

# CVA 逆問題の確率的求解手法： マーク付き分枝拡散過程の適用

はらみいしまさひろ  
孕石匡弘

## 要 旨

本稿では、CVA を考慮したデリバティブの価格付けに関する問題のうち、逆問題と呼ばれる問題を効率的に求解する数値計算手法を提案する。逆問題とは、約定条件を所与とする通常の価格計算とは異なり、デリバティブ価格を所与としたうえで、その価格を実現する約定条件パラメータを求める問題のことである。こうした逆問題の求解は、実務的には頻繁な要請があるものの、特に CVA を考慮した逆問題の場合は、CVA の計算自体が計算負荷の大きい処理であるため、反復的なアルゴリズムを用いて解を求めるのは計算量の面から見て現実的ではない。このため、逆問題の求解には計算量を削減する工夫が必要となる。

本稿は、逆問題の求解手法として、マーク付き分枝拡散過程と呼ばれる確率過程を用いたシミュレーションと、ロビンス=モンロー・アルゴリズムと呼ばれる確率的求解アルゴリズムを組み合わせる手法を提案する。この手法が適用できるための十分条件が、ペイオフ関数の約定条件パラメータに対する単調性に帰着されることを用いると、本稿の提案する手法が理論的に妥当であることが確認できる。さらに、実際の計算にこの手法を用いると、通常モンテカルロ法と同程度の計算時間で逆問題の求解が可能になることが確認できる。

キーワード： CVA、デリバティブ評価における逆問題、マーク付き分枝拡散過程、ロビンス=モンロー・アルゴリズム

.....  
本稿の作成に当たり、高橋明彦教授（東京大学）、大阪大学中之島ワークショップ「金融工学・数理計量ファイナンスの諸問題 2012」の参加者および日本銀行金融研究所のスタッフから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

孕石匡弘 日本銀行金融研究所  
(現 三菱東京 UFJ 銀行、E-mail: masahiro\_haramiishi@mufg.jp)

## 1. はじめに

2007～08年に発生したサブプライム危機では、OTCデリバティブ取引に関連するカウンターパーティ・リスクが金融機関経営に深刻な影響を与える事例が頻発した。このため、近年、大手金融機関を中心にカウンターパーティ・リスク管理手法の高度化が急速に進展しているほか、標準的な金利スワップ取引やCDS取引では、金融機関間取引は清算機関を経由した取引とすることが義務化された。カウンターパーティ・リスクを管理する手段としては、担保差入のほか、信用評価調整（Credit Valuation Adjustment：以下、CVA）と呼ばれる価格調整を勘案した取引価格の設定等があるが、CVAの計算は、実務面、理論面双方において技術的難易度が高い。例えば、CVAの計算においては、対象となるデリバティブ契約の将来時点における価値が変動すること、当該価値が自社から見て正である時にのみカウンターパーティのデフォルトに伴う損失が生じること、損失額はカウンターパーティごとに計算するため当該カウンターパーティとの全取引を合算して計算する必要があることなどを踏まえる必要がある。これが理論面での難しさであり、これらの性質を正しく反映させようと計算を行うためには膨大な計算資源が必要となる<sup>1,2)</sup>。

このため、何らかの目的でCVAを含んだ計算が必要である場合、CVA計算を反復して多数回実行する必要があるモンテカルロ法等のシミュレーション法をそのまま適用することは計算量の面から見て現実的ではない。例えば、ブレイクイーブン・スワップレートの計算は、CVAを考えないのであれば、イレギュラーなキャッシュフローを持つ取引であっても、スワップ計算をパラメータを変えながら反復的に計算することで簡単に求めることができるが、1回の計算に数多くのシミュレーションが要求されるCVA計算においては、それをそのまま実行しては時間が掛かりすぎてしまう。このようなブレイクイーブン・スワップレートの算出に代表される計算処理を、本稿では逆問題と呼ぶことにするが、逆問題はデリバティブ評価実務で頻繁に必要となる計算と言える。そこで、本稿では、CVAを考慮したうえ

.....  
1 実務面については、例えば富安 [2010] を参照されたい。

2 より詳しく見ると、近年用いられている評価調整はCVAだけではない。例えば、今次金融危機では資金市場の混乱によりファンディング・コストが増大した事象が見られたが、ファンディング・コストを勘案する評価調整は一般にFVA（Funding Valuation Adjustment）と呼ばれる。ファンディング・コストを勘案した評価モデルについてはPiterbarg [2010]、Crépey [2012a, 2012b]などを参照されたい。また、担保差し入れ契約付きのデリバティブ取引において、非対称な担保形態や担保通貨選択権を考慮して時価調整を行う評価モデルも提案されている（例えば、Fujii and Takahashi [2010, 2011]など）。これらに留まらず、さまざまな時価調整概念が提案されているが、計算コストにかかる上述の状況はいずれの評価調整に対しても当てはまる。本稿ではCVAという用語を用いているが、広い意味ではCVA以外の評価調整概念も対象としており、本稿が提案する手法はそれらも念頭に入れている。

でも逆問題を効率的に求解できる手法を提案する。本稿が提案する手法は、3つの既存手法を組み合わせたものである。まず、考察対象となる CVA の算出を高速化する。ここでは、Henry-Labordère [2012] が提案した本来はより複雑な計算手順が必要となる CVA の計算を前進的なシミュレーションのみで近似する手法を適用する。次に、CVA を勘案した逆問題を効率的に計算する。ここでは、ロビンズ=モンロー・アルゴリズム (Robbins-Monro Algorithm) と呼ばれる手法を適用する。この方法を用いることで、モンテカルロ法演算を含む CVA の算出を複数回反復させることなく、逆問題を解くことができる。最後に、制御変量法と呼ばれる分散減少法を適用しアルゴリズムのチューンナップを図ることで、実務的な使いやすさを向上させる。

本稿の構成は以下のとおりである。2 節では、まずデリバティブ評価における逆問題について紹介したうえで、これが実務では頻繁に直面する問題であることを確認する。また、CVA を考慮して逆問題を扱おうとする場合、どのような難しさが生じるのかということについても触れ、本稿で逆問題を取り上げることの背景を紹介する。3 節では、逆問題を効率的に解くロビンズ=モンロー・アルゴリズムについて解説する。4 節では、Henry-Labordère の CVA 評価手法を用いた場合について、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムを用いた求解手続きを具体的に構築し、この手法が適用可能となるための十分条件についても確認する。5 節では具体例を用いた数値計算により、提案する手法が実際に機能することを確認する。そのうえで、分散減少法の適用で計算精度が向上することも確認する。6 節はまとめである。また、補論 1 では、後退確率微分方程式について概説し、本文で用いる命題を示す。補論 2 では、本文で扱っていない清算時 CVA なし<sup>3</sup> の場合を簡単に議論する。補論 3 では、本文に掲載していない数値計算結果の詳細を示す。

## 2. CVA と逆問題

### (1) デリバティブ評価における逆問題

金融機関におけるデリバティブ評価実務は多岐にわたるが、そのほとんどは以下の 2 つの問題に大別できる。本稿ではこれらを順問題・逆問題<sup>4</sup>と呼ぶことにする。

順問題とは、キャッシュフロー (約定条件) を所与としたうえでデリバティブ評価 (価格) を求めるもので、通常のプライシングに相当する。一方、逆問題とは、

.....  
3 清算時 CVA の有無については 2 節 (2) を参照。

4 必ずしも、実務的にコンセンサスの取れた呼び方ではないことに留意が必要である。

価格を所与とした後に、これを実現する約定条件を求めるものである。例えばブレイクイーブン・スワップレートの計算がこれに該当する。なお、ブレイクイーブン・スワップレートとは、固定レート  $f$  の金利スワップの現在価値を  $PV^{IRS}(f)$  と表したときに、方程式  $PV^{IRS}(f) = 0$  を  $f$  について解くことで得られる  $f$  のことである。

同様に、近年オプションの取引価格の表示法として普及しつつあるフォワード・プレミアム計算も、現在価値をゼロとした逆問題の一種と言える。なぜなら、先ほどと同様にフォワード・プレミアム  $p$  のオプションの現在価値を  $PV^{OP}(p)$  と表すと、 $PV^{OP}(p) = 0$  を  $p$  について解くことがフォワード・プレミアムの計算に当たるからである。

より実務的な視点に立つと、デリバティブ販売時に目標収益に見合う約定条件を決定することは頻繁に発生する作業である。これは、想定しているデリバティブ価格の、ある約定条件  $\theta$  のもとでの現在価値を  $PV(\theta)$  と表したとき、目標収益  $\alpha$  のもとで  $PV(\theta) = \alpha$  を  $\theta$  について解くことであるから、逆問題といえる。

このように、実務では、さまざまな場面で逆問題を解く必要がある。本稿は、CVA を考慮した場合でも逆問題を効率的に解くことができる手法を提案する。

筆者の知る限り、逆問題をテーマとする先行研究はほとんど存在しない。これは、これまでのデリバティブ評価のように各種の時価調整が存在しない枠組みでは、ほとんどの逆問題が、①技術的に難しくない、②精度が低い計算でも許容できる、のどちらかに該当するためであると考えられる。

すなわち、①について見ると、CVA などの時価調整が不要な場合、金利スワップなど基本的デリバティブ契約のほとんどは、その価格を非常に短時間で計算できる解析的または数値計算アルゴリズムを持つため、その逆問題の求解は、単純に反復法を適用すれば可能であった。また、②について見ると、一部のエキゾチックな商品は、モンテカルロ法など比較的時間の掛かる手法によってしか計算することができないため、逆問題を解くことは困難であったが、そのような複雑な商品はセールス・マージンが十分に厚いため、逆問題を高精度で解かなくても実務上の問題は生じなかった。

しかし、CVA を考慮する逆問題は、①に分類されるほど簡単なことではない。そもそも、CVA は順問題の計算が複雑である。すなわち、CVA は約定条件を変えると全取引期間に亘ってエクスポージャーが変化するという経路依存性を持つ<sup>5</sup>。以下で見ていくように、CVA を考慮したデリバティブ価格は偏微分方程式 (Partial Differential Equation: 以下、PDE) や後退確率微分方程式 (Backward

.....  
5 経路依存性とは、原資産の初期時点の価格と満期時点の価格が同じでも、満期に至るパスが異なる  
と価格が異なるような性質を持つこと。ここでは、CVA がエクスポージャーの経時変化の状況に依存  
することを指す。

Stochastic Differential Equation：以下、BSDE) の解として定式化されるが、これらは容易に解くことができない。また、②にも該当しない。すなわち、CVA を考慮するとビッド・アスク・スプレッドは比較的大きくなる傾向にあるものの対顧客取引の多くでも CVA が勘案されるようになりつつある現在の取引環境では、ビIDDィング<sup>6</sup> やノーション<sup>7</sup> など、高精度の価格評価が要求される場面が急速に増えてきている。また、担保契約の差異を十分に勘案しないことから生じる評価誤差を誘う担保アービトラージ取引も無視できない頻度で発生している。このため、ミスプライスに伴う損失を回避するためには、精度の高い価格評価が不可欠である。

## (2) CVA の定式化

$(\Omega, \mathcal{F}, Q)$  を完備確率空間とし、原資産やデリバティブの価格はこの空間上で定義されるものとする。また、確率測度  $Q$  はあらかじめリスク中立確率測度として 1 つ定めているものとし、デリバティブの価格付けはこの確率測度  $Q$  のもとで行うものとする。

銀行がカウンターパーティに取引時点 0、満期  $T$  のヨーロッパ型デリバティブ契約（以下、デリバティブと呼称する）を販売することを考える。 $S_t$  ( $0 \leq t \leq T$ ) を  $q$  ( $\in \mathbf{N}$ ) 次元確率過程とし、デリバティブの原資産を含めたマーケットの変動を表すものとする。 $S_t$  は、

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, \quad S_0 = s_0, \quad (1)$$

という確率微分方程式に従っていると仮定する<sup>8</sup>。

この取引に対し、カウンターパーティ・リスクを考慮した評価を考えることになるが、簡単のため、本稿では一方向 CVA<sup>9</sup> のもとで考察する。

デリバティブ契約による約定キャッシュフローは満期  $T$  のみに発生すると仮定し、これを  $g(S_T)$  と表す。ただし、満期  $T$  が到来する前にカウンターパーティがデフォルトした場合には、満期  $T$  での受払いは履行されず、代わりにデフォルト時点で清算によるキャッシュフローが発生するものとする。

.....  
6 顧客が取引相手を入札によって決める取引のこと。

7 ある 2 者間で締結されている既存取引をその一方と第三者の取引として締結し直す取引。既存取引であるため、時間経過や当初取引時点からマーケット状況が変化していることによりエクスポージャーが増大している場合があり、カウンターパーティ・リスクの精緻な把握が必要とされる。

8  $\mu(t, x)$  は  $q$  次元、 $\sigma(t, x)$  は  $q \times q'$  次元のボレル可測関数であり、 $W_t$  は  $q'$  次元の標準ウィーナー過程である。確率微分方程式の解の一意存在を保証するため、 $\mu$  と  $\sigma$  に対して適切なリプシッツ条件や可積分条件を仮定する。

9 一方向 CVA とは、カウンターパーティのクレジット・リスクのみを考慮して時価調整を行う考え方である。これに対し、自社のクレジット・リスクも考慮して時価調整することを双方向 CVA と呼ぶことがある。なお、本稿の議論は双方向 CVA の場合でも同様に適用できる。

デフォルト前の CVA を含めたデリバティブ価格を  $V_t$  ( $0 \leq t \leq T$ ) と表す。デリバティブ価格  $V_t$  は、確率測度  $Q$  とフィルトレーション  $\{\mathcal{F}_t\}$  のもとでの条件付き期待値によって表される。フィルトレーション  $\{\mathcal{F}_t\}$  としては、(1) 式の  $W_t$  から生成されたマーケットの情報を表現するフィルトレーション  $\{\mathcal{G}_t\}$  と、カウンターパーティがデフォルト状態にあるか否かを表現するフィルトレーション  $\{\mathcal{H}_t\}$ <sup>10</sup> によって、 $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t$  と定めるべきであるが、本稿で取扱うデリバティブ価格は、カウンターパーティがデフォルトする前のデリバティブ価格に限定されるから、あらかじめ  $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t$  と制限したフィルトレーションを用いるとしても問題ない<sup>11</sup>。ただし、フィルトレーションは右連続で確率ゼロの事象をすべて含むとする。

また、 $r \geq 0$  を無リスク金利、 $R \in [0, 1]$  をカウンターパーティがデフォルトした際の回収率、 $h \geq 0$  をカウンターパーティが発行するゼロ・リカバリー割引社債の利回りと定義し、 $\beta = (1 - R)h$  と表すことにする<sup>12</sup>。

