

# 時系列分析について

折 谷 吉 治

1. 要 約
2. 時系列分析の理論
3. 時系列分析の応用
4. 計量経済分析との関係

〔付〕スペクトル解析 — 周波数領域からの分析 —

## 1. 要 約

本稿は近年学会や欧米中央銀行等で注目を集めている時系列分析の内容および implication を概説したものである。

時系列分析 (time series analysis, 時系列解析とよぶ場合もある) という用語は経済分析の中では従来、クロス・セクション分析に対するものとして、時系列データを取り扱う統計的分析手法といった漠然とした意味で使われてきた。しかし最近では、「確率過程論」を基礎とする時系列データ分析の分野を計量経済分析と区別して、とくに「時系列分析」と呼ぶようになってきている。

時系列分析の発想に基づく経済分析の源流は1920年代の米国 NBER (National Bureau of Economic Research) による景気指数の分析にまで遡ることもできようが、前記のような「確率過程論」に基づく時系列分析の経済分析への適用は、1970年代に入ってから急速に盛んになったものである。たとえば、米国では連邦準備制度理事会 (参考文献〔9〕参照)、ニューヨーク連銀〔10〕等がマネーサプライの分析や予測の手段として研究を進めており、ミネアポリス連銀は1975年11月に“New Methods

in Business Cycle Research”と題する conference を開催している〔11〕。

時系列分析が注目されるのは、統計的な技法として高度である点もさることながら、実証分析のあり方、考え方について再検討を迫る面をもっているからである。たとえば、上記 conference 提出論文集のはしがき〔11-2〕で、ミネアポリス連銀の Willes 総裁は「時系列分析に関する研究は単に狭い統計技術上の問題にとどまらず、われわれが現実の経済について一体どれ程わかっているのかという経済学の核心 (the very core of economics) についても考えさせてくれる」と深い関心を示している。

たとえば、時系列分析は実証分析の基本的前提である「実証可能性」の問題についてひとつの明確な考え方を提起している。

まず、分析の前提の置き方に関するものである。たとえば、従来の計量経済分析では、「政策当局が決める」変数（「政策変数」）を経済変動の起点であると a priori に前提 (“econometric exogeneity”) したうえでモデルを計測することによって、現実の経済メカニズムを描く（「実証」する）ことができるとしてきた。しかし、時系列分析を主唱する人々は、もし政策当局がモデルの

内生変数の変化に対応して行動（政策変数を決定）しているとするれば、政策変数は「統計的な意味での外生性」を失うこととなるので、そのモデルで現実を「実証」すること自体ができないのではないかとの疑問を統計学的見地から提出する。時系列分析の考え方によれば、実証分析に際しては、まず諸変数間の causality（因果関係）を統計的にチェックして、統計的な意味での起点（真の外生変数）を見付けるべきであるとされる。

次に、分析の単純さの持つ意義についてである。時系列分析の示唆するところによれば、経済分析のように実験ができず、したがって限られたデータ数（データ期間）をもとに実証分析を行わざるを得ない場合には、データ数に対応した単純なモデルで現実の動きの本質的な側面を描く必要がある（「ケチの原理（principle of parsimony）」と「情報量基準」）。かりに前記の実証可能性の観点からみて妥当な分析が行えるとしても、経済メカニズムの内部を知ろうとして過度に複雑なモデルを「実証」しようとする、かえって全体像ないし本質的な部分が見失われてしまう（パラメーターの信頼性喪失）こととなる。このことは複雑精緻な分析が必ずしも良い結果をもたらさないという体験を通じて既に多くの人々が知っていたことであるが、時系列分析の発展はこうした考え方の重要性を理論的に明らかにし、これを再認識させることとなった。

上記のような認識とケインジアン型経済モデルに対する経済理論面からの原理的批判（「合理的期待の理論」＜〔12〕、〔13〕＞等）とが相まって、近年は少数の時系列データを用いた単純なモデルを用いて分析や予測を行ってみようという試みが盛んにな

っている。本稿で述べる分析の方法や研究例はいずれも一見きわめて単純なものであるが、そこには上記のような理論的ないし方法論的背景があるのである。

第2章では時系列分析の理論について述べる。時系列分析は経済が人々の過去のいきさつ、経験、知識等に基づく行動によって動いているということを重視し、経済変数の時間を通ずる関係（動学的な関係）に分析の焦点を当てている。その意味で時系列分析は時差相関分析を発展させたものといえよう。時系列の動学的関係を数式で表わしたものに「ARMAモデル（Auto-Regressive Moving Average model）」があるが、これは各変数を、自己ないし他変数の現在ないし過去の値と「white noise」と呼ばれる確率変数との一次結合で表わしたものである。この章では「ARMAモデル」について述べ、さらに時系列分析において基本的な役割を果たす時差相関係数（相互相関関数、自己相関関数）と時系列モデルとの関係を述べるとともに、時系列モデルの推定に当たっての問題である次数の決定（過去のどの時点までをモデルに組み込むか）についても最近開発された手法（AIC基準の適用）を紹介する。

第3章では時系列分析の応用として、予測および“causality”の検証について述べる。時系列モデルによる予測は計量予測などに比べて手数がかからない割に精度がよいとして、前記のように連銀等でも試みられている。1変数時系列モデルによる予測は、過去の動きを描いたグラフの規則性をなぞって先に伸ばすといった古くからある方法（たとえば株のケイ線）を精緻化したものといえる。また“causality”の検証は、因果関係即予測可能性と仮定するこ

とによって、因果関係の存否をチェックしようとするものである。つまり、変数 $Y$ の現在・過去値を単純に延長してその将来値を予測するよりも、他の変数 $x$ の現在・過去値を用いる方が予測力が高まる場合に、 $x$ から $Y$ への因果関係があると判断しようとするものである。因果関係を知る最良の方法は実験により種々の変数を実際に動かしてみることであるが、実験のできない経済分析では上記のような causality check が有力な方法といえよう。

第4章では、「時系列分析」と計量経済分析との関係について述べる。これは「時系列分析」による実証分析の方法論的背景を述べることにもなり、従来の計量経済分析の抱える原理的な問題を検討することにもなる。もっとも「時系列分析」がますます計量経済分析にとって代わりうるわけではなく、経済理論と統計理論に基づく実証分析とのより整合的な結合の手法について現在、経済理論・統計技法の両面から研究が進められている段階にあるが、いずれにせよ、実証的な判断を行う場合にただ1つの方法のみに依存するのは安易かつ危険である。最近の方法論の成果も十分にとり入れたうえで各種の実証分析を行い、その結果を虚心に比較してみる必要があると思われる。

時系列分析には2つのアプローチがある。ひとつは、時間を explicit に取入れたモデルで分析するもので、これは「時間領域分析(time domain analysis)」と呼ばれる。もうひとつは、時系列を周波数の観点からみる「周波数領域分析(frequency domain analysis)」で、これは「スペクトル解析(spectral analysis)」と呼ばれる。両者は、元来表裏一体の関係にあり、分析目的に応じて適宜使い分ければ

よいという面もある。従来周波数領域分析が多かったが、本稿では近年盛んになりつつある時間領域分析を中心に述べ、周波数領域分析については〔付〕においていくつかの用語および応用例を紹介するにとどめた。

本稿で述べる「時系列分析」の手順および相互関連を概観すると次頁図のとおりである。また、本稿は時系列分析の考え方をできるだけ直観的に概観することを旨としており、正確な理論的展開に関心のある場合は末尾に掲げた文献を参照されたい。

なお、時系列分析をわが国経済の分析に応用した例として、〔14〕では causality 検証への応用、〔15〕では予測モデル<sup>(注)</sup>としての応用、などが行われている。

(注) このほか、本研究資料所収第3、4論文もわが国経済への応用である。

本稿作成に当っては、東京大学竹内啓教授、文部省統計数理研究所赤池弘次第5研究部長および同研究部北川源四郎氏から、基礎的知識や考え方に関するご指導のみならず、草稿に目をお通しいただくなど、大変お世話になった。もちろん、本稿の内容についての責任は筆者個人に属するものであり、上記先生方とは関係がない。

## 2. 時系列分析の理論

### (1) 時系列分析の基礎的概念

#### イ. 時系列モデルと定常確率過程 (確率モデル)

経済理論の教科書においては、通常経済現象を描写する方法として決定論的(deterministic)な理論モデルの解説が行われる。しかし、経済現象には random な要因がつきまとうのが普通である。random な要因を含んだ変数を「確率変数」といい、これを用いて random な要因のつき

まとう現象を描写した理論モデルは「確率 (stochastic)モデル」といわれる。計量経済モデルも本稿で対象とする時系列モデルも、ともに確率モデルであり、これをデータに当てはめ、現実の経済現象を説明しようとするものである。

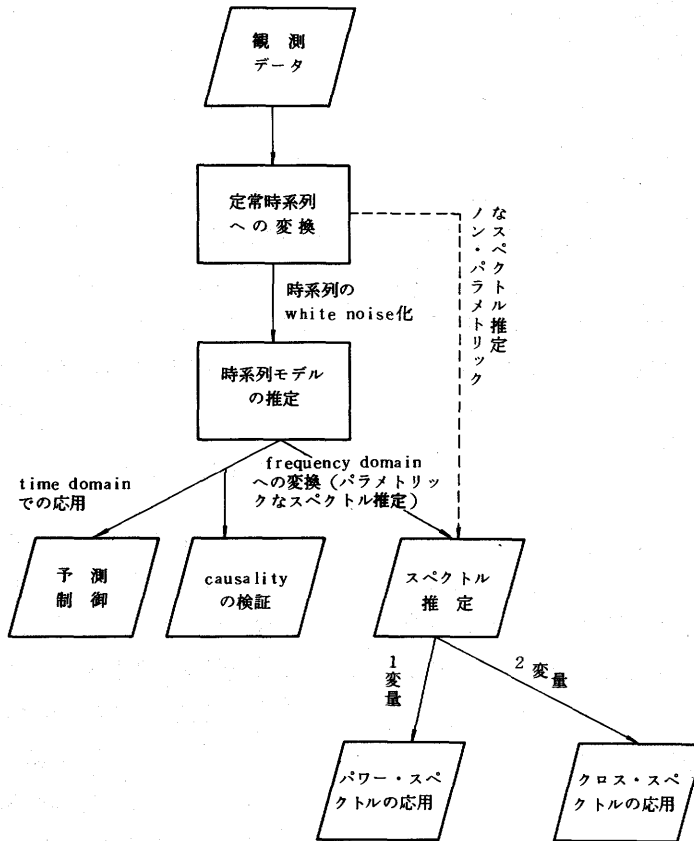
確率モデルにおいてはある期に観測されるデータ(確率変数の値)は「様々な可能性(母集団)」の中からたまたま選ばれた値(サンプル、あるいは realization)と考える。したがって、重要なのは個々のデータそのものというよりも、データが選び出されてくる元となっている

「様々の可能性」の性質、すなわちある可能な結果がどのような確率で選び出されるか(確率分布)という点である。周知の通り、確率分布の特徴を示す指標としては、通常「平均(期待値)」と「分散」が用いられる。<sup>(注1)</sup>

(確率過程)

確率モデルの立場からは、経済現象の推移ないし「時系列」データは各期毎に「様々の可能性」の中からある値が選ばれてゆくプロセス、すなわち「確率過程(stochastic process)」の実現とも考えられる〔16〕。

時系列分析の概要



\* 上記の時系列分析用プログラムとしては、統計数理研究所第5研究部(赤池弘次部長)開発のTIMSAC (Time Series Analysis and Control Programme)がある。

各期毎に「様々の可能性」の中からある値が選ばれるとしても、その選ばれ方には2通りありうる。すなわち、ある期における選ばれ方がその前後の期に選ばれた値に影響されない場合（独立試行）と、影響される場合とである。通常確率過程というときには後者を問題としており、時系列モデルもこれに基づく理論である。<sup>(注2)</sup>

（定常確率過程）

確率過程において（言い換えれば各期毎の試行のプロセスにおいて）、与えられた「様々の可能性（母集団）」の性質、すなわち確率分布が時間的に不変である場合に、これを「定常（stationary）確率過程」という（これから生成された時系列を「定常時系列」という）。定常確率過程においては各時点での母集団の平均値と分散は時点によって変化せず、異なる時点の間の共分散（「自己共分散」）は時点間の距離（時差）にのみ依存し、特定の時点によって左右されない（これは自己相関関数が後記のように  $\rho(l) < l$  は時点間の距離」と書けることを意味してい

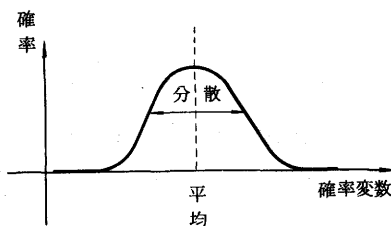
る（自己共分散関数、自己相関関数については（注3）参照）。

定常確率過程の性質のうち、各時点での母集団の平均値と分散とが時点によって変化しないという点は直観的には第1図によって理解できよう。(a)は定常過程とみなしうるが、(b)は平均値が時点とともに変化、(c)は分散が時点とともに変化しているとみられるから、定常過程とはみなし難い。もともと、原データが(b)、(c)のような形をしているからといって、時系列分析の適用が不可能となるわけではない。経済現象に関する時系列は一見定常でない場合にも時系列データの差（増減幅）や、時系列データの対数の差（増減率に近似）をとってみる（differentiation）と、これはほぼ定常な時系列となっている場合が多いとされる。

（自己相関関数と時系列モデルの性質）

第1図から定常時系列は波のような形をしていることがわかる。この波の形の性質をみるうえで、「自己相関関数（autocorrelation function）」を用いるのが便利である。自己相関関数は、

（注1） 「分散」とは選び出されてくるデータが平均的（期待値）から離れているか、いいかえれば平均的なバラつき具合を示す。



（注2） 確率に関する理論は、歴史的には前者の場合についての理論から、後者の場合についても扱うように発展してきており、その結果、前者を扱う理論は「確率論」、後者を扱う理論は「確率過程論」と呼ばれるようになっていく。通常の統計学や計量経済分析の理論的基礎は、基本的には前者の「確率論」に置かれている。

「自己共分散関数 (autocovariance function)」<sup>(注3)</sup>

$$\rho(\ell) = \frac{R(\ell)}{R(0)}$$

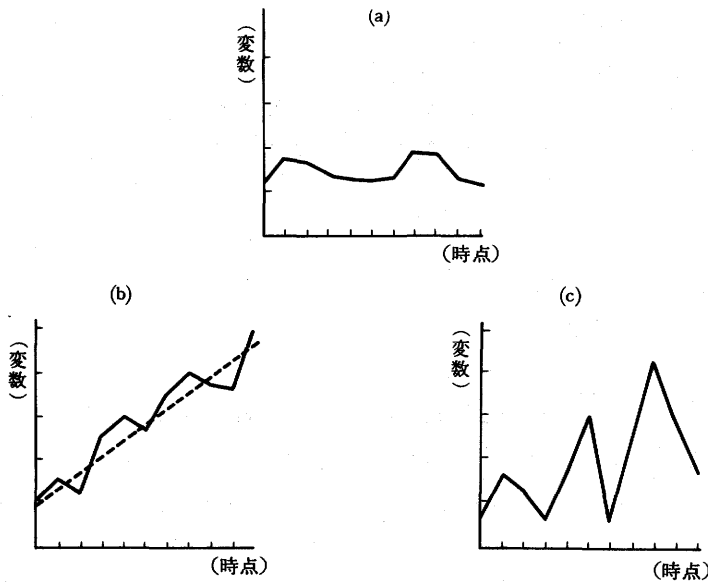
$$R(\ell) = E((x_t - \mu)(x_{t-\ell} - \mu))$$

$\left[ \begin{array}{l} \ell; \text{時差 (ラグ)} \\ E; \text{期待値を示す} \\ \mu; \text{平均値 } (E(x_t) = \mu) \end{array} \right]$

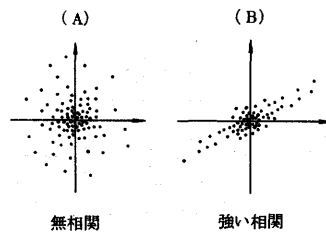
自己相関関数は、通常の時差相関係数と同様のものであり、1変数の時系列について当該時系列の現在値と過去値との相関度を示したものである(第2図)。これを見ることによって観測値がある期間の時差をもった当該時系列自身とどのような相関をもつかを把握することができる。また、前述のように定常確率過程において

時差0期の自己共分散[R(0)]によって標準化したもので次のとおりである。

(第1図) 定常過程と非定常過程



(注3) 共分散とは下図において縦軸にyの値をとり、横軸にxの値をとってデータをプロットしたときの点の集り具合を示す。(A)の場合には、共分散が低く(B)の場合には高い。

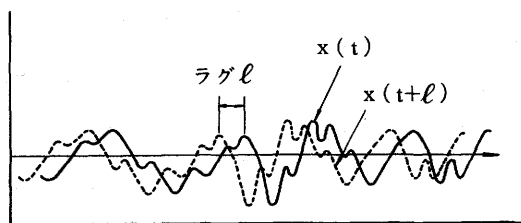


自己共分散[R(ℓ)]とは、yにxをℓ期ずらした値(x<sub>t+ℓ</sub>)を置きかえたものである(分散とはℓ=0の場合である)。後述の相互共分散[R<sub>xy</sub>(ℓ)]は、yにyをℓ期ずらした値(y<sub>t+ℓ</sub>)を置きかえたものである(通常共分散といわれるのは、ℓ=0の場合である)。

