1}{2}\mu XT + \varepsilon X + \frac{\eta_0 X^2}{T} + \frac{1}{2}\gamma X^2 + rZ_\alpha \sqrt{\frac{1}{3}X^2\sigma^2 T + \frac{X^4\sigma_\eta^2}{T^2}}$$

として表わされ、保有期間の問題は以下の一階の偏微分条件で与えられる。

$$\frac{\partial L}{\partial T} = -\frac{1}{2}\mu X - \frac{\eta_0 X^2}{T^2} + \frac{rZ_\alpha X^2(\sigma^2 - \frac{6\sigma_\eta^2 X^2}{T^3})}{6\sqrt{\frac{1}{3}X^2\sigma^2 T + \frac{X^4\sigma_\eta^2}{T^2}}} = 0$$

ここでも、本論においてマーケット・インパクトの不確実性を算術的ランダム・ウォークとして定式化した際と同様に、第5章で用いたパラメータを使って数値計算例を示す。

まず、マーケット・インパクトの小さい銘柄としてA社株、大きい銘柄としてB社株の数値計算例をそれぞれ下表に示す。ここで表における標準偏差は、一時的マーケット・インパクト係数の標準偏差（ σ_η ）の一時的マーケット・インパクト係数の平均値 η_0 に対する比率を表わす。例えば、この値が10%であるとは、一時的マーケット・インパクト係数の標準偏差が、一時的マーケット・インパクト係数の平均値の10%にあたることを示している。

こうした結果から、ここでモデル化されたマーケット・インパクトの不確実性についても、修正 VaR の影響は比較的限定的であることが分かる。

表 9 確率的マーケット・インパクト下での修正 VaR

▽A 社株 保有ポジション額： 1,655 百万円

標準偏差(%)	最適保有期間(日)	修正VaR(千円)
0%	0.411	31,714
25%	0.411	31,722
50%	0.412	31,747
100%	0.413	31,846
200%	0.418	32,231

▽B 社株 保有ポジション額： 1,655 百万円

標準偏差(%)	最適保有期間(日)	修正VaR(千円)
0%	20.03	306,105
25%	20.09	306,878
50%	20.28	309,129
100%	20.96	317,263
200%	23.08	341,438

補論 F 恒久的マーケット・インパクトに不確実性を導入したモデル

γ および η が以下の算術的ランダム・ウォークに従うと仮定する。

$$\eta_t = \eta_0 + \sigma_\eta z_\eta(t)$$

$$\gamma_t = \gamma_0 + \sigma_\gamma z_\gamma(t)$$

但し、 γ_0 は時点0での一時的マーケット・インパクト、 σ_γ は恒久的マーケット・インパクトのボラティリティ、 $z_\gamma(t)$ は標準ブラウン運動、 $z(t)$ 、 $z_\eta(t)$ 、 $z_\gamma(t)$ は互いに独立であるとする。売却価格を、

$$\tilde{S}(t) = S(0) + \mu t + \sigma z(t) - \varepsilon - \{\eta_0 + \sigma_\eta z_\eta(t)\}v(t) - \{\gamma_0 + \sigma_\gamma z_\gamma(t)\} \int_0^t v(s) ds$$

と表す。総売却額は、

$$\begin{aligned} - \int_0^T \tilde{S}(t) dx &= v \int_0^T \tilde{S}(t) dt \\ &= XS(0) + \frac{1}{2} \mu v T^2 + v \sigma \int_0^T z(t) dt - \varepsilon v T - \eta_0 v^2 T - v^2 \sigma_\eta \int_0^T z_\eta(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma_0 v^2 T^2 - v^2 \sigma_\gamma \int_0^T tz_\gamma(t) dt \end{aligned}$$

となり、取引コストは、

$$\begin{aligned} C &= -\frac{1}{2} \mu v T^2 - v \sigma \int_0^T z(t) dt + \varepsilon v T + \eta_0 v^2 T \\ &\quad + v^2 \sigma_\eta \int_0^T z_\eta(t) dt + \frac{1}{2} \gamma_0 v^2 T^2 + v^2 \sigma_\gamma \int_0^T tz_\gamma(t) dt \end{aligned}$$