Burgard and Kjaer [2011] は、デフォルト時の清算価格に関し、CVA を含めた価格を基準として算出する場合と、CVA を含まないカウンターパーティ・リスク・フリーの価格を基準として算出する場合の双方において、 $V_t$  が満たす PDE を示した<sup>13</sup>。本稿では、前者を清算時 CVA ありと呼び、後者を清算時 CVA なしと呼ぶこととする<sup>14</sup>。

**定理 2.1** (Burgard and Kjaer [2011]) 適当な関数  $v$  により  $V_t = v(t, S_t)$  と表されているとする。この  $v$  は、清算時 CVA ありの場合、

$$(\partial_t + \mathcal{L})v - rv - \beta v^+ = 0, \quad v(T, x) = g(x), \quad (2)$$

という PDE の解として表され、清算時 CVA なしの場合、

$$\begin{cases} (\partial_t + \mathcal{L})v + h(Rm^+ + m^- - v) - rv = 0, & v(T, x) = g(x), \\ (\partial_t + \mathcal{L})m - rm = 0, & m(T, x) = g(x), \end{cases} \quad (3)$$

.....  
10 カウンターパーティのデフォルト時刻  $\tau$  によって表される確率過程  $H_t = \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$  が生成するフィルトレーションのこと。

11 この点については、例えば Bielecki and Rutkowski [2002] の Lemma 5.1.2 や Proposition 8.2.1 を参照。

12 この  $\beta$  は、いわゆるクレジット・スプレッドに相当する。

13 Burgard and Kjaer [2011] では、双方向のカウンターパーティ・リスクに加え、ファンディング・コストも考慮して PDE を導出しているが、ここでは本稿の設定に合わせて一方 CVA とし、ファンディング・コストを加味しない場合に導出される PDE を示している。

14 デフォルト時の清算価格の基準の違いが与える影響を分析した研究としては Brigo and Morini [2011] などがある。

という PDE の解として表される<sup>15,16</sup>。ただし、 $\mathcal{L}$  は  $S_t$  の生成作用素である<sup>17</sup>。

以下では、清算時 CVA ありの場合の定式化である (2) 式について議論する<sup>18</sup>。また、ここでは、金利や回収率は定数であるとするが、本稿の内容はこれらが確率的に変動する場合にも拡張可能である。この点については 4 節 (5) で議論する。

ファインマン=カツツの定理から、(2) 式の PDE を解くことと次の BSDE を  $V_t$  について解くことは同値である。

$$dV_t = rV_t dt + \beta V_t^+ dt + Z_t dW_t, \quad V_T = g(S_T). \quad (4)$$

このように、CVA を考慮したデリバティブの価格は、(2) 式の PDE あるいは (4) 式の BSDE の解として定式化される。しかし、CVA の計算は一般に考慮すべきファクター数が多く、(2) 式の PDE は高次元の方程式となる場合が多い。高次元の方程式を、有限差分法に代表される PDE の数値解法を用いて解くことは事実上不可能であるため、この求解は容易ではない。また、BSDE の数値解法もいくつか知られているものの (Ma, Protter and Yong [1994] など)、次元数が 3 を超えてくると PDE の場合と同様の困難さが伴う。

したがって、実務で CVA 計算を実行する場合には、モンテカルロ法に代表されるシミュレーション・ベースの計算手法を採用することが多い。このとき、(4) 式の BSDE を積分方程式の表現に直した

$$V_t = E_t^Q \left[ \exp \left\{ - \int_t^T (r + \beta \mathbf{1}_{\{V_u \geq 0\}}) ds \right\} g(S_T) \right], \quad (5)$$

を基に反復的にサンプル・パスを生成して期待値を計算することになる。しかし、上式における現時点の価格は将来時点の価格を参照する形で表現されているため、この式のとおり価格を計算しようとすると、各試行で条件付き期待値計算が必要となり、入れ子構造のシミュレーション計算となってしまう。これは計算量の観点から現実的ではなく、CVA の計算をシミュレーション・ベースの方法で行うためには、この入れ子構造を解消するような何らかの工夫が必要となる。

これを解決することを目的として、Cesari *et al.* [2010] では、CVA をアメリカン・モンテカルロ法によって計算することが提案されている。アメリカン・モンテカルロ法は、将来時点のデリバティブ価格を何らかの方法で近似することによってシ

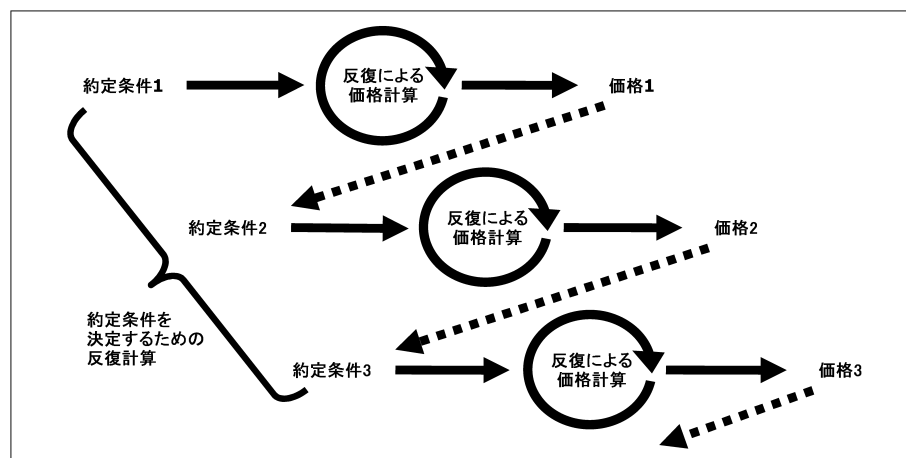
15 本稿では、 $x^+ = \max\{x, 0\}$ ,  $x^- = \min\{x, 0\}$  と定義する。

16  $M_t = m(t, S_t)$  は CVA を含まない価格に等しい。

17 すなわち  $\mathcal{L}$  は、 $\mathcal{L} := \sum_{i=1}^q \mu_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^q \alpha_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $\alpha_{ij} := \sum_{k=1}^q \sigma_{ik} \sigma_{jk}$  で定められる 2 階の微分作用素である。

18 本稿の手法を清算時 CVA なしの場合の定式化である (3) 式に適用する場合は、適用可能範囲が限定される (補論 2 参照)。

図 1 逆問題における二重の反復計算



ミュレーション計算の入れ子構造を解消する手法であり、CVA の実務においてもよく利用される手法となっている。しかし、アメリカン・モンテカルロ法は近似方法に依存して計算の精度が変わる場合が多く、計算精度は手法ごとにまちまちである。例えば、アメリカン・モンテカルロ法の一手法であり、実務上の応用も多い Longstaff and Schwartz [2001] の最小二乗モンテカルロ法は、任意に選択した基底関数の線形和で条件付き期待値を回帰する。このとき、近似の精度は基底関数の選択に依存するが、精度の高い近似が得られる基底関数の選択方法は現在でも議論の対象であり、いまだ決定的な方法は提案されていない。

近年、Henry-Labordère [2012] や Fujii and Takahashi [2012] によって、(2) 式や (4) 式の形をした PDE あるいは BSDE を前進的なシミュレーションのみで近似計算する手法が提案され、CVA の計算時間を大幅に削減できるブレイクスルーとなった。当該手法の長所としては、アメリカン・モンテカルロ法のような回帰計算を必要とせず、単純なモンテカルロ法として捉えることができるという点のほか、基底関数のような任意性もなく、CVA の近似誤差を、方程式の近似による誤差として直接評価できる点がある。

このように、CVA の計算は入れ子構造を持つシミュレーション計算となるが、近年の研究により、前進的なシミュレーション・ベースの手法を用いて効率的に価格を求めることが可能となりつつある。

一方、シミュレーション・ベースの手法により計算される価格に対して逆問題を考えると、約定条件の決定にかかる反復計算も発生する。すなわち、逆問題の求解において、解を直接計算することができない場合は、約定条件パラメータを少しずつ変えながら順問題を繰り返し解くことになる。そのイメージを図 1 に表した。

したがって、CVA を考慮した逆問題を効率的に解くためには、全体の期待値をモ



ンテカルロ法で求める際の反復計算、サンプル・パス上の条件付き期待値をシミュレーションで求める際の反復計算、約定条件の決定にかかる反復計算の三重の入れ子構造を持つ反復計算を効率的に行う必要がある。

CVA に関する順問題を解くのであれば、CVA 由来の反復計算を解消する前述したアメリカン・モンテカルロ法、Henry-Labordère [2012] の方法、あるいは、Fujii and Takahashi [2012] の方法などを利用すれば十分であるが、逆問題を解く場合には逆問題由来の反復計算も残っており、これでもまだ実務上耐えうる時間で計算することができない。なぜなら、上述のいずれの方法も全体の期待値を求める際にモンテカルロ法を用いており、逆問題の求解のためにそれらを繰り返し実行すると膨大な時間を要してしまうからである。そこで、本稿では、単純な反復計算を回避することで逆問題由来の反復計算も解消させる手法を提案する。この方法を利用すると、近似ではあるものの 1 回のシミュレーション計算だけで逆問題の解を求めることができる。すなわち、順問題・逆問題の両方を同等の計算時間で終了させることが可能になる。その手法のベースとなっているテクニックがロビンズ=モンロー・アルゴリズムであり、3 節においてその枠組みを概説する。

### 3. ロビンズ=モンロー・アルゴリズム

#### (1) 概要

ロビンズ=モンロー・アルゴリズムは、 $\theta \in \mathbf{R}^d$  でパラメータ付けられた  $\mathbf{R}^d$  値確率変数  $X^\theta$  の期待値に関する方程式

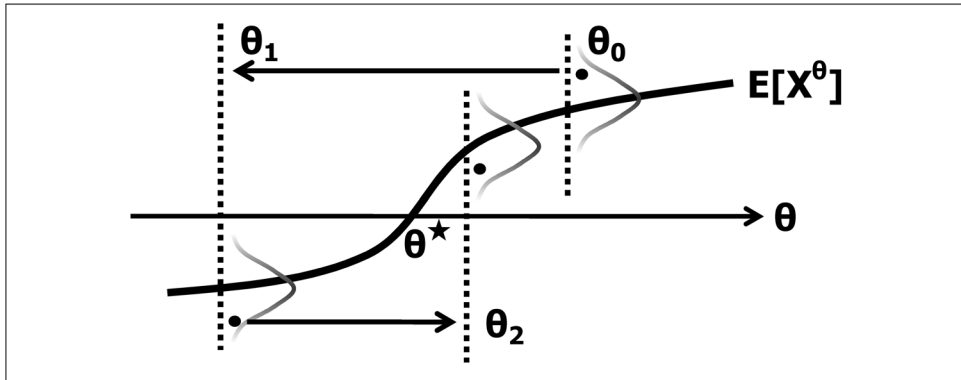
$$E[X^\theta] = \alpha, \quad (6)$$

を求解するアルゴリズムで、適当な初期値から始まる逐次更新を通じて真の解  $\theta^*$  を推定する。このアルゴリズムが特徴的なのは、期待値計算そのものを行うことなく、期待値に関する方程式を求解する点である。期待値計算を行う必要が無いため、期待値が容易に得られない場合にも適用可能な応用範囲の広いアルゴリズムとなっている。

具体的なアルゴリズムは以下のとおりである。確率変数  $X^\theta$  は、任意にパラメータ  $\theta$  が与えられたときに実現値  $x^\theta$  を観測可能であるとする。真の解  $\theta^*$  の推定値の列  $\theta_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を、適当な初期値  $\theta_0 \in \mathbf{R}^d$  と次の式を用いて帰納的に与える。

$$\theta_n = \theta_{n-1} - \gamma_n(x_n^{\theta_{n-1}} - \alpha).$$

図2 ロビンス=モンロー・アルゴリズムのイメージ



ここで、 $x_n^{\theta_{n-1}}$  は  $\theta_{n-1}$  をパラメータとしたときの  $X^\theta$  の実現値で、 $\gamma_n$  は更新の程度を定める正の実数列である ( $\gamma_n$  は確定的でも確率的でもよい)。図2はこのアルゴリズムによる  $\theta$  の更新イメージを表しており、逐次的に更新した  $\theta$  を用いて  $X^\theta$  をシミュレートし、シミュレートされた実現値を用いて次の  $\theta$  を計算していく。なお、ここでは与えられた各  $\theta$  に対して  $X^\theta$  の実現値がシミュレートされるのはそれぞれ1度ずつであり、期待値計算は行っていない。

この更新式によって与えられた  $\theta_n$  は、後述する十分条件が満足される場合に、解  $\theta^*$  に概収束する。

## (2) 適用のための条件

以下、 $X^\theta$  はボレル集合族付きの距離空間  $(\Xi, X)$  に値を取る確率変数  $Z$  と、 $\Xi \times \mathbf{R}^d$  から  $\mathbf{R}^d$  へのボレル可測関数  $H$  によって、

$$X^\theta = H(Z, \theta),$$

と表されているとする。また、(6)式は、一般性を失うことなく  $\alpha = 0$  とすることができる。このとき、ロビンス=モンローの更新式は、 $Z$  の独立観測  $z_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を用いて、

$$\theta_n = \theta_{n-1} - \gamma_n H(z_n, \theta_{n-1}), \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7)$$

と書ける。なお、 $\gamma_n$  を確率的に定める場合には  $\mathcal{G}_n := \sigma(Z_i; i \leq n)$  として定めたフィルトレーション  $\{\mathcal{G}_n\}$  に適合させることとする。

上記の更新式は Robbins and Monro [1951] において初めて提案された。しかしな

がら、当初の論文での証明は、 $X^\theta$  の分布の台<sup>19</sup>が一様にコンパクトであることを仮定したうえでの  $L^2$  収束であり、より一般的な条件での成立は予想に留まっていた。Dufflo [1997] ではより一般的な設定のもとで概収束することが示されており、次の定理はそれに従っている。

**定理 3.1** 各パラメータ  $\theta$  について、 $H(Z, \theta)$  は二乗可積分で、期待値  $h(\theta) := E[H(Z, \theta)]$  は  $\theta$  について連続かつ  $h(\theta^*) = 0$  という解  $\theta^*$  を有しているとする。このとき、次の条件 (A)~(C) を満たせば、(7) 式の  $\theta_n$  は  $\theta^*$  へ概収束する<sup>20</sup>。

- (A) 任意の  $\theta \neq \theta^*$  に対して、 $\langle \theta - \theta^*, h(\theta) \rangle > 0$
- (B)  $\{\gamma_n\}$  は一様有界で、確率 1 で  $\gamma_n \rightarrow 0$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$ 、かつ、 $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty$
- (C)  $C > 0$  が存在し、すべての  $\theta \in \mathbf{R}^d$  に対して、 $E[\|H(Z, \theta)\|^2] \leq C(1 + \|\theta\|^2)$