ては  $R(\ell)$  は両観測値の間の時差  $(\ell)$  にのみ依存しているから、 $\rho(\ell)$  は  $\ell$  期ずらした波形がもとの波形とどれだけ似ているか、言い換えれば時系列の時差ごとの周期性

の強さを表すことになる (なお、自己相関関数をグラフ化したものは「コレログラム (correlogram)」と呼ばれ、時系列の性質をみるのに使われる)。

(第2図) 自己相関関数の定義と意味



(出典) 日野 [3]

### (2変量時系列モデルと相互相関関数)

いままで1変数の時系列モデルについて述べてきたが、2つの時系列を同時に考えた場合、これを2変量時系列モデルという。すなわち、2変量時系列モデルにおいてはある期に観測される2つのデータの組合せは「様々の組合せ(母集団)」の中からたまたま選ばれた値と考えられる。もちろんこの場合にもある期の値の選ばれ方は一般にその前後の期に選ばれた値に影響される。また1変数の場合と同様に「様々の組合せ(母集団)」の性質、すなわち(2変量)確率分布が時間的に一様である場合に、これを「(2変量)定常過程」という。2変量定常過程においては各々の時系列が定常である、すなわち各変数の平均、分散が一定で自己共分散が時点間の距離のみに依存するほか、2変数相互間の共分散(時点の同じものと時点の異なるものを含む)も時点間の距離のみに依存する。

2変数相互間の関係をみるうえで「相互相関関数(cross-correlation function)」

を用いることが便利である((注3)参照)。相互相関関数は「相互共分散関数(cross-covariance function)」(1変数の場合の自己共分散関数に相当)

$$R_{yx}(\ell) = E((x_t - \mu^x)(y_{t+\ell} - \mu^y))$$

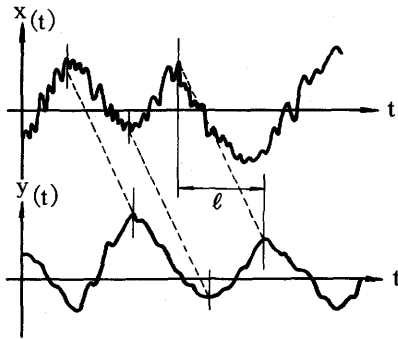
$$\left\{ \begin{array}{ll} \ell & ; \text{時差} & E; \text{期待値} \\ \mu^x & ; x_t \text{の平均値} & (E(x_t) = \mu^x) \\ \mu^y & ; y_t \text{の平均値} & (E(y_t) = \mu^y) \end{array} \right\}$$

を時差0期の自己共分散( $R_{xx}(0), R_{yy}(0)$ )によって標準化したものである。

$$\rho_{yx}(\ell) = \frac{R_{yx}(\ell)}{\sqrt{R_{yy}(0) R_{xx}(0)}}$$

これは従来から「時差相関係数」といわれていたものと同じである(第3図)。先述のように(2変量)定常確率過程においては  $R(\ell)$  は  $\ell$  にのみ依存する。したがって  $\rho_{yx}(\ell)$  は2つの変数の波の一方を  $\ell$  期ずらした場合に両者がどのような対応関係にあるか(どれだけ線形な関係があるか)を示し、いわば2つの時系列の時差ごとの関係の強さを表わすこととなる。

(第3図) 相互相関関数の定義と意味



(出典) 日野 [3]

#### ロ. ARMAモデル

以下ではイで述べた定常確率過程がどのように数式(1次式)で表わされるかについて述べる。イで述べたように確率過程においては各時点でどのような値が選ばれるかは、① randomではあるが、②他の時点の値によって影響される、と述べた。以下では②に関してある期の値がそれ以前、すなわち過去の値にのみ影響される場合について述べる。この条件は経済は人々の過去のいきさつ、経験、知識等に基づく行動によって動いているという通念と対応するもので、経済時系列の分析においてはとくに重要なものである。

#### (ARモデル)

定常確率過程を数式で表現するために、当期xの値が純粋に randomな部分と過

去の値の影響による部分とを足し合わせたものである、と考える。いま仮にxの平均がゼロとし、過去の値の影響が過去の値の1次式で表わせるとすると、定常過率過程は次のように表わせる。<sup>(註4)</sup>

当期のx値=純粋に randomな部分  
+ 過去の値の影響

$$x_t = u_t + (a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots)$$

$u_t$ はt期の randomな部分であり、xおよびuの過去の値と無関係な確率変数で「white noise」と呼ばれる(平均ゼロ)。もし $u_t$ がなければ $x_t$ は過去の値のみによって完全に決まってしまう、randomさはなくなってしまう。

上記のように確率過程を表わしたものを「ARモデル (autoregressive model)」<sup>(註5)</sup>という(具体例第4図参照)。

ARモデルの係数(パラメーター： $a_1, a_2, \dots$ )とイで述べた自己相関関数との間には当然一定の関係がある。たとえば上式において $a_2 x_{t-2}$ 以前の項がない場合(1次のARモデル)には、

$$\rho(l) = a_1^l$$

(l; 時点間の距離(ラグ))

との関係がある。<sup>(註6)</sup> 定常時系列においては、 $|a_1| < 1$ であるから、一般にxの

(註4) このような形で表わされるためには、①過去の値が倍になれば当期に与える影響も倍になるという関係が成り立っていること、②過去の値の効果や randomさの効果は互いに足し合わせる形で全体の値を決めること、が必要である。

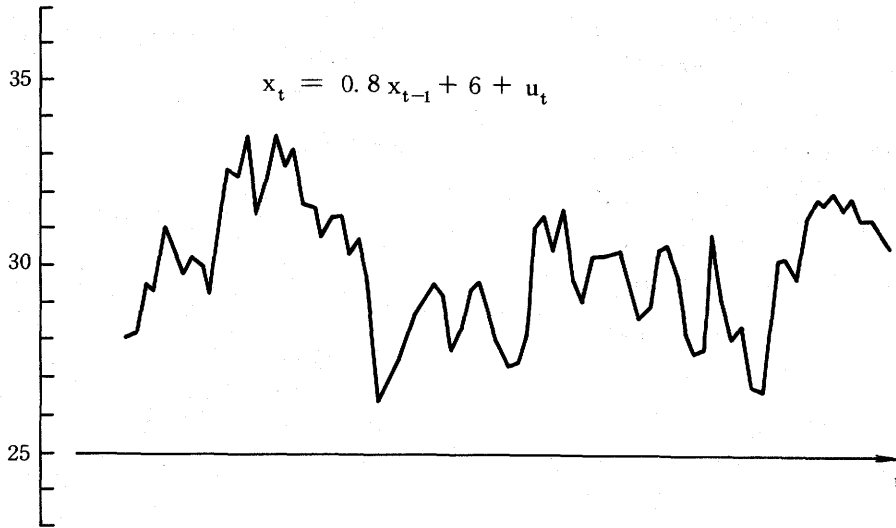
また、本稿ではXの平均がゼロでない場合にはXの平均値からの乖離が次式の右辺によって表わされるとして定式化される。すなわちXの平均値が $\mu$ であるとき、 $x_t = X_t - \mu$ とすると、

$$x_t = u_t + (a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots)$$

(註5) ARモデル等「時系列モデル(time series model)」とは、「確率過程」を推定したものをいう場合が多いが、本稿では両者の厳密な区別をせずに使っている。



(第4図) ARモデルの具体例



(出典) Nelson [7]

(注6) これは、次のように導出される。

今、ラグ期間が1期の自己共分散は、前述の定義から(但し、ここでは $x_t$ は平均からの乖離をとる)

$$R(1) = E(x_t \cdot x_{t-1})$$

これに、 $x_t = a_1 x_{t-1} + u_t$  を代入すると、

$$\begin{aligned} R(1) &= E((a_1 x_{t-1} + u_t) \cdot x_{t-1}) \\ &= E(a_1 x_{t-1}^2 + u_t \cdot x_{t-1}) \\ &= a_1 E(x_{t-1}^2) + E(u_t \cdot x_{t-1}) \end{aligned}$$

ここで、 $x_{t-1}$  と  $u_t$  には相関がないと仮定しているため  $E(u_t \cdot x_{t-1}) = 0$  である。  
従って、

$$R(1) = a_1 \cdot E(x_{t-1}^2)$$

ここで、自己共分散の定義により、

$$E(x_{t-1}^2) = R(0)$$

であるから、結局1期ラグの自己共分散は $t=0$ 期の自己共分散を使って次のように表わすことができる。

$$R(1) = a_1 \cdot R(0)$$

同様にして、 $R(2)$ 、 $R(3)$ …… を  $R(0)$  で表わす。

過去の値如何と現在の  $x$  の値 ( $x_t$ ) との関係は  $l$  が大きくなるほど (昔のことになればなるほど) 希薄になると想定されている。<sup>(注7)</sup> たとえば、第4図のような時系列 (この時系列は  $x_t = 0.8x_{t-1} + 6 + u_t$  の形のARモデルから生成したものである) の自己相関関数は、第5図のようにラグ0期においては1であり、ラグ1期においては、0.8、ラグ2期においては  $0.8^2 = 0.64$ 、……というように次第に減衰するパターンを辿る。

(MAモデル)

ARモデルの  $x_{t-1}$ 、 $x_{t-2}$  に逐次AR

モデル自体を代入してみる。すなわちARモデルに

$$x_{t-1} = u_{t-1} + (a_1 x_{t-2} + a_2 x_{t-3} + \dots)$$

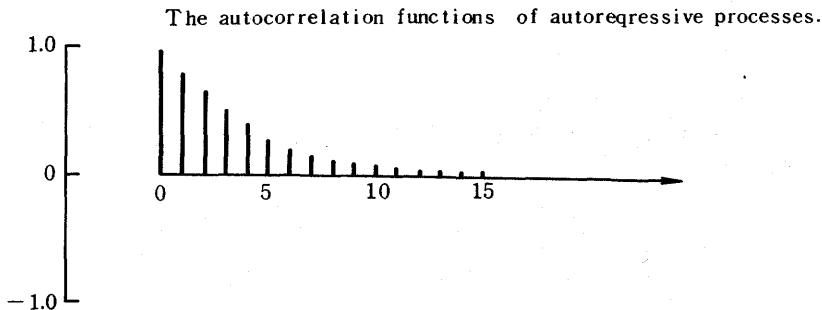
を代入すると、

$$\begin{aligned} x_t &= u_t + a_1 u_{t-1} + a_1^2 x_{t-2} \\ &\quad + a_1 a_2 x_{t-3} + \dots a_2 x_{t-2} \\ &\quad + a_3 x_{t-3} + \dots \end{aligned}$$

ここで再び、

$$\begin{aligned} x_{t-2} &= u_{t-2} + (a_1 x_{t-3} \\ &\quad + a_2 x_{t-3} + \dots) \end{aligned}$$

(第5図) ARモデルと自己相関関数



(出典) Nelson [7]

$$\begin{aligned} R(2) &= a_1 \cdot R(1) \\ &= a_1^2 \cdot R(0) \\ R(3) &= a_1 \cdot R(2) \\ &= a_1^3 \cdot R(0) \\ &\vdots \\ R(l) &= a_1^l \cdot R(0) \end{aligned}$$

従って、自己相関関数は次のようになる。

$$\rho(l) = \frac{R(l)}{R(0)} = a_1^l$$

(注7)  $|a_1| < 1$  であるのは、かりに  $|a_1| > 1$  であるとすると  $x_t$  は  $x_{t-1}$  よりも平均的には常に大きな値をとり (絶対値でみて)、時間の経過とともに一方方向に発散してしまい、定常性の仮定を満たさないからである。同様の理由から、 $x$  の過去の値と現在の値との関係が  $l$  の大きさにつれて希薄化するという関係は通常の定常確率過程について成り立つ ([6])。

を代入する。こうした操作をくり返すと、

$$x_t = u_t + a_1 u_{t-1} + (a_1^2 + a_2) u_{t-2} + \dots + f(a_1, a_2, \dots) u_{t-m+1} + [g(a_1, a_2, \dots) x_{t-m} + h(\dots) x_{t-m-1} \dots]$$

となる。

前述の通り  $x$  の過去の値と現在の  $x$  の値 ( $x_t$ ) との関係は変数のラグ期間 ( $m$ ) が大きくなるほど (昔のことになればなるほど) 希薄になるから、 $m$  を大きくとるほど ( $u_{t-m}$  をたくさん用いるほど) 上式の [ ] 内の重要性は低下する。したがって定常確率過程は過去の white-noise に係数をかけて足したもの、すなわち

$$x_t = u_t + b_1 u_{t-1} + b_2 u_{t-2} + \dots$$

と表わすことができる。このように確率過程を表わしたものを「MAモデル (moving average model)」という (具体例第6図参照)。すなわち、MAモデルは

ある期の値は過去における random な変動 (ホワイト・ノイズ) のウェイト付きの累積であるということを陽表的に表わしたものと見える。MAモデルの係数と自己相関関数との関係はARモデルの場合に比べてむしろはっきりしているとも見える。すなわち、MAモデルにおいて  $b_m$  以前の係数がゼロであるときには  $m$  以上隔ったところでは時系列の自己相関はゼロである。換言すればMAモデルの次数 (ゼロでない係数  $b_m$  の数) はある時系列が過去のどの期までを「メモリー」ととどめているかを示している。<sup>(注8)</sup>

たとえば第6図のようなMAモデルで表現される時系列モデルの自己相関関数 (コレログラム) は、第7図のように  $t = 0$  期においては、自己相関関数とその定義から1となり、その後  $t-1$  期には  $u_{t-1}$  のパラメーターがプラスであるため、コレログラムもプラス側にでており、メモリーは1期しか残らず2期以前の自己相関は0になっている。

(注8) MAモデルのパラメーターと自己相関関数との間には次のような関係がある (簡単化のために、1次のMAモデルについてみる)。

今、1次のMAモデルを次のように表わすと、

$$x_t = u_t + \theta_1 u_{t-1}$$

ラグのない期の共分散 (= 分散) は、 $E(u_{t-i} \cdot u_{t-j}) = 0$  ( $i \neq j$ ) を用いて、

$$R(0) = E((u_t + \theta_1 u_{t-1})^2) = \sigma_u^2 (1 + \theta_1^2)$$

1期ラグの共分散は、

$$R(1) = E((u_t + \theta_1 u_{t-1})(u_{t-1} + \theta_1 u_{t-2})) = \sigma_u^2 \theta_1$$

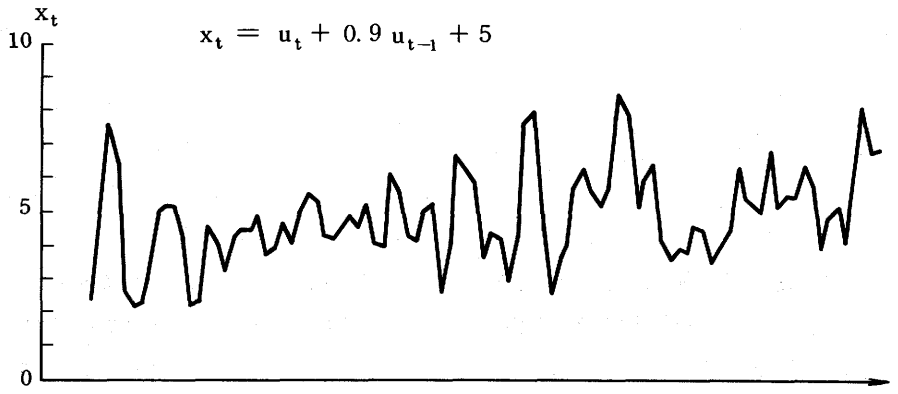
同様にして2期以上のラグの共分散はゼロ ( $E(u_t^2) = \sigma_u^2$ )。

従って、自己相関関数はパラメーターと、次のような関係をもつ。

$$\rho(1) = \frac{R(1)}{R(0)} = \frac{\sigma_u^2 \theta_1}{\sigma_u^2 (1 + \theta_1^2)} = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

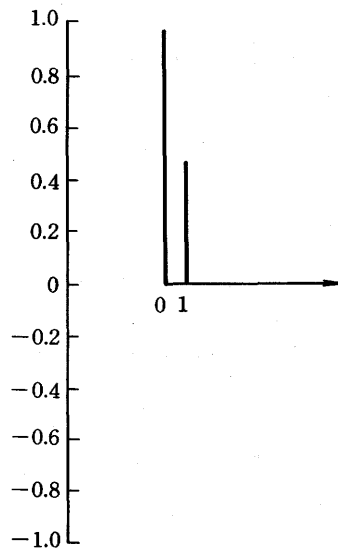
但し、 $\ell > 1$  では  $\rho(\ell) = 0$  ( $\ell$ ; ラグ期間)

(第6図) MAモデルの具体例



(第7図) MAモデルと自己相関関数

Autocorrelation functions of moving-average processes



(ARMAモデル)

