

# ボラティリティ研究の新潮流 ラフ・ボラティリティ

ファイナンス・ワークショップ  
2023/11/10

日本銀行 金融研究所 経済ファイナンス研究課  
篠崎 裕司

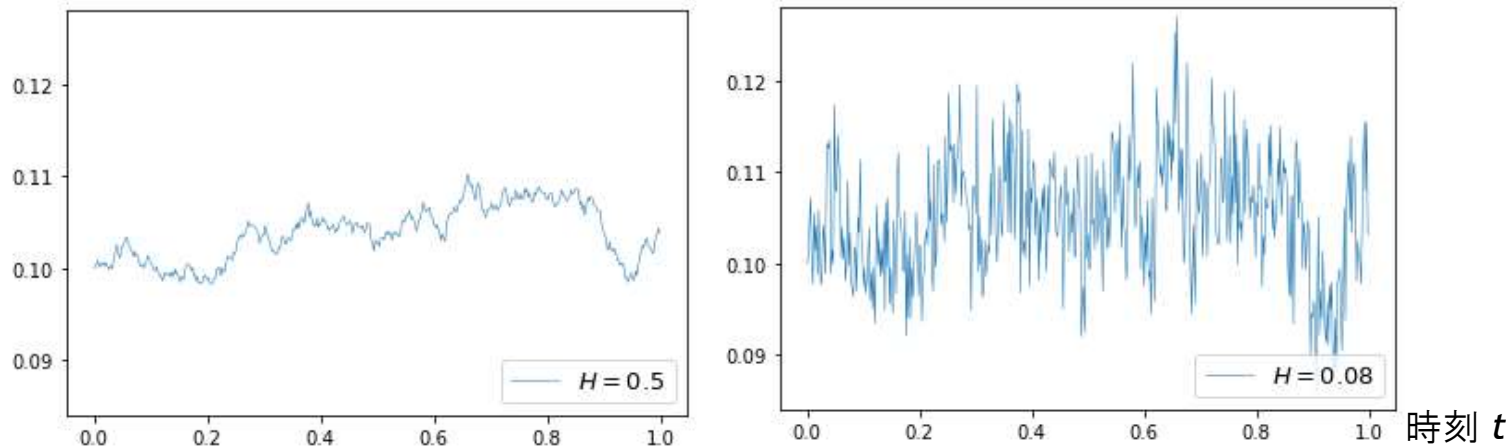
平木 一浩（日本銀行）との共同研究

本セミナーで示される意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。  
また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

（照会先：[yuuji.shinozaki@boj.or.jp](mailto:yuuji.shinozaki@boj.or.jp)、[kazuhiro.hiraki@boj.or.jp](mailto:kazuhiro.hiraki@boj.or.jp)）

## はじめに：「ラフ」なボラティリティとは

ボラティリティの変動が激しい：「ラフ」(Rough)=荒い



(\*)  $H$  : 変動の激しさ(ラフさ)を表すパラメータ  
 $H = 0.5$ がブラウン運動に対応

- ファイナンス分野では、ランダムな挙動を表現する基本的な道具として、長らく左図のような挙動(ブラウン運動)を示すモデルに依拠
- 2000年代以降、高頻度データなどの観測・数理ファイナンス理論による裏付けから、ラフなボラティリティ(右図、非整数ブラウン運動)の必要性が提起された

⇒ 複数分野にまたがり、観測・理論・応用の観点で、研究が進展

# はじめに：研究分野・論点

---

## 研究分野

〔計量ファイナンス〕 ボラティリティ変動の時系列モデリング

〔数理ファイナンス〕 デリバティブの価格付け・リスク管理

〔金融経済学〕 市場参加者の売買行動特性から、資産価格の形成・変動メカニズムを解明

## 論点

### ✓ ボラティリティはラフなのか？

- 高頻度データ（株価のイントラデイ・データなど）からの観測が、ラフ性を示唆
- デリバティブ市場での観測もラフ性を示唆、無裁定原理からラフな価格付けモデルが必要
- 市場参加者の売買行動特性から、ラフ性が生じるか分析

### ✓ 応用可能性

- 時系列予測（高頻度取引手法、リスク管理手法高度化など）
- デリバティブ市場の表現、モデル高度化（とくにボラ取引が盛んな株系商品）  
→ マルコフ性がない価格付けモデルの活用など、従来の前提が変わる可能性

⇒ 本報告では、複数分野にまたがる論点を整理し、展望を述べる

# 本日の内容

---

## 1. ボラティリティとは

- 背景・予備知識
- ボラティリティ研究の発展経緯

## 2. ラフ・ボラティリティ研究

- 概要
- 個別の論点・課題

## 3. まとめ

(\*) 付録：数理的補遺

# 1. ボラティリティとは

ボラティリティ：資産価格の変動率

✓ ボラティリティの定義：一定期間内での価格変化率の標準偏差

➤ 過去データから観察される資産価格の実績変動率（ヒストリカル・ボラ、HV）と、オプション価格等から算出される将来の予想変動率（インプライド・ボラ、IV）に大別

➤ 算出例

HV：過去1か月間の資産価格データから、日次価格変化率の標準偏差を算出

IV：満期が30日後のオプション価格から、先行き30日の期間での予想変化率を算出

— IVの期間構造：ある時点で、満期が異なるオプションから算出されたIV

✓ ボラティリティのモデル化の重要性

リスクや不確実性の大きさは、金融経済活動の意思決定・分析上の重要変数

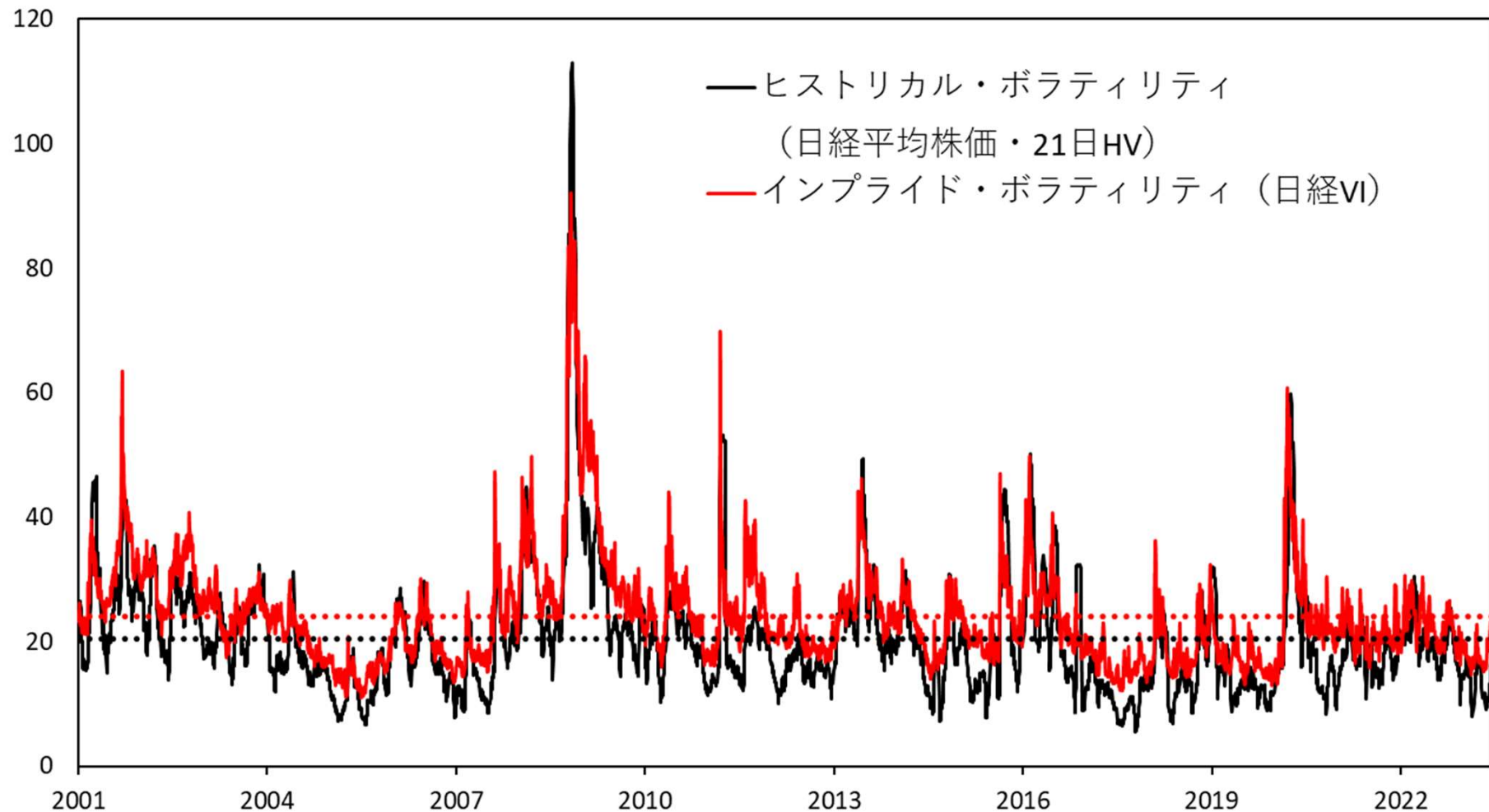
応用例：リスク管理、デリバティブ価格付け、最適ポートフォリオ戦略、

投資・消費行動等への影響

→後述のとおり、ボラティリティは、確率的に変動すること、ショックに対する持続性が知られており、こうした特徴を捉えることが、応用上重要

# 1. 代表的なボラティリティ指標の推移

6



(注) 2つの破線は、それぞれの系列の2001年1月～2023年6月平均値。

(出所) Bloomberg

# 1. ボラティリティの種類：HVとIV

7

ボラティリティは2種に大別され、用途などが異なる

|          | ヒストリカル・ボラティリティ (HV)                                                         | インプライド・ボラティリティ (IV)                                                                  |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 算出<br>方法 | 資産価格変動の過去データから算出                                                            | デリバティブ価格付け理論をもとに算出<br>(デリバティブの市場価格から市場参加者が認識している原資産変動率を逆算)                           |
| 用途       | 時系列モデリング、予測モデル<br>(実確率測度のもとでの離散時間モデル)                                       | デリバティブ価格付け・ヘッジ等<br>(リスク中立確率測度のもとでの連続時間モデル)                                           |
| 種類       | ・ データ頻度 (日次 vs イントラディ)<br>や計測ホライズンによって異なる値<br>・ 確率ボラモデル、ARCH型モデル、<br>実現ボラなど | ・ モデルや、商品特性 (行使価格・満期)<br>に依存したもの (BS-IV)<br>・ ボラティリティ・デリバティブ理論に<br>基づいて計測されるもの (VIX) |
| 主要<br>分野 | 計量ファイナンス                                                                    | 数理ファイナンス・金融工学                                                                        |