となる。取引コストの期待値と分散は、若干の計算により³⁶、

$$\begin{aligned} E[C] &= -\frac{1}{2} \mu v T^2 + \varepsilon v T + \eta_0 v^2 T + \frac{1}{2} \gamma_0 v^2 T^2 = -\frac{1}{2} \mu X T + \varepsilon X + \frac{\eta_0 X^2}{T} + \frac{1}{2} \gamma X^2 \\ V[C] &= \frac{1}{3} v^2 \sigma^2 T^3 + \frac{1}{3} v^4 \sigma_\eta^2 T^3 + \frac{2}{15} v^4 \sigma_\gamma^2 T^5 = \frac{1}{15} X^2 (5\sigma^2 T + 2\sigma_\gamma^2 X^2 T + \frac{5\sigma_\eta^2 X^2}{T}) \end{aligned}$$

となる。最小化すべき流動化コストを以下のように与える。

³⁶ $E\left[\int_0^T tz(t) dt\right] = 0$ 、 $V\left[\int_0^T tz(t) dt\right] = \frac{2}{15} T^5$ は伊藤の補題と $\int_0^T tz(t) dt = \frac{1}{2} \left\{ T^2 z(T) - \int_0^T t^2 dz(t) \right\}$ から連続モデルの場合と同様に容易に得られる。

$$L = -\frac{1}{2}\mu XT + \varepsilon X + \frac{\eta_0 X^2}{T} + \frac{1}{2}\gamma X^2 + rZ_\alpha \sqrt{\frac{1}{15} X^2 (5\sigma^2 T + 2\sigma_\gamma^2 X^2 T + \frac{5\sigma_\eta^2 X^2}{T})}$$

保有期間の問題は以下の条件で与えられるが、これに解析解は存在しないため、最適な保有期間を得るには、解は数値計算により求める必要がある。

$$\frac{\partial L}{\partial T} = -\frac{1}{2}\mu X - \frac{\eta_0 X^2}{T^2} + \frac{\frac{rZ_\alpha X^2}{15} (5\sigma^2 + 2\sigma_\gamma^2 X^2 - \frac{5\sigma_\eta^2 X^2}{T^2})}{\sqrt{\frac{1}{15} X^2 (5\sigma^2 T + 2\sigma_\gamma^2 X^2 T + \frac{5\sigma_\eta^2 X^2}{T})}} = 0$$

補論 G マーケット・インパクトと株価の変動に相関を導入したモデル

ここでは、一時的マーケット・インパクト係数の変動と株価の変動に相関を導入したモデルを提示し、数値例の計算を行う。

t 時点での一時的マーケット・インパクト係数を本文と同様に以下のように定義する。

$$\eta_t = \eta_0 + \sigma_\eta z_\eta(t)$$

但し、 η_0 は時点0での一時的マーケット・インパクト、 σ_η は一時的マーケット・インパクトのボラティリティ、 $z_\eta(t)$ はブラウン運動とする。売却価格を、

$$\tilde{S}(t) = S(0) + \mu t + \sigma z(t) - \varepsilon - \{\eta_0 + \sigma_\eta z_\eta(t)\}v(t) - \gamma \int_0^t v(s) ds$$

と表す。ここで、マーケット・インパクトの変動と株価の変動に相関があると考え、 $z(t)$ と $z_\eta(t)$ は相関係数 ρ を持つと仮定する。これは次のように表される³⁷。

$$E[dz(u)dz_\eta(v)] = \begin{cases} \rho du, & u = v \\ 0, & u \neq v \end{cases}$$

従って、相関を持つブラウン運動では以下の演算が成立する。

$$E[z(t)z_\eta(s)] = \int_0^s \int_0^t E[dz(u)dz_\eta(v)] = \int_0^s \rho du = \rho s \quad \text{ただし、} s < t$$