上記のように、時系列はARモデル、MAモデルとして表現できるが、また両者を混合したモデルでも表現できる。このように表現したモデルは「ARMAモデル (autoregressive moving average model)」と呼ばれ、次のように示される。

$$x_t = \underbrace{\phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots}_{\text{ARパート}} + \underbrace{u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots}_{\text{MAパート}}$$

ARMAモデルは、最も一般的なモデルとみなすことができる。すなわち、ARモデルはこのモデルのMAパートのないモデルであり、MAモデルはこのモデルのARパートのない特殊な表現とみることができるからである。<sup>(注9)</sup>

(2変量確率過程のAR、MA、ARMAモデル)

以上述べたと同様に、2変量確率過程についてもARモデル、MAモデル、ARMAモデルにより表わすことができる。

<ARモデル>

$$\sum_{i=0}^p a_i x_{t-i} + \sum_{i=0}^q b_i y_{t-i} = u_t$$

$$\sum_{i=0}^r e_i x_{t-i} + \sum_{i=0}^s f_i y_{t-i} = v_t$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ただし、} \\ a_0 = f_0 = 1、 \\ p \cdot q \cdot r \cdot s \text{ はラグの最大} \\ \text{次数} \end{array} \right)$$

<MAモデル>

$$x_t = \sum_{i=0}^{\alpha} \phi_i u_{t-i} + \sum_{i=0}^{\beta} \theta_i v_{t-i}$$

$$y_t = \sum_{i=0}^r \phi_i u_{t-i} + \sum_{i=0}^{\delta} \theta_i v_{t-i}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ただし、} \\ \phi_0 = \theta_0 = 1、 \\ \alpha, \beta, r, \delta \text{ はラグの最大} \\ \text{次数} \end{array} \right)$$

<ARMAモデル>

$$\sum_{i=0}^p a_i x_{t-i} + \sum_{i=0}^q b_i y_{t-i} =$$

$$\sum_{i=0}^{\alpha} c_i u_{t-i} + \sum_{i=0}^{\beta} d_i v_{t-i}$$

$$\sum_{i=0}^r e_i x_{t-i} + \sum_{i=0}^s f_i y_{t-i} =$$

$$\sum_{i=0}^r q_i u_{t-i} + \sum_{i=0}^{\delta} h_i v_{t-i}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ただし、} a_0 = f_0 = c_0 = h_0 = 1、 \\ p, q, r, s, \alpha, \beta, r, \delta \text{ はラグの最} \\ \text{大次数} \end{array} \right)$$

(インパルス応答関数)

上記のARモデル (MAモデル、ARMAモデルでも同様) を解けば、下記のようなになる (詳細は[1]参照)。

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha(m) y(t-m) + u_t'$$

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta(m) x(t-m) + v_t'$$

(m; 時間のラグ)

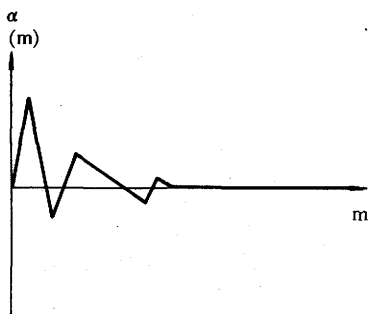
ここで、 $\alpha(m), \beta(m)$  はそれぞれ x の入力 y に対する、および y の入力 x に対す

(注9) なお、実際のデータが与えられた場合に、ARモデル、MAモデル、ARMAモデルのうちから、どのモデルを採用するかは後述の「ケチの原理」(2.(2)イ参照)に基づき、より少ないパラメーターで、より正確に現実を近似するモデルを選択することになる。

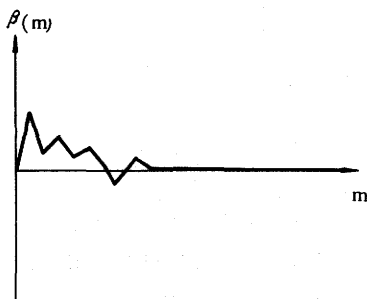
る「インパルス応答関数 (impulse response function)」という。たとえば、インパルス応答関数 ( $\alpha(m)$ ) は、仮りに  $y(t-m)$  に 1 単位の変化があった場合に、 $x$  にどのような変化が起るかを示したものである。通常、その値は第 8 図のように時間の経過とともに減衰するパターンをとる。

(第 8 図) インパルス応答関数の例

(i)  $y$  から  $x$  へのインパルス応答



(ii)  $x$  から  $y$  へのインパルス応答



(ARIMAモデル)

なお原時系列の差をとって得られる定常時系列を ARMAモデルとして表わしたものを「ARIMAモデル(integrated autoregressive moving average model)」と呼んでいる<sup>(注10)</sup>(Box and Jenkins [5])。

## (2) 時系列モデルの推定

時系列モデルの推定とは、時系列データが与えられたとき、この時系列を生成していると思われる確率過程を推定することである。いいかえると、時系列モデルの推定とは、現実の時系列データをもとに、ある期以前の過去のパラメーターを 0 とみなして適当な次数のモデルを決定するとともに (これは「identification (同定)」と呼ばれる) 計量経済分析における identification (識別) との関係については、4.(1)イを参照)、選択したモデルのパラメーターを推定すること (これは「estimation」と呼ばれる) である。

従来の方法 (Box and Jenkins [5] 等) では時系列モデルの推定は計量経済分析と同様に、① identification (次数の決定)、② estimation (パラメーターの推定)、③ diagnostic check (検定) の 3 段階を何度も繰り返すことによって最終的なモデルを決定するという方法に頼

(注 10) 1 階階差の ARMAモデルが integrate された ARMAモデル (ARIMAモデル) と呼ばれるのは、この場合の原時系列は 1 階階差の時系列の全ての期間に亘る合計として示されるからである。

すなわち、

$$z_t = (z_t - z_{t-1}) + (z_{t-1} - z_{t-2}) + (z_{t-2} - z_{t-3}) \dots$$

であり、 $z_t - z_{t-1} = x_t$  とすれば、

$$z_t = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} \dots$$

との関係がある。

っていた。すなわち、まず最初はある次数を任意に選び（第1回目の identification）、このモデルについてパラメーターの推定を行う（第1回目の estimation）。この推定結果について、パラメーターの  $t$  値が有意であるかどうか、残差に系列相関がなくなっているかどうかについて調べる（第1回目の diagnostic check）。その結果からこの次数の決定が不適当と判断された場合には、identificationに戻り、別の次数のモデルを選び（第2回目の identification）、第1回目と同様にパラメーターの推定、diagnostic checkを繰り返す。

しかし、こうしたモデルの推定方法では、各段階でどのようなモデルを選ぶかについては、前述のコログラム (2.1イ.) や  $t$  値を参考にいわば職人的な勘に依存してなされていたのが実情であった。ところが、最近客観的な model identificationのためのひとつの具体的な基準として「AIC基準 (Akaike's information criterion)」が赤池[17]によって導入された。これを用いれば、model identificationとパラメーターの estimationが同時に行われ、diagnostic checkについては省略できる。したがって、以下では推定の問題を、① model identification および② estimation、の2段階に分けて述べることにする。また、ここでは主として1変量の場合について述べ、2変量の場合についてはモデルの推定式のみ述べ、他は省略する[17]。

#### イ. identification — AIC基準の適用

実際のデータが与えられた場合、まず直面する問題は identificationの問題、すなわち一般的な ARMAモデルからど

のような次数（パラメーターの数）のモデルを選ぶかの問題である。時系列分析では identificationの問題とくに注意を払い、そのための統計的原則として「ケチの原理 (principle of parsimony)」を採用している。

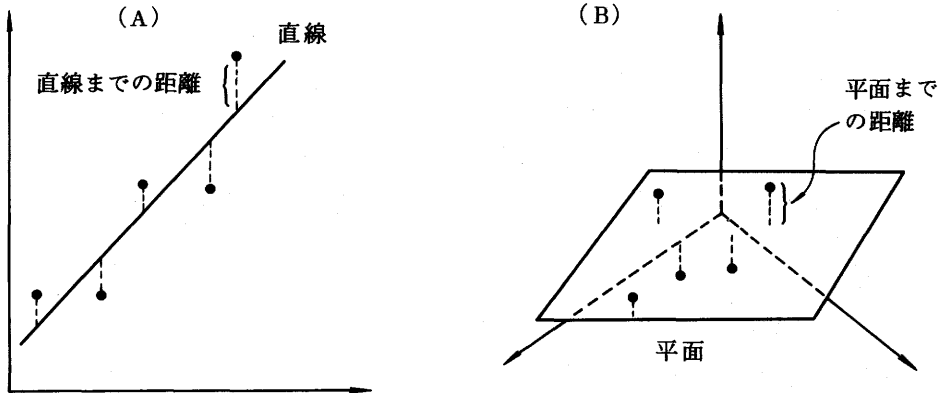
なお、モデルの次数を決めることは、同時にまた AR部分を0次にしたものが MAモデルであり、逆に MA部分を0次にしたものが ARモデルであり、さらに双方の部分とも1次以上にしたものが ARMAモデルであることから、ARモデル、MAモデル、ARMAモデルのうちいずれのモデルを選択するのかということも同時に決定することになる。（「ケチの原理」）

「ケチの原理」とは、限られたデータをもとに現実を最もよく把握するためには、データ数の制約に対応した単純なモデルを用いなければならないとの原理である（「we employ the smallest possible number of parameters for adequate representation」 <Box and Jenkins [5]>）。

これは、計量経済分析でも説明変数の数を増やしすぎるとパラメーターの有意性が低下する「multicollinearityの問題」などとして、知られていたことである。

これを直観的に説明すると、第9図において点のような時系列データがあったときに、1次のモデルでこれを近似することは(A)図のように点までの距離が最小となる直線をフィットすることに相当し、また2次のモデルで近似することは(B)図のようにこれを平面で近似することに相当する。一般に、点から直線まで

(第9図)



の距離に比べて、点から平面までの距離が近く、したがって2次のモデルの方がフィットがよいことになる。同様にこれを3次、4次……とあてはめる式の次数を上げていけばフィットの度合は高まることになる。しかし、その反面推定すべきパラメーターの数は直線の場合に比べ平面の場合は1個多くなり3次、4次……となればさらに増える。データの数に限られている場合には、パラメーターの数が増えるに従い、パラメーターの推定値の信頼性が低下（バラツキが拡大）してしまう。つまり、フィットの良さとパラメーターの信頼性はトレード・オフの関係にあることがわかる。したがって、「ケチの原理」に基づいてモデルを選択するということは、このトレード・オフの関係の下で最もよいモデルを選び出すことであり、これが有益な実証分析を行

う上での大前提となる（赤池〔18〕）。

（AIC基準）

「ケチの原理」に基づいて、客観的にモデルの優劣を決めるひとつの具体的な基準として、「AIC基準（Akaike's information criterion）」がある。<sup>(注11)</sup> AIC基準とは、次式で定義されるAICの値を最小とするモデルを選択することである（第10図参照〔17〕）。

$$\text{AIC} = (-2) \times \log(\text{尤度関数の最大値})^{\text{(注12)}} + 2 \times (\text{パラメーターの数})$$

ここで、右辺の第1項はモデルのフィットの良さ（尤度関数の最大値）を示し、パラメーターを増やす程尤度関数の最大値は大きくなり第1項の値は小さくなる。一方、第2項は推定値の信頼性を示すもので、パラメーターの数を増やすほど信頼性が低下し、値は大きくなる。仮

（注11） AIC基準と計量経済分析との関係については、4.(1)ロ．参照。

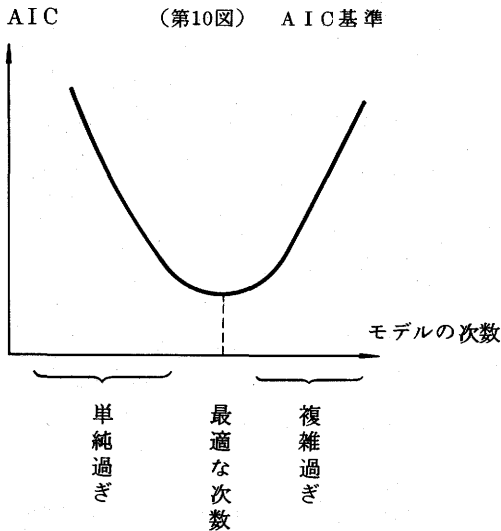
（注12） 尤度関数は次のように説明される〔19〕。

母集団分布が一母数の密度関数（または度数関数） $f(x, \theta)$  で定められているものとし、関数の形  $f$  は既知であるが、母数  $\theta$  は未知であるとする。大きさ  $n$  の確率標本  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  から  $n$  組の数値  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  が選ばれる確率密度（離散変数のときは確率）は

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \\ &= f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta) \end{aligned}$$



に、あまりに低い次数の単純なモデルを選んだ場合、フィットが悪いため尤度が小さくなり、AICの値が高くなる。逆にあまりに高い次数の複雑なモデルを選んだ場合には、フィットがよくなり、尤度は大きくなるが、一方モデルのパラメーターの数が増えるためその推定値の安定性は低下し、第2項の値が大きくなり、結局AICの値は高くなる。適切な次数のモデルを選択することによって、AICの値が最小値をとる。



#### ロ. パラメーターの推定

時系列モデルの identification によって、モデルの次数が決まったとき、次の問題は時系列モデルのパラメーターの推定の問題である。時系列モデルのパラメ

ーターの推定方法は基本的には最尤法(前項(注12)参照)によって行われるが、時系列モデルのパラメーター推定においては、「初期値の問題 (starting value problem)」と呼ばれる問題があるので、各種の高度な手法が用いられている。<sup>(注13)</sup>なお、2変量時系列モデルについては、同時点の変数相互間の取り扱いについて知っておく必要がある。

#### (初期値の問題)

初期値の問題とはデータが与えられている期間以前における  $u, x$  の値をどう仮定するかという問題である。時系列モデルにおいては初期の  $u, x$  が翌期以降の  $u$  ないし  $x$  の値に影響を及ぼすから、初期の  $u, x$  の値についてどのような前提をとるかが係数の推定結果に影響を及ぼすからである。このため、初期値については何らかの適切な近似を行う必要があり、例えば Box and Jenkins [5] は、観測データからまず過去の  $x$  の値を仮推定し、これを初期値と仮定して係数の推定を行う方法を用いている。<sup>(注14)</sup>ただし、この問題の重要性はデータ期間が長くなるにつれて小さくなる。先に述べたとおり、 $x$  の過去の値如何と現在の  $x$  の値との関係は時差(ラグ)が大きくなるほど希薄になるからである。

#### (2変量時系列モデルの推定式)

で与えられる。標本観察値  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  が与えられたとき、この関数は母数  $\theta$  の関数  $L(\theta)$  となり、これを確率標本  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の尤度関数という。最尤法は母数  $\theta$  の変化に対して尤度関数  $L(\theta)$  の値を最大にするような統計量  $\theta$  (そのような統計量が存在するならば)を母数  $\theta$  の推定量として決定する方法である。

(注13) いまひとつ、時系列モデルのパラメーター推定における問題として、時系列データが互いに独立でないことと仮定したことに伴う推定上の問題がある。こうした問題を解決するための方法としてたとえば、前述(2.(1)ロ.)の自己相関関数とパラメーターの関係(Yule-Walkerの方程式と呼ばれる)を使って、自己相関関数の推定値からパラメーターを推定する方法もある[17]。

2変量時系列モデルの推定においては、同時点の変数間の関係について次のように取扱う。例えば、次のような2変量ARモデルについて考える。

$$x_t = \sum_{i=1}^p a_i x_{t-i} + \sum_{i=0}^q b_i y_{t-i} + u_t$$

$$y_t = \sum_{i=0}^r e_i x_{t-i} + \sum_{i=1}^s f_i y_{t-i} + v_t$$

上式は相手の変数については同時点のものを含んでいる ( $x_t$  を説明する式の  $y_t$ ) ため、causality の方向について a priori な仮定を置かない限り一意的にパラメーターの値を決めることはできない。<sup>(注15)</sup>

まず、かりに  $b_0 = e_0 = 0$  とおいてみた次の式を推定してみる。

$$x_t = \sum_{i=1}^p a_i x_{t-i} + \sum_{i=1}^q b_i y_{t-i} + u_t$$

$$y_t = \sum_{i=1}^r e_i x_{t-i} + \sum_{i=1}^s f_i y_{t-i} + v_t$$

これは、 $t$ 期の値を自己自身の過去値および相手の変数の過去値によって説明し、その残差(ホワイト・ノイズの推計値)を  $u_t, v_t$  としたものである。次に、得られた  $u_t, v_t$  相互間の相関を調べてみる。残差  $u_t, v_t$  は自己自身および相

手の変数の過去値によって説明されなかった部分を示している。ここで、もし  $u_t, v_t$  の間に相関がみられる場合には、 $x$  と  $y$  の過去値のみを用いて推定したことに原因があると考えられ、 $x$  と  $y$  との間に「同時的な関係 (instantaneous causality)」があることになる (3.(2)参照)。その場合には  $b_0 = e_0 = 0$  の仮定の一方をはずして再推定してみる。ここで、 $b_0 \neq 0$  とするか  $e_0 \neq 0$  とおくかは全く arbitrary に決めることができる (これは、同時的な causality については causality の方向が判断できないことに対応している <3.(2)参照>)。もちろん、事前に同時関係の存在がわかっている場合には、最初から  $b_0, e_0$  の一方を0でないものとして推定してよい。

