

アメリカン・モンテカルロ法における 継続価値評価の精緻化

もりもとゆうすけ
森本裕介

要 旨

アメリカン・モンテカルロ法とは、アメリカン・オプションの価格をモンテカルロ法を用いて数値的に計算する手法の総称である。同手法はアメリカン・オプションの価格評価だけでなく、金融機関のリスク管理にも利用されるなど幅広く活用されているが、計算の速度と精度には改善の余地が残されている。本研究では、継続価値と呼ばれるアメリカン・オプションの将来時点における価値をウィーナー空間上の立体求積法を用いた新しい手法で精度良く近似することを通じて、アメリカン・モンテカルロ法の計算精度を向上させるアルゴリズムを開発する。本稿では、まず、アメリカン・モンテカルロ法について既存研究を踏まえた解説を行う。次に、本研究が提案するアルゴリズムとその特徴について述べる。最後に、数値例を用いて、既存の手法では必要な精度を伴った計算結果を得ることが難しい場合でも、本研究が提案する手法を適用すれば高い精度の計算が可能であることを示す。

キーワード：アメリカン・オプション、アメリカン・モンテカルロ法、最小二乗モンテカルロ法、確率メッシュ法、ウィーナー空間上の立体求積法、キューバチャー法

.....
本稿の作成に当たっては、楠岡成雄教授（東京大学大学院）、二宮祥一教授（東京工業大学大学院）および日本銀行金融研究所のスタッフから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

森本裕介 日本銀行金融研究所
(現 三菱東京 UFJ 銀行、E-mail: yuusuke_morimoto@mufg.jp)

1. はじめに

アメリカン・オプションとは満期までの任意の時点で権利行使可能なオプションである¹。その価格の評価手法は当該商品の価格付けだけでなく、金融機関のリスク管理をはじめ幅広く利用されている。例えば、住宅ローンのプリペイメント・リスクを評価する際や、カウンターパーティ・リスク評価における信用リスク調整（Credit Value Adjustment : CVA）の算出にも利用されている。

アメリカン・モンテカルロ法とはアメリカン・オプションの価格をモンテカルロ法を用いて数値的に計算する手法の総称である。本稿では、ウィーナー（Wiener）空間上の立体求積法を用いた新しい手法で、継続価値と呼ばれるアメリカン・オプションの将来時点における価値を精度良く近似し、それを通じて、アメリカン・モンテカルロ法の計算精度を向上させるアルゴリズムを開発する。

アメリカン・オプションの価格は、満期時点から時間をさかのぼる方向に、継続価値と呼ばれる一時点先のオプション価格の条件付期待値と行使価格とで大きい方の値を求める計算を繰り返すことで算出できる。このように後退的な繰返しのある計算を行う際には、格子法や有限差分法などを用いる必要があり、原資産のパスを時間の流れに沿って前進的に発生させるモンテカルロ法を直接用いることはできない。一方で、モンテカルロ法はアルゴリズムが比較的簡明であることなどから汎用性が高いほか、経路依存性がある商品、多資産を参照する商品、原資産のモデルが多次元の確率過程で表される商品などは、モンテカルロ法以外の手法でその価格を評価することは難しいとされている。このため複雑なスキームを持つデリバティブ取引が増加するにつれデリバティブの価格評価にモンテカルロ法が用いられることが多くなってきている。仮に全てのデリバティブの価格評価をモンテカルロ法で統一できれば、各商品の価格を計算する手法を単一の枠組みで整理・運用することができるため、アメリカン・オプションの価格をモンテカルロ法を用いて評価することに対する需要は大きい。こうした需要に応えるため、アメリカン・モンテカルロ法と総称される、後退的な繰返しのある計算を前進的な計算に置換することでアメリカン・オプションの価格をモンテカルロ法を用いて評価することを可能にした新しい計算手法が開発された。しかし、同手法についてはこれまでに数多くの研究がなされ、実務での活用も広がりを見せてきているものの、その計算の速度と精度には依然として改善の余地が残されているというのが実情である。

1 実際に取り引されているアメリカン・オプションの権利行使可能時点は日次、週次、月次などに設定され離散時点でのみ権利行使が可能である。数理ファイナンスの理論面を扱う文献では任意の時刻で権利行使可能なオプションをアメリカン・オプション、あらかじめ離散的に定められた任意の時刻で権利行使可能なオプションをバミューダン・オプションと呼び厳密に区別している。しかし、間隔が短いバミューダン・オプションはアメリカン・オプションと商品性が類似していることからバミューダン・オプションをアメリカン・オプションと呼ぶことが少なくない。本稿では、アメリカン・オプションを離散的に表現したうえでその価格を評価する手法について議論することを目的とするため、権利行使可能時点の間隔が長い商品について考察を加える 5 節を除きバミューダン・オプションをアメリカン・オプションと呼ぶことにする。