総売却額は、

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \tilde{S}(t) dx \\ & = XS(0) + \frac{1}{2} \mu v T^2 + v \sigma \int_0^T z(t) dt - \varepsilon v T - \eta_0 v^2 T - v^2 \sigma_\eta \int_0^T z_\eta(t) dt - \frac{1}{2} \gamma v^2 T^2 \end{aligned}$$

となり、取引コストは、

$$C = -\frac{1}{2} \mu v T^2 - v \sigma \int_0^T z(t) dt + \varepsilon v T + \eta_0 v^2 T + v^2 \sigma_\eta \int_0^T z_\eta(t) dt + \frac{1}{2} \gamma v^2 T^2$$

と表される。取引コストの期待値と分散は、若干の計算により³⁸、

³⁷ 木島 (1999) p.p.13-14 参照。

³⁸ $V[C] = \frac{1}{3} v^2 \sigma^2 T^3 + \frac{1}{3} v^4 \sigma_\eta^2 T^3 - \frac{2}{3} v^3 \sigma \sigma_\eta \rho T^3 = \frac{1}{3} X^2 (\sigma^2 T + \frac{\sigma_\eta^2 X^2}{T} - 2\sigma \sigma_\eta \rho X)$ を示す。

$$\begin{aligned} V[C] &= V \left[-\frac{1}{2} \mu v T^2 - v \sigma \int_0^T z(t) dt + \varepsilon v T + \eta_0 v^2 T + v^2 \sigma_\eta \int_0^T z_\eta(t) dt + \frac{1}{2} \gamma v^2 T^2 \right] \\ &= V \left[-v \sigma \int_0^T z(t) dt + v^2 \sigma_\eta \int_0^T z_\eta(t) dt \right] \\ &= v^2 \sigma^2 V \left[\int_0^T z(t) dt \right] + v^4 \sigma_\eta^2 V \left[\int_0^T z_\eta(t) dt \right] - 2v^3 \sigma \sigma_\eta \text{Cov} \left[\int_0^T z(t) dt, \int_0^T z_\eta(t) dt \right] \end{aligned}$$

$$E[C] = -\frac{1}{2}\mu v T^2 + \varepsilon v T + \eta_0 v^2 T + \frac{1}{2}\gamma v^2 T^2 = -\frac{1}{2}\mu X T + \varepsilon X + \frac{\eta_0 X^2}{T} + \frac{1}{2}\gamma X^2$$

$$V[C] = \frac{1}{3}v^2\sigma^2 T^3 + \frac{1}{3}v^4\sigma_\eta^2 T^3 - \frac{2}{3}v^3\sigma\sigma_\eta\rho T^3 = \frac{1}{3}X^2\left(\sigma^2 T + \frac{\sigma_\eta^2 X^2}{T} - 2\sigma\sigma_\eta\rho X\right)$$

となる。最小化すべき流動化コストを以下のように与える。

$$L = -\frac{1}{2}\mu X T + \varepsilon X + \frac{\eta_0 X^2}{T} + \frac{1}{2}\gamma X^2 + rZ_\alpha \sqrt{\frac{1}{3}X^2\left(\sigma^2 T + \frac{\sigma_\eta^2 X^2}{T} - 2\sigma\sigma_\eta\rho X\right)}$$

保有期間の問題は以下の条件で与えられる。

$$\frac{\partial L}{\partial T} = -\frac{1}{2}\mu X - \frac{\eta_0 X^2}{T^2} + \frac{rZ_\alpha X^2}{3}\left(\sigma^2 - \frac{\sigma_\eta^2 X^2}{T^2}\right) \left\{ \frac{X^2}{3}\left(\sigma^2 T + \frac{\sigma_\eta^2 X^2}{T} - 2\sigma\sigma_\eta\rho X\right) \right\}^{\frac{1}{2}} = 0$$