## ➤ 算出例 (再掲)

HV：過去1か月間の資産価格データから、日次価格変化率の標準偏差を算出

IV：満期が30日後のオプション価格から、先行き30日の期間での予想変化率を算出

(\*) 定義なども含め詳細は、付録1 (HV)、付録3 (IV) をそれぞれ参照

# 1. ボラティリティ研究の発展経緯

市場環境の変化・技術発展を受け、HV・IVとも問題意識が変遷してきた

1970～80年代  
黎明期

1990年代  
市場急変  
→確率ボラの  
必要性

2000年代～  
高頻度データ・  
デリバ市場  
(短期/株)の発展  
→ラフ・ボラの  
発見・必要性

## ヒストリカル・ボラティリティ(HV)

—計量ファイナンス—

時間変動ボラ(離散時間)

- ・ ARCH [Engle, 1982],
- ・ GARCH [Bollerslev, 1985]
- ・ 確率ボラ(離散時間) [Taylor, 1986]
- ・ レバレッジ効果対応モデル [Nelson, 1991]
- ・ 長期記憶性対応モデル [Bollerslev, Mikkelsen, 1996]

実現ボラ

高頻度データを用いた  
ボラ計測

- ・ HAR [Corsi, 2009]
- ・ RV-ARFIMA

—金融経済学—

資産価格形成のメカニズム

- ・ マーケット・マイクロストラクチャー(MM)
- [Parlour, 1998]
- [Cont, De Larrard, 2013]

## インプライド・ボラティリティ(IV)

—数理ファイナンス・金融工学—

定数ボラ(連続時間)

[Black, Scholes, 1973]

局所/確率/ジャンプボラ(連続時間)

IVの表現を主眼に開発: [Dupire, 1994]  
[Heston, 1995], [Bates, 1996]

ボラ・デリバの発展

・ VIXの理論的基礎

[Demeterfi et al, 1999]

IVの漸近展開公式

[Hagan et al, 2002],  
[Osajima, 2007]

## ラフ・ボラティリティ

HV(実現ボラ)の観測

[Gatheral et al, 2018]

ラフさの計測方法

[Fukasawa et al, 2022]

MMからの基礎付け

[El Euch et al, 2018]

IVの観測 [Alòs et al, 2007],

[Fukasawa, 2011]

ラフ・モデルの必要性

[Fukasawa, 2021]

デリバ・モデル

[Bayer et al, 2016]

数値計算



## 1. ボラティリティとは

## 2. ラフ・ボラティリティ研究

### ➤ 概要

### ➤ 個別の論点・課題

2-1. ラフとは：非整数ブラウン運動

2-2. HV（ヒストリカル・ボラティリティ）

2-3. IV（インプライド・ボラティリティ）

2-4. MM（マーケット・マイクロストラクチャー）

## 3. まとめ

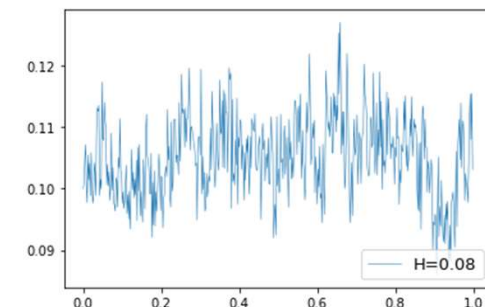
## 2. ラフ・ボラティリティ研究：概要

2000年代以降、IV・HVとも、ラフなボラティリティ変動を示唆する観測事実が蓄積  
⇒ IV・HV両方の観察事実との整合性に加え、MMによる基礎づけを持つ、  
連続時間モデルとして、ラフ・ボラティリティ研究が進展

### ラフ・ボラティリティ研究の論点・意義

1. HV：高頻度データ（株価のイントラデイ・データ）を用いて計測された、  
HVの挙動（時間発展）がラフ  
→ ボラ予測で有用（ARCH型モデル対比、予測力向上）  
※ ラフ性は、長期記憶性などの性質と排他的なものではない
2. IV：デリバティブ市場で観測されるIVの期間構造が、ラフ性を示唆  
・ ボラティリティがラフな市場では、ラフな価格付けモデルを用いないと裁定機会が発生  
→ デリバティブ価格付けの精緻化（とくにボラ取引が盛んな株系）、市場の効率性向上へ
3. MM：市場参加者の売買行動特性から、ラフ性が生じることを分析する枠組み  
→ ボラティリティにラフ性が生じる根拠、数理構造の理解にも有用

⇒ 以下、「ラフとは」直感的に説明したうえで、  
上記1~3の論点を説明



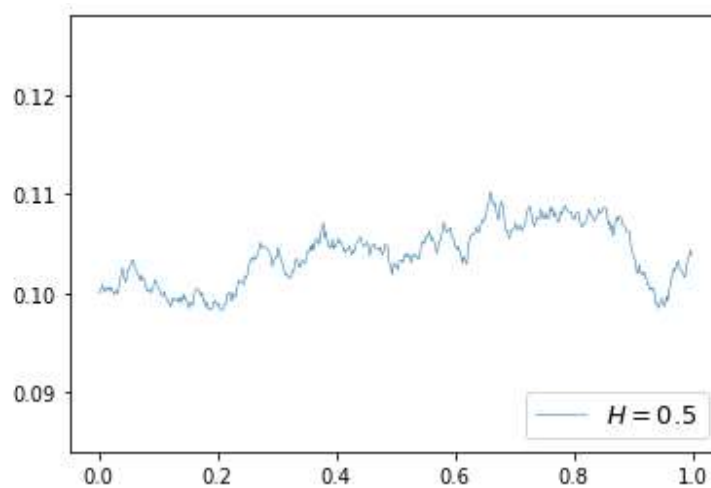
## 2-1. 「ラフ」なボラティリティとは

11

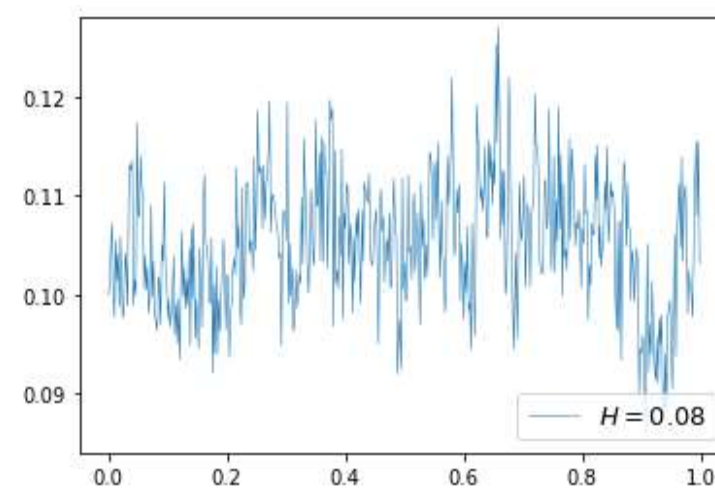
ラフ・ボラティリティ：資産価格のボラティリティが、通常のブラウン運動より荒い（ラフな）挙動で変化する

※ 資産価格自体の挙動ではなく、資産価格のボラティリティの挙動

従来の認識（ブラウン運動）



ラフ・ボラティリティ（非整数ブラウン運動）

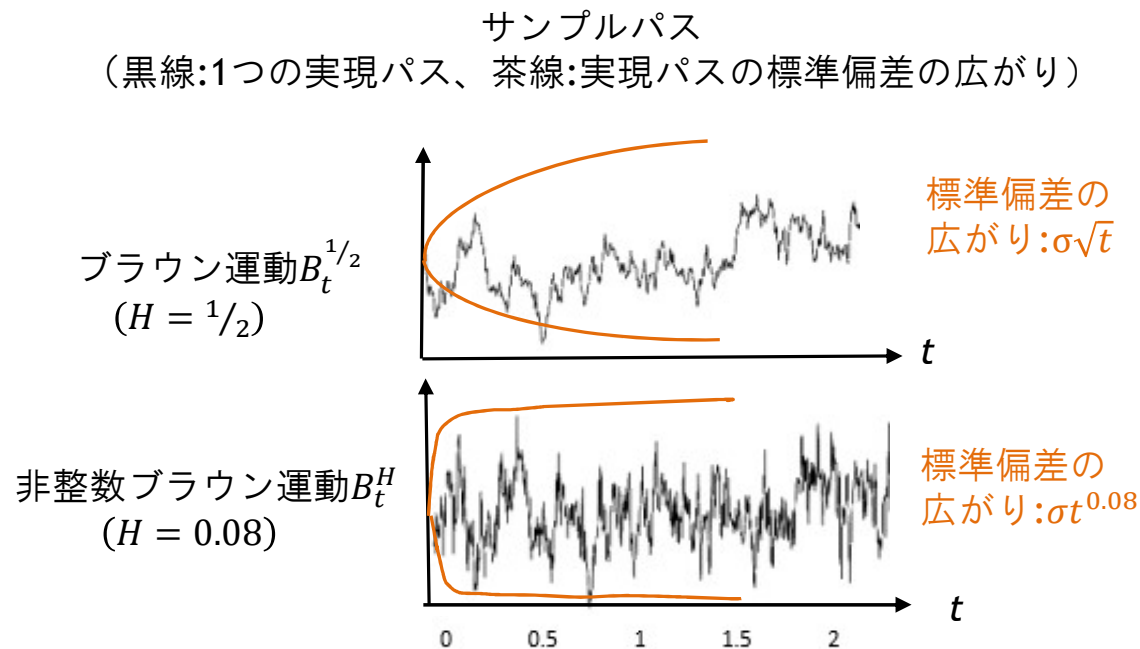


(\*)  $H$ ：変動の激しさ(ラフさ)を表すパラメータ（次ページ参照）

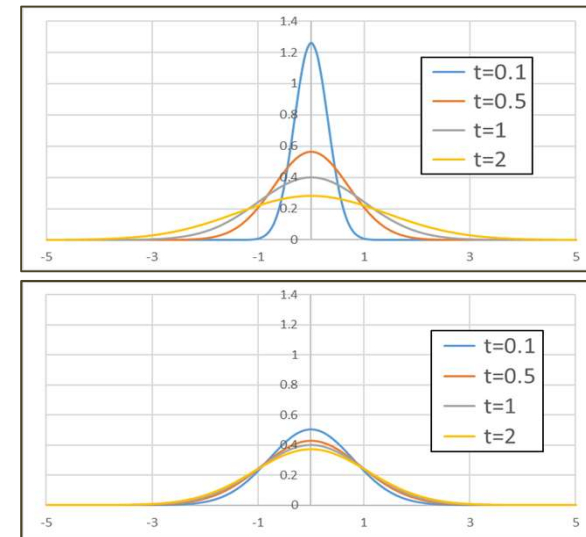
## 2-1. 「ラフ」とは：非整数ブラウン運動

12

非整数ブラウン運動  $B_t^H$  ( $H < 1/2$ )：ラフな挙動を示す、代表的な確率過程  
— 短時間での変動が激しい：ある時点  $t$  での値はブラウン運動同様、正規分布に従うが、早い時点 ( $t$ :小さい、短時間の変化) の標準偏差が、ブラウン運動のケース対比、非常に大きい



各時点での確率分布 (密度関数)



- ハースト指数  $H$ ：ラフさの度合いをあらわすパラメータ
- ・ 例えば、週次 (5日) 変化の標準偏差 =  $5^H \times$  日次変化の標準偏差
  - ・ ブラウン運動は  $H = 1/2$  に対応。  $H < 1/2$  のとき、変動が激しい「ラフ」なパスとなる (パスの変動の激しさ：ヘルダー連続性で定義される)
  - ・ ブラウン運動は独立増分だが、非整数ブラウン運動の増分には時系列相関が生じる
- (\*) 非整数ブラウン運動の数学的な性質・特徴は付録2を参照