モンテカルロ法を用いてアメリカン・オプションの価格を評価する際には、原資産パスの各状態における継続価値を求める必要があるが、その値は一般的に解析的に求めることができない。このため、多くの場合、条件付期待値を近似値で代用することでこの問題を解決しており、アメリカン・モンテカルロ法における計算の速度や精度を向上させるうえでは、条件付期待値を効率的に高い精度で近似する手法を開発することが重要となる。計算の速度を向上させることを重視した代表的な手法として Longstaff and Schwartz [2001] などによる、最小二乗モンテカルロ (Least Square Monte Carlo : LSM) 法を挙げることができる。これは、事前に選択したいくつかの関数で条件付期待値を回帰する近似手法を用いており、計算効率の面で優れている。また、実証研究でペイオフを決める関数の形が複雑とはならない範囲では十分な精度を獲得できることが確認されていることを踏まえて、実務でも広く用いられている。しかし、回帰に基づく手法の欠点として、計算の精度が事前に選択した回帰関数の形に依存するため、選択した関数で条件付期待値がうまく近似できる場合には精度の高い計算結果が得られるが、そうでない場合には Hamdi and Marcus [2011] が指摘するように、無視できない計算誤差が生じうる点を挙げることができる。こうした回帰による欠点を回避し、より計算の精度を重視した手法として、Broadie and Glasserman [2004]、Glasserman [2004] は確率メッシュ (Stochastic Mesh) 法を提案したが、この手法は条件付期待値を計算する際に原資産の推移確率密度関数を必要とするため、適用できるモデルが限られてしまうという強い制約を持つ。こうした点を踏まえ、本稿では計算の精度が問題によらず安定的に維持できる性質を重視しつつ、原資産の推移確率密度関数がわからない場合にも適用できる新しい確率メッシュ法を提案する。本稿の手法では、条件付期待値を計算する際に Lyons and Victoir [2004] によるウィーナー空間上の立体求積法 (Cubature on Wiener Space : 以下、キューバチャー法) という手法を用いる。この手法は、確率微分方程式の係数から導かれる常微分方程式の解を用いることにより、比較的高精度な近似を与えることができる。このため、LSM 法に比べて計算量はやや多いものの、ペイオフ関数の形によらず常に精度が高い計算結果を得ることができる。

本稿の構成は以下のとおりである。2 節ではアメリカン・オプションの特徴と価格を数値的に計算する際に用いる基本的な手法について簡単に解説する。3 節ではアメリカン・モンテカルロ法について LSM 法と確率メッシュ法に重点を置きつつ説明を行う。4 節では本稿が提案する新しい手法のアルゴリズムを示すほか、その手法を利用する際に生じうる計算誤差を評価する。5 節では数値例を用いて LSM 法と新しい手法の比較を行い、LSM 法では十分な精度を得ることが難しい場合でも、新しい手法を用いれば高い精度の計算が可能であることを示す。6 節では結論と将来に向けた課題を紹介する。補論 1. では新しい手法において確率メッシュ上の継続価値から任意の点上の継続価値を計算する際に用いる補間手法について解説する。補論 2. では新しい手法の理論的背景となるキューバチャー法について解説する。補論 3. では新しい手法の計算誤差について理論面から考察し、関連する定理などの証明を示す。

2. アメリカン・オプション

(1) 設定

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty)}, P)$ はフィルトレーション付き確率空間とし、 $\{B^\alpha(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ 、 $\alpha = 1, \dots, d$ をそれぞれ1次元 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty)}$ -標準ブラウン運動とする。また、 $B^0(t) = t$ と書くことにする。ここで $C_b^\infty(\mathbf{R}^D; \mathbf{R}^D)$ は、滑らかで、全ての階の微分まで有界な関数全体の空間とし、関数 $\hat{V}_0, \hat{V}_1, \dots, \hat{V}_d$ は、 $\hat{V}_0, \hat{V}_1, \dots, \hat{V}_d \in C_b^\infty(\mathbf{R}^D; \mathbf{R}^D)$ となっているとする。

$T > 0, s \in [0, T], x \in \mathbf{R}^D$ として、 $t \in [s, T]$ に対し次の確率微分方程式を考える。

$$X(t; s, x) = x + \int_s^t \hat{V}_0(X(r; s, x)) dr + \sum_{\alpha=1}^d \int_s^t \hat{V}_\alpha(X(r; s, x)) dB^\alpha(r), \quad (1)$$

$$X(s; s, x) = x. \quad (2)$$

すなわち、 D は確率過程の数を表し、 d はランダムなリスク・ファクターの数を表す²。 $X(t; s, x)$ は時点 s で x から出発する拡散過程の t での値を表している。なお、 $X(t; 0, x)$ については $X(t, x)$ と表す場合もある。