**注意 3.2** 条件 (A) は、関数  $h$  の各成分において、 $\theta$  が  $\theta^*$  よりもプラス方向にあれば  $h(\theta)$  もプラス、マイナス側にあればマイナスとなることを意味している<sup>21</sup>。

**注意 3.3** 条件 (B) は、 $H$  の構造に依存しておらず、 $\gamma_n$  に対する制約は厳しくない。このため、条件 (B) を満たすためには、例えば  $\gamma_n = \gamma/n^\varepsilon$  ( $1/2 < \varepsilon \leq 1$ ) などとすれば十分である。特に、 $\gamma_n = \gamma/n$  とすると簡明で計算量も少ないため、よく利用される。

**注意 3.4** 条件 (C) は重要である。これが満たされない場合には、パラメータ  $\theta$  が更新の過程で発散してしまうことがある。Chen and Zhu [1986] は、条件 (C) が満たされない場合でも適用可能なアルゴリズムとして、発散を抑制する更新ステップに基づく確率的打ち切りアルゴリズム (Randomly Truncated Algorithm) を提案した。Lelong [2008] は、このアルゴリズムにおいて概収束が成立するには、条件 (C) の代わりに、 $E[\|H(Z, \theta)\|^2]$  がパラメータ  $\theta$  に関する任意のコンパクト集合上で有界となるという極めて緩い条件を満たすだけで十分であることを示した。

$h(\theta) = 0$  を満たす解は存在するものの、その一意性を証明することが難しい場合もある。そのような場合でも適用できるよう、ロビンス=モンロー・アルゴリズムの拡張が、Lemaire and Pagès [2010] により与えられている。

**定理 3.5** (Lemaire and Pagès [2010])  $h(\theta) = 0$  の解について、 $\mathcal{T}^* := \{\theta; h(\theta) = 0\}$  が

.....  
19 確率変数  $X$  の分布  $P^X$  の台とは、 $P(X \notin C) = 0$  となるような閉集合  $C$  のうち、最小の集合のことである。

20  $\langle x, y \rangle$  はベクトル  $x, y$  の内積を表している。また、 $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$  と定義している。

21  $d$  次元関数  $h(\theta)$  のいくつかの成分においてこの向きが逆になっているような場合は、その成分のみ更新式の符号を反転させればよい。本文のとおりに向きが揃っていることを順方向であると呼ぶことにする。

空でないことだけを仮定する<sup>22</sup>。このとき、次の条件 (A') および定理 3.1 の条件 (B)、(C) を満たすならば、 $\mathcal{T}^*$  に値をとる確率変数  $\Theta^*$  が存在し、(7) 式の  $\theta_n$  は  $\Theta^*$  に概収束する。

(A') 任意の  $\theta \in \mathbf{R}^d \setminus \mathcal{T}^*$  および  $\theta^* \in \mathcal{T}^*$  に対して、 $\langle \theta - \theta^*, h(\theta) \rangle > 0$

ロビンス=モンロー・アルゴリズムや確率的打ち切りアルゴリズムをデリバティブ評価に応用した既存研究としては、Arouna [2004] や Lemaire and Pagès [2010] などがある。これらの研究は、期待値として表現されるデリバティブ価格をモンテカルロ法を用いて計算する際の高速化手法に関するもので、高速化手法の1つである重点サンプリング法における高速化効果が最も高くなるパラメータの決定に当該アルゴリズムを活用している。ただし、本稿のように、ファイナンスに関する逆問題にロビンス=モンロー・アルゴリズムを適用した既存研究については、筆者の知る範囲において存在しない。

### (3) 簡単な適用例

ロビンス=モンロー・アルゴリズムの逆問題への応用として、フォワード・プレミアム<sup>23</sup>の計算を例に説明する。

満期  $T$  に  $g(S_T)$  のキャッシュフローが生じる契約を考える。なお、ここでは CVA は考慮しないこととする。このとき、フォワード・プレミアム  $p$  は、次の等式を満たしている。

$$E^Q[e^{-rT}\{g(S_T) - p\}] = 0. \tag{8}$$

ロビンス=モンロー・アルゴリズムを適用して (8) 式のフォワード・プレミアム  $p$  を求める擬似コード<sup>23</sup> は以下のようになる。

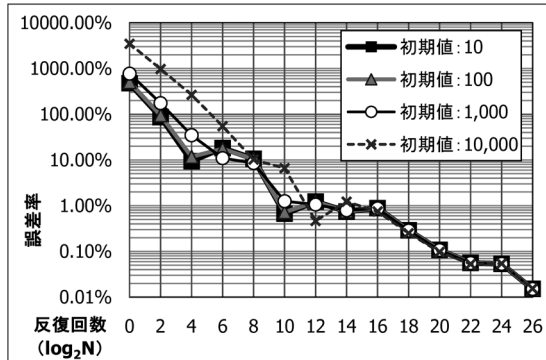
ロビンス=モンロー・アルゴリズム

```

p <- Any initial
Loop n in 1:N
  Simulate S_T
  p <- p - exp(-r * T) * {p - g(S_T)} / n
Return p
```

.....  
<sup>22</sup> つまり、解は一意でなくてもよい。  
<sup>23</sup> (7) 式の  $\gamma_n$  として  $1/n$  を用いている。

図3 解析解からの誤差率



ブラック=ショールズ・モデルのもとで、ヨーロピアン・コール・オプション<sup>24</sup>のフォワード・プレミアムをロビンズ=モンロー・アルゴリズムで計算した結果を図3に示す。ロビンズ=モンロー・アルゴリズムでは任意の初期値を用いることができるため、図3では複数の初期値についての計算結果を示している<sup>25</sup>。

図3から、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムによって求められた値が解析解へ収束していることが確認できる<sup>26</sup>。また、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムにおける初期値の影響は早い段階で小さくなっていることがわかる。実際、 $2^{14}$  (= 16,384) 回程度計算が経過した時点で初期値の影響はほぼ消えている。

ここで、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムを、同様に原資産の状態を反復的にシミュレートすることで期待値を計算するモンテカルロ法と比較すると、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムには2つのメリットがあることがわかる。まず1点は、モンテカルロ法がその適用の前提として、求めたい値自体が期待値として表されていることを要請する一方で、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムでは、求めたいパラメータが含まれた期待値に関する方程式さえ得られれば十分であるという点である。方程式が求めたいパラメータについて解けている必要はなく、適用可能範囲が広いと言える。もう1点は、上述の例では適用していないものの、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムではシミュレーションのループごとにその設定を変更することが許容される構造となっている点である。単純なモンテカルロ法ではすべてのサンプルが均等に扱われるため、計算の設定を固定する必要があるが、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムでは各サンプルを逐次更新時の上書きのためだけに利用するため、計算の設定を都度変更することが可能である。

24 各パラメータの設定を、 $S_0 = K = 100$ 、 $T = 10$ 、 $r = 0.01$ 、 $\sigma = 0.2$ とした。

25 比較のため各手法とも同じ乱数系列を用いている。

26 真値へ概収束するという性質がモンテカルロ法と同じであるだけでなく、この例のパラメータ設定であれば、収束速度もモンテカルロ法と同じ  $O(N^{-1/2})$  であることを理論的に示すことができる。例えば、Duflo [1997] の Theorem 2.2.12 を参照。

## 4. 逆問題の求解法

### (1) 解法のアウトライン

本稿における逆問題は、取引時点 0 におけるデリバティブ価格  $V_0$  をある値  $\alpha$  で条件付けた後に、約定条件（ここではパラメータ  $\theta$  で表されると仮定する）を求める問題である。なお、容易に  $\alpha = 0$  の場合に帰着できるため、以下では  $\alpha = 0$  とし議論する。また、約定条件パラメータ  $\theta$  は 1 次元の実数と仮定する。

$\theta$  を所与としたときの、CVA を考慮した当該デリバティブの価格過程を  $V_t^\theta$  で表す。ペイオフ関数についても、 $\theta$  でパラメータ付けて  $g(S_T, \theta)$  と表しておく。

(5) 式から、取引時点におけるデリバティブ価格  $V_0^\theta$  は、確率測度  $Q$  のもとでの期待値として表されるので、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムを用いて  $V_0^\theta = \alpha = 0$  を満たす  $\theta$  を求められると期待できる。

具体的には、以下のステップ 2~4 を十分な回数だけ反復すればよい。

ステップ 1 初期値として約定条件パラメータ  $\theta$  を 1 つ決める。

ステップ 2  $\theta$  でパラメータ付けられた次の BSDE に従うサンプル・パスを 1 本作成する。

$$dV_t^\theta = rV_t^\theta dt + \beta(V_t^\theta)^+ dt + Z_t^\theta dW_t, \quad V_T^\theta = g(S_T, \theta).$$

ステップ 3 生成された 1 本のサンプル・パスに対して、次の値を計算する。

$$\exp\left\{-\int_0^T (r + \beta \mathbf{1}_{\{V_u^\theta \geq 0\}}) du\right\} g(S_T, \theta).$$

ステップ 4 取引価格のターゲット（ゼロ）とステップ 3 で算出された値の大小を比較し、ロビンズ=モンローの更新式をパラメータ  $\theta$  へ適用する。パラメータを更新したら、ステップ 2 へ戻る。

これが実現可能であれば、CVA を考慮した逆問題の求解は、モンテカルロ法と同程度の計算時間で終了する。しかし、この手法が適用可能であるためには、次の 2 つの問題が解決されている必要がある。

問題 1 ステップ 2 のサンプル・パス生成が難しいこと<sup>27</sup>。

.....  
27 BSDE は終端時点で条件付けられているため、通常確率微分方程式と異なり、初期状態からオイラー=丸山近似などの離散近似を通じてサンプル・パスを生成することはできない。

**問題 2** ロビンソン=モンロー・アルゴリズムが機能するための十分条件、すなわち定理 3.1 の条件 (A)~(C) を満たすことを証明する必要があること。

結論から言えば、2つの問題とも、いくらかの近似誤差を許容することにはなるものの、肯定的に解決することができる。**問題 1** は、近年、Henry-Labordère [2012] や Fujii and Takahashi [2012] で提案されている、BSDE の前進的シミュレーションによる解法を利用することで、ある程度の近似誤差が含まれるものの解決できる。**問題 2** は、特に定理 3.1 における条件 (A) の成立が重要であるが、BSDE の比較定理と呼ばれる命題を用いて示すことができる。

以下では、それぞれについて詳しく見ていく。

## (2) マーク付き分枝拡散過程

Henry-Labordère [2012] は、CVA 計算の効率化を念頭に、次の PDE

$$(\partial_t + \mathcal{L})u + \beta\{u^+ - u\} = 0, \quad u(T, x) = \phi(x), \quad (9)$$

をマーク付き分枝拡散過程 (Marked Branching Diffusion) と呼ばれる確率過程のパスを用いた前進的なシミュレーションによって近似的に計算する手法を提案した。

ここでは、まず、 $u^+$  を適当な次数  $M$  の多項式  $F(u) = \sum_{k=0}^M a_k u^k$  によって近似した、

$$(\partial_t + \mathcal{L})u + \beta\{F(u) - u\} = 0, \quad u(T, x) = \phi(x), \quad (10)$$

を考える。(10) 式のように修正した PDE であれば、多項式近似に伴う誤差が生じるものの、マーク付き分枝拡散過程を導入することで前進的なシミュレーションによる求解が可能となる。

このマーク付き分枝拡散過程は、マーケットの生成作用素  $\mathcal{L}$ 、クレジット・スプレッド  $\beta$ 、 $M$  次多項式  $F$  の係数  $\{a_k\}_{k=0, \dots, M}$ 、および、外生的に与えられる  $p_k \geq 0$  と  $\sum_{k=0}^M p_k = 1$  を満たした定数列  $\{p_k\}_{k=0, \dots, M}$  で構成される四つ組  $(\mathcal{L}, \beta, \{p_k\}, \{a_k\})$  によって特徴付けられる。

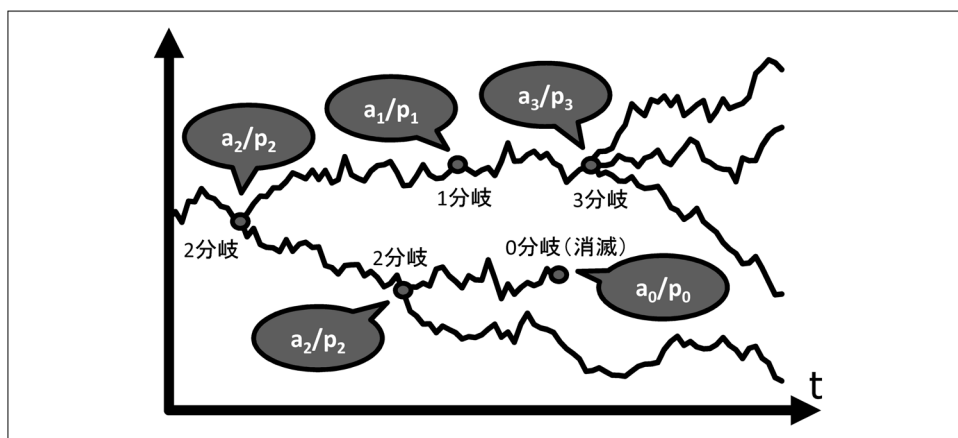
以下では、マーク付き分枝拡散過程を  $z_t^i$  で表すことにするが、この確率過程のパスはランダムに複数の枝に分岐する。そのため、それぞれの枝を区別できるようインデックスを付けて  $z_t^i$  と表すことにする。

マーク付き分枝拡散過程は、1つの点  $z_t^i$  からスタートする。あらかじめ定めた初期時刻と初期値を出発した  $z_t^i$  は、マーケットと同じ  $\mathcal{L}$  を生成作用素として変動することとなるが、自身の状態とは独立に、強度  $\beta$  の指数分布に従ってランダムに到来する時刻の都度、分岐のイベントが発生する。分岐の際には、最大で多項式  $F$  の

表 1 四つ組  $(\mathcal{L}, \beta, \{p_k\}, \{a_k\})$  の役割

$\mathcal{L}$	$z_t^i$ のダイナミクスの規定
$\beta$	分岐が引き起こされる強度
$\{p_k\}_{k=0, \dots, M}$	分岐時における分岐数の分布 (分岐数が $k$ となる確率が $p_k$ )
$\{a_k\}_{k=0, \dots, M}$	分岐数が $k$ である度に $a_k/p_k$ をマーク

図 4 マーク付き分枝拡散過程のパス



次数である  $M$  個の枝に分岐する。分岐数は  $\{p_k\}$  に従い独立に決まり、 $k$  本に分岐する確率が  $p_k$  となる<sup>28</sup>。