## 2-2. HV：実現ボラティリティの観測事項

13

高頻度データから推計された実現ボラティリティの時系列

⇒ **非整数ブラウン運動 ( $H < 1/2$ ) と整合的な挙動** [Gatheral et al, 2018]

- ✓ 実現ボラティリティ  $RV_t$ ：イントラデイ・データを使った日次ボラティリティ
  - ・ 資産価格の高頻度データから推計された(標本)標準偏差
  - ・ 5分足の資産価格から算出されることが多い
- ✓ 時間幅  $\Delta$  で計った実現ボラ(対数値)の変動の期待値が、非整数ブラウン運動と整合的

$$E[|\log RV_\Delta - \log RV_0|^q] = b_q \Delta^{q \times H}$$

- ・ 様々な資産、様々な  $q$  (モーメントの次数) と時間幅  $\Delta$  でこの式を検証  
(株価指数、債券先物など、 $q: 0.5 \sim 3$ 、 $\Delta: 1 \text{日} \sim 2 \text{カ月}$ 程度)  
⇒  **$H=0.01-0.1$**  程度で上記関係が成立 ⇒  **$H < 1/2$**  であるため、ラフである可能性を示唆
- ・ ボラの時系列相関についても検証： $\text{Cov}[\log \sigma_\Delta, \log \sigma_0] = \text{Var}[\log \sigma_0] - \frac{1}{2} v^2 \Delta^{2H}$
- ・ ラフ性を考慮した実現ボラ予測モデル  $RV_t = e^{F(B_t^H)}$  は、既存モデル (HAR など) に比べ予測精度が高い

- (\*) 1. 実現ボラティリティ  $RV_t$  の定義は、付録1-2を参照。
2. 上記以外の重要な実現ボラの特徴として、「実現ボラは、未来のリターンより過去のリターンを反映する」というものがあり、Zumbach効果と呼ばれる (付録8)。Zumbach効果も、ラフ・ボラ・モデルにより表現可能であり、デリバティブの価格付け高度化でも有用 (後述)

## 2-2. HV：ラフ性の計測方法の頑健性

14

有限サンプルから推計された実現ボラは誤差を含むため、ラフ性の実証は議論の余地あり

⇒より頑健な方法が提示され、ラフ性が改めて実証された([Fukasawa et al, 2022]など)

✓ [Gatheral et al, 2018]の観測： $H$ の推計にバイアスあり

→ ラフでない挙動でも、ラフだと判定されてしまう推計方法であることが明らかに  
[Rogers, 2023] [Cont, Das, 2023] [Fukasawa et al, 2022]

非整数ブラウン運動によるモデルの必要性に関する懐疑的意見  
(ラフ性が現れるのは高頻度データの場合のみ、実務利用上のハードルなど)

✓ 頑健なRVのラフ性検証(バイアスなしに、分布を推定)

- ・ 高頻度漸近極限定理に基づく擬似最尤推計[Fukasawa et al, 2022]
- ・ GMM推計[Bolko et al, 2023]

→高頻度の資産価格データから、バイアスなしにラフ性を計測した結果、

$H = 0.05$ 程度と、 [Gatheral et al, 2018]以上にラフ性を示唆する結果

※ ラフ性は、タイム・スケール( $\Delta$ )を変えたときの性質で、長期記憶性などの性質と排他的ではない

- ・ ラフ性と長期記憶性を両立するモデル(パラメータ増やす) [Bennedsen et al, 2021]

⇒ HVの観測に加え、IVやMMの観点からも、ボラティリティのラフ性の観測や、ラフなモデル化の必要性が議論されている(次ページ以降)

## 2-3. IV：導入

15

### IV：予想変動率＝オプション価格から逆算されるボラティリティ

- ✓ 背後にある考え方：オプションの市場価格 =  $f$ (将来の不確実性の市場予想)
  - ー オプションなどのデリバティブは、原資産の将来の不確実性が高いほど価値がある
- ✓ ブラック-ショールズ(BS)公式では、オプション価格とボラティリティを表す定数パラメータが一对一に対応するので、価格からボラティリティを逆算できる。

$$\text{＜市場で観察される価格＞ } C^{(\text{mkt})}(K, T) = C_{\text{BS}}\left(K, T, \sigma_{K, T}^{(\text{BS})}\right) \text{ ＜BS理論価格公式＞}$$

- ✓ オプション取引には、条件として、満期 $T$ と行使価格 $K$ がある
  - 満期 $T$ と行使価格 $K$ ごとに算出したIVを $(K, T, IV)$ で3次元曲面を描いたものを、ボラティリティ・サーフェスと呼ぶ
  - 流動性の高いオプション価格の組  $\{C(K_i, T_i)\}_{i=1, \dots, N}$  が与えられたもとで3次元曲面を描く

- (\*) 1. ブラック-ショールズ・モデルやIV導出の詳細は付録3を参照。  
2. デリバティブ実務では、IVを「オプション価格」としてクオートする慣行  
(オプションの(円やドル)価格は満期や行使価格によって大きく変わるので、オプション価格は10円と表示するより、IV=20%と表示した方が割高・割安感がわかりやすい)

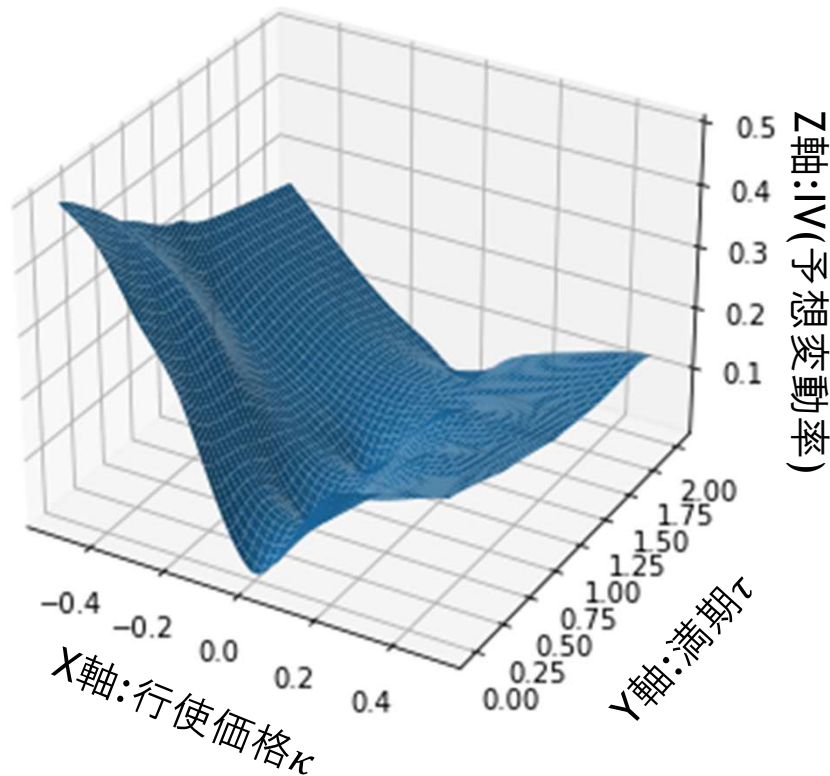


## 2-3. IV：ボラティリティ・サーフェス（参考）

16

ボラティリティ・サーフェスは、ブラック・ショールズモデルのもとで平面(IV一定)。しかし、市場から逆算されたIVは、平面とはならない

- ー 短期満期のオプションや、原資産価格下落時にペイオフが発生するオプションのIVが高くなる（オプション価格が高くなる）



ボラティリティ・サーフェス  
(イメージ図)

・ 株価指数オプションの場合の一般的な傾向

- (1) X軸:行使価格方向の断面（ある満期 $\tau$ での断面）をみると、低い行使価格ほどIVが高い傾向（ボラティリティ・スマイル）  
→ 株価下落方向に分布が厚いことに対応
- (2) Y軸:満期方向の断面（ある行使価格での断面）をみると、短い満期ほどIVが高い傾向（期間構造）
- (3) X軸:行使価格方向の傾きは、満期が短いほど、急になる（「負のべき乗則」P.18で定式化）  
→ 満期の短いオプションの価格ほど、市場の急変リスクに大きな影響を受ける



## 2-3. IV：既存デリバティブ・モデルの発展経緯（参考）

17

価格付け・リスク管理上必須な「無裁定条件を満たすモデル」とするには、市場で観察されるボラ・サーフェスを表現することが必要で、様々なモデルが考案されてきた

- ✓ 市場で観測されるボラ・サーフェスに、デリバ・モデルを合わせる意義：
  - 商品間での価格を、整合的に（裁定が生じないように）するため
  - ー 市場で観測される流動性が高いオプションの市場価格をモデルが再現しつつ、デリバ・モデルで価格付けをしたいより複雑な金融商品の価格を整合的に算出
- ✓ 代表的なモデル：資産価格過程を  $dS_t/S_t = r_f dt + \sqrt{V_t} dW_t$  とし、ボラティリティ項をモデル化
  - ー とくに、前ページの(1), (2)のボラ・サーフェスの形状を合わせることに主眼であった

| モデル名    | ボラティリティ項                                                            | モデルの特徴                                                                                                         | 欠点                                                                              |
|---------|---------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| BSモデル   | $V_t = \sigma^2$ （定数）                                               | <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 定数ボラティリティ</li> <li>・ オプション価格公式が存在</li> </ul>                          | <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 市場価格は、定数IVの仮定を満たしていない</li> </ul>       |
| 局所ボラモデル | $V_t = \sigma^2(t, S_t)$<br>（確定的な関数）                                | <ul style="list-style-type: none"> <li>・ ある1時点でのサーフェスは正確に再現可能</li> </ul>                                       | <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 時間経過に伴うサーフェスの変化を再現できない</li> </ul>      |
| 確率ボラモデル | $V_t = \mu^V(t, V_t)dt + \xi\sqrt{V_t}dW_t^V$<br>（確率的に変動する関数）       | <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 確率的なボラ変動をモデル化</li> <li>・ 時間経過に伴うサーフェスの変化の表現が可能</li> </ul>             | <ul style="list-style-type: none"> <li>・ ボラ・サーフェスを完全には再現できない</li> </ul>         |
| ジャンプモデル | $\frac{dS_t}{S_t} = r_f dt + \sigma_t dW_t + dJ_t$<br>（原資産価格にジャンプ項） | <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 短期満期での急激な価格変動をジャンプで表現</li> <li>・ 確率ボラモデルで、表現できないサーフェスを表現可能</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>・ ヘッジ戦略の構築、計算負荷など、実用上問題が生じやすい</li> </ul> |

(\*) 詳細は、付録3

## 2-3. IV：ラフ性の観測とモデル化の必要性

**[観測]** 負のベキ乗則：満期が短いほど市場急変リスクが高いという、ボラ・サーフェスの形状  
→ 既存モデルでは表現困難であったが、非整数ブラウン運動に基づくモデルで表現可能  
⇒ IVのラフ性を示唆 [Alòs et al, 2007] [Fukasawa, 2011]