また、有界連続関数 f に対し、期待値を表す作用素 $P_{s,t}$ 、 P_t 、 $0 \leq s \leq t$ を、

$$P_{s,t} f(x) = E[f(X(t; s, x))],$$

$$P_t f(x) = E[f(X(t, x))],$$

とし、

$$P_{s,t} f(x) = \int_{\mathbf{R}^D} f(y) p_{s,t}(x, dy),$$

$$P_t f(x) = \int_{\mathbf{R}^D} f(y) p_t(x, dy),$$

により定義する³。さらに以下では特に断らない限り密度関数の存在を仮定しない

2 例えばアベレージ・オプションの価格計算では、リスク資産の価格過程を時間平均したものが従う確率過程を追加することがある。このため、厳密には必ずしも D は資産数と一致しない。

3 アメリカン・オプションの価格評価においては、途中の時点 s で状態 x にいるという情報を明記した方がわかりやすいため、 $X(t; s, x)$ という表記を用いた。途中時点をも明記しない表記との対応は、

$$P_{s,t} f(x) = E[f(X(t; s, x))] = E[f(X(t)) | X(s) = x],$$

となっている。また、この確率過程は時間一様になっており、 $P_{s,t} = P_{t-s}$ となっているが、同様の理由により両方の記号を用いることにする。

が、密度関数を用いる場合は、

$$p_{s,t}(x, dy) = p_{s,t}(x, y)dy, \quad (3)$$

$$p_t(x, dy) = p_t(x, y)dy, \quad (4)$$

と表すことにする。

(2) 性質

以下では $a \vee b = \max\{a, b\}$ という記号を用いる。 $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N = T$ を行使時刻とし $g(T_n, x) : \{T_0, \dots, T_N\} \times \mathbf{R}^D \rightarrow \mathbf{R}$ を時刻 T_n でオプションを行使したときのペイオフ関数とする⁴。各 $n = 0, \dots, N$ に対し g_n はリプシッツ連続であり、

$$|g_n(x) - g_n(y)| \leq K_g |x - y|, x, y \in \mathbf{R}^D, K_g < \infty,$$

とする。このとき、アメリカン・オプションの価格は次のように表される。

$$v_n(x) = \sup\{E[g(\tau, X(\tau; T_n, x))]; \tau \in \mathcal{S}_n\}, \quad (5)$$

$$\mathcal{S}_n = \{\tau : \Omega \rightarrow \{T_n, \dots, T_N\}; \{\mathcal{F}_t\}\text{-停止時刻}\}. \quad (6)$$

イ. ダイナミック・プログラミング

価格 v_n は以下のダイナミック・プログラミング (Dynamic Programming : DP) により満期の価格から順に決めていくことができる。

$$\begin{cases} v_N(x) = g(T_N, x), \\ v_n(x) = g(T_n, x) \vee c_n(x), \quad n = 0, \dots, N-1. \end{cases} \quad (7)$$

ここで $c_n(x)$ 、 $n = 0, \dots, N$ は継続価値と呼ばれ、次のように定まる。

$$\begin{cases} c_N(x) = g(T_N, x), \\ c_n(x) = P_{n,n+1}(c_{n+1} \vee g(T_{n+1}, \cdot))(x), \quad n = 0, \dots, N-1. \end{cases} \quad (8)$$

⁴ $g(T_n, x) = g_n(x)$ のような記法の書き換えは、誤解のおそれのない限り断りなく用いる。

この継続価値 c_n を計算することがアメリカン・オプションの価格付けには必要である⁵。

ロ. 最適停止問題

(5) 式で \sup を与える最適行使時刻 τ_n は、原資産価格が行使領域と呼ばれる領域 ($\mathcal{E}(t)$ とおく) に最初に入った時刻として与えられることが知られている⁶。DP を用いないアメリカン・オプションの価格計算手法として、行使領域を求めたうえでこの性質を用いる手法がある⁷。すなわち、

$$\tau_n = \inf\{t \in \{T_n, \dots, T_N\}, x \in \mathcal{E}(t)\}, \quad (9)$$

となる。さらに、継続価値 c_n を既知とすると、時刻 T_n における行使領域 $\mathcal{E}(T_n)$ は、

$$\mathcal{E}(T_n) = \{x \in \mathbf{R}^D, g(T_n, x) > c_n(x)\},$$

と表される。よって最適行使時刻 τ_n は、

$$\tau_n = \inf\{t \in \{T_n, \dots, T_N\}, g(t, X(t; T_n, x)) > c(t, X(t; T_n, x))\}, \quad (10)$$