### 3. 時系列分析の応用

#### (1) 予測モデルとしての応用

##### イ. 時系列モデルによる予測の理論

2.(1)ロ.において時系列モデルは下のよう

に表わせると述べた。  
当期の  $x$  の値 = 純粋に random な部分 + 過去の値の影響

(注14) また、前述(注13)のように、Yule-Walker 式からパラメーターを推定する方法は、パラメーターの推定と同時に、初期値の問題のひとつの解決策にもなっている。しかし、初期値の問題はまだ未解決の点が多いといわれている。なお、初期値の問題は本来、計量経済分析においても問題にすべき事柄である。後述(4.(1)ハ.)のように、ダイナミックな(ラグのついた)計量経済モデルは implicit に確率過程を含んでしまっているからである。

(注15)  $x_t$  と  $y_t$  との同時点での causality を含む相互依存関係を示すパラメーターは経済理論に基づいて a priori に causality の方向を決めないかぎり、一意的には決まらない。causality の方向はともかく、相関関係だけならば、片方の式に相手の変数の同時点のものを入れ、そのパラメーターを計測することは可能であるが、推定されたパラメーターに経済的な意味があるか否かは疑問である。

なお、計量経済分析においては  $x_t$  と  $y_t$  との関係に関して、a priori な前提を置く(理論モデルないし外生性に関する仮定)ことにより、この問題を解決している(4.(1)イ.)参照)。

時系列モデルによる予測はこの関係を利用するものである。すなわち、上式のうち「純粋に random な部分」は先行きどうなるか知りようがないから、「過去の値の影響」の部分に基づいて予測するほかない、換言すればそれ以上良い方法はない（こうした予測は「linear optimal forecast」と呼ばれる〔6〕）ことになる。

ARモデルによる予測は通常の計量モデルによる予測と形式的には同じである。また、1変量の時系列モデルによる予測は当該変数の過去の動きをグラフ等に描き、その規則性をなぞって先に伸ばす、といった古くからある方法を精緻化したものといってよい。2変量時系列モデルによる予測については説明を省略する。

(イ) 1期先予測 (one-step-ahead forecast)  
(ARモデル)

ARパートのみの時系列モデルの場合には、1期先予測はARモデルの次数に応じた過去の値にパラメーターを乗じて簡単に計算される。例えば、1次のARモデルの場合には $t+1$ 期の予測値 $\hat{x}_t(1)$ は次の式から計算されることとなる。

$$x_{t+1} = \phi_1 x_t$$

( $\phi_1$ ; パラメータ)

(MAモデル)

MAモデルの場合には、直接的にとらえられないホワイト・ノイズ( $u_t$ )の一次結合で表わされているため、ARモデルほど簡単に将来の予測ができない。もっとも、ホワイト・ノイズを過去の予測の誤差として把えることによって将来の予測は可能である。

すなわち、例えば、2次のMAモデルによって1期先予測を行う場合、 $t$ 期までの実績値による $t+1$ 期の予測 $\hat{x}_t(1)$ は次のように計算される。

まず、次のような2次のMAモデルを考えると、

$$x_t = u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2}$$

( $\theta_1, \theta_2$ ; パラメータ)

1期先の $x_{t+1}$ は、

$$x_{t+1} = u_{t+1} + \theta_1 u_t + \theta_2 u_{t-1}$$

となる。

ここで、 $x_{t+1}$ を予測値とみる場合には、 $u_{t+1}$ の条件付期待値は $E(u_{t+1} / H_t) = 0$  (ここでは $H_t$ は $t$ 期において利用可能なデータ)となっている((注16)参照)ことから、結局 $\hat{x}_t(1)$ は、

$$\hat{x}_t(1) = \theta_1 u_t + \theta_2 u_{t-1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} \text{ を予測値とみると、} \\ x_{t+1} = \hat{x}_t(1) \end{array} \right.$$

となる。

上式を計算するには、 $u_t, u_{t-1}$ の値が必要であるが、その1期前の $x_t$ の予測値を $\hat{x}_{t-1}(1)$ とすると、その期の実績値との誤差は次のようになる。

$$\begin{aligned} (x_t - \hat{x}_{t-1}(1)) &= (u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2}) \\ &\quad - (\theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2}) \\ &= u_t \end{aligned}$$

同様に、 $u_{t-1}$ は $t-1$ 期における予測誤差として与えられる。従って $\hat{x}_t(1)$ は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \hat{x}_t(1) &= \theta_1 (x_t - \hat{x}_{t-1}(1)) \\ &\quad + \theta_2 (x_{t-1} - \hat{x}_{t-2}(1)) \end{aligned}$$

ただ、このように次々に過去に遡っていくと、時系列の最初の期においては過去の予測誤差を作ることができず、初期値を仮定する必要がでてくる。そこで、初期条件として  $u$  の値を 0 とおいて計算を始めるが、もちろん、最初の期の  $u$  の値が 0 とは限らないわけで、そのために予測値は初期値の影響が残るという意味での偏りをもつことになる。もつとも、その偏りの程度は MA モデルのパラメーターが 1 より十分に小さい場合には、最初の期から離れるにしたがって縮小する傾向にある（推定の場合の初期値の問題と同様 < 2.(2)ロ. 参照 >）。

また、MA モデルによる予測においては、予測に使われるホワイト・ノイズの推定系列は、上記のようにモデルのパラメーター推定値を使って算出される。このため、MA モデルの場合には 1 期先予測においても、パラメーターの推定誤差

からくるホワイト・ノイズの推定系列の誤差を通じて、予測値の誤差は累積する惧れがある。

このように、MA モデルによる予測には困難な問題があり、ARMA モデルにおいても、MA パートの余りに長いモデルは避ける必要がある。前記 AIC 基準によるモデル選択は、こうした点も考慮に入れたうえで、適当な次数の MA パートを含むモデルを選択しようとするものである。

(ロ) 数期先予測 (multiple-ahead forecast)

2 期以上先の予測は、通常通り 1 期先予測を繰り返すことによって計算できる<sup>(注16)</sup> (“chain principle” [12])。すなわち、1 期先予測によって得られた予測値を用いて、1 期先予測と同じ方法で 2 期先の予測値を算出する。次に 1 期先予測値と 2 期先予測値とを用いて、再び 1 期先予測

(注 16) ARMA モデルの  $t$  期までの情報 ( $H_t$ ) による 1 期先から  $l$  期先までの予測は、次のようにして計算される。

今、次のような AR パート  $p$  次、MA パート  $q$  次の ARMA モデルを考えることとする。

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} \cdots \phi_p x_{t-p} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} \cdots \theta_q u_{t-q}$$

この式を  $t+1$  期について書き直す。

$$x_{t+1} = \phi_1 x_t + \phi_2 x_{t-1} \cdots \phi_p x_{t-p+1} + u_{t+1} + \theta_1 u_t + \theta_2 u_{t-1} \cdots \theta_q u_{t-q+1}$$

ここで、 $t$  期以前の値は実現値であり、もはや確率変数でなく（従って  $E(\phi_1 x_t / H_t) = \phi_1 x_t$  等々）、また将来のホワイト・ノイズの期待値は 0 ( $E(u_{t+1} / H_t) = 0$ ) であるため、 $x_{t+1}$  の予測値 ( $\hat{x}_t(1)$ ) は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \hat{x}_t(1) &= E(x_{t+1} / H_t) = E(\phi_1 x_t + \phi_2 x_{t-1} \cdots \phi_p x_{t-p+1} + u_{t+1} + \theta_1 u_t + \theta_2 u_{t-1} \cdots \theta_q u_{t-q+1} / H_t) \\ &= \phi_1 x_t + \phi_2 x_{t-1} \cdots \phi_p x_{t-p+1} + \theta_1 u_t + \theta_2 u_{t-1} \cdots \theta_q u_{t-q+1} \end{aligned}$$

次に、 $t+2$  期について、同様に最初の式を書き直す。

と同じ方法で3期先の予測値を算出する。順次この操作を繰り返して、4期先、5期先の予測値を算出する。ただ、ARパートとMAパートの双方をもつARMAモデルの数期先予測の場合、1期先予測と異なる点は、まず第一にMAパートはMAの次数を超える期の予測については、不規則変動 ( $u_t$ )の期待値が0であるとの前提 (MAパートのパラメーターは過去の時系列の動きのメモリーを示している<2.(1)ロ.>参照)により、予測に影響しなくなること、第二に、予測の期間を次第に長くすると、予測値は漸次平均値に近づくことになる点などである。<sup>(注17)</sup>第二の点は、時系列を手でなぞって予想をたてる場合に、比較的近い将来については、

それまでの規則性をもって予想するが、遠い将来については、平均的な水準に予想をたてておくという発想と直観的には一致している。

ロ. 時系列モデルによる予測の具体例

時系列モデルによる予測の具体例として、ニューヨーク連銀のHammond[10]によるマネーサプライ ( $M_1$ )の予測例を紹介する。米国のマネーサプライの原データ (季調後、月次、期間1970年1月~1974年12月)は、第11図(a)のようにトレンドをもっているため、定常性の仮定を満たしていない (したがって、自己相関関数は第12図(a)のように、0に収束しない)。しかし、原データの1階階差をとると、第11図(b)のようになり、その自

$$x_{t+2} = \phi_1 x_{t+1} + \phi_2 x_t \cdots \phi_p x_{t-p+2} + u_{t+2} + \theta_1 u_{t+1} + \theta_2 u_t \cdots \theta_q u_{t-q+2}$$

$x_{t+2}$ の予測値 $\hat{x}_t(2)$ についてみると  
 $x_{t+1}$ 期と同様の理由から次のように書ける。

$$\begin{aligned} \hat{x}_t(2) &= E(x_{t+2}/H_t) = E(\phi_1 x_{t+1} + \phi_2 x_t \cdots \phi_p x_{t-p+2} + u_{t+2} \\ &\quad + \theta_1 u_{t+1} + \theta_2 u_t \cdots \theta_q u_{t-q+2}/H_t) \\ &= E(\phi_1 x_{t+1}/H_t) + \phi_2 x_t \cdots \phi_p x_{t-p+2} + \theta_2 u_t \cdots \theta_q u_{t-q+2} \end{aligned}$$

ここで、 $E(\phi_1 x_{t+1}/H_t) = \hat{x}_t(1)$ であるから、

$$\hat{x}_t(2) = \hat{x}_t(1) + \phi_2 x_t \cdots \phi_p x_{t-p+2} + \theta_2 u_t \cdots \theta_q u_{t-q+2}$$

同様に順々に予測値を使って、1期先予測を繰り返していくと、予測期間がMAパートの次数を超えると ( $l > q$ ) MAパートは消滅して次のようになる。

$$\hat{x}(l) = \phi_1 \hat{x}_t(l-1) + \phi_2 \hat{x}_t(l-2) \cdots \phi_p \hat{x}_t(l-p)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \hat{x}_t(l) ; t \text{ 期における } l \text{ 期先予測値} \\ H_t ; t \text{ 期において利用可能なデータ } (\cdots, x_{t-1}, x_t) \\ E(x_{t+l}/H_t) ; H_t \text{ を利用して予測した } l \text{ 期の予測値 } (= \hat{x}(l)) \end{array} \right]$$

(注17) これは次のように示される。

一般に  $l$  期先の予測値  $\hat{x}_t(l)$  は次のように示される ( $\mu$  は  $x$  の平均値)。

$$\hat{x}_t(l) = E(x_{t+l}/H_t) = E(\mu + u_{t+l} + \phi_1 u_{t+l-1} \cdots / H_t)$$

ここで、将来のホワイト・ノイズの期待値は0となるため、上の式は次のように書き直すこ

己相関関数(第12図(b))は、15か月のラグ期間においてほぼ0に収束しており、定常時系列とみなしうる系列になっている。

そこで、この1階階差のデータについて時系列モデルをあてはめると、第1表のような2種類のARIMAモデルが得られたが、Hammondはこの2種類のARIMAモデルのうちAR部分のみの(B)式を予測用に採用している(このモデルの選択については、HammondはAICを使っていないため、やや経験的な方法に頼っているが、前述のようにAICを使えば、客観的に最適なモデルを選択できる)。なお、(B)式について、その残差の系列をQ統計量<sup>(注18)</sup>によって $\chi^2$ 検定してみると、系列相関はなく、(B)式は統計的仮定を満たしていることが確認さ

れている。

次に、Hammondはこの(B)式のモデルを使って、通常回帰式による予測と時系列モデルによる予測とのパフォーマンスの比較を行っている。

まず、(B)式のモデルを使って出発点を74/12月にとり、この出発点から75/1月(1か月先予測)、75/3月(3か月先予測)、75/6月(6か月先予測)の各時点のマネーサプライの値を予測する。次に出発点を75/1月に進め、この出発点から75/2月(1か月先予測)、75/4月(3か月先予測)、75/7月(6か月先予測)のそれぞれの時点のマネーサプライの値を予測するという方法で、時系列モデルの予測値を計算する。

一方、通常回帰式による予測については、例えば所得(名目GNP; Y)と

とができる。

$$\hat{x}_t(L) = \mu + \varphi_1 u_t + \varphi_{t+1} u_{t-1} + \dots$$

次に、 $l$ を無限大にとると、

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \hat{x}_t(L) = \mu + \lim_{l \rightarrow \infty} (\varphi_l u_t + \varphi_{l+1} u_{t-1} + \dots)$$

ここで、定常性の前提から $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i$ は一定値に収束するため、 $l$ の極限をとると次のようになる。

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (\varphi_l u_t + \varphi_{l+1} u_{t-1} + \dots) = 0$$

従って $\lim_{l \rightarrow \infty} \hat{x}_t(L) = \mu$ となる。

(注18) Q統計量は、ホワイト・ノイズの自己相関係数のグループとしての有意性をみるもので、次のように定義され、 $\chi^2$ 分布に従う[20]。

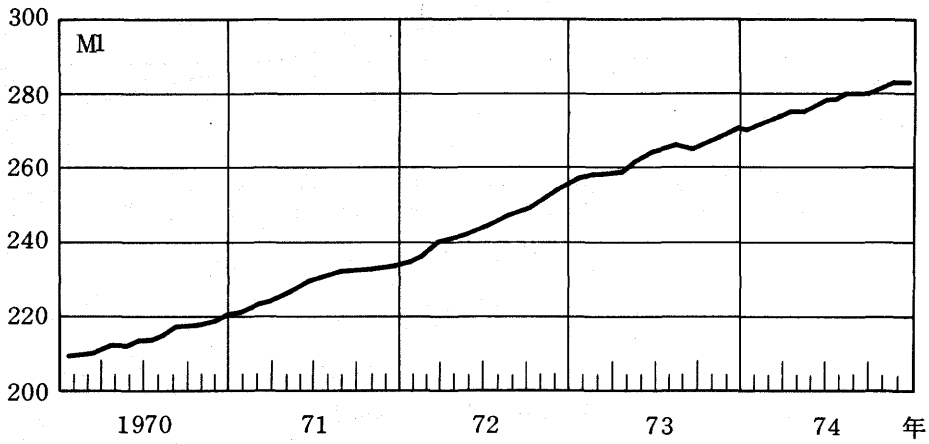
$$Q = n \sum_{i=1}^k r_i^2(\hat{a})$$

$Q$ ;  $\chi^2$  統計量 ( $d \cdot f = k$ )  
 $r_i(\hat{a})$ ; lag  $i$  の残差の自己相関係数  
 $n$ ; データ数  
 $k$ ; グループの大きさ

(第11図) 米国のマネーサプライ ( $M_1$ )