**[必要性]** IVにラフ性がある市場(負のベキ乗則が観測されるボラ・サーフェス)では、  
ラフなボラを持つ価格付けモデルを用いないと、裁定が生じる [Fukasawa, 2021]

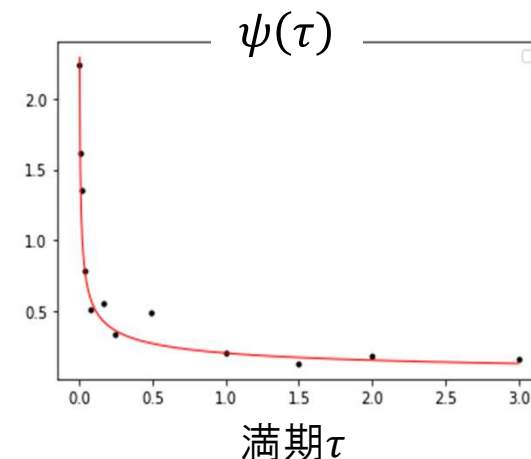
**[観測]** 既存モデル(確率ボラ)では表現困難なIVの期間構造の発見(負のベキ乗法則) [Carr, Wu 2003]  
・  $\psi(\tau) := \left| \frac{\partial}{\partial k} \sigma_{BS}(k, \tau) \right|_{k=0}$  に関し、 $\psi(\tau) \approx \tau^{H-\frac{1}{2}}$  (短い満期 $\tau$ ) が実証的に観測された  
— 満期が短いほど、資産が価格が急変すると市場が予想していることに対応  
⇒ 非整数ブラウン運動に基づくモデルでの現象を表現可能 [Alòs et al, 2007] [Fukasawa, 2011]

**[必要性]** [Fukasawa, 2021]

IVの形状(ベキ乗則)から示唆されるラフさ > 価格付けモデルのボラティリティのラフさ  
⇒ 裁定発生

(参考) 負のベキ乗則 (P.16性質(3)、詳細は付録3-4参照)

$\psi(\tau)$ は、満期 $\tau$ でのボラ・スマイルの断面の、at the money  
( $K = S_t$ )での傾きを表す。これを、様々な満期 (P.16グラフのY軸  
方向)で観察したものが右図の黒点 (イメージ図)



## 2-3. IV：複製（ヘッジ）の議論（参考）

19

非整数ブラウン運動：既存の数理ファイナンス理論を適用できない

⇒ ある種のラフ・ボラ・モデルでは、複製・ヘッジの議論が適用可能

ー ラフ・ボラ・モデルの実務適用可能性を示唆。ただし、数値計算などが課題

➤ ブラウン運動ベースのモデル：マルコフ性があり、価格付けやヘッジ戦略の導出が容易

・ マルコフ性：将来のデリバティブ・ペイオフの条件付き期待値を計算するときに、現在の状態

（例：現在の株価）がわかれば十分で、過去の情報（例：株価の推移）は不要

・ マルコフ性がある場合、価格付け問題やヘッジ問題は偏微分方程式を解くことで計算可能

➤ 非整数ブラウン運動はマルコフ性を持たない（将来の変動が過去の履歴に依存）ため、既存の数理ファイナンスの枠組みでは、価格付けやヘッジ戦略の導出は原則不可能

✓ ラフ・ボラ・モデル：非整数ブラウン運動でボラを記述（[Bayer et al, 2016]以降；付録4-1）

フォワード・バリエンス（バリエンス・スワップの先渡契約）価格情報がある場合、マルコフ性を回復し、ヘッジ・複製が可能に

➤ フォワード・バリエンスの価格に、ヘッジ・複製に必要な過去の履歴情報が集約されている

➤ 米国株式市場などでは、フォワード・バリエンスに十分な流動性あるため、実務利用可能か

➤ 簡易なVIXオプションのヘッジに対し、ラフ・ボラ・モデルによりヘッジ誤差が小さくなることを確認 [Fukasawa et al, 2021]

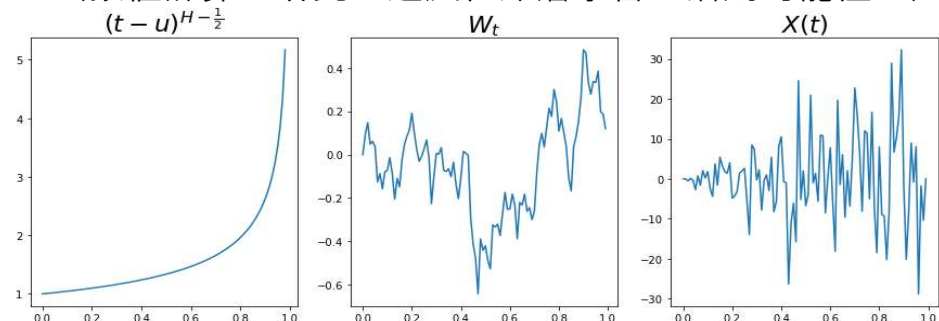
→ ただし、実務上必要な期待値計算などは容易でない（数値計算の研究が進展、深層学習の活用可能性も）

（参考）リーマン・リュウビル型伊藤積分

$$X(t) = \int_0^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u \quad (H: 0.01 \sim 0.1)$$

ー 非整数ブラウン運動は、積分の下限が $-\infty$

ー  $X(t)$  は非整数ブラウン運動に似た時系列相関の性質を持つ



## 2-3. IV：株式デリバティブ（VIX市場）での活用（参考）

20

VIXなどボラティリティ取引が盛んな株式デリバティブ市場で活用  
⇒ より効率的なデリバティブ市場・リスク管理技術の発展へ

- ✓ VIX：米国株価（S&P 500指数、SPX）のIV指数だが、リスク管理ツールのほか、経済や市場全体の不確実性指標としても多用されている
  - リスク管理ツールとして、VIXを原資産とする先物やオプションが盛んに取引されている
  - 理論的には、様々な行使価格のSPXオプション価格から計算されている
- ✓ VIXはSPXオプションから派生しており、SPXオプションとVIXオプションの価格を単一モデルで無裁定条件が満たされるよう表現できることが、デリバ実務上重要
  - VIXオプション・SPXオプションの市場価格と整合的な、将来のS&P500指数とVIXの同時確率分布を表現できるモデルを構築し、1つのポートフォリオで相互にヘッジしたい
- ✓ これまでの研究では、上記のような単一モデルの構築は困難と考えられてきたが、ラフ・ボラ・モデルによってこの問題が解決できる可能性 [Gatheral et al, 2020]
  - VIXのIVとSPXのIVの間に理論的・実証的に成り立つ大小関係を、一部のラフ・ボラ・モデルが表現できることが判明している
- ✓ ボラ・デリバの効率的な価格付け・リスク管理、ひいてはデリバ市場の流動性向上に、ラフ・ボラ・モデルが寄与する可能性

## 2-4. MM(マーケット・マイクロストラクチャー)：背景

21

ラフ・ボラティリティのような資産価格変動を引き起こす背後には、どのような取引行動があるのか？

- ✓ 連続時間モデルはある種の理想化。離散的な「価格変動」との関係は？
  - ・ 二項モデル（価格が上下にランダムウォーク）：ブラウン運動に収束
  - ラフ・ボラ・モデル（非整数ブラウン運動）に収束する離散モデルは？
- ✓ 個々の売買行動のモデルをもとに、現実的な資産価格変動モデルが得られるか？
  - ・ 「取引板」モデルから、資産価格変動モデルを導出（[Cont, De Larrard, 2013]など）
  - ・ 取引フローとボラティリティの関係
- ✓ 高頻度の価格変動は「ノイズ」か？
  - ・ 実現ボラの計算では、マイクロストラクチャーノイズを避けるため、短い頻度（分足未満など）のデータは用いないのが標準的
  - ・ 高頻度でのHV変動にはどのような情報があるのか？

## 2-4. MM：モデルの準備

22

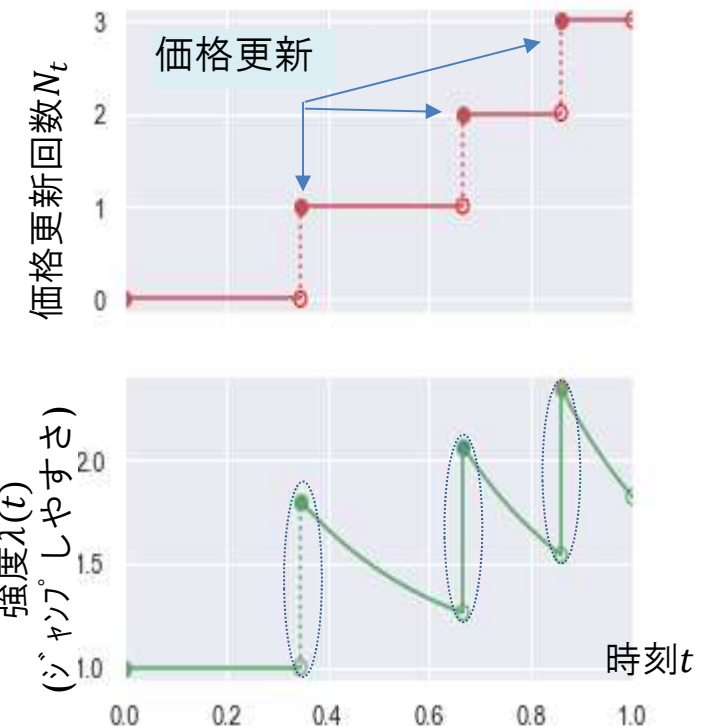
ティック・データをみると、売買成立時に価格がジャンプすることで価格変動  
 ⇒超高頻度な価格変動を「ジャンプ過程」でモデル化、  
 ホークス過程と呼ばれるジャンプ過程から、ラフ・ボラ・モデルを導出可(次頁)

✓ ジャンプ過程では「ジャンプの起きやすさ」(売買=価格更新の起きやすさ)を表す「強度(intensity)」と呼ばれるパラメータ  $\lambda$  が重要な役割を果たす

➤ 基本的なジャンプ過程（ポワソン過程）：強度一定  
 ー 時刻  $t$  から時刻  $t + \Delta t$  の間にジャンプが起きる確率が  $\lambda \Delta t$  で一定

➤ 現実には、強度は一定ではない  
 → ジャンプが発生すると、別のジャンプを誘発する（強度が上がる）現象がみられる（自己励起）  
 例： 本震後の余震、大企業倒産後の連鎖倒産、市場急落後の投げ売り...