$k$  本に分岐すれば、 $\{z_t^i\}_{i=1, \dots, k}$  と表されることになるが、それぞれの枝  $z_t^i$  は互いに独立に  $\mathcal{L}$  に従って変動し、再び分岐の到来を待つことになる。これを満期  $T$  まで繰り返していく。

さらに、分岐数  $k$  の分岐イベントが起こる度に、マーク付き分枝拡散過程は  $a_k/p_k$  というマーク (重み) を発する<sup>29</sup>。

表 1 に四つ組  $(\mathcal{L}, \beta, \{p_k\}, \{a_k\})$  のそれぞれの要素の役割をまとめている。また、図 4 でマーク付き分枝拡散過程が持つ分岐するサンプル・パスのイメージを示している。

満期  $T$  まで到達した枝の数を  $N_T$  と表し、初期時刻から満期  $T$  の間に分岐数  $k$  の分岐が起きた回数を  $\omega_k$  で表すと、これら 2 つの確率変数の間には、 $N_T = 1 + \sum_{k=0}^M (k-1)\omega_k$  という関係式が成立している。

.....  
28  $k=0$  の場合はその枝の消滅を意味する。

29 マーク付き分枝拡散過程は、(i) 拡散過程のダイナミクス、(ii) ゴルトン=ワトソン分枝過程 (Galton=Watson Branching Process) の分岐、(iii) マーク付き点過程 (Marked Point Process) のマーキングのそれぞれの特徴を組み合わせた確率過程となっている。



このマーク付き分枝拡散過程を用いると、(10) 式の PDE の解が次のように与えられる。

**定理 4.1** (Henry-Labordère [2012]) (10) 式の PDE は、終端条件について  $|\phi(x)| \leq 1$  を満たすとし、一意解を持つとする<sup>30</sup>。このとき、この解は、

$$u(t, x) = E^{t,x} \left[ \prod_{i=1}^{N_T} \phi(z_T^i) \prod_{k=0}^M \left( \frac{a_k}{p_k} \right)^{\omega_k} \right],$$

と表現することができる。ここで、 $z_t^i$  は時刻  $t$  に  $x$  を出発するマーク付き分枝拡散過程である。また、 $N_T = 0$  の場合は  $\prod_{i=1}^{N_T} = 1$  と定義する。

以下しばらくは、この定理の前提条件に沿うように、強い仮定ではあるものの、ペイオフ関数  $g(x, \theta)$  について、すべての  $x \in \mathbf{R}^q$  および  $\theta \in \mathbf{R}$  に対して  $|g| \leq 1$  が成立することを仮定する。

この終端条件に対する規格化の要請は、Henry-Labordère [2012] のように、順問題を解くことを目的とするのであれば特に制約となることは無いが、本稿において設定してきた一般的な枠組みで CVA の逆問題を解く際には場合により制約となることがある。この点については、後の 4 節 (4) で論じる。

$V_t^\theta$  を変形し、

$$\tilde{V}_t^\theta := -e^{-r(T-t)} V_t^\theta, \quad (11)$$

と置くと、 $\tilde{v}(t, S_t; \theta) = \tilde{V}_t^\theta$  によって定められる  $\tilde{v}$  が従う PDE は、

$$(\partial_t + \mathcal{L}) \tilde{v} + \beta \{\tilde{v}^+ - \tilde{v}\} = 0, \quad \tilde{v}(T, x; \theta) = -g(x, \theta), \quad (12)$$

となり、(9) 式と同じ形になる。したがって、 $\tilde{v}^+$  を多項式近似すれば、マーク付き分枝拡散過程を用いて前進的なシミュレーションでステップ 2 で必要となるサンプル・パスを得ることができる。

これで、問題 1 を解決する手段が得られた。

### (3) 後退確率微分方程式の比較定理による正当化

次に、問題 2 を解決する方法を示す。

.....  
<sup>30</sup> Henry-Labordère [2012] では、この解を弱解の一種である粘性解の範囲で捉えている。ここでは厳密ではないものの、単に解とだけ記すことにする。

解くべき方程式は、(12) 式の PDE を多項式近似したものである。表記が煩雑になるのを避けるため、(11) 式で行った割引や符号の反転はすでに施されているものとする。すなわち、PDE の形で表せば、

$$(\partial_t + \mathcal{L})v + \beta\{F(v) - v\} = 0, \quad v(T, x; \theta) = g(x, \theta),$$

となり、BSDE の形で表せば、

$$dV_t^\theta = \beta\{V_t^\theta - F(V_t^\theta)\}dt + Z_t^\theta dW_t, \quad V_T^\theta = g(S_T, \theta), \quad (13)$$

となる。

ロビンス=モンロー・アルゴリズムを適用するためには、定理 3.1 の前提条件である、 $V_0^\theta$  の  $\theta$  に関する連続性と、

$$X^\theta := \prod_{i=1}^{N_T} g(z_T^i, \theta) \prod_{k=0}^M \left( \frac{a_k}{p_k} \right)^{\omega_k},$$

の二乗可積分性を示す必要がある。 $V_0^\theta$  の連続性については後の注意 4.3 で述べている。 $X^\theta$  の二乗可積分性については次の命題が成立する。

**命題 4.2**  $X^\theta$  が  $\theta$  に依らず二乗可積分であるための十分条件は、 $q_2(x) := \sum_{k=0}^M a_k^2 p_k^{-1} x^k$  が次の 2 条件のうちのどちらかを満たすことである。

- $q_2(1) \leq 1$
- $1 < b < \infty$  が存在し、

$$\int_1^b \frac{dx}{q_2(x) - x} = \beta T,$$

が成立する。

**証明**  $|g| \leq 1$  と仮定しているから、

$$\left( \prod_{i=1}^{N_T} g(z_T^i, \theta) \prod_{k=0}^M \left( \frac{a_k}{p_k} \right)^{\omega_k} \right)^2 \leq \prod_{k=0}^M \left( \frac{a_k^2}{p_k} \right)^{\omega_k},$$

であるが、命題の 2 条件が右辺の可積分にとって十分であることは Henry-Labordère [2012] の Proposition 1 とその前後の議論によって直ちに導かれる。

この命題の十分条件を満たせば、ロビンス=モンロー・アルゴリズムの条件 (C) は自動的に満足される。

また、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムの条件 (B) についても、前述したようにそれほど強い制約ではないので、残された課題は条件 (A) が満たされるための条件を示すことである。

この点は、BSDE の比較定理を用いることで解決できる。BSDE の比較定理とは、パラメータ付けられた BSDE に対し、そのドライバー<sup>31</sup> と終端条件がパラメータに関して適当な大小関係を保つのであれば、解自体もその大小関係を保存することを保証する定理である。定理の正確な記述については補論 1 の定理 A-1.3 を参照されたい。この定理に従うと、もし次の終端条件に関する条件<sup>32</sup>

$$\theta_1 \leq \theta_2 \text{ ならば、すべての } x \in \mathbf{R}^d \text{ に対して、} g(x, \theta_1) \leq g(x, \theta_2), \quad (14)$$

を満たせば、(13) 式の BSDE の解  $V_t^\theta$  について、

$$\theta_1 \leq \theta_2 \text{ ならば、} V_t^{\theta_1} \leq V_t^{\theta_2},$$

が成立することになる。これは、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムの条件 (A) を満足するのに十分である。

**注意 4.3** ペイオフ関数に単調性があり、命題 4.2 の条件が満たされるとする。このとき、ペイオフ関数が  $\theta$  について連続ならば、ルバークの収束定理により  $V_0^\theta$  は  $\theta$  について連続となる。

以上の議論を定理としてまとめる。

**定理 4.4** ペイオフ関数  $g(x, \theta)$  は  $\theta$  について連続で、 $|g(x, \theta)| \leq 1$  を満たすとする。このとき、 $\mathcal{T}^* := \{\theta \in \mathbf{R}; V_0^\theta = 0\}$  が空でないならば、次の更新式

$$\theta_n = \theta_{n-1} - \gamma_n H(\mathbf{z}_n, \theta_{n-1}), \quad H(\mathbf{z}, \theta) := \prod_{i=1}^{N_T} g(z_T^i, \theta) \prod_{k=0}^M \left( \frac{a_k}{p_k} \right)^{\omega_k},$$

表 2 決定可能な約定条件の例

約定条件	ペイオフ関数 $g(x, \theta)$	備考
スプレッド	$cx + \theta$	$c > 0$
キャップ	$\max\{cx, \theta\}$	$c > 0, \theta > 0$
ストライク	$(\theta - cx)^+$	$c > 0, \theta > 0$
ギアリング	$(\theta x - c)^+$	$c > 0, \theta > 0$

.....  
31 BSDE の  $dt$  項をドライバーと呼ぶ。本稿で用いる BSDE の用語については補論 1 を参照されたい。

32 ドライバーは共通なので、必要なのは終端条件に関する条件だけである。

で定めた  $\theta_n$  は、次の条件 (a)~(c) を満たす場合に、 $\mathcal{T}^*$  に値をとる確率変数に概収束する。 $\mathbf{z}_n$  は時刻 0 に  $s_0$  を出発するマーク付き分枝拡散過程である。

- (a) ペイオフ関数  $g(x, \theta)$  は単調性 (14) を満たす
- (b)  $\{\gamma_n\}$  は一様有界で、確率 1 で  $\gamma_n \rightarrow 0$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$ 、かつ、 $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty$
- (c) 多項式  $F$  と分岐確率  $\{p_k\}$  は命題 4.2 の十分条件を満足する

ここまで、 $|g(x, \theta)| \leq 1$  という強い制約を課しているものの、その点を除けば、ペイオフ関数に対して要請される単調性の条件 (14) は、表 2 で具体的に示すような商品では満たされている<sup>33</sup>。

#### (4) ペイオフ関数がある場合についての議論

次に、 $|g(x, \theta)| \leq 1$  が必ずしも成立していない場合を考える。1 で抑えられていなくても有界ならば全体を定数倍すればよいだけなので、問題となるのは非有界なペイオフ関数の扱いである。Henry-Labordère [2012] では、非有界なペイオフ関数であっても、絶対値が 1 で抑えられるペイオフ関数に規格化する方法が示されているが、本稿の設定ではその方法をそのまま適用することはできない。簡単のため  $S_t$  は 1 次元であるとし、正の値を取ると仮定するが、より一般的な設定への拡張は可能である。

一旦、仮想的な設定ではあるが、BSDE の前進的シミュレーションによる近似解法が多項式近似を経由しないものとして考える。まず、このとき、これまでの議論をそのまま成立するための 1 つの十分条件は、滑らかな関数  $\rho: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  および関数  $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, \infty)$  が存在して、

$$|g(x, \theta)| \leq \rho(x)f(\theta), \tag{15}$$

となることであることを示す。

$$\hat{v}(t, x; \theta) := \frac{v(t, x; \theta)}{\rho(x)f(\theta)}, \quad \hat{g}(x, \theta) := \frac{g(x, \theta)}{\rho(x)f(\theta)},$$

と置き、 $\hat{v}$  を微分すると、(2) 式の PDE が修正され、

$$(\partial_t + \hat{\mathcal{L}})\hat{v} - \hat{r}\hat{v} - \beta\hat{v}^+ = 0, \quad \hat{v}(T, x; \theta) = \hat{g}(x, \theta), \tag{16}$$

という終端条件が 1 で抑えられた PDE が得られる。なお、

$$\hat{\mathcal{L}} := (\mu + \sigma^2 \rho^{-1} \rho') \partial_s + \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_s^2, \quad \hat{r} := r - \mu \rho^{-1} \rho' - \frac{1}{2} \rho^{-1} \rho'' \sigma^2, \tag{17}$$

.....  
33 順方向（注意 3.2 の脚注参照）であるようなペイオフ関数だけを挙げている。

である。ここで、(17) 式は、ともに  $\theta$  に依存していないことに注意されたい<sup>34</sup>。逆に、この PDE を解いて得られた  $\hat{v}$  に対し関数  $\rho$  と  $f$  を掛ければ  $v$  が得られる。多項式近似を経由することなく BSDE の前進的計算が可能であると仮定しているため、この  $\hat{v}$  がロビンス=モンローの条件 (A) を満たすことを示すことができれば、これまでの議論がそのまま適用できることになる。

(16) 式の PDE を BSDE の形に戻すと、

$$d\hat{V}_t^0 = \hat{r}\hat{V}_t^0 dt + \beta(\hat{V}_t^0)^+ dt + \hat{Z}_t^0 dW_t, \quad \hat{V}_T^0 = \hat{g}(S_T, \theta),$$

であるが、全体に  $f(\theta)$  を掛ければ、

$$d(f(\theta)\hat{V}_t^0) = \hat{r}(f(\theta)\hat{V}_t^0) dt + \beta(f(\theta)\hat{V}_t^0)^+ dt + f(\theta)\hat{Z}_t^0 dW_t, \quad f(\theta)\hat{V}_T^0 = f(\theta)\hat{g}(S_T, \theta),$$

となる。 $g(\cdot, \theta)$  の単調性から  $f(\theta)\hat{g}(\cdot, \theta)$  も単調である。したがって、上式において  $f(\theta)\hat{V}_t^0$  を 1 つの確率過程として捉えると、BSDE の比較定理により  $f(\theta)\hat{V}_0^0$  の単調性も言える。 $\hat{V}_0^0$  自体は一般的に単調性があるとは限らないが、 $f(\theta) > 0$  であるから、 $\theta^*$  を境に  $\hat{V}_0^0$  の正負が分離されることが言える。したがって、ロビンス=モンローの条件 (A) を満たしていることが確認できる。ペイオフ関数  $g$  の  $x$  と  $\theta$  に関する増大度に応じて適当な関数  $\rho$  と  $f$  を取れば、条件 (15) は現実的な多くのペイオフ関数で満たされるため、以上の議論により、ペイオフ関数が非有界であってもペイオフ関数に対する主な要請は  $\theta$  に対する単調性のみであることがわかる。

ここまでは、多項式近似を用いることなく前進的シミュレーションが使えるという仮定を置いていることに注意されたい。この仮定が成立していれば、議論は非常に単純で、ペイオフ関数に対する追加的な制約はほとんどない。しかし、本稿の方法では多項式近似を用いることで前進的シミュレーションを適用可能としているため、以下の考察が必要となる。

(15) 式を満たす関数  $\rho$  と  $f$  を用いて定義される  $\hat{v}$  に関する PDE は、上述の (16) 式の導出と同様にして、

$$(\partial_t + \hat{\mathcal{L}})\hat{v} + \beta\{F(\hat{v}) - \hat{v}\} = 0, \quad \hat{v}(T, x; \theta) = \hat{g}(x, \theta),$$