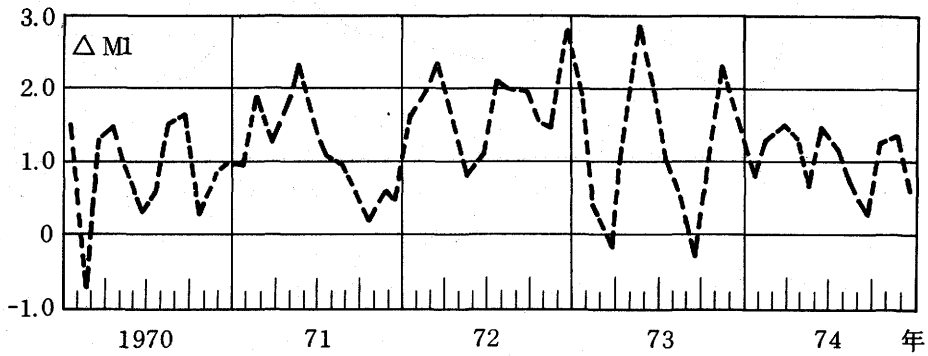
(a) 原 デ ー タ

Billions of dollars



(b) 1 階 階 差

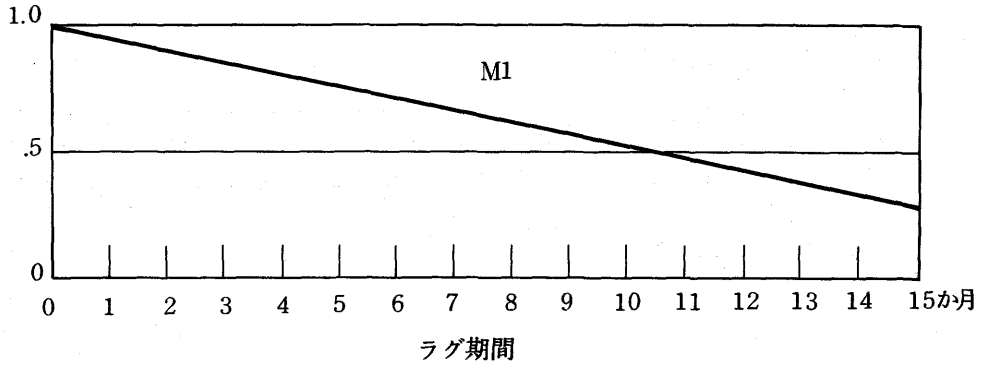
Billion



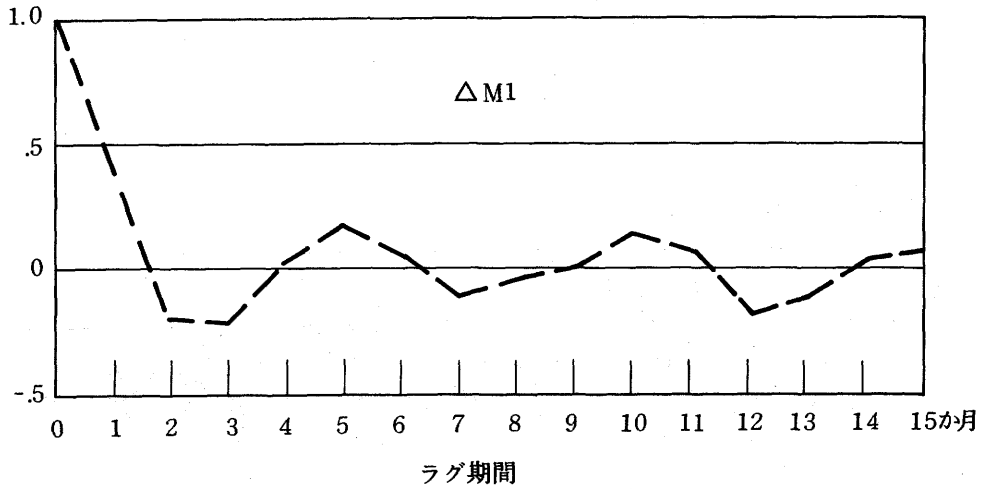
(出典) Hammond [10]

(第12図) 米国のマネーサプライ ( $M_1$ ) の自己相関関数

(a) 原データの自己相関



(b) 1階階差の自己相関



(出典) Hammond (10)



(第1表) マネーサプライの時系列モデル

## Estimation Results

Sample Period : January 1970 - December 1974

Parameters	(A)	(B) <sup>*</sup>
	ARIMA(2,1,1)	ARIMA(2,1,0)
AR 1	.3597 (1.6)	.5197 (4.6)
AR 2	-.4065 (2.8)	-.4527 (4.2)
MA 1	-.2011 (0.8)	...
Constant	1.3114 (5.5)	1.1687 (6.4)
SSR	23.297	23.468
$\sigma_a^2$	.398	.398

SSR: Sum of squared residuals

 $\sigma_a^2$ : Residual variance

( )内は t value

(出典) Hammond [10]

\* たとえば、(B)式は次のような ARIMAモデルを示している。

$$x_t = 0.5197 x_{t-1} - 0.4527 x_{t-2} + 1.1687$$

(4.6)                      (4.2)                      (6.4)

(( )内は t値)

金利 (フェデラル・ファンド・レート ; RFF) によって通貨需要を説明する通貨需要関数を計測し (計測式、第2表参照)、この通貨需要関数を用いて予測を行った。

両モデルのパフォーマンスの比較は第3表のとおりである。まず、RMSE (root mean square error) の比較でみると、1か月先の予測では両モデルに大きな差がないものの、それより長い3か月先予測、6か月先予測においては、時系列モデルによる予測の方がより実績値に近いものとなっている。また、平均誤差 (ME) の比較でみると、時系列モデルでは大きな偏りをもっていないのに対し、通

貨需要関数の予測では、全期間に亘って過大予測となっている。上記通貨需要関数のパフォーマンスの検討は、パーシャル・テスト、すなわち外生変数には実績値を使用しているのに対し、時系列モデルでは外生変数を用いることなく、2期目以降の予測においてはそれ以前の予測値を使って予測した (これは計量経済分析のファイナル・テストに相当するともいえ、上記パーシャル・テストに比べて厳しいテスト) にもかかわらず、時系列モデルのパフォーマンスが良好となっている。

こうしたことから、Hammond は時系

(第2表) 米国の通貨需要関数

Dependent Variable:  $\Delta \ln M1$   
 Estimation Period: January 1970 - December 1974

	$\Delta \ln Y$ (名目GNP)	$\Delta \ln RFF$ (フェデラル・ ファンド・ レート)
Period t	.1391 (2.9)	-.0033 (1.6)
t - 1	.1312 (4.1)	-.0041 (2.6)
t - 2	.1226 (6.7)	-.0047 (3.9)
t - 3	.1134 (17.2)	-.0050 (4.8)
t - 4	.1035 (35.4)	-.0052 (5.0)
t - 5	.0929 (9.1)	-.0052 (4.7)
t - 6	.0816 (5.3)	-.0050 (4.3)
t - 7	.0697 (3.8)	-.0047 (4.0)
t - 8	.0571 (3.0)	-.0041 (3.7)
t - 9	.0438 (2.5)	-.0034 (3.5)
t - 10	.0299 (2.2)	-.0024 (3.4)
t - 11	.0153 (1.9)	-.0013 (3.2)
	1.0	-.0485 (5.0)
Constant	-.0020 (5.6)	

DW = 1.65

SEE = .0028

( )内は t value

(出典) Hammond [10]

列モデルによる予測は「予測の相対的な正確さに加え、予測の手軽さ(easy to do)からみて、こうした手法は有用で手間のかからない予測手法として使用に値する」と結論づけている。<sup>(注19)</sup>

## (2) causality検証への応用

## イ. causality検証の理論

時系列分析はしばしばいわゆる2変数間の“causality”の検証に用いられる。

ここでいう“causality”とはGrangerによって示されたもので、ごく雑な言い方をすれば次のような意味である。すなわち、変数 x の将来値を予測する場合に、x の現在・過去値のみを用いて予測するよりも、他の変数 y の現在・過去値をも用いた方が予測の誤差が少なくなる(より良い予測が可能となる)場合に、y から x への“causality”が存在するという。<sup>(注20)</sup>

(注19) このほか、通常の計量経済分析と時系列分析とのパフォーマンスの比較については、Nelson [21], Ibrahim and Otsuki [22]等の研究がある。それによると、時系列モデルによる予測は、FMPモデル等マクロ計量モデルの外生変数に実績値を与えた post sample-ex post 予測に匹敵する予測力をもつことが明らかにされている。

(第3表) 通貨需要関数と時系列モデルのパフォーマンスの比較

予測誤差比較\*  
(MI, \$ billions)

Forecast Origin	Econometric			ARIMA		
	1 m.	3 m.	6 m.	1 m.	3 m.	6 m.
1974 December	-2.8	-4.0	-3.8	-2.0	-2.7	0.5
1975 January	-1.6	-2.2	-2.3	-0.3	-1.1	2.5
February	0.4	0	-1.7	0.5	0.5	2.8
March	-1.0	0.3	-4.0	-1.5	2.4	1.3
April	0.7	0	-5.4	2.1	3.8	1.5
May	0.7	-1.7	-6.3	1.2	1.6	0.1
June	-1.4	-4.3	-10.0	-0.8	-0.3	-3.3
July	-1.1	-5.4	-10.5	1.2	-1.0	-3.3
August	-1.8	-4.5	-10.2	-1.0	-1.6	-4.3
September	-2.5	-5.6	-9.0	-1.0	-2.5	-2.9
October	-0.1	-5.0	-4.9	1.3	-2.6	0.7
November	-3.0	-5.6	-5.2	-3.2	-3.6	-0.4
December	-1.9	-3.3	-4.3	0.5	0.1	1.6
1976 January	-0.7	0.2	-2.5	-0.2	1.7	1.4
February	-0.6	0.6	-1.9	-0.3	2.6	1.8
March	1.6	-0.9	-2.8	2.4	1.5	0.8
April	-0.3	-2.7	-2.4	-0.7	-0.5	0.3
May	-2.2	-2.5	-3.7	-0.7	0.6	-0.1
June	-0.2	-1.9	-1.4	1.5	-0.4	1.6
July	-0.1	0.3		-0.7	0.2	
August	-1.5	-1.2		-1.3	-0.1	
September	2.0	0.5		3.1	2.0	
October	-1.7			-3.0		
November	0.1			2.5		
ME	-0.8	-2.2	-4.9	0	0	0.1
RMSE	1.5	3.1	5.7	1.6	1.9	2.0

\* Actual - Predicted

(出典) Hammond [10]

(注20) これを若干正確に表現すると次のとおりである。すなわち、 $f_t(I_t)$  を  $t$  時点における全ての情報  $I_t$  を使った  $x_{t+1}$  の最良予測、その誤差を  $e_t(I_t) = x_{t+1} - f_t(I_t)$  とする。誤差の分散は  $\sigma_t^2(I_t) = \text{var}(e_t(I_t))$  で、 $I_t - y_t$  は時系列  $y_t$  以外の情報であるとする。そのとき、 $\sigma_t^2(I_t - y_t) > \sigma_t^2(I_t)$  が成立すれば、 $y_t$  から  $x_t$  への causality があると定義する [6]。

causalityを予測との関連で定義しているのは過去が現在あるいは将来の原因となる、という通念に基づくものである<sup>(注21)</sup>。たとえば、気象庁が台風情報を出してからしばらくすると台風がやってくることが多い。したがって、ただ空模様をみただけで台風襲来の有無を予測するよりも台風情報をもきいたうえで判断した方が誤りが少ない。この場合、Grangerの定義によれば、台風情報から台風襲来へのcausalityが存在する(台風情報が原因で台風襲来が結果)ことになる。これは、日常語にいう因果関係と同じではない。気象庁に命じて快晴の予報を出させても台風はやってくるからである。しかし、制御可能性は実験してみなければ容易にはわからない。実験が不可能な場合には各種データの間におけるGrangerの

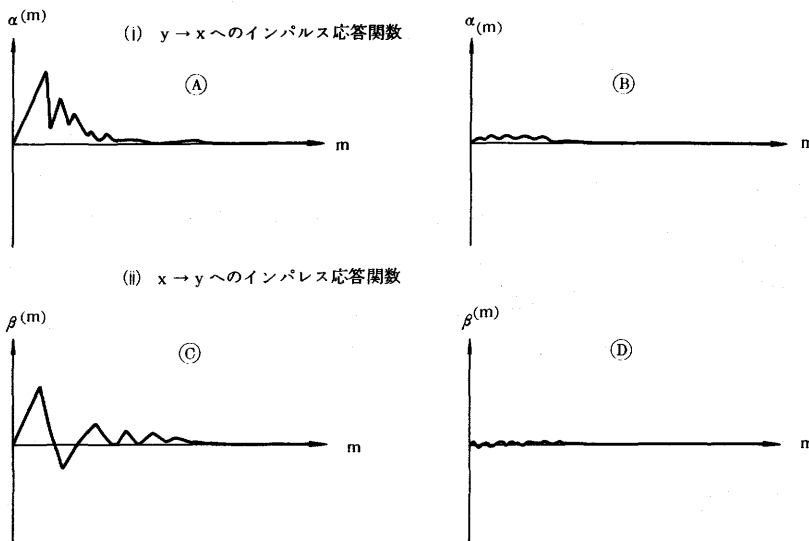
意味でのcausalityの検証を積み上げてゆく以外に“真のcausalityに接近する方法はないことが強調されている(4.1)イ参照)。

Grangerの意味でのcausalityを検証するためには先述の2変量時系列モデルを推定し、インパルス応答関数の形状<sup>(注22)</sup>(第13図)を調べてみればよい(第4表)。

なお、2変数間の同時的な関係については、2変量時系列モデルのホワイト・ノイズの相互相関関係の有無によって、同時的に変動しているかどうかは判断できるが、causalityの方向については判断することはできない。

2変量時系列モデルによるcausality検証方法は、変数間のcausalityの方向を確定できると同時に、causalityの程度も把握できるという特長がある。もっ

(第13図) causality判断のためインパルス応答関数の形状(第8図参照)



(注) ○(A)、(C)では、明確な影響が認められる。  
○(B)、(D)では、" が認められない。

(注21) Grangerの意味でのcausalityは日常語の意味でのcausality(因果関係)成立の必要条件であって十分条件ではない。日常語のcausalityには予測可能性の他に制御可能性の意味も含まれているからである。

(第4表) 2変量時系列モデルによる causality の判断基準

2変量の関係	ホワイト・ノイズ の相 関	インパルス応答 関数の形状
1. xとyは独立	無	①および②
2. 同時的 causalityのみ	有	①および②
3. 同時的でない、xからyへの一方方向の causality	無	③および④
4. 同時的であり、かつxからyへの一方方向の causality	有	③および④
5. 同時的でない、yからxへの一方方向の causality	無	⑤および⑥
6. 同時的であり、かつyからxへの一方方向の causality	有	⑤および⑥
7. 同時的でない、xとyはフィードバック*	無	⑤および⑦
8. 同時的であり、かつxとyはフィードバック*	有	⑤および⑦

\*フィードバックとは、時差を伴う相互依存関係である。

とも、こうした方法では④あるいは⑥のようにインパルス応答関数が全ての期間に亘って、完全に0になることは稀であり、その意味ではある程度の $y \rightarrow x$ の影響、あるいは $x \rightarrow y$ の影響があるようにみえるため、厳密に言えば、常にある程度の相互依存関係が存在することとなる。従って実際には $y \rightarrow x$ の効果と $x \rightarrow y$ の効果のどちらか一方が、比較的はっきりした効果をもっているのに対し、他の一方が0に近い場合に「unidirectional causality」であると判断する必要がある。後述の1変量時系列モデルによる causality 検証によって unidirectional

causalityがあると判断されるのも、このようなケースに相当する。

もっとも、ごく最近まで2変量時系列モデルの推定方法が確立していなかったため、まず2つの変数を各々1変量時系列モデルとみなしてホワイト・ノイズを算出し、2つのホワイト・ノイズ相互間の関係で causalityを判断する方法がとられてきた。こうした方法に基くものに Sims' test<sup>(注23)</sup>や Haugh's test [23]がある。ホワイト・ノイズ相互間の関係を Sims' testは回帰式により、Haugh's test は相互相関関数を用いて調べる。

(注22) もちろん、こうした方法は2変量が確率変数であることを前提としている。なお、インパルス応答関数の形状は、検証する変数の分散の相対的大きさの影響を受けるため、両変数の単位を調整してから検証する必要がある。より正確には[付]で述べる「パワー寄与率」をみるとよい。

(注23) Sims' testについては[24]参照。なお、Simsはホワイト・ノイズを得るためのARモデルをデータから直接計測せず、過去に経験的に良い結果を得たものを用いており、この点 ad hocであるとして批判されている。

Haughによるcausality検証の手順を述べると、次のとおり。

- ① 定常な時系列 $x, y$ について、個々に最適な時系列モデルを推定する。
- ② 推定した時系列モデルによって1期先予測を行い、実績値との残差の系列を作る( $x$ および $y$ の残差系列を $u, v$ とする)。
- ③  $u, v$ の間の相互相関係数 ( $\rho_{uv}(\ell)$ ; 第5表注③参照)を計算する。

④  $\rho_{uv}(\ell)$ についての有意性検定を行い、その結果からcausalityを第5表に従い判断する。なお、有意性検定のための統計量としては、前記(3.(1)ロ。(注18))のQ統計量<sup>(iE24)</sup>を用いる。

ロ. causality検証の具体例

時系列モデルをcausality検証に応用した例は数多くあるが、本稿ではPierce and Yangの「Monetary Aggregate

(第5表) 相互相関係数に基づくcausalityの判断基準

2変量の関係	相互相関係数の条件
1. $x$ と $y$ は独立.....	全ての $\ell$ について、 $\rho_{uv}(\ell) \cong 0$
2. 同時的causalityのみ.....	$\rho_{uv}(0) \cong 0$ でかつ、全ての $\ell \neq 0$ について $\rho_{uv}(\ell) = 0$
3. 同時的でなく、 $x$ から $y$ へ的一方方向のcausality.....	$\ell > 0$ について $\rho_{uv}(\ell) \cong 0$ であり、かつ $\ell < 0$ について $\rho_{uv}(\ell) = 0$
4. 同時的であり、かつ $x$ から $y$ へ的一方方向のcausality.....	$\ell \geq 0$ について $\rho_{uv}(\ell) \cong 0$ であり、かつ $\ell < 0$ について $\rho_{uv}(\ell) = 0$
5. 同時的でなく、 $y$ から $x$ へ的一方方向のcausality.....	$\ell < 0$ について $\rho_{uv}(\ell) \cong 0$ であり、かつ $\ell > 0$ について $\rho_{uv}(\ell) = 0$
6. 同時的であり、かつ $y$ から $x$ へ的一方方向のcausality.....	$\ell \leq 0$ について $\rho_{uv}(\ell) \cong 0$ であり、かつ $\ell > 0$ について $\rho_{uv}(\ell) = 0$
7. 同時的でなく、 $x$ と $y$ はフィードバック.....	$\ell > 0$ および $\ell < 0$ について $\rho_{uv}(\ell) \cong 0$
8. 同時的であり、かつ $x$ と $y$ はフィード・バック.....	全ての $\ell$ について $\rho_{uv}(\ell) \cong 0$