➤ この挙動を表現するのがホークス過程（右図）。  
 ホークス過程では、ジャンプ発生により強度が上がり、その後もジャンプが起きやすくなる。  
 ー ただし、上昇した強度はその後徐々に低下



価格更新が起きると強度が上昇→  
 後続の価格更新が起きやすくなる



## 2-4. MM：ラフ性を分析する枠組み

23

[El Euch et al,2018]：価格変動をホークス過程でモデル化

⇒ 価格更新の強度への影響が長期的に残る場合、形成される価格のボラが「ラフ」に

アイスバーグ注文の影響と解釈

✓ 枠組みの概要（詳細は、付録6参照）

$P_t = N_t^+ - N_t^-$  ( $P_t$ : 価格、 $N_t^+$ ,  $N_t^-$ : 時刻 $t$ までに価格が上に/下にジャンプした回数)

ー 価格は各取引で1円だけ上昇/下落すると仮定し、これまでの上昇・下落回数で価格を表現  
 $N_t^+$ ,  $N_t^-$  は、それぞれホークス過程で表現される。

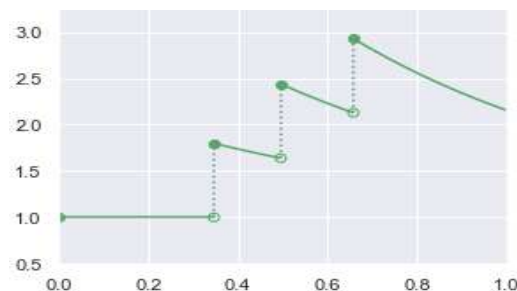
→ 価格更新が連続的に起こるとした場合の価格過程（スケール極限、次ページ）のラフさを分析

✓ 結果、価格ジャンプ発生後の強度の減衰スピードが遅い場合、ラフ・モデルに収束

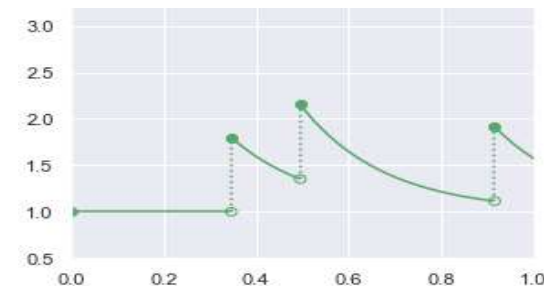
✓ El Euchらは、強度の減衰スピードが遅くなるのは、「取引コストを小さくするため、大きな注文は、小さな注文に分割されて長期間にわたって執行される（アイスバーグ注文）」ためとの解釈を採用

➤ ホークス過程の強度の推移(イメージ)

減衰：遅い ⇒ ラフなモデルに収束



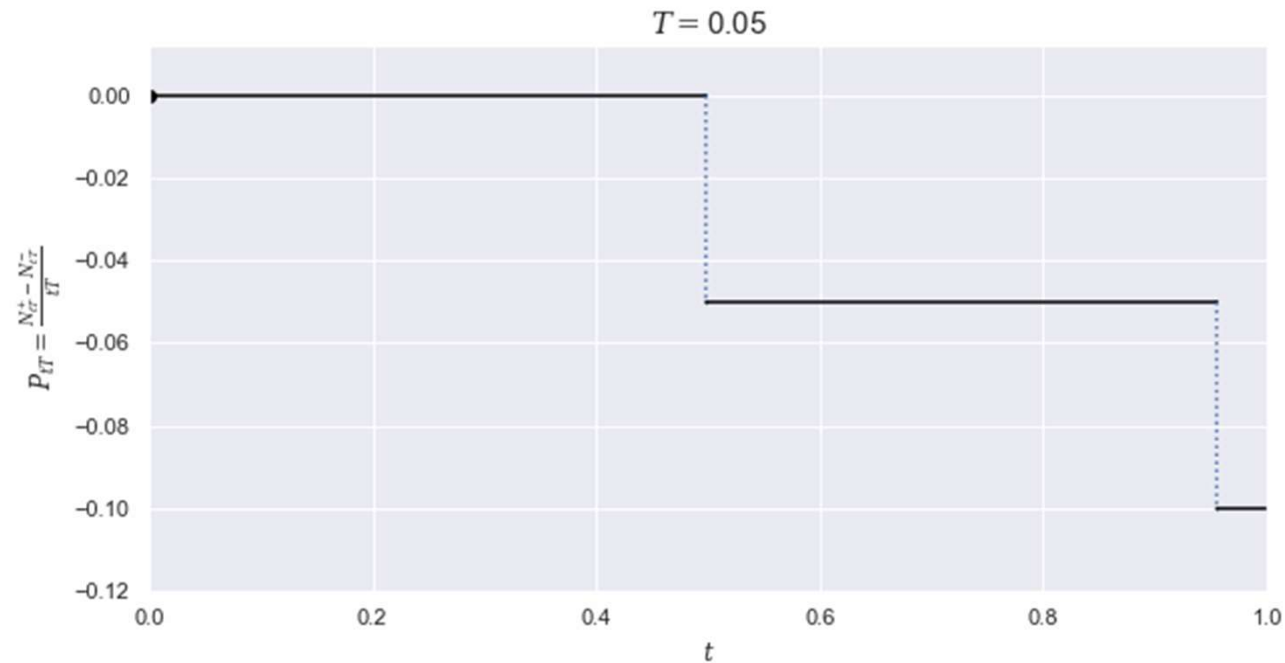
減衰：速い ⇒ ラフでないモデルに収束



## 2-4. MM：ラフ性を分析する枠組み（スケール極限、参考）

24

ホークス過程のスケール極限： $\tilde{P}_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{P_{tT}}{T} = \frac{N_{tT}^+ - N_{tT}^-}{T}$



(\*) 0時点からの価格変動をプロット



# 本日の内容

---

## 1. ボラティリティとは

- 背景・予備知識
- ボラティリティ研究の発展経緯

## 2. ラフ・ボラティリティ研究

- 概要
- 個別の論点・課題

## 3. まとめ

(\*) 付録：数理的補遺

### 3. まとめ：ラフ・ボラティリティ研究の論点

#### ✓ 各分野のまとめ

|    | 観測事項・応用                                                                                                                                                                            | 論点                                                                                                            |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| HV | <ul style="list-style-type: none"><li>・ 高頻度データから観測された実現ボラの挙動は、ラフ性を示唆</li><li>・ ラフ性を考慮したモデルにより時系列予測力向上</li></ul>                                                                    | <ul style="list-style-type: none"><li>・ 実現ボラには、計測誤差が含まれるため、ラフ性の推計に影響</li><li>・ 検証対象の拡大が必要</li></ul>           |
| IV | <ul style="list-style-type: none"><li>・ デリバティブ市場で観測されるボラ・サーフェスの形状が、ラフ性を示唆</li><li>・ ラフ性が観測される市場では、無裁定条件を保つため、ラフ性を考慮したモデルが必要</li><li>・ マルコフ性の回復やマルコフ近似を通じ、実務適用が可能性が高まっている</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>・ 実務適用には、数値計算技術などの更なる発展が必要</li><li>・ 様々な市場でラフ性が観測されるか、実証研究が必要</li></ul> |
| MM | <ul style="list-style-type: none"><li>・ 市場参加者の売買注文行動をモデル化し、ラフ性を引き起こす要因を分析する枠組みが存在</li></ul>                                                                                        | <ul style="list-style-type: none"><li>・ 既存研究以外の経済学的メカニズムも存在しうる</li><li>・ 取引データなどに基づくモデルの構築・検証が必要</li></ul>    |

#### ✓ ラフ性を表現するモデルに関する論点

非整数ブラウン運動( $H < 1/2$ )をベースとするモデルが、唯一のモデルではない

- ー モデリングの観点(観測事項の表現など上記議論の他、長期記憶性とラフ性の両立も)や、期待値計算などの実用性も考慮して、モデル化の方法を検討する必要がある

### 3. まとめ：ラフ・ボラティリティ研究の展望と課題

27

✓ ボラ予測モデルの高度化

予測精度の向上のほか、高頻度取引への活用、高頻度データ特性と統合的な金融時系列データ生成なども展望

✓ デリバティブ価格付け高度化

デリバティブのリスク管理高度化や市場の効率化・発展を展望

✓ MMとラフ・ボラ

今後、市場参加者の取引行動と資産価格変動の激しさの関係への理解が進めば、市場急変リスク分析など金融安定関連の分析にも活用可能か？

⇒ ラフ・ボラティリティ研究によって、**資産価格変動メカニズムの解明**、**ボラ分析を結節点とした、金融実務・学術の各分野の横断的な発展**が展望される

## 付録1-1. 計量ファイナンスにおけるボラ研究：ARCH型モデル <sup>28</sup>

以下、実確率のもとで、離散時間の資産価格のダイナミクス $\{S_t\}_{t=1,\dots}$ を考える

定義（ARCH型モデルにおけるボラティリティ）（\*）[渡部,佐々木(金融研究),2006]参照

$R_t$ ：ある資産の時刻  $t$  期でのリターン $\left(\log \frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$  を、離散時刻の確率過程とみなす

このとき、 $R_t = E[R_t | I_{t-1}] + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$  と分解し、 $\sigma_t$  をARCH型モデルのボラティリティと呼ぶ  
 ( $I_{t-1}$ :  $t-1$  期の情報、 $z_t$ : 平均0, 分散1の確率変数)

→ 市場で観測された “Stylized fact” を表現する時系列モデルが発展

ー 資産価格の過去データからパラメータを推計し、将来のボラティリティを予測

| Stylized fact                                   | 時系列モデル                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ボラティリティ・クラスタリング<br>ボラは、いったん上昇（下降）すると、しばらく高い（低い） | <ul style="list-style-type: none"> <li>ARCH[Engle, 1982] : <math>\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2</math></li> <li>GARCH[Bollerslev, 1985] : <math>\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2</math><br/>                     (パラメータ <math>\omega &gt; 0, \alpha_j, \beta_i \geq 0</math>)</li> </ul> |
| レバレッジ効果<br>資産価格が下がった後は上がった後に比べ、ボラが高くなる          | <ul style="list-style-type: none"> <li>EGARCH[Nelson, 1991] :<br/> <math display="block">\log \sigma_t = \omega + \beta(\log \sigma_{t-1} - \omega) + \theta(z_{t-1}) + \underbrace{\gamma( z_{t-1}  - E[ z_{t-1} ])}_{\text{リターン}の上下に関する非対称性}</math>                     (パラメータ: <math>\omega, \beta, \theta, \gamma</math>)</li> </ul>                                                       |
| 長期記憶性<br>ボラのショックがどの程度の時間影響するか(時系列相関により計測)       | <ul style="list-style-type: none"> <li>FIEGARCH[Bollerslev, Mikkelsen, 1996] :<br/> <math display="block">(1 - \beta L) \underbrace{(1 - L)^d}_{\text{ラグ}} (\log \sigma_t^2 - \omega) = \theta z_{t-1} + \gamma( z_{t-1}  - E[ z_{t-1} ])</math>                     (パラメータ: <math>\omega, \beta, \theta, \gamma</math>)</li> </ul>                                                            |

(\*)ボラ予測の時系列モデルとして、確率ボラ・モデル(Hull-Whiteモデルなどの時間離散版)が提案された([Taylor, 1986], [渡部, 2000])。ただし、パラメータ推計が困難なため、フィルトレーションを変更し、パラメータを尤度解析により算出可能したARCH型モデルの実用が広まった。

- ✓  $t$ 日の日中のリターン  $\{r_t, r_{t+\frac{1}{n}}, \dots, r_{t+\frac{n-1}{n}}\}$  が与えられたとき、実現ボラティリティ  $RV_t$  を以下の式で定義
  - ー 日中の実現リターンの標本分散（2乗和）

$$RV_t = \sum_{i=0}^{n-1} r_{t+\frac{i}{n}}^2$$

- ー 連続時間の資産価格のダイナミクス  $d \log S_u = \mu_u du + \sigma_u dW_u$  を考えると、  
 $n \rightarrow \infty$  としたときに、 $RV_t$  は、 $\int_{t-1}^t \sigma_u^2 du$  に確率収束する
- ボラティリティ予測において、ARCH型より予測パフォーマンス向上
  - ー 日本の株式市場での研究は、[渡部,2007], [渡部,2020] を参照