という終端条件が 1 で抑えられる PDE に帰着できるとする。BSDE で表せば、

$$d\hat{V}_t^0 = \beta\{\hat{V}_t^0 - F(\hat{V}_t^0)\} dt + \hat{Z}_t^0 dW_t, \quad \hat{V}_T^0 = \hat{g}(S_T, \theta),$$

である。先程の議論に沿えば、 $f(\theta)\hat{V}_0^0$  が、 $\theta$  に対して単調であることを示すことができれば、ここでも、ロビンス=モンローの条件 (A) の成立を示すことができる。

.....  
34 これは Henry-Labordère [2012] で提案されている変形と同様の方法であり、その論文の設定では、この変形を施すことで一般性を失うことなくペイオフ関数が 1 で抑えられるケースに帰着させることができる。

表3 関数  $\rho, f$  の定め方の例

約定条件	ペイオフ関数 $g_b(x, \theta)$	$\rho(x)$	$f(\theta)$	備考
スプレッド	$c\pi_b(x) + \theta$	$b$	$c +  \theta /b$	$c > 0$
キャップ	$\max\{c\pi_b(x), \theta\}$	$b$	$\max\{c, \theta/b\}$	$c > 0, \theta > 0$
ストライク	$(\theta - c\pi_b(x))^+$	$b$	$c + \theta/b$	$c > 0, \theta > 0$
ギアリング	$(\theta\pi_b(x) - c)^+$	$b$	$c + \theta/b$	$c > 0, \theta > 0$

しかし、上記 BSDE に  $f(\theta)$  を掛けると、

$$\begin{cases} d(f(\theta)\hat{V}_t^\theta) = \beta\{f(\theta)\hat{V}_t^\theta - f(\theta)F(\hat{V}_t^\theta)\}dt + f(\theta)\hat{Z}_t^\theta dW_t, \\ f(\theta)\hat{V}_T^\theta = f(\theta)\hat{g}(S_T, \theta), \end{cases}$$

となる。ここで、 $f(\theta)\hat{V}_t^\theta$  を 1つの確率過程と見たときのドライバーは  $x^+$  を近似した多項式部分が  $\theta$  に依存するうえ、 $\theta$  に対する単調性を持っていない。そのため、BSDE の比較定理を用いることができず、先程の議論を適用できない。

以上より、一般の非有界なペイオフ関数を持つデリバティブの場合、ペイオフ関数が約定パラメータに  $\theta$  に対して単調性であるという条件を課すだけでは不十分であることがわかる。

そこで、(15) 式に代わるより直接的な条件として、関数  $\rho$  と  $f$  を、

$$|\hat{g}(x, \theta)| \leq 1, \text{ かつ、} \theta_1 \leq \theta_2 \text{ ならば } \hat{g}(x, \theta_1) \leq \hat{g}(x, \theta_2), \quad (18)$$

を満たすように選ぶことができるという条件を考える。この条件を満たせば、BSDE の比較定理によってロビンズ=モンローの条件 (A) が成立することは明らかである。

しかし、前掲の表2で例示したような基本的なペイオフ関数であってもこれらの関数  $\rho, f$  を見つけ出すことは容易ではない。このため、 $x$  を有界な範囲で打ち切る次のようなペイオフ関数  $g_b(x, \theta)$  を考える。

$$g_b(x, \theta) := g(\pi_b(x), \theta), \quad \pi_b(x) := \max\{x, b\}.$$

$g_b(x, \theta)$  のようなペイオフ関数であれば、現実的な多くのペイオフ関数に対しては、発見的な方法で関数  $\rho, f$  を探し出すことはそれほど難しいことではなく、既述の議論のもとでロビンズ=モンロー・アルゴリズムを適用することができる。表3は、表2のペイオフ関数に対する関数  $\rho$  および  $f$  の例を示したものである。

直感的には、 $b > 0$  を十分大きくとれば、ペイオフ関数  $g_b(x, \theta)$  に対する逆問題の解は、もとのペイオフ関数  $g(x, \theta)$  に対する逆問題の解に非常に近い値を取ることが期待できる。実際、 $g_b(x, \theta)$  をペイオフ関数とするデリバティブの価格を  $B_0^\theta$  とし、

この  $B_0^\theta$  を基準とした逆問題の解  $\theta$  が求まったとすると、補論 1 の命題 A-1.4 により、もとのペイオフ関数での価格  $V_0^\theta$  との差が、

$$|V_0^\theta - B_0^\theta| \leq e^{L(1+L)T} \sqrt{E^Q[\delta_b^2(S_T, \theta)]},$$

$$L = r + \beta, \quad \delta_b(x, \theta) := g(x, \theta) - g_b(x, \theta),$$

と評価できる<sup>35</sup>。満期時点での原資産価格の分布が正規分布に従うような場合は、 $b$  を増大させていけば原資産価格が  $b$  を超える確率は指数的に減少するから、十分大きな  $b$  を取っておけば、 $E^Q[\delta_b^2(S_T, \theta)]$  は実務上不都合が生じない程度に小さいことが期待できる。

**注意 4.5** Henry-Labordère [2012] においては特に制約とならなかった  $|\phi(x)| \leq 1$  という規格化が、本稿の手法においては制約となる。一方、一般的な前進後退確率微分方程式 (Forward Backward Stochastic Differential Equation : 以下、FBSDE) を前進的なシミュレーションを用いて近似計算する手法として、Fujii and Takahashi [2012] は、インタラクティング・パーティクル法 (Interacting Particle Method) と呼ばれる方法を考案している。そこでは、多項式近似ではなく漸近展開を用いた近似が用いられているほか、終端条件を規格化することも求めている。この手法とロビンズ=モンロー・アルゴリズムを用いた逆問題の求解問題については、別途、孕石 [2014] で論じているので参照されたい。

## (5) 金利が確率変動する場合

Burgard and Kjaer [2011] では、金利が確率変動する場合にも、(2) 式と同様の PDE が成立することを示した。したがって、本稿の手法は  $r$  および  $\beta$  が確率的に変動する設定に対しても、直ちに拡張可能である。ただし、次の仮定は満たされているとする。

**仮定 4.6** 確率変動する金利を  $r_t, \beta_t$  で表すことにすると、これらは適当な有界ボレル可測関数  $r$  および  $\beta$  によって、

$$r_t = r(t, S_t), \quad \beta_t = \beta(t, S_t),$$

と表され、それぞれ  $\{\mathcal{F}_t\}$ -発展的可測である。

.....  
<sup>35</sup>  $L$  は BSDE における一様リプシッツ条件が与える係数であり、ここでは  $r + \beta$  と置くことができる (一様リプシッツ条件については補論 1 参照)。

これは、金利やクレジットによるコストの時価に占める割合が(1)式の前進的な確率微分方程式によってのみ規定され、デリバティブの価格自身には影響されないということの意味する。例えば、独立担保が存在するような場合は、デリバティブ価格自身の影響が担保コストの比率を変化させる。独立担保が取引に占める負担が、デリバティブ価格の水準によって相対的に変化するからである。そのようなモデルは本稿の計算手法の枠組みを超えることになり適用することはできない。

## 5. 数値計算

### (1) デジタル・オプション

ここでは、Henry-Labordère [2012] の数値検証で利用されたデジタル・オプションについて、同論文で用いられたものと同じパラメータのもとで逆問題を解く数値計算を行う。

原資産は  $S_0 = 1$  から出発する 1 次元の確率過程とし、満期  $T$  のペイオフは、ペイオフ関数

$$g(x) := \begin{cases} 1 & (x < 1) \\ -1 & (x \geq 1), \end{cases}$$

を用いて、 $g(S_T)$  で与えられる。ここでは、CVA を考慮した逆問題としてフォワード・プレミアム  $\theta$  の計算を取り上げる。この場合、(8) 式のとおり、 $g(x, \theta) := g(x) - \theta$  とすればよい。なお、 $|g(x, \theta)| \leq 1$  が一般には成立しないので、(18) 式を満たすよう適切に式変形を行う必要がある。そのためには、4 節 (4) での議論を踏まえ、 $\rho(x) \equiv 1$  および  $f(\theta) = 1 + |\theta|$  を用いて変形すればよい。このとき、 $\hat{g}(x, \theta) = g(x, \theta)/(1 + |\theta|)$  は図 5 のような形状をしており、 $g(x)$  の値によらず  $\theta$  について単調であることがわかる。

また、原資産はブラック=ショールズ・モデル

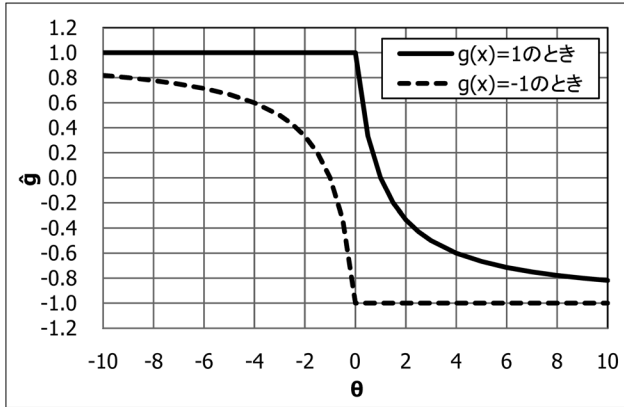
$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

に従うとし、パラメータの値は  $r = 0.0, \sigma = 0.2$  とする。さらに、(11) 式の変形を行い、符号と割引きについて整理すると、

$$(\partial_t + \mathcal{L})v + \beta(v^+ - v) = 0, \quad v(T, x; \theta) = -\frac{g(x, \theta)}{1 + |\theta|}, \quad (19)$$



図 5 修正されたペイオフ関数



という PDE が得られる。これをさらに多項式  $F$  で近似するので、最終的に、

$$(\partial_t + \mathcal{L})v + \beta(F(v) - v) = 0, \quad v(T, x; \theta) = -\frac{g(x, \theta)}{1 + |\theta|}, \quad (20)$$

という PDE を解けばよいことがわかる。クレジット・スプレッド  $\beta$  としては、0.01 および 0.03 の場合を考え、満期  $T$  については、 $T = 2, 4, 6, 8, 10$  の場合を考える。

多項式  $F$  は Henry-Labordère [2012] と同様に、

$$F(x) = 0.0589 + 0.5x + 0.8164x^2 - 0.4043x^4, \quad (21)$$

を用いる<sup>36</sup>。分岐の際の分岐数を規定する確率  $\{p_k\}$  については、Henry-Labordère [2012] において分散を最小化する  $\{p_k\}$  の定め方が与えられている。具体的には、

表 4 反復的 PDE 計算による解 ( $\beta = 0.01$ )

$T$	多項式近似なし	多項式近似あり	近似誤差
2	0.10751	0.10746	-0.05%
4	0.14872	0.14863	-0.06%
6	0.17895	0.17884	-0.06%
8	0.20348	0.20338	-0.05%
10	0.22437	0.22428	-0.04%

.....  
<sup>36</sup> Henry-Labordère [2012] では、この多項式の選定方法についての言及がないものの、後の 5 節 (3) で触れているように、区間  $[-1, 1]$  上で  $x^+$  との二乗誤差最小化によって 4 次多項式の係数を定めれば、この多項式と概ね一致したものが得られる。

表5 反復的 PDE 計算による解 ( $\beta = 0.03$ )

$T$	多項式近似なし	多項式近似あり	近似誤差
2	0.09760	0.09745	-0.15%
4	0.12905	0.12874	-0.24%
6	0.14964	0.14921	-0.29%
8	0.16464	0.16409	-0.33%
10	0.17609	0.17540	-0.39%

に応じて、次のように定めればよい。

$$p_k = \frac{|a_k| \|\hat{g}\|_\infty^k}{\sum_{i=0}^M |a_i| \|\hat{g}\|_\infty^i}, \quad \|\hat{g}\|_\infty = \sup_{x>0} |\hat{g}(x, \theta)|.$$

この例は次元数が小さく、(20) 式の PDE や多項式近似する前の (19) 式の PDE の双方を数値的に解くことが可能である。また、 $\theta$  を変えながら反復計算することで、発見的ではあるが逆問題を解くことも可能であるため、こうして得られた計算結果を、本稿の数値計算の精度を検証する際のベンチマークとして利用する。反復的な数値計算により得られたフォワード・プレミアムの値は表 4 および表 5 のとおりである。

図 6~9 は、 $T = 2$  および  $T = 10$  について、本稿で提案する手法による計算結果をベンチマークに対する誤差で示したものである。シミュレーションに伴う誤差を含む手法であるため、一連の手続きを 100 回行い、それぞれに対しベンチマークからの誤差率<sup>37</sup> を求めている。各点の縦線は、100 回の計算における誤差率の中央値および上下 25% 点をプロットしたものである（数値の詳細や他の満期については補論 3 参照）。

なお、ロビンソン=モンロー・アルゴリズムでは、 $\theta$  の初期値および更新の程度を規定する系列  $\{\gamma_n\}$  に任意性があるが、本稿の数値計算では  $\theta$  の初期値ゼロ、 $\gamma_n = 1/n$  を用いた。

シミュレーション回数を増やすほどベンチマークへ接近しており、本稿の手法の妥当性を数値的に確認できる。一方で、満期  $T$  が大きくなるほど、あるいはクレジット・スプレッド  $\beta$  が大きくなるほど PDE の多項式近似に起因した真値との乖離が無視できなくなる。

.....  
37 ここでは、(シミュレーション値 - ベンチマーク) ÷ ベンチマーク の絶対値を誤差率と定めている。

図 6  $T = 2, \beta = 0.01$

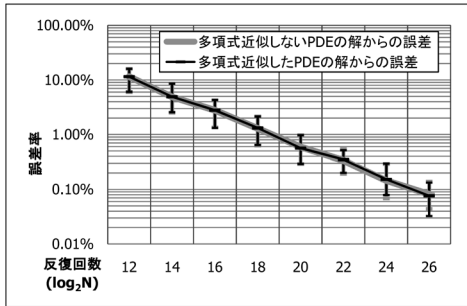


図 7  $T = 2, \beta = 0.03$

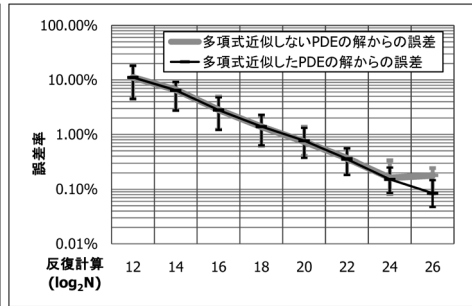


図 8  $T = 10, \beta = 0.01$

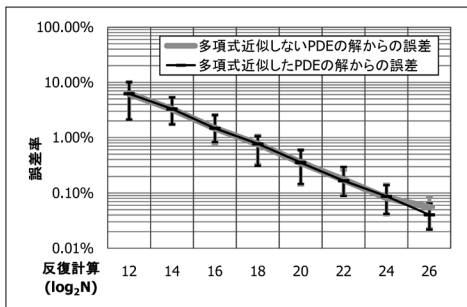
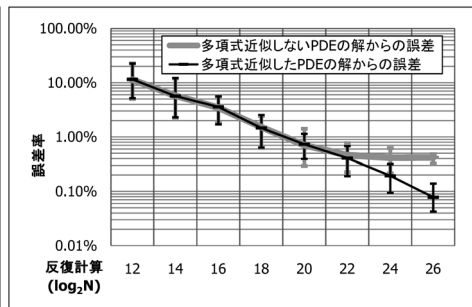