- (注) ①  $u$ ;  $x$ のARMAモデルからの残差  
 $v$ ;  $y$ の " "
- ②  $\ell$ ;  $u, v$ との相互相関係数のラグ期間
- ③  $\rho_{uv}(\ell)$ ;  $u$ と $v$ との間の $\ell$ ラグ期の相互相関係数(つまり $u_t$ と $v_{t+\ell}$ との相互相関係数)  
 すなわち、 $\ell > 0$ の場合、 $u$ の現在値と $v$ の将来値の相互相関係数  
 $\ell < 0$ の "  $u$ の " と $v$ の過去値 " "  
 $\ell = 0$ の "  $u$ と $v$ との同時期の " "
- ④ この表は、Pierce and Haugh [25]により作成

(注24) この場合のQ統計量は、自己相関係数についてではなく、相互相関係数について計算される。

Targeting in the 1970's; A Time Series Analysis」〔9〕と題する論文を紹介する。

この論文は、Haugh's test を使って米国FRBが70年代入り後、それ以前に比較してマネーサプライを金融政策の中間目標（intermediate target）として、公式表明どおり、より重視するようになったかどうかを検証している。つまり、FRBが金融政策の中間目標としてマネーサプライを重視しているか、金利を重視しているかを実際の統計データを用いてマネーサプライとフェデラル・ファンド・レートのcausalityを検証することによって客観的に調べてみたものである。すなわち、仮にマネーサプライをターゲットとして重視しておれば、マネーサプライが変化したときには適切なマネーサプライの軌道に戻すために、FRBはフェデラル・ファンド・レートをマネーサプライと同一方向に誘導する（例えば、マネーサプライの伸びが過大になると、フェデラル・ファンド・レートを引上げる）とみられるため、マネーサプライからフェデラル・ファンド・レートへの一方方向のcausalityが検証できるはずである（ただし、FRBがマネーサプライの変化と同時に反応し、かつそれが瞬間的に完了する場合を除く）。

こうした仮説のもとに、Haugh's test の手続きに従って、まず原データ（61～67年および70～76年の月次データ）を定常時系列とするために、原データの対数をとったあと、前月比増減に加工する。次に、双方の時系列のARIMAモデ

ルを決定する。この推定した時系列モデルによって1期先予測を行い、実績値との誤差としてホワイト・ノイズの系列を作ったあと、相互相関係数を計算する。

第6表は  $M_1$  およびフェデラル・ファンド・レートのホワイト・ノイズの間の相互相関係数と、 $M_2$  およびフェデラル・ファンド・レートのホワイト・ノイズの間の相互相関係数とを示したものである。ラグ期間のプラス側はフェデラル・ファンド・レートからマネーサプライへのcausalityを示し、マイナス側は逆にマネーサプライからフェデラル・ファンド・レートへのcausalityを示す。Q統計量は全期間に亘る相互相関係数の有意性をみるためのものである。<sup>(注25)</sup>

まず、全体のリードおよびラグ期間を通したマネーサプライとフェデラル・ファンド・レートとの関係に関するQ統計量をみると、 $M_1$ 、 $M_2$ ともに60年代においてはフェデラル・ファンド・レートと有意な関係はみられず、逆に70年代には明確な関係がみられる。これは、causalityの方向はともかく、小なくとも60年代にはマネーサプライとフェデラル・ファンド・レートとの間にははっきりした関係はなく、70年代に入ると両者の関係がでてきていることがいえることになる。次に、個々のラグ（リード）期間の相互相関係数をみると、70年代においては1か月のラグ期間において、非常に高い正の相関（第6表\*印）を示しており、逆にリード期間には高い相関を示す係数が見当たらないことから、マネーサプライか

〔注25〕 なお、この論文では、リードとラグのそれぞれの期間についてグループとしての有意性はみ  
ておらず、個々のリード（あるいはラグ）期間の相互相関係数の有意性をみる参考として、計  
測した相互相関係数の分散が0.12であることを記しているだけである。

らフェデラル・ファンド・レートへの一方方向の causality が検証できたとされている。これは、ある月のマネーサプライが増えると、これを抑えるために FRB がフェデラル・ファンド・レートを引

上げるように動いていると解釈できるとされている。一方、60年代においては、こうした有意な関係はいずれの方向にもみあたらない。結局、こうした結果からみて、FRBは70年代に入ってから60

(第6表) マネーサプライ (M<sub>1</sub>、M<sub>2</sub>) とフェデラル・ファンド・レート (RFF) の相互相関係数

LAG	RFF/M <sub>1</sub>		RFF/M <sub>2</sub>	
	1961-67	1970-76	1961-67	1970-76
-12	-.04	.06	-.07	.09
-11	-.01	.02	.00	.01
-10	.10	-.01	.14	.01
-9	.14	.17	.11	.06
-8	.08	-.02	.03	-.12
-7	.01	.17	-.05	.10
-6	.21	-.01	.24	.07
-5	-.14	-.07	-.11	.02
-4	-.04	.01	.03	.05
-3	-.03	.06	.05	.07
-2	-.25	-.02	-.30	.12
-1	-.05	.58*	-.20	.46*
0	-.04	.04	-.03	-.32
1	-.20	-.15	-.17	-.29
2	-.02	-.12	-.18	-.29
3	-.14	-.16	-.01	-.13
4	-.10	-.11	-.03	.06
5	-.13	-.07	-.12	-.08
6	.01	-.29	.11	-.13
7	-.06	.05	-.02	.02
8	.12	.02	-.02	-.13
9	-.05	-.02	-.03	-.04
10	-.05	.00	-.02	-.06
11	.10	-.19	.06	-.16
12	.09	-.18	.09	-.11

$$Q \text{ 統計量} = n \sum_{-12}^{12} r_i^2 \quad (a) \quad 23.6^{a/} \quad 47.8^{b/} \quad 27.5^{a/} \quad 45.6^{b/}$$

a/ insignificant at 25% level

b/ significant at 1% level

(出典) Pierce and Yang [9]



年代とは違ってマネーサプライを金融政策の目標として重視してフェデラル・ファンド・レートを操作している、との仮説が検証できたと結論づけられている。

#### 4. 計量経済分析との関係

本章では、時系列分析の計量経済分析に対する implication を(1)で述べたあと、(2)で両者の関係の現状および今後の方向について触れる。

##### (1) 時系列分析の計量経済分析に対する implication

##### イ. 計量経済分析における「実証可能性」と変数の「外生性」

(計量経済分析における「実証可能性」の意味)

計量経済分析にせよ時系列分析にせよ、それが実証分析として意味を持つためには、用いられるモデルが“identify”可能なものでなければならないとされる。

identificationの問題は概念的には一応2段階に分かれる。<sup>(注26)</sup>第1は、適切なモデルの型(含まれる変数や式の形)を選ぶことにかかわる(model identification)。第2は、モデルの型が与えられた場合に、そこに含まれるパラメーター(structure)を一義的に決めることにかかわる(structure identification) [26][27]。

計量経済分析においては、まず経済理論や常識ないしは勘等によってa prioriに(観測されたデータとは独立に)モデルの型が決められ、そのモデルをgivenとして structure identification (計

量経済学でいう“識別”)の可能性が吟味される。そして structure identificationの可能性は与えられたモデルにおける外生変数の数によって決まるとされる[28]。

このことはしばしば次のような需要・供給曲線に関する具体例によって説明される。すなわち、まず経済理論から下記(1)、(2)式で表わされるモデルが a prioriに与えられたとする(model identification)。

$$(1) Q_a = f(P_a, B_a) \cdots \cdots \text{需要曲線}$$

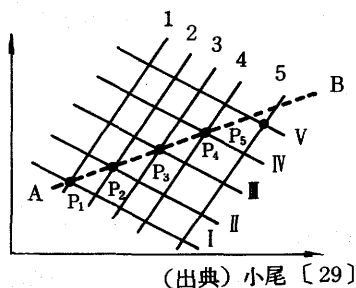
$$(2) Q_b = f(P_b, B_b) \cdots \cdots \text{供給曲線}$$

$Q_a$ ; 需要量
$Q_b$ ; 供給量
$P_a$ ; 需要価格
$P_b$ ; 供給価格
$B_a$ ; 価格以外の需要に影響する要因
$B_b$ ; 価格以外の供給に影響する要因

このとき、structureの identificationについては次のように考えられる。すなわち、第14図において、ある  $B_a$  が与えられたときの需要曲線を I とすると、 $B_a$  が変化すると需要曲線は II、III、IV と変化する。同様に  $B_b$  の変化に応じ供給曲線も 1、2、3、4 と変化すると、現実に観測される  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 、 $P_4$  は需要曲線でも供給曲線でもなくこのままでは「構造」を識別することは不可能である。仮に、この交点を結んだ直線 B を引いたとしても、第5番の交点  $P_5$  がこの線上にある保証はない。

(注26) もっとも、AIC 基準の考え方においては両者は同時的に決定される(2.2)イ、および 4.(1)ロ、参照)。

(第14図) 識別不能の例



(出典) 小尾 [29]

次に、前記の需要・供給曲線を再定式化して、一方の係給曲線にのみ外生変数  $R$  を加える。一方、需要曲線は内生変数である価格のみによって決定されるものとする。

$$(1) Q = a_0 + a_1 P$$

$$(2) Q = b_0 + b_1 P + b_2 R$$

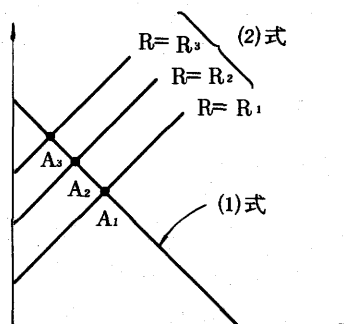
$$\left( \begin{array}{l} P, Q; \text{価格および量(内生変数)} \\ R \quad ; \text{変動する外生変数} \end{array} \right)$$

この場合、第15図のように(1)式はシフトせず、(2)式の  $R$  が  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$  と変化すれば、(2)式はシフトするため、交点は常に(1)式のうえにあり、(1)式だけは識別可能となる((2)式は識別不能であり、これを識別可能にするためにはもう1個の外生変数を導入する必要がある)。

(変数の「外生性」と causality)

しかしながら、外生変数を経済理論や常識から a priori に決め、これをモデルに必要な数だけ組み込むことによって実際に structure が identify できると考えてよいであろうか。たとえば前述の第1の例で、 $R$  を政府の決める変数すなわち政策変数としよう。計量経済分析においては、 $R$  は当然の如く外生変数とし

(第15図) 識別可能の例(2式の場合)



(出典) 小尾 [29]

て扱われてきた。しかし、もともと政策当局は経済動向すなわち内生変数の動向をみながら、何らかの判断基準に基いて政策変数を動かすのが通常である。従って政策変数は内生変数と無関係に変わるものであるとは必ずしも云えないわけである。前述の例でいえば  $R$  は  $P$  や  $Q$  の変化に相当程度対応して変更されている可能性が強いのである。そうだとすると(1)式を計測することは一般に不可能となる(第14図と同様の状況が起る)。いいかえれば、 $R$  は従来の計量経済分析では外生変数とされてきたが、実は structure identification に必要な性格を備えていない(時系列分析を重視する学者が“econometric exogeneity” [30] といっているのはこうした a priori な外生性のことである<sup>(注27)</sup>)。政策当局が直接コントロールしうる変数であってもそれが必ずしも実証分析において外生変数になりうるとは限らない<sup>(注28)</sup> structure を identify するのに必要な外生変数は、誰によ

(注27) 上記の問題点は計量経済分析の方法論的根拠である「計量経済学の理論」においても以前から指摘はされてきたことである [29]。その意味ではむしろ現実に行われている実証分析が「計量経済学の理論」に忠実ではなかったといった方が正確であろう。

いずれにせよ、本稿でいう「計量経済分析」とは、実際に行われている実証分析、たとえば

てどのような手段で動かされているかといったことによって決めうるものではなく、当該変数が内生変数に影響を与えるが内生変数からは影響を受けないという統計的性質を持っているか否かによって決められるべきなのである（これを無視してモデルを作った場合には、例えばそこから推測される政策効果は、実際に政策が行われた場合の効果と全く異なる惧れがある）。

時系列分析は計量経済分析のようにモデルが常に a priori に与えられるとの前提をとらない。むしろ structure の identification の前提とされるモデルの妥当性についてできるだけチェックして見るべきだと考える。たしかに実験ができない経済分析において「真の」モデルをデータから見分けることは困難に違いないが、だからといって特定のモデルを a priori に与えるといった極端な方法をとるべきではなく、たとえば 3.(2) で述べた Granger の意味での causality の検証によって上記の外生性のチェックを行い、

その結果と矛盾しないモデルはどのようなものかを考えるべきだと主張する。<sup>(注29)</sup>

すなわち、2つの時系列  $x(t)$ 、 $y(t)$  の間の線形な関係は前述のように一般的には 2 変量 ARMA モデルによって次のように書ける。

$$\sum_{i=0}^p a_i x_{t-i} + \sum_{i=0}^q b_i y_{t-i} = \sum_{i=0}^{\alpha} c_i u_{t-i} + \sum_{i=0}^{\beta} d_i v_{t-i}$$

$$\sum_{i=0}^r e_i x_{t-i} + \sum_{i=0}^s f_i y_{t-i} = \sum_{i=0}^{\gamma} g_i u_{t-i} + \sum_{i=0}^{\delta} h_i v_{t-i}$$

いまかりに  $d_i$   $e_i$   $g_i$  が全てゼロであれば Granger の意味で  $y$  から  $x$  への一方方向の causality が存在する(4.(2)参照)。一方、このとき上式は次のように書ける。

$$\sum_{i=0}^p a_i x_{t-i} + \sum_{i=0}^q b_i y_{t-i} = \sum_{i=0}^{\alpha} c_i u_{t-i}$$

$$\sum_{i=0}^r f_i y_{t-i} = \sum_{i=0}^{\delta} h_i v_{t-i}$$

上式から明らかなように、 $y$  は自分自身

大型計量モデル分析を主として指しているのであって、純粹な「計量経済学の理論」を指しているのではない。

(注28) このことは、政策主体が政策変数を裁量的に操作できないとか、あるいはすべきでないといったことを主張するものではない。政策主体は、過去の統計データに基づく実証分析によってはその効果を計りえないような政策も行いうるし、また行うべきであるかもしれない。問題は全ての政策に対して実証的裏付けを求めようとしたら、ある政策を実証的根拠がないからといって批判したりすることにある。

(注29) 例えば、Lucas and Sargent [32] は次のように述べている。

"all existing large models adopt an a priori classification of variables into the categories of strictly endogenous variables, the  $y_t$ 's, and strictly exogenous variables, the  $x_t$ 's. Increasingly, it is being recognized that the classification of a variable as "exogenous" on the basis of the observation that it could be set without reference to the current and past values of other variables has nothing to do with the econometrically relevant question of how this variable has in fact been related to others over a given historical period. Moreover, in light of recent developments in time series econometrics, we know that this arbitrary classifica-

の過去によって決まり、 $x$  は  $y$  からの影響を受ける。このとき、 $y$  は外生変数、 $x$  は内生変数と推測される〔31〕。

ロ。「ケチの原理」、AIC基準とモデルの規模

イ.では計量経済分析が標榜する「構造」の識別可能性の条件は通常考えられているような安易なものではないことを述べた。こういふと、その対策としては通常外生変数とされている変数、たとえば政策主体の行動までも内生化した大型モデルを作るといったことが考えられるかもしれない。しかし、2.(2)イ.で述べた「ケチの原理」ないしAIC基準の考え方はここでも当てはまる。すなわち、経済分析のように実験ができず、したがって限られたデータ数（データ期間）をもとに

実証分析を行わざるを得ない場合には、複雑な「真の構造」といったものを正確に知ることは原理的に不可能なのである。単純なモデルでは複雑な「真の構造」を描く（「実証」する）ことはできないが、そうかといってあまり複雑なモデルを実証しようとする、係数推定値のパラッキが過大となって推定結果が全体として無意味なものになってしまう。<sup>(注32)</sup>こうした認識は、そもそもかぎられたデータから「真の構造」を把握しようと努力してきた従来の計量分析の前提やあり方自体に無理があるのではないか、という論議を引起すに至っている。

ハ. deterministicな理論モデルへの確率過程の混入

イ.ロ.では計量経済分析、とくに大型計

---

tion procedure is not necessary. Christopher Sims [33] has shown that in a time series context the hypothesis of econometric exogeneity can be tested. That is, Sims showed that the hypothesis that  $x_t$  is strictly econometrically exogenous necessarily implies certain restrictions that can be tested given time series on the  $y$ 's and  $x$ 's. Tests along the lines of Sims's ought to be used as a matter of course in checking out categorizations into exogenous and endogenous sets of variables. To date they have not been. Prominent builders of large econometric models have even denied the usefulness of such tests."