- ✓ 実現ボラティリティの時系列モデル

- ・ RV-ARFIMA[Andersen et al, 2003]:

$$(1-L)^d (\log RV_t - \mu_0 - \mu_1 |RV_{t-1}| - \mu_2 D_{t-1}^- |RV_{t-1}|) = (1+\theta)u_t, u_t \sim i, i, d, N(0,1)$$

- ・ HAR[Corsi,2009]：異なる周期の実現ボラ（日次、週次、月次など）で、時系列回帰

$$RV_t = \alpha + \beta_d + \beta_w \left( \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 RV_{t-i} \right) + \beta_m \left( \frac{1}{22} \sum_{i=1}^{22} RV_{t-i} \right)$$

- ー ARCH型モデルの議論同様、Stylized fact を再現するように、モデルを構成

- ✓ マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズ（MMN）の議論

- MMN：高頻度データの観測で見られるノイズ（市場のミクロ構造に起因して発生）
- 計測において用いる日中リターンを、5分おきにするなどして、ノイズを除去する
- MMNを加味したモデル化[Nagakura, Watanabe, 2015]、検証[生方, 2009]

## 付録2-1. 非整数ブラウン運動：定義と性質

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ : 確率空間とする

定義

確率過程  $B^H = \{B_t^H \mid t \geq 0\}$  が、ハースト指数  $H \in (0, 1)$  の非整数ブラウン運動である

$$: \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \text{ 任意の時間分割 } 0 \leq t_1 < \dots < t_k < \infty \ (k \in \mathbb{N}) \text{ に対し、} (B_{t_1}^H, \dots, B_{t_k}^H) \text{ が同時正規分布} \\ (2) \text{ 任意の時刻 } t \geq 0 \text{ に対し、} E[B_t^H] = 0 \\ (3) \text{ 任意の時刻 } t, s \geq 0 \text{ に対し、} E[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}) \end{cases}$$

(\*)  $H = \frac{1}{2}$  のとき、ブラウン運動  $(W_t = B_t^{1/2})$

性質

- ✓ 定常増分:  $B_{t+s}^H - B_s^H \sim B_t^H$  (同分布に従う確率変数)
- ✓ 自己相似:  $a > 0$  に対し、 $B_{at}^H \sim a^H B_t^H$
- ✓ 増分の従属性:  $s_1 < t_1 < s_2 < t_2$  に対し、
 
$$\begin{cases} H \in (0, \frac{1}{2}) \Rightarrow E[(B_{t_1}^H - B_{s_1}^H)(B_{t_2}^H - B_{s_2}^H)] < 0 \\ H = \frac{1}{2} \Rightarrow E[(B_{t_1}^H - B_{s_1}^H)(B_{t_2}^H - B_{s_2}^H)] = 0 \\ H \in (\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow E[(B_{t_1}^H - B_{s_1}^H)(B_{t_2}^H - B_{s_2}^H)] > 0 \end{cases}$$

知られている事実

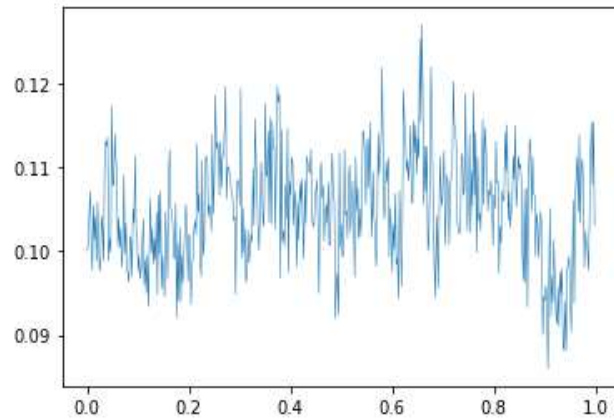
- ✓  $(H - \varepsilon)$  ヘルダー連続: 連続な修正  $\{\tilde{B}_t^H \mid t \geq 0\}$  で、任意の  $\varepsilon > 0$  に対しある確率変数  $G_\varepsilon$  が存在し
 
$$\tilde{B}_t^H - \tilde{B}_s^H \leq G_\varepsilon |t - s|^{H-\varepsilon} \text{ を満たすものが存在する}$$
  - コルモゴロフの連続性定理から従う
- ✓  $H \neq \frac{1}{2}$  のとき、セミマルチンゲールでもマルコフ過程でもない — 増分の従属性などから従う
- ✓ 伊藤積分による表現 [Levy, 1953], [Mandelbrot, Van Ness, 1968]

$$B_t^H = \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \left( \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dW_s + \int_{-\infty}^0 \left( (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_s \right)$$

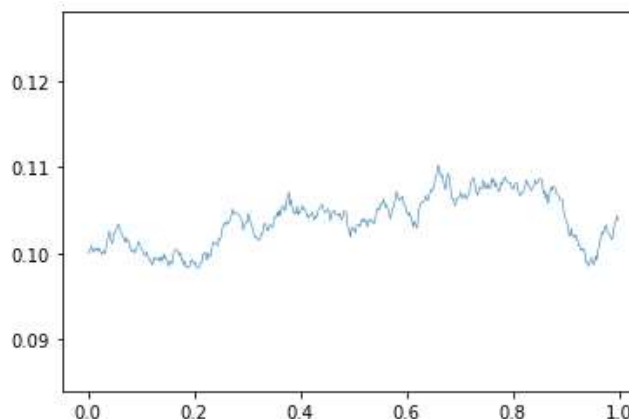
— 定義(3)を満たすように、伊藤積分の核を構成して導出

## 付録2-2. 非整数ブラウン運動：サンプルパス

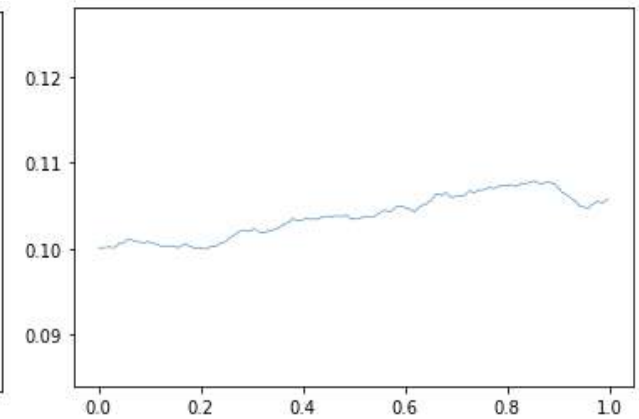
$H$ ：小 (0.08)  
(ラフ/荒い)



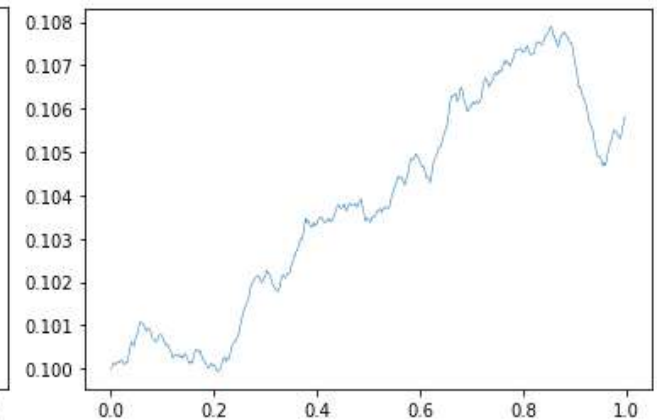
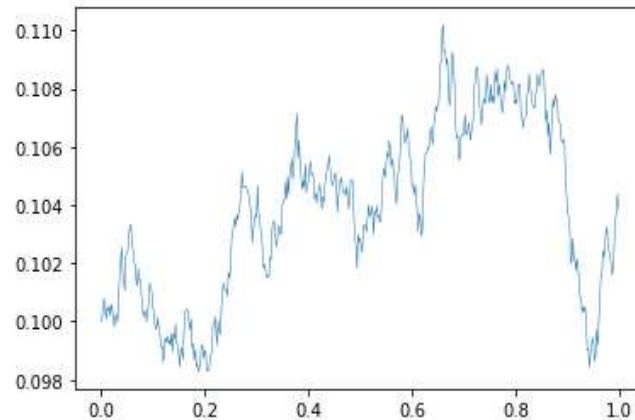
$H$ ：中(0.5)  
(ブラウン運動)



$H$ ：大(0.8)  
(スムーズ/滑らか)



(拡大↓)



- サンプルパスの生成：定義(3)の共分散の性質を満たすよう、増分の確率変数を生成  
( $H \neq \frac{1}{2}$ の場合、生成した乱数を保存する必要がある、計算コストが大きい)

## 付録3-1. IVの数理：ブラック・ショールズモデルとIVの定義

32

以下、リスク中立測度のもとで、連続時間で資産価格のダイナミクス $\{S_t\}_{t \geq 0}$ を考える

ブラック・ショールズ・モデル

- 原資産価格 $S_t^{(BS)}$ が、対数正規分布（確率過程が幾何ブラウン運動）に従うとする：

$$\frac{dS_t^{(BS)}}{S_t^{(BS)}} = r dt + \sigma dW_t; \text{ i.e., } S_t^{(BS)} = S_0^{(BS)} \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

- コールオプション価格（ $K$ : ストライク,  $T$ : 満期,  $t$ : 現時刻,  $r$ : 無リスク金利;  $\Phi$ : 正規分布の累積密度）

$$C_{BS}(K, T, \sigma) = E[\max(S_T, K) | \mathcal{F}_t]$$

$$= S_t \Phi\left(\frac{\log(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - e^{-r(T-t)} K \Phi\left(\frac{\log(S_t/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

- 本文で述べたとおり、 $C^{(mkt)}(K, T) = C_{BS}(K, T, \sigma_{BS}^{(mkt)})$ を満たす $\sigma_{BS}^{(mkt)}$ を、BSのIVと呼ぶ

同様に、原資産価格が正規分布（過程がガウス過程）に従うとして、オプションの市場価格から逆算された $\sigma_{K,T}^{(N)}$ を、バシェリエのIV（ノーマル・ボラ）と呼ぶ

モデルのIV

- 本文で述べたとおり、オプション市場で観測されるIV $\sigma_{K,T}^{(BS)}$ は、 $K, T$ に関して一定でないため、

$$BS\left(S_t^{(model)}, K, T-t, r_f, \hat{\sigma}_{BS}^{(model)}(K, T)\right) = E\left[\max(S_T^{(model)} - K, 0)\right] \text{ なる } \hat{\sigma}^{(model)}(\kappa, \tau) \text{ につき、}$$

$$\hat{\sigma}_{BS}^{(model)}(\cdot, \cdot) \approx \hat{\sigma}_{BS}^{(mkt)}(\cdot, \cdot)$$