図 9  $T = 10, \beta = 0.03$



## (2) 分散減少法の適用

通常のモンテカルロ法と同様に、ロビンソン=モンロー・アルゴリズムでも、適当な分散減少法<sup>38</sup>を適用することで計算精度が向上することが期待される。ここでは制御変量法と呼ばれる分散減少法の適用を試みる。表記を単純にするため、ペイオフ関数  $g(x, \theta)$  はあらかじめ  $|g(x, \theta)| \leq 1$  を満たしているものとし、CVA を考慮したデリバティブ価格  $v(t, S; \theta)$  に対応する PDE は

$$(\partial_t + \mathcal{L})v - rv - \beta v^+ = 0, \quad v(T, x; \theta) = g(x, \theta),$$

であるとする。

制御変量法では、元の確率変数と高い相関を持ち、期待値が容易に計算できるものを制御変量として用意する。適当に固定した  $\theta^0$  を約定条件パラメータとしたときの、CVA を考慮しないデリバティブ価格を  $\tilde{v}(t, S; \theta^0)$  と表すと、これは、PDE

$$(\partial_t + \mathcal{L})\tilde{v} - r\tilde{v} = 0, \quad \tilde{v}(T, x; \theta^0) = g(x, \theta^0), \quad (22)$$

.....  
38 分散減少法の各手法については Glasserman [2004] Chapter 4 などを参照。

の解となっている。ここで、CVA を考慮しなければ、この値は容易に算出可能であると仮定し、 $\tilde{v}(0, s_0; \theta^0) = \alpha$  となるような定数  $\alpha$  が求められているとする。さらに、(22) 式を変形すると、

$$(\partial_t + \mathcal{L})\tilde{v} + \beta\{\tilde{\gamma}\tilde{v} - \tilde{v}\} = 0, \quad \tilde{v}(T, x; \theta) = g(x, \theta), \quad \tilde{\gamma} := (\beta - r)/\beta,$$

となるが、 $\tilde{\gamma}\tilde{v}$  の部分を、 $\tilde{a}_k = \tilde{\gamma}$  ( $k = 1$ ),  $= 0$  ( $k \neq 1$ ) という係数を持つ多項式  $\tilde{F}(x) = \sum_{k=0}^M \tilde{a}_k x^k$  を用いた項とみなせば、これはマーク付き分枝拡散過程を利用して計算することが可能である。分岐確率  $\{p_k\}$  として CVA 込みの価格を計算する際に用いるものと同じのものを利用することにすれば、共通のサンプル・パスによって 2 変数が計算できて、

$$\begin{aligned} V_0^\theta &= E^{0, z_0} \left[ \prod_{i=1}^{N_T} g(z_T^i, \theta) \prod_{k=0}^M \left( \frac{a_k}{p_k} \right)^{\omega_k} \right] \\ &= E^{0, z_0} \left[ \prod_{i=1}^{N_T} g(z_T^i, \theta) \prod_{k=0}^M \left( \frac{a_k}{p_k} \right)^{\omega_k} - \prod_{i=1}^{N_T} g(z_T^i, \theta^0) \prod_{k=0}^M \left( \frac{\tilde{a}_k}{p_k} \right)^{\omega_k} + \alpha \right], \end{aligned}$$

という表現を得る。この式を利用してロビンソン=モンロー・アルゴリズムで  $\theta$  を求めればよい。

図 10~13 では制御変量法の有無による収束の速さを比較している。5 節 (1) と同様に、100 回の計算結果について、その誤差率の中央値および上下 25% 点をプロットした。なお、ここでは多項式近似に伴う誤差を含まない解からの誤差率を表示している。モデルやパラメータは 5 節 (1) と同様に設定し、 $\theta$  の初期値はゼロとした。また、 $\theta^0$  には任意性があるが、本稿では  $\alpha = 0$  となるような  $\theta^0$  を逆算して求めた。

結果を見ると、満期  $T$  が小さいほど、またクレジット・スプレッド  $\beta$  が小さいほど、分散減少効果は大きい。分散減少法の有無による収束の違いを見ると、図 10 ( $T = 2, \beta = 0.01$ ) では、同程度の収束を達成するまでの時間が 10~20 倍程度高速化している一方、図 13 ( $T = 10, \beta = 0.03$ ) ではほとんど高速化できていないことがわかる。これは、CVA が相対的に小さいほど、カウンターパーティ・リスク・フリーな価格との連動が強く、導入した変量が制御変量として有効であるためと考えられる。また、分散減少効果が存在する場合でも、多項式近似に伴う誤差以上の収束はできないため、分散減少法の効果は頭打ちとなる。そこで、5 節 (3) では、多項式近似に伴う誤差を減少させる方法について考える。

図 10  $T = 2$ ,  $\beta = 0.01$ 、  
制御変量法あり

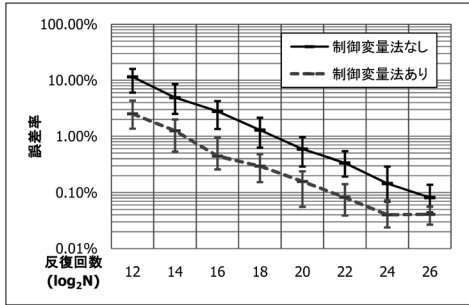


図 11  $T = 2$ ,  $\beta = 0.03$ 、  
制御変量法あり

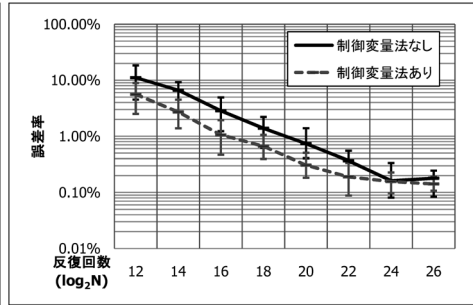


図 12  $T = 10$ ,  $\beta = 0.01$ 、  
制御変量法あり

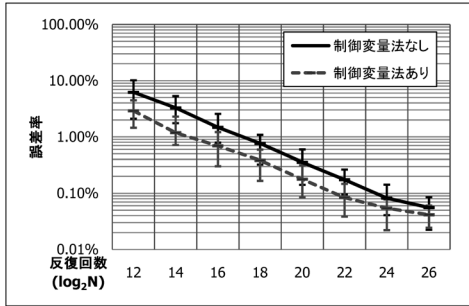
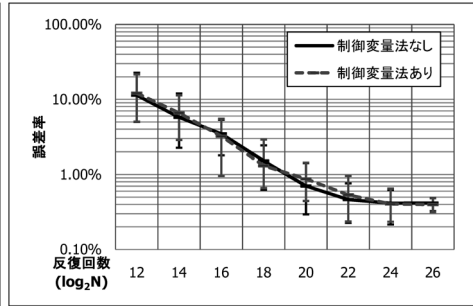


図 13  $T = 10$ ,  $\beta = 0.03$ 、  
制御変量法あり



### (3) 高次多項式の利用

多項式近似に伴う誤差を減少させるために、より高次の多項式を利用することを試みる。

区間  $[-1, 1]$  の上で、二乗誤差  $\int \{F(x) - x^+\}^2 dx$  を最小にする  $F(x) = \sum_{k=0}^M a_k x^k$  を考え、 $M = 6$  とした 6 次多項式  $F_6(x)$  および  $M = 8$  とした 8 次多項式  $F_8(x)$  を次のとおり求めた。

$$F_6(x) = 0.0427 + 0.5x + 1.1536x^2 - 1.4099x^4 + 0.7332x^6,$$

$$F_8(x) = 0.0336 + 0.5x + 1.4804x^2 - 3.2076x^4 + 3.8491x^6 - 1.6692x^8.$$

Henry-Labordère [2012] の Proposition 1 によれば、マーク付き分枝拡散過程による期待値表現が約定条件パラメータ  $\theta$  によらずに可積分となるための十分条件は、

図 14  $T = 2, \beta = 0.01$ 、  
6 次多項式近似

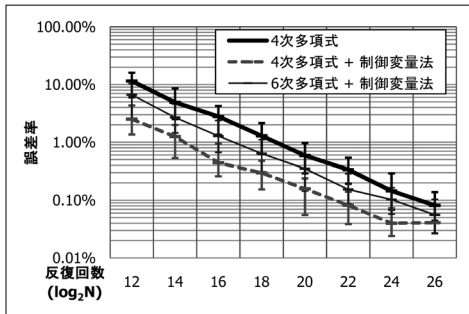


図 15  $T = 2, \beta = 0.03$ 、  
6 次多項式近似

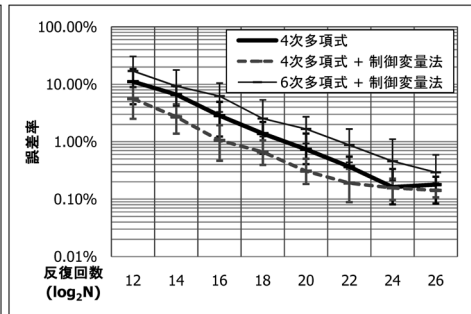


図 16  $T = 10, \beta = 0.01$ 、  
6 次多項式近似

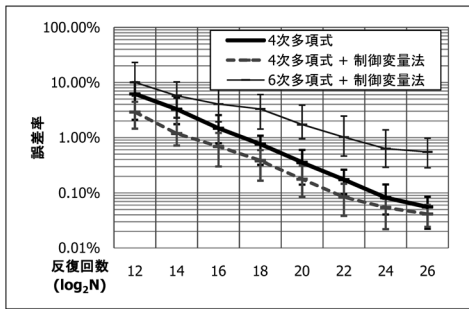
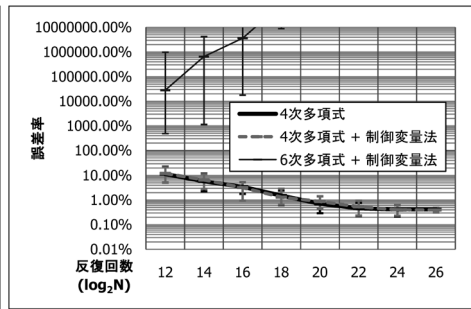


図 17  $T = 10, \beta = 0.03$ 、  
6 次多項式近似



$q(x) := \sum_{k=0}^M |a_k| x^k$  に対して、 $q(1) \leq 1$  が成立するか、もしくは、

$$\int_1^b \frac{dx}{q(x) - x} = \beta T,$$

となるような  $1 < b < \infty$  が存在することである。

$M = 4, 6, 8$  に対応する  $q(x)$  をそれぞれ  $q_4(x), q_6(x), q_8(x)$  と表す<sup>39</sup>。いずれも  $q_M(1) > 1$  を満たしている。また、数値計算から、

$$\int_1^\infty \frac{dx}{q_4(x) - x} = 0.5083, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{q_6(x) - x} = 0.0993, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{q_8(x) - x} = 0.0213,$$

となる。したがって、 $\beta = 0.01$  の場合、4 次多項式であれば  $T < 50.83$  であることが

.....  
39  $q_4(x)$  に対応させる多項式は (21) 式とした。Henry-Labordère [2012] ではこの多項式の導出方法について言及していないものの、二乗誤差最小化によって求めた 4 次多項式に概ね一致していることが確認できる。

可積分であるための十分条件となっているものの、 $M = 6, 8$  と多項式の次数を上げると、十分条件はそれぞれ  $T < 9.93$  および  $T < 2.13$  となり、実務上はかなりの制約となる。 $\beta = 0.03$  とすると、さらに制約は厳しくなり、可積分であるための十分条件は  $M = 4, 6, 8$  に対してそれぞれ、 $T < 16.94$ 、 $T < 3.31$ 、 $T < 0.71$  となる。

ここでは、可積分あるいは二乗可積分条件を必ずしも満たしているわけではないが、6次多項式に対して形式的にロビンス=モンロー・アルゴリズムを適用し、収束の様子を確認したものを図 14~17 に示した。5 節 (2) で示した制御変量法を適用したうえで、100 回の計算結果の中央値および上下 25% 点を記している。

図から、 $T$  を大きくすると可積分条件が満たされず、計算精度が悪くなったり、発散してしまう様子が確認できる。また、可積分条件を満たす  $T = 2$  であっても誤差率が大いほか、計算精度の向上を目的として 6 次多項式を導入したものの、その効果を確認できるほど精度よく解が求まっていない。近似多項式の決定においては単純な二乗誤差最小化という基準を採用しているものの、6 次以上の高次多項式を使うメリットはほとんどないと考える。

## 6. まとめ

本稿では、CVA を考慮した逆問題を効率的に求解する手法を提案した。

ここでは、Henry-Labordère [2012] によるマーク付き分枝拡散過程の方法とロビンス=モンロー・アルゴリズムを組み合わせ、いくらかのバイアスが生じてしまうものの、1 回のシミュレーション計算によって逆問題を数値的に求解する手法を構築した。さらに、本稿が提案する手法が現実的なペイオフ関数を持つデリバティブの約定条件を決定する際に適用可能であるだけでなく、その適用範囲が十分に広いことも示した。

数値実験では、簡単なモデルながら、実際の問題について真値への収束を確認し手法の実用性が十分高いことを示したうえで、分散減少法による高速化も提案した。なお、計算結果をやや詳細に見ると、PDE を多項式近似している部分を原因として、真値からわずかにずれた値への収束となることが確認できている。もっとも、これはビッド・アスク・スプレッドが比較的大きな CVA では実務上十分許容可能な計算誤差であると考えてよい<sup>40</sup>。

最後に、Henry-Labordère [2012] と前後して Fujii and Takahashi [2012] も FBSDE

.....  
40 この数値計算ではリスク中立確率  $Q$  が一意に定まるよう、各種パラメータを明示的に設定したが、実際には、不確実性を完全に排除することができないデフォルトに関するリスク・ファクターなどにより、非完備となる場合が多い。通常はこうした非完備性に起因する価格の曖昧さもビッド・アスク・スプレッドに含まれているという点には注意する必要がある。