なお、Lucas and Sargent も述べているとおり、大型モデルを扱う計量経済学者はGrangerの意味での causality の検証によって計量モデルにおける外生性のテストを行うことは有益でないとしている。もっともこれまでのところ、他の外生性のテスト方法も計量経済学者から提出されていない。

(注30) 3.(2)の(注21)で述べたようにGrangerの意味での causality は、日常語の意味での causality の必要条件であって十分条件ではない。したがって、causality の検証によって一方方向の causality が検証されたからといってただちに“真の”外生変数が判明するわけではない。しかし、“真の”外生変数は(それが確率変数であるかぎり)少なくとも一方方向の causality の原因側の変数となっていなければならない。

(注31) なお、1変数の時系列モデルにおいては、変数選択の問題が生じえず、model identificationの問題としては、次数選択の問題が残る。この点については2.(2)イ.を参照。

(注32) 最近では、計量経済分析においてもAIC基準の考え方が利用されており、Almon lagの次数決定の規程[34]やモデルの適正規模を決定する手段[35]として研究されている。こうした研究から、マクロ計量モデルの規模について、佐和[36]は「規模の大きいマクロモデルでは、標本のサイズが極度に(現実にはありえないくらい)大きくないかぎり、構造係数値の推定は、事実上、不可能になる」と結論づけている。

量モデルによる「実証」の可能性に対する疑問について述べた。以下ではそうした「実証可能性」以前の問題として、そもそも計量モデルが実証したのは、前提となっている理論仮説とは関係のないもので、その結果何を実証しようとしたのか判らなくなる場合もあるという点について触れておく。

本稿の冒頭において計量経済モデルは確率モデルであると述べた。通常の場合、計量経済モデルはまず deterministic な理論モデルによって経済変動を説明し、その変動経路からの純粋に random な乖離 (white noise) として「攪乱項 (error term)」を仮定する。たとえば下記のような単純な乗数-加速度モデルを例にとってみる。

$$C = a_0 + a_1 Y + \varepsilon_c$$

$$I = b_0 + b_1 (Y - Y_{-1}) + b_2 (Y_{-1} - Y_{-2}) + \varepsilon_I$$

$$Y \equiv C + I$$

(ただし、C; 消費、Y; 所得、I; 投資)

まず上式から  $\varepsilon_c, \varepsilon_I$  を除いた形で経済変動のメカニズムに関する理論仮説が与えられ、実証の段階で理論仮説の内容とは独立に、 $\varepsilon_c, \varepsilon_I$  がつけ加えられる。

しかしながら、こうしたプロセスは自己矛盾を含んでいる。何故なら上記モデルから C と I を消去して整理すると、

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{-1} + \alpha_2 Y_{-2} + \varepsilon_c + \varepsilon_I$$

となるが、これは先述の AR モデルと同じ形をしており、確率過程となっている

(AR モデルと異なり必ずしも定常ではないが)。 $Y_{-1}, Y_{-2}$  といった数値が過去における  $\varepsilon$  を含んでいる以上、Y は単純に  $\varepsilon_c$  や  $\varepsilon_I$  のみによって攪乱されるだけでなく、過去において  $Y_{-1}, Y_{-2}$  を決定する際現われた  $\varepsilon$  の累積としての攪乱をも含んでいるからである。従って、 $\varepsilon_c, \varepsilon_I$  を除いた理論仮説から得られる定差方程式 (上式から  $\varepsilon_c + \varepsilon_I$  を除いたもの) が描く波動とこの過去からの  $\varepsilon$  の累積をもった確率過程が描く波動とはかなり異なることがありうるのである。計量経済分析では前者を単に "simulation" と呼び、後者を "stochastic simulation" ([38], [39]) と呼んでいる。出発点となる deterministic な理論仮説に立戻って行う "simulation" によって現実を忠実に描けるという考え方もあるが、このような "simulation" は実は計測されたものとは別のモデル ( $\varepsilon_c, \varepsilon_I$  が無いという意味で「架空」のモデル) を用いていることになる。このため、計測されたモデルに忠実に現実を描くには "stochastic simulation" を行うべきであるという考え方が出てきている。しかし、"stochastic simulation" は当初の理論仮説になかった確率過程を含むものであって、「理論モデル」との斉合性を欠くという新たな問題をもっている。

何故このようなことが生じるかといえば、当初 deterministic な理論モデルによって経済変動を説明し、実証の段階になってから経済理論には前提とされて

(注33) たとえば、従来計量経済分析においては誘導型 (reduced form) を計測することは便宜的手段と考えられることが多かったが、最近ではそうした a priori な価値判断によるのではなく、どの形で計測するのが最も計測結果の利用目的にかなった情報を提供してくれるかについて客観的、理論的により厳密に検討してみるべきだとされている [37]。

いなかった攪乱項をつけ加えるといった論理構成に問題があったからである。その結果、何を「実証」しようとしたのか、はつきりしなくなってしまったのである。

## (2) 現状および今後の方向 — 結語

以上、時系列分析の計量経済分析に対する原理的な批判に対しては、計量経済分析の側においてその発想法、方法論等について再検討すべき点も少なくないといえよう。しかし、時系列分析による実証分析がいますぐ完全に計量経済分析にとって代われるわけではない。経済理論と統計理論に基く実証分析とをより整合的に結び付けるにはどのような方法が適切かという点は依然として大きな問題であるといえよう。<sup>(注34)</sup>

この点の研究が進められているが、それは大別して2つに分けられる。その第1は、確率ないし確率過程を explicit に織り込んだ経済理論モデルの構築である。<sup>(注35)</sup>これはいわば経済理論サイドからのアプローチといえる。

第2は、時系列分析の手法を拡張してゆくことである。非定常過程の分析、deterministicな要因の扱い、a priori information (経済理論もその1つ)の客観的な取扱い、等々多方面からの試みが行われている。これはいわば実証分析の手法サイドからのアプローチ、ないし

は時系列分析と計量経済分析との手法の上での統合の試みといえる。

現状において実証的な判断を行う場合には、いずれにせよただ1つの実証方法(経済理論)のみに依存するのは安易かつ危険であって、上記のような研究の成果を積極的に取り入れて各種の方法に基づいて実証分析を行い、その結果を虚心に比較してみる必要があるであろう。

ちなみに、計量経済分析と時系列分析との関係について、Zellnerは前記ミネアポリス連銀主催の Conference において〔11-6〕、誰もが認めうる共通認識として以下の点を挙げている。

- ① 200本もの方程式から成るモデルを扱う計量経済分析と少数の変量(a few series)のモデルを扱う時系列分析とのギャップは大きい。
- ② 時系列分析は計量経済分析の改善に役立つ。
- ③ 経済理論は説明変数の選択にとって必要である。
- ④ 計量経済分析は、時系列データの分析に際して幾分誤りを犯してきた。
- ⑤ 伝統的な計量経済分析を利用する分析者と、時系列分析を利用する分析者とは、本来敵対関係にあるべき筋合いにはない。
- ⑥ 今後の実証分析は伝統的な計量経済

(注34) このことは計量モデルを作ってきたグループと時系列分析を研究しているグループとの間の論争に表われている〔11〕。

計量モデルグループは時系列分析は経済理論を無視し、機械的な統計的処理にのみ依存していると主張する。これに対し、時系列グループは計量モデル分析はその中に含まれる統計的問題の処理すらきわめて不合理であって、標榜する「経済理論に基く分析」などとてもおぼつかない、と反論する。

(注35) 例えば、近年の“rational expectation”仮説においては、確率過程論を explicit に踏まえて理論モデルが作られている。これを実証した初期の文献としてはたとえば R. Shiller [40]。

分析と、時系列分析の長所を兼合わせたものであるべきである。

(54年1月)  
(54年8月加筆修正)

以上

[付] スペクトル解析 — 周波数領域からの分析 —

以下では時系列を周波数の観点から分析する周波数領域分析(スペクトル解析)について簡単に説明することとする。スペクトル解析は、もともと経済現象が周期的変動を繰り返す、どの周波数の波長がより重要であるかの分析が必要な場合や経済変数間の関係が周波数によって異なり、それを分析することの必要な場合等に利用されてきた手法である。ただ、スペクトル解析は、背後に特定のモデルを想定せずになされる場合(これは「non-parametric spectral analysis」と呼ばれる)には、スペクトル解析の結果の持つ意味の解釈を誤る可能性がある。このため、最近ではARMAモデル等時間領域分析のモ

デルを推定し、それをスペクトルに直してみる形のスペクトル解析(これは「parametric spectral analysis」と呼ばれる)の方が、優れているとの見方が大勢となっている。

なお、時間領域分析とスペクトル解析との対応関係は第1表のとおり。

(1) スペクトル分析の理論

イ、1変量のスペクトル(パワー・スペクトル)

スペクトルを直観的に説明すると次のとおり。第1図(a)のように白色光をプリズムを通してみると、白色光は紫から赤までの色に分かれてみえる。これは白色光に含まれている各種の波長の異なる光の束がプリズムを通ることによって、波長の違いからくる屈折率の差のために、

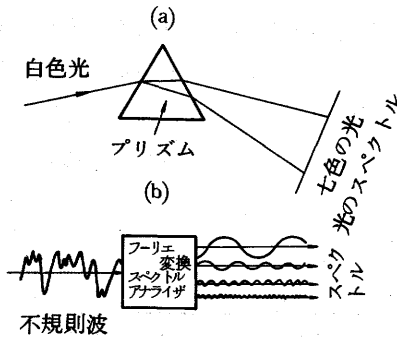
(第1表) 時系列分析の相互関係

	時間領域分析	周波数領域分析
一変量分析	1変量時系列モデル	パワー・スペクトル
	<ul style="list-style-type: none"> <li>○予 測</li> <li>○ causality検証</li> <li>○パワー・スペクトル推計</li> </ul>	○周期性の分析
多変量(二変量)分析	2変量時系列モデル	クロス・スペクトル
	<ul style="list-style-type: none"> <li>○予 測</li> <li>○ causality検証</li> <li>○クロス・スペクトル推計</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>○コヒーレンス</li> <li>○フェイズ</li> <li>○ゲイン</li> </ul>

波長の長短に応じて順序よく並べられる結果、光のスペクトルをつくるからである。このように、一般の不規則変動を示す波は、白色光に相当し、各種の波長の異なる波の合成された波の束とみることができる(第1図(b))。

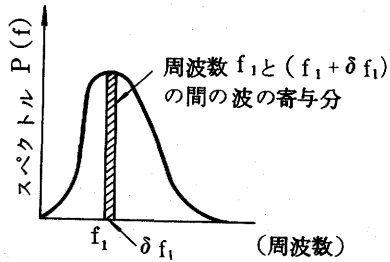
1変量のスペクトルは「パワー・スペクトル(power spectrum)」と呼ばれる。パワー・スペクトルは第2図のように、周波数  $f_1$  と  $\delta f_1$  との間の波の成分の全体の波に対する寄与分で斜線で示される部分に相当する。したがって、パワー・スペクトルをみることによって、ある時系列がどのような長さの波長(周波数)の成分を最も多く含んでいるかを把

(第1図) スペクトルの直観的説明



(出典) 日野 [3]

(第2図) パワー・スペクトル



(出典) 日野 [3]

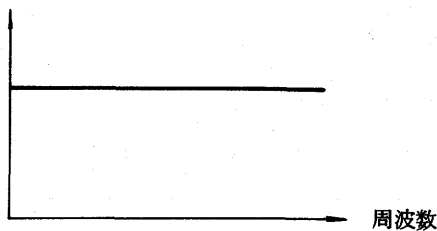
えることができる。<sup>(注1)</sup>

パワースペクトルは、前述(1.(1)イ.参照)の自己共分散関数から導かれる。すなわち、本文で述べたように、自己共分散関数は原系列とそれを  $t$  期ずらした系列との相関関係をみるものであるから、ある期間  $t$  だけずらした波形がもとの波形と似ていれば(つまり、その  $t$  期に相当する波長での周期性が高ければ)、自己共分散は高くなり、逆に、波形が似ていなければ(つまり、その  $t$  期の波長での周期性が低ければ)、自己共分散は低くなる。したがって、自己共分散関数は様々な波長の波の組み合わせによって表現することができる。これは、数学的には次のようなフーリエ変換式として示される。

(注1) なお、パワー・スペクトルが下図のように横軸に平行な時系列は、全ての周期の波を含み特定の周波数において強い周期性をもたないことを示しており、したがってランダムな動きとなっている。これは、白色光に相当することから、こうした系列は「White noise」と呼ばれる。

<白色光のパワー・スペクトル>

パワー・スペクトル





$$R_{xx}(\ell) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp(i2\pi g\ell) P_{xx}(g) dg$$

$$\left( \begin{array}{l} R_{xx}(\ell) ; \text{時系列 } x(t) \text{ の自己共分散関数} \\ \ell ; \text{自己共分散のラグ期間} \\ g ; \text{周波数} \\ P_{xx}(g) ; \text{時系列 } x(t) \text{ のパワー・スペクトル} \end{array} \right)$$

このパワー・スペクトルと自己共分散の関係式を使って、ARMAモデルからパワー・スペクトルが推定される（付(2)参照）。

ロ、2変量のスペクトル（クロス・スペクトル）

1変量の場合のパワー・スペクトルに対応して、2変量の場合にはクロス・スペクトルが考えられる。すなわち、相互共分散関数から1変量の場合のパワー・スペクトルに対する概念として「クロス・スペクトル (cross spectrum)」が、相互共分散関数のフーリエ変換として、次のように定義される。

$$p_{yx}(f) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi f\ell) R_{yx}(\ell)$$

$$\left( \begin{array}{l} p_{yx} ; \text{クロス・スペクトル} \\ R_{yx} ; \text{相互共分散関数} \\ \ell ; \text{相互共分散のラグ期間} \end{array} \right)$$

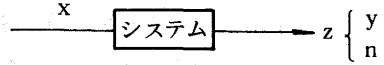
しかし、クロス・スペクトルは一般に複素関数であり、2変量の関係をみるのには不便であるため、クロス・スペクトルを以下の各種の統計量に変換してみることが多い。

（コヒーレンスとパワー寄与率）

「コヒーレンス (coherence)」とは、

周波数ごとに2変量の変動がどの程度の相関をもっているかをみたものである。

まず、次の図のように x の入力があって、z の出力があるというシステムを考える。



出力 z は、x と線形に対応する部分 y（つまり、x と同一の変動をする部分）と、x とは全く関係なく変動する部分 n との加えたものとみることができる。

$$z(t) = y(t) + n(t)$$

この関係は、それぞれのパワー・スペクトルについても成立する。すなわち、

$$p_{zz}(f) = p_{yy}(f) + p_{nn}(f)$$

$$\left( \begin{array}{l} p_{zz}(f) ; \text{z のパワー・スペクトル} \\ f ; \text{周波数} \end{array} \right)$$

そこで、z の中で入力 x の変動と同一の変動をする部分 y の占める割合を各周波数ごとに考えると、コヒーレンス  $r^2(f)$  は次のように定義される。

$$r^2(f) = \frac{p_{yy}(f)}{p_{zz}(f)}$$

これを、入力 x と出力 z との関係に直すと次のようになる。

$$r^2(f) = \frac{|p_{zx}(f)|^2}{p_{xx}(f) \cdot p_{zz}(f)}$$

$$\left( \begin{array}{l} p_{zx} ; \text{z と x のクロス・スペクトル} \\ p_{xx} ; \text{x のパワー・スペクトル} \\ p_{zz} ; \text{y の " " " } \end{array} \right)$$

なお、 $r^2(f)$  は、通常回帰分析の  $R^2$

と同様に  $0 \leq r^2 \leq 1$  となっている。

もつとも、2つの変数間にフィード・バックがある場合にはコヒーレンスは正確に両変数の関係を反映しないことが明らかにされている〔39〕。その場合には、2変量時系列モデルから導出されるインパルス応答関数および、周波数領域分析でのそれに対応する統計量である「パワー寄与率 (relative power contribution)」が利用される。

パワー寄与率とは、例えば  $x(t)$  の変動 (パワー・スペクトルでみた変動) の中で、 $y(t)$  の変動に起因する割合を周波数別に示すものである (第3図参照)。すなわち、時系列  $x(t)$ ,  $y(t)$  がそれぞれ固有の雑音源  $u(t)$ ,  $v(t)$  をもつようなシステムを考えると、 $x(t)$ ,  $y(t)$  は、 $u(t)$ ,  $v(t)$  からの影響の和として表わされる。この関係を用いて、 $x(t)$ ,  $y(t)$  のパワー・スペクトルの中で  $u(t)$ ,  $v(t)$  に起因する部分の割合を周波数別にみたものがパワー寄与率である<sup>(注2)</sup>。従って、インパルス応答関数とは、一定の関係をもっており、仮にパワー寄与率で  $x \rightarrow y$  の影響が強くなる時は、インパルス応答関数でも  $x \rightarrow y$  の影響が強くなる。関係にある。

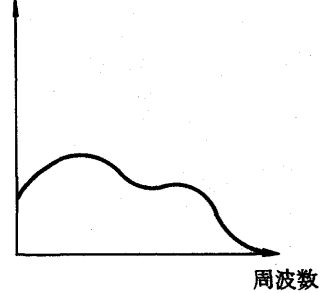
(ゲインとフェイズ)