となるよう、 $\{S_u^{(model)}\}_{t \leq u \leq T}$ を確率微分方程式（リスク中立確率測度下の）により記述

- デリバティブの価格付けモデルの目的

$\hat{\sigma}_{BS}^{(model)}(\cdot, \cdot) \approx \hat{\sigma}_{BS}^{(mkt)}(\cdot, \cdot)$ なるモデル $\{S_u^{(model)}\}_{t \leq u \leq T}$ を用いることで、一般のデリバティブの価格

$(f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ に対し、 } E[f(S_T^{(model)})])$ を、市場でクオートされる $\hat{\sigma}_{BS}^{(mkt)}(\cdot, \cdot)$ と無裁定になるよう計算



## 付録3-2. IVの数理：局所ボラティリティ・モデル

### 局所ボラティリティ・モデル([Dupire, 1994])

- 原資産価格過程の、ボラティリティがある関数 $\sigma^{(LV)}$ であると仮定

$$\frac{dS_t^{(LV)}}{S_t^{(LV)}} = r(t) dt + \sigma^{(LV)}(t, S_t^{(LV)}) dW_t$$

- オプションの市場価格 $\{C^{(mkt)}(K, T)\}_{K, T}$ が、仮想的に連続のストライク $K$ と満期 $T$ について与えられたとき、

$$\sigma^{(LV)}(T, K) = \sqrt{\frac{\frac{\partial C^{(mkt)}(K, T)}{\partial T} + r(T)K \frac{\partial C^{(mkt)}(K, T)}{\partial K}}{\frac{1}{2}K^2 \frac{\partial^2 C^{(mkt)}(K, T)}{\partial K^2}}}$$

と書けるため、ノン・パラメトリックに任意のボラティリティ・サーフェスを表現できる

- ただし、実用上は問題があり  
 — 1時刻のボラティリティ・サーフェスは表現できるが、時間経過に伴うボラティリティ・サーフェスの挙動を限定的にしか表現できないため、満期までデリバティブのヘッジをした際、ヘッジ誤差が大きい  
 ⇒パラメトリックなモデルが望ましい

## 付録3-3. IVの数理：確率ボラティリティ・モデル

パラメータが少なく、ボラティリティ・サーフェスを表現 ( $\hat{\sigma}_{BS}^{(\text{model})}(\cdot, \cdot) \approx \hat{\sigma}_{BS}^{(\text{mkt})}(\cdot, \cdot)$ ) できるモデルが望ましい

確率ボラモデル（既存のデリバティブ・モデル）

➤ ヘストン・モデル[Heston, 1993]

$$\begin{cases} \frac{dS_t^{(\text{Hes})}}{S_t^{(\text{Hes})}} = r_t dt + \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} \\ dV_t = \lambda(\theta - V_t) dt + \xi \sqrt{V_t} (\rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^{(2)}) \end{cases}$$

→コールオプションの準解析解あり、パラメータを変更しながら市場価格に合わせることができる  
(c.f., ニュートン法)

➤ SABRモデル[Hagan, 2002]

$$\begin{cases} \frac{dS_t^{(\text{SABR})}}{S_t^{(\text{SABR})}} = \varepsilon \alpha_t \sigma(S_t^{(\text{SABR})}) dW_t^{(1)} \\ d\alpha_t = \varepsilon v \alpha_t (\rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^{(2)}) \end{cases}$$

→漸近展開公式により、市場で観測されるボラ・サーフェスからパラメータ決定（位置・歪みなど）

$$\hat{\sigma}^{(\text{N,SABR})}(\cdot, K) = \frac{\alpha(x_0 - K)}{\int_K^{x_0} \frac{dx}{\sigma(x)}} \left( \frac{\zeta}{\hat{x}(\zeta)} \right) \left( 1 + \left( \frac{2\gamma_2 - \gamma_1^2}{24} \right) \dots \right) \varepsilon^2 \textcolor{red}{T} + O(\varepsilon^3)$$

(\*) [Osajima, 2007]: 一般的な拡散過程モデルに対する漸近展開公式  
(ただし、主に、ストライク方向に関する解析)

(\*) そのほか、ジャンプボラモデルや、確率局所ボラティリティなどが提案されてきたが、これらのモデルの長所・短所は、[新原(金融研究), 2011] 参照

本文で述べた通り、べき法則*i.e.*,  $\psi(\tau) := \left| \frac{\partial}{\partial k} \sigma_{BS}(k, \tau) \right|_{k=0}$  に関し、 $\psi(\tau) \approx \tau^{H-\frac{1}{2}}$  (短い満期 $\tau$ ) が成立

→とくに、[Fukasawa, 2021]では、一般的な拡散過程モデル $S_t^{(\text{model})}$ に対する、新しい漸近展開公式を導出し、べき法則が成立しない場合、具体的な裁定戦略を構築できることを示した

## 漸近展開公式

$S_t^{(\text{model})}$  : 正值の連続マルチンゲール, 二次変分 $\langle \log S^{(\text{model})} \rangle_t$  が時間に関し絶対連続

$V_t = \frac{d}{dt} \langle \log S^{(\text{model})} \rangle_t$ ,  $v(t) = E[V_t]$  とし、ある  $H \in (0, 1/2]$  が存在し、 $\theta > 0$  に対し、

$\frac{1}{\theta^H} \left( \frac{V_\theta}{v(\theta)} - 1 \right)$  が一様可積分で、 $\left( \frac{1}{\sqrt{\theta}} \left( \frac{S_\theta^{(\text{model})}}{S_0^{(\text{model})}} - 1 \right), \frac{1}{\theta^H} \left( \frac{V_\theta}{v(\theta)} - 1 \right) \right)$  が  $\theta \rightarrow 0$  である2次元確率変数に法則収束すると仮定する。このとき、

$$\hat{\sigma}^{(\text{model})}(z\sqrt{\theta}, \theta) = \sqrt{\frac{1}{\theta} \int_0^\theta v(t) dt (1 + \alpha(z)\theta^H) + o(\theta^H)}, \quad \text{as } \theta \rightarrow 0$$

モデルに依らないIV(VIX)

## 付録3-4. IVの数理：ラフ性と裁定機会[Fukasawa, 2021]

[Fukasawa, 2021]では、一般的な拡散過程モデル $S_t^{(\text{model})}$ に対する、新しい漸近展開公式を導出べき乗則（数学的な定式化は以下）が成り立つ市場において、 $S_t^{(\text{model})}$ のボラティリティがべき乗則から示唆される以上のラフ性を持つモデルを用いないと、具体的な裁定戦略を構築できることを示した

### べき乗則（ $H$ -power law of negative volatility skew）

現時刻 $t = 0$ 、満期 $T$ を固定。 $\tau \in [0, T]$ に対し、 $\sigma^{(\text{BS})}(\kappa, \tau)$ が、市場で連続的に観測されているとする。

このとき、IVの形状が $H$ -べきの負のスキューであるとは、

ある適合過程 $\sigma_\tau, \alpha_\tau$ で、 $\left| \frac{K_\tau}{S_\tau} - 1 \right| = O(\sqrt{T - \tau})$ を満たす任意の適合過程 $K_\tau$ に対し、

$$\sigma^{(\text{BS})}(\kappa, \tau) = \sigma_\tau + (T - \tau)^{H - \frac{1}{2}} \alpha_\tau \log \frac{K_\tau}{S_\tau} + O\left((T - \tau)^{H - \frac{1}{2}}\right), \quad \tau \uparrow T$$

### 裁定戦略 $\Pi_n$

$\tau_n = T - 1/n$ とし、 $K_{\tau_n}$ を $\left| K_{\tau_n}/S_{\tau_n} - 1 \right| = O(n^{1/2})$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \log K_{\tau_n}/S_{\tau_n} < 0$ を満たすようにとる

$$\Pi_n = P_{\tau_n}(K_{\tau_n}) - \frac{K_{\tau_n}}{S_{\tau_n}} C_{\tau_n}\left(\frac{S_{\tau_n}^2}{K_{\tau_n}}\right) - (K_{\tau_n} - S_T)_+ + \frac{K_{\tau_n}}{S_{\tau_n}} \left(S_T - \frac{S_{\tau_n}^2}{K_{\tau_n}}\right)_+ + \int_{\tau_n}^T \frac{\partial p_{\text{BS}}}{\partial S}(S_t, T - t) - \frac{K_{\tau_n}}{S_{\tau_n}} \frac{\partial c_{\text{BS}}}{\partial S}(S_t, T - t) dS_t$$

$\Rightarrow H$ -べきの負のスキューのもと、 $V_t$ が、 $H_0$ -ヘルダー連続（ $H_0 < H$ ）ならば、 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{H-1/2} \Pi_n = \infty$  a.s.

（\*） $C_\tau(K_\tau)$ ,  $P_\tau(K)$ : 市場価格、 $c_{\text{BS}}, p_{\text{BS}}$ : BSモデル価格。実際の市場では、取引可能なコールオプションは特定のストライク・満期のもののみなので、上記戦略を実行できるとは限らない

## 付録4-1. ラフ・ボラ・モデル：発展経緯

✓ ボラティリティを非整数ブラウン運動で記述すると、マルコフ性を持たず、以下の議論が困難に

① 無裁定/複製（ヘッジ、リスク中立測度）の議論

② キャリブレーション・価格付けのため、期待値計算の技術

→ 具体的なモデルでの代表的な議論は、下表のとおり

※ ①に関する一般化された結果は付録4-2、②に関する研究は付録7を参照

※ ボラティリティの時間発展を非整数ブラウンで記述し、デリバティブの価格付けなどを行う研究は、[Comte, Renault, 1998]に始まる(ただし、非整数ブラウン運動( $H > 1/2$ ))を使用

| モデル                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 発展経緯・特徴                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>ラフ・ベルゴミ [Bayer et.al, 2016]</p> $\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sqrt{V_t} \left( \rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{(2)} \right) \\ V_t = \underbrace{E[V_t   \mathcal{F}_u]}_{\text{フォワード・バリエンス}} \underbrace{\varepsilon \left( \sqrt{2H\rho v} \int_u^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dW_s^{(2)} \right)}_{\text{リーマン・リュービル型伊藤積分}} \end{cases}$ <p>(*) <math>\varepsilon</math>: 指数マルチンゲール</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>・ベルゴミモデル[Bergomi, 2004]の拡張(フォワード・バリエンスをキャリブレートするマーケットモデル)</li> <li>・スポット・ボラをfBmで記述、フォワード・バリエンスがfBmの過去の履歴情報に対応することに着目<br/>→ スポット・ボラは、Fwd varianceと有限時間のリーマン・リュービル伊藤積分として記述可能</li> <li>・ラフ・モデルで、初めて複製・ヘッジの議論を確立したが、数値計算が困難</li> </ul> |
| <p>ラフ・ヘストン [El Euch, Rosenbaum, 2019]</p> $\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sqrt{V_t} \left( \rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{(2)} \right) \\ V_t = V_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \gamma(\theta - V_s) ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \gamma \sqrt{V_s} dW_s^{(2)} \end{cases}$                                                                                   | <ul style="list-style-type: none"> <li>・ヘストンモデル[Heston, 1993]から、リーマン・リュービル積分を用いて拡張</li> <li>・密度関数のフーリエ変換が従う方程式を陽に書けるため、数値計算が比較的しやすい(非整数階リッカチ型上微分方程式を数値的に解く必要あり)<br/>→ [Gatheral, Keller-Ressel]で一般化された</li> </ul>                                                          |
| ラフ・SABR                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | SABRモデルのfBmによる一般化、IVの漸近展開公式あり                                                                                                                                                                                                                                              |