次に、第5章で用いたパラメータの数値例を使って数値計算を行う。マーケット・インパクトの小さい銘柄としてA社株、大きい銘柄としてB社株の数値計算例をそれぞれ下表に示す。ここでは、相関の効果を明確にするため、マーケット・インパクトの変動が大きい場合を考えることとし、 $\sigma_\eta = 2\eta_0$ とした。

$$= v^2\sigma^2 \frac{T^3}{3} + v^4\sigma_\eta^2 \frac{T^3}{3} - 2v^3\sigma\sigma_\eta E\left[\left\{\int_0^T z(t)dt - E\left[\int_0^T z(t)dt\right]\right\}\left\{\int_0^T z_\eta(t)dt - E\left[\int_0^T z_\eta(t)dt\right]\right\}\right]$$

$$E\left[\int_0^T z(t)dt\right] = 0, E\left[\int_0^T z_\eta(t)dt\right] = 0 \text{ より、}$$

$$= v^2\sigma^2 \frac{T^3}{3} + v^4\sigma_\eta^2 \frac{T^3}{3} - 2v^3\sigma\sigma_\eta E\left[\int_0^T z(t)dt \int_0^T z_\eta(t)dt\right]$$

であるため、題意を示すには $E\left[\int_0^T z(t)dt \int_0^T z_\eta(t)dt\right] = \frac{\rho T^3}{3}$ を示せば良い。

$$E\left[\int_0^T z(t)dt \int_0^T z_\eta(t)dt\right] = E\left[\int_0^T z(t)dt \int_0^T z_\eta(s)ds\right]$$

であるので、積分の順序交換より、

$$= E\left[\int_0^T \int_0^T z(t)z_\eta(s)dt ds\right] = \int_0^T \int_0^T E[z(t)z_\eta(s)]dt ds$$

が得られる。ここで、 $s < t$ の時、

$$E[z(t)z_\eta(s)] = \int_0^s \int_0^t E[dz(u)dz_\eta(v)] = \int_0^s \rho du = \rho s$$

であるため、

$$\int_0^T \int_0^T E[z(t)z_\eta(s)]dt ds = \int_0^T \int_0^s \rho dt ds + \int_0^T \int_s^T \rho s dt ds = \frac{\rho T^3}{3}$$

となり、題意は示された。

表 10 マーケット・インパクトと株価に相関を考慮した修正 VaR

▽A 社株 保有ポジション額: 1,655 百万円

相関係数	最適保有期間(日)	修正VaR(千円)
-1	0.413	32,059
-0.75	0.413	31,974
-0.5	0.412	31,888
-0.25	0.412	31,802
0	0.411	31,716
0.25	0.411	31,629
0.5	0.410	31,542
0.75	0.409	31,455
1	0.409	31,367

▽B 社株 保有ポジション額: 1,655 百万円

相関係数	最適保有期間(日)	修正VaR(千円)
-1	20.80	329,090
-0.75	20.63	323,794
-0.5	20.46	318,371
-0.25	20.28	312,810
0	20.10	307,099
0.25	19.90	301,224
0.5	19.70	295,172
0.75	19.49	288,922
1	19.27	282,455

表 10から、相関が負になると修正 VaR は増加し、相関が正になると修正 VaR は減少することが読み取れる。この理由としては、相関が負の場合にはマーケット・インパクトによる価格変動がランダム項による価格変動を増幅させることが挙げられる。

相関が負の場合、株価が下落(上昇)するとマーケット・インパクトは大きく(小さく)なる。特に、売却を行っている場合、マーケット・インパクトは価格の下押し圧力となり、相関がない場合に比べ価格変動は大きくなる。逆に相関が正の場合には、株価が下落(上昇)する際はマーケット・インパクトは小さく(大きく)なるため、相関がない場合に比べ価格変動は小さくなる。