2変量時系列の周波数別の関係としてコヒーレンス、パワー寄与率のほか「ゲイン (gain)」と「フェイズ (phase = 位相)」がある。

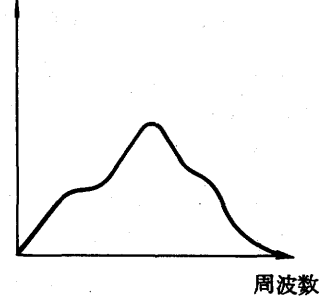
$y$  に対する  $x$  のゲインは、回帰分析における回帰係数に相当し、 $x$  が  $y$  に対して何倍に拡大 (あるいは縮小) されてい

(第3図) パワー寄与率の例

(i)  $x \rightarrow y$  へのパワー寄与率  
パワー寄与率



(ii)  $y \rightarrow x$  へのパワー寄与率  
パワー寄与率



るかを周波数別にみたもので、次のように定義される。

$$G(f) = \frac{|p_{xy}(f)|}{p_{xx}(f)}$$

$$\left[ \begin{array}{c} p_{xy}(f); x, y \text{ のクロス・スペクトル} \\ p_{xx}(f); x \text{ のパワー・スペクトル} \end{array} \right]$$

なお、「周波数応答関数 (frequency response function)」とは、ゲインの分子について、絶対値をはずしたものとなっている。

フェイズは、2つの時系列間の周波数ごとのタイム・ラグ (あるいはタイム・リード) に相当し、次のような時系列の

(注2) 厳密な定義については、赤池、中川〔1〕をみよ。

各周波数ごとの位相で定義される。

$$p_h(f) = \tan^{-1} \left( \frac{Q_{xy}(f)}{K_{xy}(f)} \right)$$

ここで、クロス・スペクトルは、一般に複素関数で、その実数部を  $K_{xy}(f)$  とし、虚数部を  $Q_{xy}(f)$  としたものの。

(2) スペクトル推定の理論

実際のスペクトルは、本文で述べた時系列モデルの推定結果を利用して推定される。従来、スペクトルは、背後にパラメトリックなモデルを推定せず自己共分散関数を直接にフーリエ変換したあと、それを平滑化して推定する方法(ノン・パラメトリック・スペクトル分析)がとられてきたが、最近では、時系列モデルの推定結果を使ってスペクトル推定を行うパラメトリック・スペクトル推定が格段に優れたスペクトル推定法であることが明らかになっている[42]。

これは、(1)で述べたように自己共分散とパワー・スペクトルが数学的には同一であることを利用するものである。すなわち、時系列モデルが推定され、時系列モデルのホワイト・ノイズの系列がもとの時系列と無相関となる場合、その残差の分散と推定パラメーターを使って、パワー・スペクトルが次のように計算される。

今、ある時系列が次のようなM次のARモデル(ARMAモデルの場合も基本的には、同様の方法)で表わされたとする。

$$x(t) = \sum_{m=1}^M a(m)x(t-m) + \epsilon(t) \dots (1)$$

[  $\epsilon(t)$ : ランダム項 ]

ランダム項の自己共分散は、次の式から

計算される。

$$R_{\epsilon\epsilon}(\ell) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M a(m)a(n) R_{xx}(\ell - m + n) \dots (2)$$

ただし、  
 $a(0) = -1$  とおく  
 $\ell$ ; 自己共分散のラグ期間

ここで、自己共分散とパワー・スペクトルの関係式は次のとおり(Wiener-Khintchinの公式)。

$$R_{xx}(\ell) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp(i2\pi g\ell) q_{xx}(g) dg \dots (3)$$

$g$ ; 周波数  
 $q_{xx}$ ;  $x(t)$  のパワー・スペクトル  
 $R_{xx}$ ;  $x(t)$  の自己共分散

(3)式を(2)式に代入するとランダム項の自己共分散は次のように示される。

$$R_{\epsilon\epsilon}(\ell) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp(i2\pi g\ell) q_{\epsilon\epsilon}(g) dg = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp(i2\pi g\ell) \left| \sum_{m=0}^M a(m) \exp(-i2\pi gm) \right|^2 \cdot q_{xx}(g) dg \dots (4)$$

ここで、ランダム項のパワー・スペクトルは  $q_{\epsilon\epsilon}(g)$  であるから、時系列  $x(t)$  のパワー・スペクトルは、次のように表される。

$$P_{xx}(g) = \frac{\delta^2}{\left| 1 - \sum_{m=1}^M a(m) \exp(-i2\pi gm) \right|^2}$$

なお、同様の理由から2変量時系列モデ

ルは、クロス・スペクトルの推定に利用される。

### (3) スペクトル解析の応用例

スペクトル解析は周期的要素が重要な意味を持つ時系列データの分析に広く応用されている（ただしここで紹介する具体例での推定方法はこれまでのところ(2)で説明した方法ではなく、ノン・パラメトリックな方法が用いられているものと思われる）。

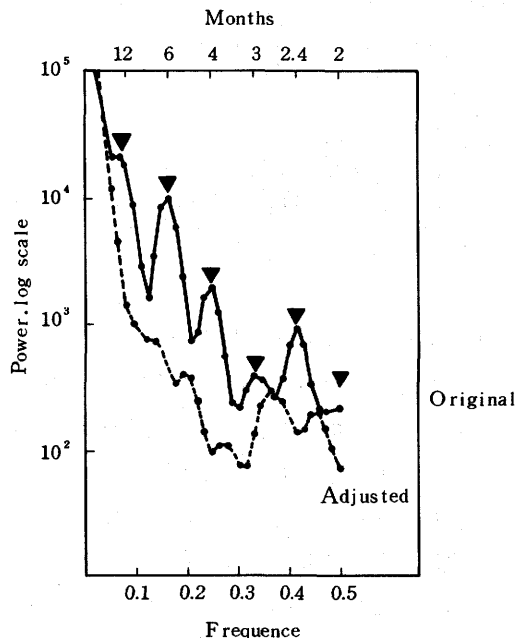
#### ① パワー・スペクトル分析の応用例

具体的に、パワー・スペクトルの応用例を Granger and Newbold [6] の例でみることにする。米国の就業者数（季節調整前）の時系列のパワー・スペクトルは、第4図の実線のようにになっている。この図の▼印をみればわかるとおり、就業者数の時系列は強い周期性をもつことを示しており、その周期性の強い周波数が  $\frac{1}{12}$  の倍数（波長では  $\frac{12}{n}$ 、 $n=1.2, \dots$ ）となっていることから、季節的変動を示しているものとみられる。事実、季節調整後の就業者数の時系列のパワー・スペクトルをみると（第4図点線）、こうした周期性が除去されている。もっとも、今度は逆に▼印の付近でパワー・スペクトルの落ち込み（dip）がみられることから、Granger and Newbold は、この季節調整は過剰調整（overadjusted）になっているとしている。このように、パワースペクトルは、時系列の季節性の有無や季節調整の妥当性を判断するひとつの手段として用いられている。

#### ② クロス・スペクトル分析の応用例

クロス・スペクトル分析の応用例を Shiller and Siegel [43] で紹介する。

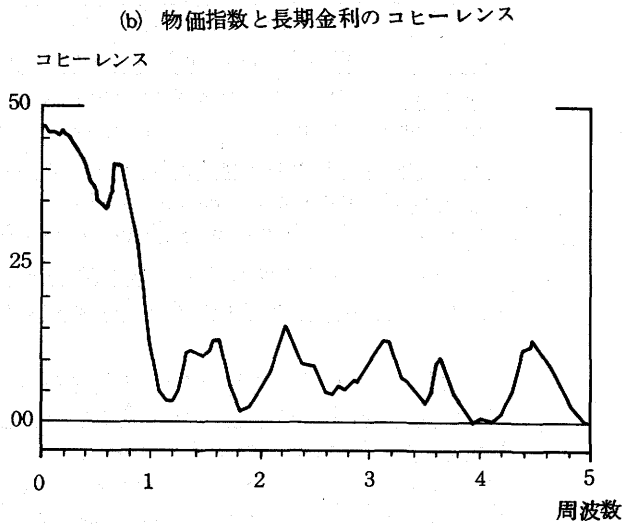
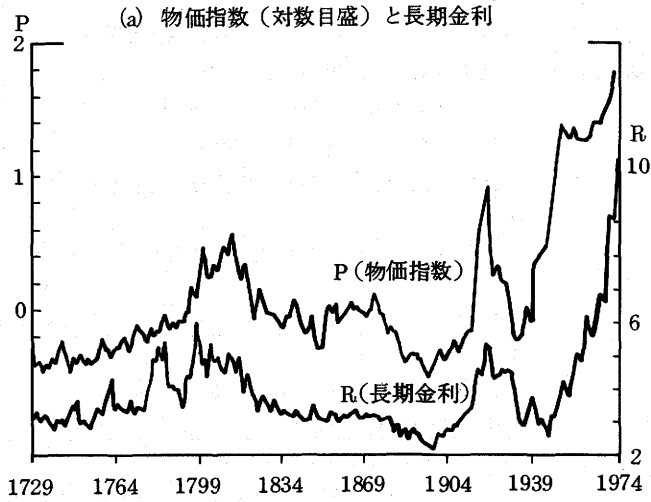
(第4図) 米国の就業者数のパワー・スペクトル



まず、英国の物価指数（対数目盛）と長期金利を1729～1974年の間に亘ってプロットすると、第5図(a)のようにになっている。この2つの時系列について、クロス・スペクトルを推定し、これを基にコヒーレンスを計算すると、第5図(b)のようになった。このコヒーレンスから、Shiller and Siegelは、「物価指数(p)と長期金利(R)のコヒーレンスは、低周波において高い。つまり、10年以上の期間について物価と金利との相関が強いという結果が得られた。……従って、物価指数と金利の間には長いサイクルの相関（long-cycle correlation）があり、ケインズによって名づけられた“Gibson Paradox<sup>(注3)</sup>”が存在することがわかる」と結論づけている。<sup>(注4)</sup>

(注3) Gibson paradox とは、古典的な理論によれば金利は物価水準とは無関係とみられるのに対し、現実には金利と物価水準が高い相関をもつという現象についてケインズが名づけたもの。

(第5図) 英国の物価と金利の関係



(出典) Shiller and Siegel [40]

(注4) もつとも、このケースのように物価から金利への影響と同時に、金利から物価へのフィード・バックが考えられる場合には、コヒーレンスは前記のように正確に両者の関係を示さないため、2変量時系列モデルによるインパルス応答関数、あるいはパワー寄与率によって相互関係をみるべきことが明らかにされている〔41〕。

【参考文献】

(一般的文献としてはとくに〔1〕～〔7〕)

- [1] 赤池弘次、中川東一郎 「ダイナミックシステムの統計的解析と制御」、サイエンス社、1972年。
- [2] E.J.ハナン著、細谷雄三訳 「時系列解析」、培風館、1974年。
- [3] 日野幹雄 「スペクトル解析」、朝倉書店、1977年。
- [4] 藤井光昭 「時系列解析」、コロナ社、1974年。
- [5] G. Box and G. Jenkins “Time Series Analysis: Forecasting and Control”, Holden-Day, 1970.
- [6] C. Granger and P. Newbold “Forecasting Economic Time Series”, Academic Press, 1977.
- [7] C. Nelson “Applied Time Series Analysis for Managerial Forecasting”, Holden-Day, 1973.
- [8] 溝口敏行、浜田宗雄 「経済時系列の分析」、頸草書房、1969年。
- [9] D. Pierce and J. Yang “Monetary Aggregate Targeting in the 1970's: A Time Series Analysis”, mimeograph, 1978.
- [10] E. Hammond “Forecasting the Money Stock with Time Series Models”, Research Paper, FRB New York, May 1977.
- [11] FRB Minneapolis “New Methods in Business Cycle Research: Proceedings from a Conference”, FRB Minneapolis, Oct. 1977.
- [11-2] M. Willes “Foreword” in New Methods in Business Cycle Research: Proceedings from a Conference, FRB Minneapolis, Oct. 1977.
- [11-3] C. Granger and P. Newbold “Time Series Approach to Econometric Model Building”, in New Methods in Business Cycle Research: Proceedings from a Conference, FRB Minneapolis, Oct. 1977.
- [11-4] T. Sargent and C. Sims “Business Cycle Modeling Without Pretending to Have Too Much A Priori Economic Theory”, in New Methods in Business Cycle Research: Proceedings from a Conference, FRB Minneapolis, Oct. 1977.
- [11-5] C. Sims “Exogeneity and Causal Ordering in Macroeconomic Models”, in New Methods in Business Cycle Research: Proceedings from a Conference, FRB Minneapolis, Oct. 1977.
- [11-6] A. Zellner “Comments on Time Series Analysis and Causal Concepts in Business Cycle Research”, in New Methods in Business Cycle Research: Proceedings from a Conference, FRB Minneapolis, Oct. 1977.
- [12] R. Shiller “Rational Expectations and the Dynamic Structure of Macroeconomic Models”, Journal of Monetary Economics, 1978 No. 4.
- [13] 白川方明 「合理的期待の理論について」、本金融研究資料所収。
- [14] 折谷吉治 「マネーサプライおよび財政支出と名目GNPの関係について」金融研究資料第1号、1979年1月。
- [15] 白川方明 「外国為替市場における期待形成について」、金融研究資料第3号、1979年8月。
- [16] バートレット著、津村・奥野・門山・築林・淵脇訳 「確率過程入門」、東大出版会、1968年。
- [17] H. Akaike “Canonical Correlation Analysis and Information Criterion”, in ed., Mehra, R. & Lainiotis, D., System Identification: Advances

- and Case Studies, Academic Press, 1976.
- [18] 赤池弘次 「情報量規準AICとは何か」、数理科学、1976年3月。
- [19] 森田優三 「統計数理入門」、日本評論社、1968年。
- [20] G. Box and D. Pierce “Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models”, Journal of the American Statistical Association, Dec. 1970.
- [21] C. Nelson “The Prediction Performance of the FRB-MIT-PENN Model of the U.S. Economy”, American Economic Review, Feb. 1972.
- [22] I. Ibrahim and T. Otsuki “Forecasting GNP Components Using the Method of Box and Jenkins”, Southern Economic Journal, Jan. 1976.
- [23] L. Haugh “Checking the Independence of Two Covariance-Stationary Time Series: A Univariate Residual Cross Correlation Approach”, Journal of American Statistical Association, June 1976.
- [24] 南波駿太郎 「Sims' testによる因果関係の検証方法」、日本銀行特別研究室内部資料、1978年2月。
- [25] D. Pierce and L. Haugh “Causality in Temporal Systems: Characterizations and a Survey”, Special Studies Paper, FRB, Sept. 1977.
- [26] T. Koopmans “Identification Problems in Economic Model Construction”, in ‘Studies in Econometric Method’, Cowles Commission for Research in Economics at Yale University, 1953.
- [27] A. Preston “Concepts of Structure and Model Identifiability for Econometric Systems”, in ‘Stability and Inflation’, 1978.
- [28] M. Hatanaka “On the Global Identification of the Dynamic Simultaneous Equations Model with Stationary Disturbances”, International Economic Review, Oct. 1975.
- [29] 小尾恵一郎 「計量経済学入門」、日本評論社、1977年。
- [30] T. Sargent “Rational Expectations, Econometric Exogeneity, and Consumption”, Journal of Political Economy, Aug. 1978.
- [31] A. Zellner and F. Palm “Time Series Analysis and Simultaneous Equation Econometric Models”, Journal of Econometrics, 1974. No. 2.
- [32] R. Lucas and T. Sargent “After Keynesian Macroeconomics”, Conference Series No. 19, Federal Reserve Bank of Boston, June 1978.
- [33] C. A. Sims “Money, Income and Causality”, American Economic Review, Sept. 1972.
- [34] H. Tong “Fitting a Smooth Moving Average to Noisy Data”, Institute of Electrical Electronics Engineers, Transactions on Information Theory, July 1976.
- [35] K. Morimune and T. Sawa “Decision Rules for the Choice of Structural Equations”, Faculty Working Papers No. 443, University of Illinois, Oct. 1977.
- [36] 佐和隆光 「「制度」としてのマクロ・モデル分析」、週刊東洋経済、1977年10月27日号。
- [37] C. Sims “Macro-Economics and Reality”, Presented at the 1977 Fisher-Schultz Lecture, Vienna, Sept. 1977.
- [38] E. Howrey and L. Klein “Dynamic Properties of Nonlinear Econometric Models”, International Economic Review, Oct. 1972.

- [39] E. Howrey "Stochastic Properties of the Klein-Goldberger Model", Econometrica, Jan. 1971.
- [40] R. Shiller "Rational Expectations and the Structure of Interest Rates", M. I. T., Ph. D. Dissertation, Aug. 1972.
- [41] H. Akaike "Some Problems in the Application of the Cross-Spectral Method", in 'Spectral Analysis of Time Series', 1967.
- [42] H. Akaike "A New Look at the Statistical Model Identification", IEEE Transactions on Automatic Control, Dec. 1974.
- [43] R. Shiller and J. Siegel "The Gibson Paradox and Historical Movements in Real Interest Rates", Journal of Political Economy, Oct. 1977.