- ラフ・ボラ・モデルは、スポット・ボラに時系列相関を入れるため、一般にマルコフ過程にならない
  - ⇒ ある時点で、期待値を取ったボラ”フォワード・バリエンス”の時間発展を考えて、マルコフ性を回復させる。これにより複製の議論が可能となる（フォワード・バリエンスによるヘッジ）
  - 付録5-1の表のとおり、ラフ・ベルゴミモデルに始まったアイディアだが、ラフ・ヘストンモデルなど一般のモデルでも、のちに、この議論が可能であることが判明（[El Euch, Rosenbaum, 2018] [Fukasawa et.al, 2021]など）

一般のラフ・ボラ・モデル

$$\begin{cases} dS_t = f(S_t) \sqrt{\sigma_t} \left( \rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^{(2)} \right) \\ dV_t^u = V_t^u g(u - t) dW_t^{(2)}, \sigma_t = \lim_{u \downarrow t} V_t^u \end{cases}$$

を考え、フォワード・バリエンス・カーブ  $\hat{V}_t: \theta \mapsto V_t^{t+\theta}$  を考える。

このとき、 $\{\hat{V}_t\}_{t \geq 0}$  は、 $C[0, \infty)$  を状態空間とするマルコフ過程である（無限次元マルコフ性）

⇒ デリバティブの現在価格  $C_t = E[F(S_T) | \mathcal{F}_t]$  は、ある関数  $G$  を用いて、

$$C_t = E[F(S_T) | \mathcal{F}_t] = G\left(T - t, S_t, \{V_t^{t+\theta}\}_{\theta \geq 0}\right)$$

と書ける

- $\{V_t^{t+\theta}\}_{\theta \geq 0}$  が市場でクオートされている場合、マルコフ性が回復し、既存の数理ファイナンスの枠組み（価格付け・ヘッジなど）を利用可能に
  - ただし、 $G$  を数値的に求めることは、通常の拡散型モデルに比べ、非常に困難（付録7）

## 付録5. VIXの数理

### ✓ モデルフリー・インプライド・ボラティリティ (MFIV)

- BS-IVなどのように特定のモデルを仮定することなく算出可能なIV
- バリエンス・スワップとよばれる、実現バリエンスを支払うデリバティブの複製に基づいた算出式

$$\frac{1}{T}E^Q\left[\int_0^T\sigma_u^2du\right]=VS_T=\frac{2\exp(r_fT)}{T}\left(\int_{F_t}^{\infty}\frac{C(K,T)}{K^2}dK+\int_0^{F_t}\frac{C(K,T)}{K^2}dK\right)$$

### ✓ 導出のアイデア

$$\frac{dS_t}{S_t}=r_fdt+\sigma_tdW_t\Leftrightarrow d\log S_t=\left(r_f-\frac{1}{2}\sigma_t^2\right)dt+\sigma_tdW_t\Leftrightarrow E^Q[\log S_T]=-\frac{1}{2}\int_0^T\sigma_u^2du+\int_0^Tr_fdu$$

- 原資産の対数値を支払うデリバティブ (log contract) を複製できれば、累積バリエンスを複製できる。

$$E^Q[f(S_T)]=f(\kappa)B_0+f'(\kappa)[C(\kappa,T)-P(\kappa,T)]+\int_0^{\kappa}f''(K)P(K,T)dK+\int_{\kappa}^{\infty}f''(K)C(K,T)dK$$

- 任意の二回微分可能なペイオフ関数を持つヨーロピアン型デリバティブは、無リスク資産、先物取引、ヨーロピアンオプションのポートフォリオによって複製可能  $\Rightarrow f(S_T)=\log S_T$  に適用。

### ✓ VIXは、バリエンス・スワップの理論式をオプションの取引価格で近似して算出したもの

- 理論的には連続的なストライクのオプション・ポートフォリオの価格として算出  
 $\Rightarrow$ 取引所取引のある離散的なストライクのオプションによって、ペイオフを離散近似
- 30日先の予想変動に基準化するよう、第1限月・第2限月のオプションによる算出値を線形補間
- 平方根を取りボラティリティ (標準偏差) に変換

参考文献：[Neuberger, 1994] [Demeterifi et al, 1999] [CBOE, 2009] [杉原, 2010]

## 付録6. MM ([El Euch et al, 2018]) の詳細

ホークス過程  $N_t = (N_t^+, N_t^-)$

$N_t^+, N_t^-$  がそれぞれ以下を満たす強度のジャンプ過程

$$\begin{pmatrix} \lambda_t^+ \\ \lambda_t^- \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mu^+ \\ \mu^- \end{pmatrix}}_{\text{定数}} + \underbrace{\int_0^t \begin{pmatrix} \varphi_1(t-s) & \varphi_3(t-s) \\ \varphi_2(t-s) & \varphi_4(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dN_s^+ \\ dN_s^- \end{pmatrix}}_{\text{イベントが起こった回数 } N_t^+, N_t^- \text{ に応じた強度の変化 } (\varphi: \text{影響がどの程度持続するか})}$$

定数

イベントが起こった回数  $N_t^+, N_t^-$  に応じた強度の変化 ( $\varphi$ : 影響がどの程度持続するか)

基本的な仮定

- ① 統計的裁定がない:  $E[\lambda_t^+] = E[\lambda_t^-]$
- ② ビット・アスクの非対称性:  $\beta > 1$  が存在して、 $\varphi_3(\cdot) = \beta \varphi_2(\cdot)$



## 付録6. MM ([El Euch et al, 2018]) の詳細

### 価格変化の影響の継続度合に関する仮定

別の時刻  $T > 0$  を考え、 $N_t^T = (N_t^{T,+}, N_t^{T,-})$ ,  $\begin{pmatrix} \lambda_t^{T,+} \\ \lambda_t^{T,-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^{T,+} \\ \mu^{T,-} \end{pmatrix} + \int_0^t \Phi^T(t-s) \begin{pmatrix} dN_s^+ \\ dN_s^- \end{pmatrix}$  とする

このとき、ある  $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \beta\varphi_2 \\ \varphi_2 & \varphi_1 + (\beta-1)\varphi_2 \end{pmatrix}$  と  $\{a_T\}_{T>0}$  で、 $a_T \uparrow 1 (T \rightarrow \infty)$  が存在して、  

$$\Phi^T = a_T \Phi$$

と表せるとする

仮定③取引は他の取引に誘発されることでしか起こらない、

④市場価格に影響を与える大きな取引者が存在、は以下の仮定で表現できる：

- (1)  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$  と  $C > 0$  で、次を満たすものが存在： $\alpha x^\alpha \int_x^\infty \varphi_1(y) + \beta \varphi_2(y) dy \xrightarrow{x \rightarrow \infty} C$
- (2)  $\lambda^* > 0$  と  $\mu > 0$  で、次を満たすものが存在： $T^\alpha (1 - a_T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \lambda^*$ ,  $T^{1-\alpha} a_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \mu$

### 極限定理の主張

上記の仮定のもと、時間スケールを調整した価格は、ラフ・ヘストン・モデルに収束する：

$$\sqrt{\frac{1-a_T}{\mu T^\alpha}} P_{tT}^T = \sqrt{\frac{1-a_T}{\mu T^\alpha}} (N_{tT}^{T,+} - N_{tT}^{T,-}) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} P_t = \frac{1}{1 - \|\varphi_1\|_{L^1} - \|\varphi_2\|_{L^1}} \sqrt{\frac{2}{\beta+1}} \int_0^t \sqrt{Y_s} dW_s,$$

$$Y_t = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ((1+\beta) - Y_s) ds + \frac{\lambda v}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sqrt{Y_s} \frac{1}{\sqrt{2(1-\beta^2)}} (\beta dW_s + (1-\beta) dW_s^\perp)$$

## 付録7. 数値計算手法

主に、ラフ・ヘストン・モデル、ラフ・ベルゴミ・モデルでのキャリブレーション、価格付けを目的に様々な手法が提案されているが、実務に耐えうる決定的な手法は確立されていない

| 提案手法・理論                                                                                                                                                                          | 特長                                                             | 困難                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| <b>Hybrid 法</b> [Benndedsen et.al, 2017]<br>・リーマン・リュービル型伊藤積分を、被積分関数の原点付近では多項式、原点から遠いところでは定数関数として近似する手法<br>— [Bayer et.al.,2020a][Gatheral, 2020]など、多数の研究でこの方法が採用されている            | ・現実的な計算速度でラフ型モデルのシミュレーションが可能<br>・準モンテカルロ法やQE法など既存技術との組合せで効率化可能 | ・誤差の解析はほぼできない                                     |
| <b>マルコフ型近似</b> [Carr, Itkin,2019] [Zhu et.al,2021] [Jaber, El Euch, 2019] [Alfonsi, Kebaier, 2022] [Bayer, Breneis, 2023]<br>・リーマン・リュービル型伊藤積分の積分核を変換し離散近似することで、拡散型方程式の連立方程式とする手法 | ・誤差解析がある程度可能                                                   | ・拡散型方程式の計算負荷・誤差が大きい<br>・パスが荒い（ $H$ が小さい）場合、誤差が大きい |

### その他、理論面での研究

- ・離散近似の収束速度の議論[Bayer Fukasawa, 2022] [Fritz et.al, 2023] [Bayer et.al, 2023]  
 →拡散型モデルの場合に比べ、解析が困難（係数に条件が必要で、収束の理論精度も悪い）
- ・ツリー上での近似[Horvath et.al, 2019]  
 ラフ型の方程式に対するDonskerの定理を示し、ツリー上での近似が収束することを示した。  
 （収束速度の解析は困難）
- ・ラフ・パス理論や確率偏微分方程式の正則性構造の応用も議論されている [Bayer et.al, 2021]

## 付録8. Zumbach効果の表現

- ✓ Zumbach効果：資産価格のスポット・ボラとリターンの時差相関は非対称
  - 2000年ごろから知られていた、実証的な特徴[Zumbach, Lynch, 2001]

$C^{(2)}(\tau) = \langle (\sigma_t^2 - \langle \sigma_t^2 \rangle) r_{t-\tau}^2 \rangle$  ( $r_t$ ：ある1日 $t$ のリターン,  $\langle \cdot \rangle$ は平均)  
 とすると、

$$Z(\tau) := C^{(2)}(\tau) - C^{(2)}(-\tau) > 0$$

が実証的に成立

- スポット・ボラの変動は、未来のリターンの変動より過去のリターンの変動と相関が高い

- ✓ 既存のマルコフ型モデルでは、Zumbach効果は表現できない（ $Z(\tau) \approx 0$ ）一方、ラフ・ヘストン・モデルは、Zumbach効果を表現できる[El Euch et al, 2020]  
 通常のヘストンモデルを仮定して $Z(\tau)$ を計算すると、 $Z(\tau) = 0$ となるが、ラフ・ヘストンモデルだと、 $Z(\tau) \neq 0$ とできる。
- ✓ Zumbach効果以外にも、非整数ブラウン運動に基づくモデルによって表現可能な実証的な特徴は存在するかは、今後の研究課題