補論 H ポートフォリオ・モデルにおける取引コストの分散の導出

$$\begin{aligned}
 V[C] &= V \left[\sum_{i,j=1}^m v_j \alpha_{ji} \int_0^{T_j} Z_i(t) dt \right] \\
 &= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \sigma_{jj} X_j^2 T_j + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m I_{\{T_j \leq T_k\}} \sigma_{jk} X_j X_k \frac{T_j^2}{T_k} + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m I_{\{T_j > T_k\}} \sigma_{jk} X_j X_k \frac{T_k^2}{T_j}
 \end{aligned}$$

を示す。

$$V[C] = V \left[\sum_{i,j=1}^m v_j \alpha_{ji} \int_0^{T_j} Z_i(t) dt \right]$$

$Z_i(t)$ はそれぞれ独立なので、

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^m V \left[\sum_{j=1}^m v_j \alpha_{ji} \int_0^{T_j} Z_i(t) dt \right] \\
 &= \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^m V \left[v_j \alpha_{ji} \int_0^{T_j} Z_i(t) dt \right] + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \text{Cov} \left[v_j \alpha_{ji} \int_0^{T_j} Z_i(t) dt, v_k \alpha_{ki} \int_0^{T_k} Z_i(t) dt \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$V \left[\int_0^{T_j} Z_i(t) dt \right] = \frac{T_j^3}{3}$ および $\text{Cov} \left[\int_0^{T_j} Z_i(t) dt, \int_0^{T_k} Z_i(t) dt \right] = I_{\{T_j \leq T_k\}} \frac{T_j^3}{3} + I_{\{T_j > T_k\}} \frac{T_k^3}{3}$ を用いて³⁹、

³⁹ $V \left[\int_0^{T_j} Z_i(t) dt \right] = \frac{T_j^3}{3}$ は、単一資産の連続モデルにおいて証明済であるため、以下では

$\text{Cov} \left[\int_0^{T_j} Z_i(t) dt, \int_0^{T_k} Z_i(t) dt \right]$ について $T_j \leq T_k$ の場合、 $\frac{T_j^3}{3}$ を示す。

$Z_i(t)$ のマルコフ性より $\int_0^{T_j} Z_i(t) dt$ と $\int_{T_j}^{T_k} Z_i(t) dt$ は独立である。また $T_j \leq T_k$ の仮定より、

$$\begin{aligned}
 \text{Cov} \left[\int_0^{T_j} Z_i(t) dt, \int_0^{T_k} Z_i(t) dt \right] &= \text{Cov} \left[\int_0^{T_j} Z_i(t) dt, \int_0^{T_j} Z_i(t) dt + \int_{T_j}^{T_k} Z_i(t) dt \right] \\
 &= \text{Cov} \left[\int_0^{T_j} Z_i(t) dt, \int_0^{T_j} Z_i(t) dt \right] + \text{Cov} \left[\int_0^{T_j} Z_i(t) dt, \int_{T_j}^{T_k} Z_i(t) dt \right] = \frac{T_j^3}{3}
 \end{aligned}$$

$T_j > T_k$ の場合も同様に示すことができる。

$$= \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^m \alpha_{ji}^2 v_j^2 \frac{T_j^3}{3} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m I_{\{T_j \leq T_k\}} v_j v_k \alpha_{ji} \alpha_{ki} \frac{T_j^3}{3} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m I_{\{T_j > T_k\}} v_j v_k \alpha_{ji} \alpha_{ki} \frac{T_k^3}{3} \right\}$$

ここで、 $v_j T_j = X_j$ を用いれば、

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ji}^2 \right) X_j^2 T_j + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m I_{\{T_j \leq T_k\}} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ji} \alpha_{ki} \right) X_j X_k \frac{T_j^2}{T_k} \\ &\quad + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m I_{\{T_j > T_k\}} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ji} \alpha_{ki} \right) X_j X_k \frac{T_k^2}{T_j} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \sigma_{jj} X_j^2 T_j + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m I_{\{T_j \leq T_k\}} \sigma_{jk} X_j X_k \frac{T_j^2}{T_k} + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m I_{\{T_j > T_k\}} \sigma_{jk} X_j X_k \frac{T_k^2}{T_j} \end{aligned}$$

よって示された。