を前進的なシミュレーションにより解く方法を提案していることを付け加えたい。当該手法を、本稿の手法における Henry-Labordère [2012] の手法に置き換える可能性を確認することは、興味深い課題である。これについては、別途、孕石 [2014] において論じているので参照されたい。



## 参考文献

- 富安弘毅、『カウンターパーティーリスクマネジメント トレーディングとの融合によるリスク管理の収益源化』、金融財政事情研究会、2010年
- 孕石匡弘、「CVA 逆問題の確率的求解の汎用化：インタラクティング・パーティクル法の活用」、『金融研究』第33巻第2号、日本銀行金融研究所、2014年、91～126頁（本号所収）
- 吉田敏弘、「Forward Backward Stochastic Differential Equations に関する一考察」、『金融研究』、第23巻別冊第1号、日本銀行金融研究所、2004年、1～36頁
- Arouna, Bouhari, “Robbins-Monro Algorithms and Variance Reduction in Finance,” *Journal of Computational Finance*, 7(2), 2004, pp.35–62.
- Bielecki, Tomasz R., and Marek Rutkowski, *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*, Springer, 2002.
- Brigo, Damiano, and Massimo Morini, “Close-Out Convention Tensions,” *Risk Magazine*, December, 2011, pp.74–78.
- Burgard, Christoph, and Mats Kjaer, “Partial Differential Equation Representations of Derivatives with Bilateral Counterparty Risk and Funding Costs,” *The Journal of Credit Risk*, 7(3), 2011, pp.75–93.
- Cesari, Giovanni., John Aquilina, Niels Charpillon, Zlatko Filipović, Gordon Lee, and Ion Manda, *Modelling, Pricing, and Hedging Counterparty Credit Exposure: A Technical Guide*, Springer, 2010.
- Chen, Han Fu, and Yun Min Zhu, “Stochastic Approximation Procedures with Randomly Varying Truncations,” *Scientia Sinica*, 1(29), 1986, pp.914-926.
- Crépey, Stéphane, “Bilateral Counterparty Risk Under Funding Constraints—Part I: Pricing,” *Mathematical Finance*, forthcoming, 2012a.
- , “Bilateral Counterparty Risk under Funding Constraints—Part II: CVA,” *Mathematical Finance*, forthcoming, 2012b.
- Duflo, Marie, *Random Iterative Models*, Springer-Verlag, 1997.
- El Karoui, Nicole, Shige Peng, and Marie Claire Quenez, “Backward Stochastic Differential Equations in Finance,” *Mathematical Finance*, 7(1), 1997, pp.1–71.
- Fujii, Masaaki, and Akihiko Takahashii, “Derivative Pricing Under Asymmetric and Imperfect Collateralization and CVA,” CARF Working Paper, CARF-F-240, 2010.
- , and ———, “Choice of Collateral Currency,” *Risk Magazine*, Jan., 2011, pp.120-125.
- , and ———, “Perturbative Expansion Technique for Non-linear FBSDEs with Interacting Particle Method,” CARF Working Paper, CARF-F-278, 2012.
- Glasserman, Paul, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2004.

- Henry-Labordère, Pierre, “Cutting CVA’s Complexity,” *Risk Magazine*, July, 2012, pp.67-73.
- Lelong, Jérôme, “Almost sure Convergence of Randomly Truncated Stochastic Algorithms Under Verifiable Conditions,” *Statistics & Probability Letters*, 78(16), 2008, pp.2632-2636.
- Lemaire, Vincent, and Gilles Pagès, “Unconstrained Recursive Importance Sampling,” *The Annals of Applied Probability*, 20(3), 2010, pp.1029–1067.
- Longstaff, Francis A., and Eduardo S. Schwartz, “Valuing American Options by Simulation: A Simple Least Square Approach,” *Review of Financial Studies*, 14(1), 2001, pp.113–147.
- Ma, Jin, Philip Protter, and Jiongmin Yong, “Solving Forward-Backward Stochastic Differential Equations Explicitly—A Four Step Scheme,” *Probability Theory and Related Fields*, 98(3), 1994, pp.339–359.
- Ma, Jin, and Jiongmin Yong, *Forward-Backward Stochastic Differential Equations and their Applications*, Springer, 2000.
- Pardoux, Etienne, and Shige Peng, “Adapted Solution of a Backward Stochastic Differential Equation,” *Systems & Control Letters*, 14(1), 1990, pp.55–61.
- Piterbarg, Vladimir, “Funding beyond Discounting: Collateral Agreements and Derivatives Pricing,” *Risk Magazine*, February, 2010, pp.97–102.
- Robbins, Herbert, and Sutton Monro, “A Stochastic Approximation Method,” *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(3), 1951, pp.400–407.

## 補論 1. 後退確率微分方程式 (BSDE)

BSDE について概説する。BSDE の解説書としては、Ma and Yong [2000] が FBSDE も含めて詳しく、本補論の表記や定理の主張についても基本的にそれに従っている。ファイナンスと関連付けて解説したものとしては、El Karoui, Peng and Quenez [1997] がある。日本語による BSDE・FBSDE の詳しい解説はあまりないが、吉田 [2004] にはファイナンスへの具体的な応用が記載されており参考になる。

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$  を通常条件を満たしたフィルタ付き確率空間とし、フィルトレーション  $\{\mathcal{F}_t\}$  は  $d$  次元標準ウィーナー過程  $W_t$  によって生成されているとする。また、次の記号を定義しておく。

- $L^2_{\mathcal{F}_T}(\mathbf{R})$  :  $\mathcal{F}_T$ -可測で、二乗可積分な  $\mathbf{R}$ -値確率変数の全体
- $L^2_{[0,T]}(\mathbf{R}), L^2_{[0,T]}(\mathbf{R}^d)$  :  $\{\mathcal{F}_t\}$ -発展的可測な  $\mathbf{R}$ -値もしくは  $\mathbf{R}^d$ -値確率過程  $X_t$  で、 $\int_0^T E[\|X_t\|^2]dt < \infty$  を満たすもの全体
- $L^{2,c}_{[0,T]}(\mathbf{R})$  :  $\{\mathcal{F}_t\}$ -発展的可測な  $\mathbf{R}$ -値連続確率過程  $X_t$  で、 $E[\sup_{0 \leq t \leq T} X_t^2] < \infty$  を満たすもの全体
- $L^{2,Lip}_{[0,T]}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^d; \mathbf{R})$  :  $[0, T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \times \Omega$  から  $\mathbf{R}$  への関数  $f$  で、次の①～③を満たすもの全体
  - ① すべての  $y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}^d$  に対して  $(t, \omega) \mapsto f(t, y, z; \omega)$  は  $\{\mathcal{F}_t\}$ -発展的可測
  - ②  $f(t, 0, 0; \omega) \in L^2_{[0,T]}(\mathbf{R})$
  - ③  $L > 0$  が存在し、すべての  $y_1, y_2 \in \mathbf{R}, z_1, z_2 \in \mathbf{R}^d$  とほとんどすべての  $t \in [0, T]$  に対して、確率 1 で、 $|f(t, y_1, z_1; \omega) - f(t, y_2, z_2; \omega)| \leq L(|y_1 - y_2| + \|z_1 - z_2\|)$  が成立する (一様リプシッツ条件)
- $\mathcal{N}[0, T] := L^{2,c}_{[0,T]}(\mathbf{R}) \times L^2_{[0,T]}(\mathbf{R}^d)$

$\xi \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\mathbf{R})$  および  $h \in L^{2,Lip}_{[0,T]}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^d; \mathbf{R})$  に対し、次のように形式的に方程式を定める。

$$\begin{cases} dY_t = h(t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dW_t, & t \in [0, T], \\ Y_T = \xi. \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

これを終端条件  $\xi$ 、ドライバー  $h$  の BSDE と呼ぶ。BSDE は対  $(Y_t, Z_t)$  に関する方程式となっており、1 つの方程式から解となる 2 つの確率過程を導くことになる。この方程式の解を求めるということの正確な定義は次のとおりである。

**定義 A-1.1** (BSDE の解)  $(Y_t, Z_t) \in \mathcal{N}[0, T]$  が (A-1) 式の BSDE の解であるとは、

すべての  $t \in [0, T]$  に対して、確率 1 で、

$$Y_t = \xi - \int_t^T h(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s,$$

を満たすことをいう。

BSDE の解の存在と一意性は、Pardoux and Peng [1990] によって示された。

**定理 A-1.2** (BSDE の解の一意存在定理)  $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\mathbf{R})$  かつ  $h \in L^{2,Lip}_{[0,T]}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^d; \mathbf{R})$  であるならば、(A-1) 式の BSDE の解  $(Y_t, Z_t) \in \mathcal{N}[0, T]$  の存在と一意性が言える。

証明は Pardoux and Peng [1990] の Theorem 3.1 もしくは Ma and Yong [2000] の Chapter 1 Theorem 4.2 を参照されたい。次の定理が、本稿で提案する手法の正当化に必要な、BSDE の比較定理である。

**定理 A-1.3** (BSDE の比較定理)  $i = 1, 2$  に対して、

$$dY_t^i = -h^i(t, Y_t^i, Z_t^i) dt + Z_t^i dW_t, \quad Y_T^i = \xi^i,$$

という BSDE を考える<sup>41</sup>。このとき、 $\xi^1 \leq \xi^2$  と、任意の  $(t, y, z) \in [0, T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$  に対する  $h^1(t, y, z) \leq h^2(t, y, z)$  という 2 つの大小関係が確率 1 で成立しているならば、任意の  $t \in [0, T]$  に対し、解に対する大小関係  $Y_t^1 \leq Y_t^2$  も確率 1 で成立する。

証明は Ma and Yong [2000] の Chapter 1 Theorem 6.1 を参照されたい。次の命題も本稿で利用している。

**命題 A-1.4**  $i = 1, 2$  に対し、 $\xi^i \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\mathbf{R})$  を任意に取る。また、 $(Y^i, Z^i) \in \mathcal{N}[0, T]$  を次の BSDE

$$dY_t^i = h(t, Y_t^i, Z_t^i) dt + Z_t^i dW_t, \quad Y_T^i = \xi^i,$$

の解とする。このとき、任意の  $t \in [0, T]$  に対し、次の不等式

$$E[(Y_t^1 - Y_t^2)^2] \leq CE[(\xi^1 - \xi^2)^2], \quad C = e^{2L(1+L)(T-t)},$$

が成立する。ここで、 $L$  は  $h$  の一様リプシッツ条件が与える係数である。

**証明** Ma and Yong [2000] には、ドライバーが異なる場合の評価を与えた定理 (Chapter 1 Theorem 4.2) がある。以下の議論はその定理の証明に倣っている。

.....  
41 ドライバーにマイナスの符号が付いていることに注意する。

まず、次のように記号を定める。

$$\hat{Y}_t := Y_t^1 - Y_t^2, \quad \hat{Z}_t := Z_t^1 - Z_t^2, \quad \hat{\xi} := \xi^1 - \xi^2.$$

次に、 $\hat{Y}_t^2$  に対して伊藤の公式を適用すると、

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t^2 + \int_t^T \|\hat{Z}_s\|^2 ds &= \hat{\xi}^2 - 2 \int_t^T \hat{Y}_s \{h(s, Y_s^1, Z_s^1) - h(s, Y_s^2, Z_s^2)\} ds - 2 \int_t^T \hat{Y}_s \hat{Z}_s dW_s \\ &\leq \hat{\xi}^2 + 2L \int_t^T |\hat{Y}_s| \{|\hat{Y}_s| + \|\hat{Z}_s\|\} ds - 2 \int_t^T \hat{Y}_s \hat{Z}_s dW_s \\ &\leq \hat{\xi}^2 + \int_t^T \{(2L + 2L^2)\hat{Y}_s^2 + \frac{1}{2}\|\hat{Z}_s\|^2\} ds - 2 \int_t^T \hat{Y}_s \hat{Z}_s dW_s, \end{aligned}$$

となるから、辺々期待値を取って、

$$E[\hat{Y}_t^2] + \frac{1}{2} \int_t^T E[\|\hat{Z}_s\|^2] ds \leq E[\hat{\xi}^2] + (2L + 2L^2) \int_t^T E[\hat{Y}_s^2] ds,$$

となる。特に、

$$E[\hat{Y}_t^2] \leq E[\hat{\xi}^2] + (2L + 2L^2) \int_t^T E[\hat{Y}_s^2] ds,$$

であるから、 Gronwall の不等式<sup>42</sup> を適用することで主張を得る。

以上が本稿の内容に関連した BSDE の基本的事項である。BSDE のより詳細な話題については参考文献を参照されたい。

.....  
42 Gronwall の不等式は、実数に値を取る  $[0, T]$  上の連続関数  $f(t)$ 、非増加関数  $a(t)$ 、非負連続関数  $b(t)$  が、 $[0, T]$  上で  $f(t) \leq a(t) + \int_t^T b(s)f(s)ds$  を満たすならば、 $f(t) \leq a(t) \exp(\int_t^T b(s)ds)$  が成立することを保証する。

## 補論 2. 清算時 CVA なしの場合

デフォルト時の清算の際に CVA を考慮しない場合について考える。  
 約定条件パラメータ  $\theta$  を明示して表せば、この場合の PDE は、

$$\begin{cases} (\partial_t + \mathcal{L})v + h(Rm^+ + m^- - v) - rv = 0, & v(T, x; \theta) = g(x, \theta), \\ (\partial_t + \mathcal{L})m - rm = 0, & m(T, x; \theta) = g(x, \theta), \end{cases}$$

となる。 $V_t^\theta = v(t, S_t; \theta)$  がこの場合の CVA を考慮した価格である。

Henry-Labordère [2012] は、清算時 CVA なしの場合の価格  $v$  に対応する PDE を、

$$(\partial_t + \mathcal{L})v + \frac{\beta}{1-R}\{(1-R)m^+ + Rm - v\} = 0, \quad v(T, x; \theta) = g(x, \theta),$$

の形に帰着させ、 $(1-R)x^+ + Rx$  を多項式  $F(x)$  で近似した。すなわち、

$$(\partial_t + \mathcal{L})v + \frac{\beta}{1-R}\{F(m) - v\} = 0, \quad v(T, x; \theta) = g(x, \theta), \quad (\text{A-2})$$

に、マーク付き分枝拡散過程による表現を与え、前進的シミュレーションの適用を可能とした。このため、単調性、すなわち、

$$\theta_1 \leq \theta_2 \text{ ならば、すべての } x \in \mathbf{R}^d \text{ に対して、} g(x, \theta_1) \leq g(x, \theta_2),$$

という性質を満たすペイオフ関数のもとで、

$$\theta_1 \leq \theta_2 \text{ ならば、} V_t^{\theta_1} \leq V_t^{\theta_2},$$

が成立することを示せば、本稿の手法が清算時 CVA なしの場合でも正当化できる。  
 しかし、これは常に成立するとは限らない。

まず、CVA を考慮しないデリバティブ価格を  $M_t^\theta$  と表す。明らかに、

$$\theta_1 \leq \theta_2 \text{ ならば、} M_t^{\theta_1} \leq M_t^{\theta_2},$$

である。次に、(A-2) 式の PDE に対応する BSDE を導出すると、

$$dV_t^\theta = \frac{\beta}{1-R}V_t^\theta dt - \frac{\beta}{1-R}F(M_t^\theta)dt + Z_t^\theta dW_t, \quad V_T^\theta = g(S_T, \theta),$$

である。したがって、BSDE の比較定理を用いるためには、ドライバーに関する不等式

$$\frac{\beta}{1-R}v - \frac{\beta}{1-R}F(M_t^{\theta_1}) \geq \frac{\beta}{1-R}v - \frac{\beta}{1-R}F(M_t^{\theta_2}),$$

を示せばよい。しかし、 $F(M_t^\theta)$  を多項式近似適用前の  $(1-R)(M_t^\theta)^+ + RM_t^\theta$  という形に置き換えれば、 $M_t^\theta$  の単調性から上記の不等式は成立するが、 $F(M_t^\theta)$  を含んだ上記不等式では必ずしも成立するとは限らない。

### 補論 3. 数値計算結果

本稿の数値計算の結果を、表 A-1 から表 A-10 にまとめた。表の値は、誤差率について、100 回のシミュレーションでの中央値、および上下 25% 点を求めたものである。ここでいう誤差率は、多項式近似を含まない (12) 式の PDE を反復的に解いて計算した解との乖離率を示したものである。

図 A-1 から図 A-6 は  $T = 4, 6, 8$  についてプロットしたものである。

表 A-1  $T = 2$ 、 $\beta = 0.01$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	4 次多項式			4 次多項式 制御変量法あり			6 次多項式 制御変量法あり		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	25%	中央	75%
12	6.03	11.49	16.03	1.36	2.51	4.34	2.56	6.65	10.38
14	2.51	4.90	8.60	0.53	1.25	2.00	1.45	2.69	4.61
16	1.35	2.79	4.26	0.26	0.44	0.95	0.67	1.28	2.38
18	0.63	1.29	2.14	0.15	0.30	0.48	0.31	0.63	1.11
20	0.29	0.59	0.97	0.06	0.16	0.24	0.14	0.35	0.57
22	0.19	0.34	0.54	0.04	0.08	0.14	0.09	0.15	0.29
24	0.07	0.15	0.29	0.02	0.04	0.07	0.06	0.10	0.16
26	0.04	0.08	0.14	0.03	0.04	0.06	0.03	0.06	0.10

表 A-2  $T = 4$ 、 $\beta = 0.01$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	4 次多項式			4 次多項式 制御変量法あり			6 次多項式 制御変量法あり		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	25%	中央	75%
12	2.86	6.97	12.13	1.23	2.71	4.30	2.67	5.42	9.51
14	1.61	3.38	6.64	0.28	0.87	2.03	1.02	3.07	4.68
16	0.81	1.72	2.89	0.29	0.61	1.07	0.67	1.72	2.85
18	0.33	0.84	1.75	0.13	0.31	0.51	0.43	0.83	1.41
20	0.24	0.44	0.66	0.06	0.13	0.21	0.21	0.49	0.75
22	0.12	0.25	0.41	0.04	0.07	0.12	0.06	0.17	0.32
24	0.08	0.14	0.22	0.02	0.05	0.09	0.05	0.12	0.21
26	0.03	0.08	0.12	0.04	0.05	0.08	0.05	0.08	0.13



表 A-3  $T = 6$ 、 $\beta = 0.01$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	4 次多項式			4 次多項式 制御変量法あり			6 次多項式 制御変量法あり		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	25%	中央	75%
12	3.25	6.93	11.07	0.95	2.41	4.17	2.66	7.37	17.96
14	1.85	3.62	5.33	0.46	0.99	1.74	1.99	3.73	7.43
16	0.92	1.90	2.93	0.28	0.58	0.93	1.24	2.19	3.77
18	0.35	0.82	1.43	0.15	0.31	0.54	0.42	1.14	2.06
20	0.21	0.40	0.73	0.07	0.16	0.28	0.21	0.52	0.91
22	0.14	0.23	0.36	0.05	0.08	0.14	0.13	0.32	0.51
24	0.05	0.13	0.21	0.04	0.07	0.11	0.10	0.23	0.37
26	0.04	0.08	0.13	0.04	0.06	0.08	0.06	0.13	0.21

表 A-4  $T = 8$ 、 $\beta = 0.01$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	4 次多項式			4 次多項式 制御変量法あり			6 次多項式 制御変量法あり		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	25%	中央	75%
12	4.07	7.43	12.98	1.09	2.38	4.76	5.17	9.23	16.41
14	1.41	3.18	5.36	0.63	1.28	2.35	2.52	5.38	11.69
16	0.85	1.54	2.71	0.42	0.77	1.11	2.00	3.01	6.04
18	0.30	0.67	1.36	0.14	0.35	0.58	0.63	1.74	3.25
20	0.14	0.30	0.64	0.11	0.20	0.33	0.46	0.92	1.84
22	0.11	0.21	0.33	0.05	0.09	0.16	0.22	0.54	0.96
24	0.06	0.11	0.16	0.03	0.06	0.10	0.18	0.28	0.51
26	0.03	0.07	0.10	0.03	0.05	0.08	0.09	0.22	0.38

表 A-5  $T = 10$ 、 $\beta = 0.01$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	4 次多項式			4 次多項式 制御変量法あり			6 次多項式 制御変量法あり		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	25%	中央	75%
12	2.11	6.21	10.13	1.45	2.90	4.46	5.70	10.06	23.14
14	1.75	3.27	5.32	0.72	1.18	2.30	2.26	5.74	10.25
16	0.79	1.47	2.56	0.30	0.69	1.22	1.93	4.05	8.38
18	0.32	0.76	1.09	0.17	0.38	0.59	1.43	3.30	6.03
20	0.14	0.35	0.60	0.08	0.18	0.32	0.95	1.72	3.87
22	0.10	0.17	0.27	0.04	0.08	0.15	0.46	1.01	2.47
24	0.04	0.08	0.14	0.02	0.05	0.08	0.29	0.63	1.38
26	0.02	0.06	0.09	0.02	0.04	0.06	0.29	0.55	0.97

表 A-6  $T = 2$ 、 $\beta = 0.03$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	4 次多項式			4 次多項式 制御変量法あり			6 次多項式 制御変量法あり		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	25%	中央	75%
12	4.51	11.12	18.42	2.50	5.59	8.94	9.02	17.03	30.63
14	2.79	6.62	9.23	1.38	2.71	4.50	4.20	9.31	17.79
16	1.23	2.84	4.95	0.47	1.06	1.94	3.30	6.24	10.52
18	0.62	1.39	2.22	0.39	0.66	1.06	1.24	2.53	5.36
20	0.41	0.74	1.39	0.18	0.31	0.50	0.93	1.67	2.72
22	0.19	0.37	0.55	0.09	0.19	0.34	0.44	0.88	1.67
24	0.08	0.16	0.34	0.10	0.16	0.23	0.21	0.46	1.11
26	0.08	0.18	0.25	0.11	0.14	0.19	0.15	0.29	0.59

表 A-7  $T = 4$ 、 $\beta = 0.03$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	4 次多項式			4 次多項式 制御変量法あり			6 次多項式 制御変量法あり		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	25%	中央	75%
12	3.97	9.85	19.39	2.45	5.51	8.61	19.89	50.71	118.68
14	3.66	5.80	9.24	1.47	3.11	4.63	17.68	32.99	123.81
16	1.04	2.45	3.91	0.72	1.40	2.24	14.14	34.56	142.11
18	0.63	1.25	2.21	0.33	0.65	1.34	11.33	27.19	74.34
20	0.40	0.60	1.14	0.18	0.45	0.70	8.12	18.76	38.83
22	0.19	0.32	0.56	0.10	0.28	0.44	7.08	13.98	36.54
24	0.12	0.22	0.39	0.15	0.25	0.33	4.19	11.48	19.96
26	0.16	0.23	0.30	0.21	0.25	0.28	4.13	10.38	18.09

表 A-8  $T = 6$ 、 $\beta = 0.03$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	4 次多項式			4 次多項式 制御変量法あり			6 次多項式 制御変量法あり		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	25%	中央	75%
12	4.75	10.15	18.90	2.97	7.49	13.73	79.33	195.75	828.93
14	2.26	4.74	8.05	1.64	3.48	6.20	77.54	214.44	$1.04 \times 10^3$
16	1.02	2.72	4.39	0.68	1.61	2.89	81.41	189.05	952.10
18	0.51	1.26	2.05	0.38	0.92	1.32	108.52	339.18	$1.77 \times 10^3$
20	0.30	0.58	0.94	0.19	0.47	0.86	72.13	402.26	$1.80 \times 10^3$
22	0.24	0.45	0.64	0.18	0.29	0.49	116.93	464.49	$1.88 \times 10^3$
24	0.21	0.34	0.49	0.22	0.32	0.41	150.75	410.05	$2.18 \times 10^3$
26	0.23	0.31	0.39	0.23	0.29	0.34	158.74	481.29	$2.37 \times 10^3$

表 A-9  $T = 8$ 、 $\beta = 0.03$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	4 次多項式			4 次多項式 制御変量法あり			6 次多項式 制御変量法あり		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	25%	中央	75%
12	4.54	8.93	16.59	4.34	8.54	14.62	265.21	587.59	$2.71 \times 10^3$
14	1.91	4.55	7.93	1.89	4.12	6.65	259.99	669.17	$3.38 \times 10^3$
16	1.35	2.46	4.44	1.25	2.35	3.45	238.15	$1.05 \times 10^3$	$1.43 \times 10^4$
18	0.62	1.34	2.25	0.38	0.93	1.70	394.63	$1.30 \times 10^3$	$2.65 \times 10^5$
20	0.25	0.60	1.03	0.25	0.57	0.92	635.81	$2.34 \times 10^3$	$1.90 \times 10^6$
22	0.18	0.37	0.67	0.16	0.31	0.56	633.24	$4.37 \times 10^3$	$1.01 \times 10^7$
24	0.19	0.35	0.50	0.20	0.33	0.47	719.34	$7.29 \times 10^6$	$5.76 \times 10^7$
26	0.26	0.34	0.43	0.29	0.35	0.40	916.06	$3.89 \times 10^7$	$2.53 \times 10^8$

表 A-10  $T = 10$ 、 $\beta = 0.03$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	4 次多項式			4 次多項式 制御変量法あり			6 次多項式 制御変量法あり		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	25%	中央	75%
12	5.03	11.34	22.71	5.05	12.10	21.51	490.09	$2.81 \times 10^4$	$9.93 \times 10^5$
14	2.26	5.76	12.02	2.87	6.59	11.34	$1.14 \times 10^3$	$6.54 \times 10^5$	$4.21 \times 10^6$
16	1.79	3.47	5.35	0.96	3.22	5.51	$1.76 \times 10^4$	$3.64 \times 10^6$	$4.93 \times 10^7$
18	0.63	1.52	2.44	0.66	1.31	2.91	$8.92 \times 10^6$	$8.52 \times 10^7$	$5.83 \times 10^8$
20	0.29	0.70	1.42	0.44	0.87	1.44	$1.10 \times 10^8$	$7.85 \times 10^8$	$6.77 \times 10^9$
22	0.23	0.46	0.76	0.24	0.53	0.96	$1.49 \times 10^9$	$8.96 \times 10^9$	$1.04 \times 10^{11}$
24	0.22	0.41	0.63	0.23	0.40	0.65	$7.52 \times 10^9$	$5.06 \times 10^{10}$	$5.91 \times 10^{11}$
26	0.32	0.42	0.48	0.31	0.40	0.49	$1.63 \times 10^{11}$	$6.43 \times 10^{11}$	$4.93 \times 10^{12}$

図 A-1  $T = 4$ 、 $\beta = 0.01$

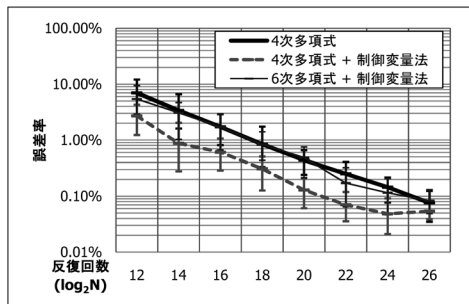


図 A-2  $T = 4$ 、 $\beta = 0.03$

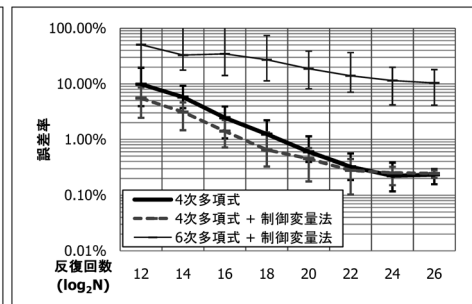


圖 A-3  $T = 6, \beta = 0.01$

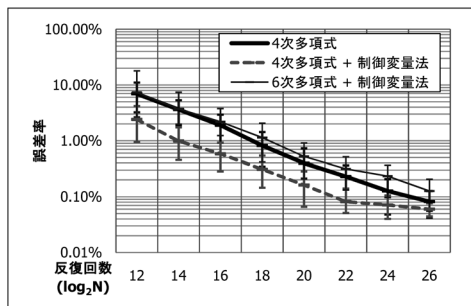


圖 A-4  $T = 6, \beta = 0.03$

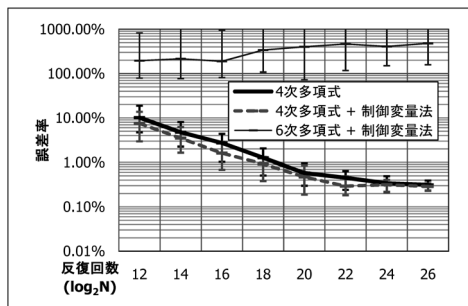


圖 A-5  $T = 8, \beta = 0.01$

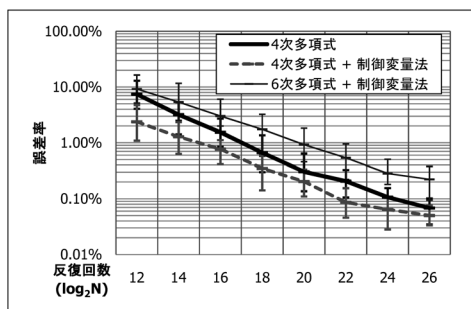


圖 A-6  $T = 8, \beta = 0.03$