となる。そして、 v_n は次のように表される。

$$v_n(x) = E[g(\tau_n, X(\tau_n; T_n, x))]. \quad (11)$$

.....
5 行使時刻が連続的である場合、次の行使時点まで継続するという概念は存在しないため、継続価値は定義できない。この場合は、継続価値を価値関数 (value function) と呼ばれる関数に置換した議論が必要となる。

6 Föllmer and Schied [2004] 6 章、Duffie [2001] 8 章の G、H 参照。

7 本節イ、ロ、の手法とは異なる手法として、双対 (Duality) 法と呼ばれるものがある。この手法ではアメリカン・オプションの価格を次のように表す。

$$v_n(x) = \inf \left\{ E \left[\sup_{m \geq n} (g(T_m, X(T_m; T_n, x)) - M(T_m)) \right]; M \in H_0^1 \right\},$$

$$H_0^1 = \left\{ M : \{\mathcal{F}_t\}\text{-マルチンゲール}; M(T_0) = 0, \sup_n |M(T_n)| \text{ が } s\text{-可積分} \right\}.$$

これは、アメリカン・オプションの価格がそれより大きい集合の中からマルチンゲールを動かすことで求められる下限と等しいということを主張している。この事実は (5) 式のアメリカン・オプションの価格がそれより小さい集合の中から停止時刻 τ を動かすことで求められる上限と等しい、という表現の双対をなしている。双対法に基づくアメリカン・オプションの数値計算手法の研究に関しては Haugh and Kogan [2004]、Rogers [2002] を参照されたい。

(3) 基本的な数値解法

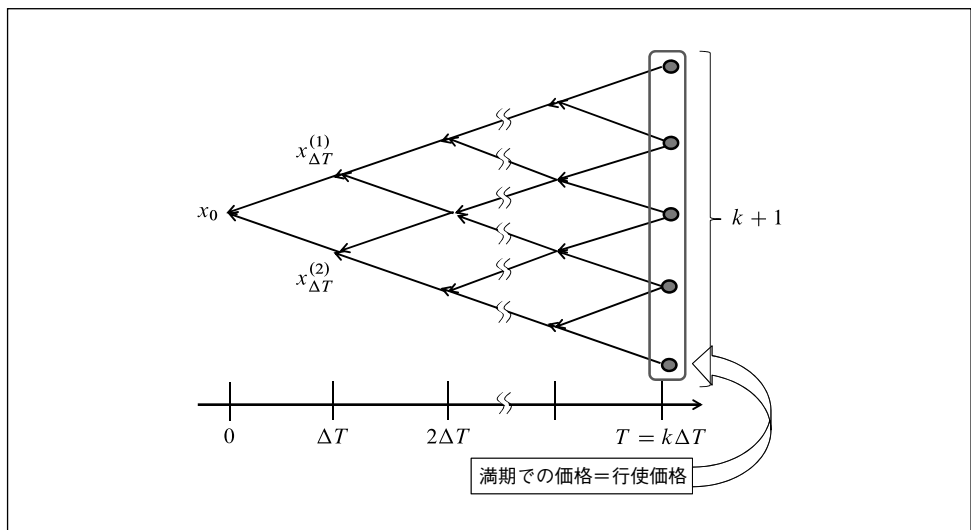
アメリカン・オプションの評価式が解析的に得られている場合はほとんど無いため、数値解析法を用いてその価格を求める必要がある。以下では、基本的な数値解法を概観することを通じてアメリカン・オプションの価格計算法に関する基本的事実を簡単に説明する。

なお、本稿では真の値 α に対し、その推定量を $\tilde{\alpha}$ のように記号の上に \sim を付して表記する。

イ. ツリー法

ツリー法とは、与えられた原資産価格過程と整合的な2進木または3進木（以下、ツリーと呼ぶ）を構成したうえで、構成したツリーのノード上に示された原資産価格を用いて、オプション価格の評価を行う手法を指す。初期時点（ $t = 0$ ）から満期（ $t = T$ ）までの期間を k 個の区間に分割した2進木の場合、初期時点の原資産価格を所与としたうえで、1期間ごとに状態数が1つずつ増加し、満期では $k + 1$ 個のノードを持つ（図1）。各ノード上の原資産価格は簡単に計算できるため、満期時点の各ノードを出発点として(7)式のDPを実行することでアメリカン・オプションの価格を評価することができる。ツリー法は計算過程が簡単であるほか、計算結果の検証が比較的行いやすいことなどから、現在でも多くの実務家が好んで用いている。ツリー法ではノード数が爆発的に増えることを排除するため、各ノード上で複数のパスが合流するようにツリーを構成することが必要となることから、経路依存型のオプションの価格計算には工夫なしに使うことができない。しかし、こうした

図1 ツリー法

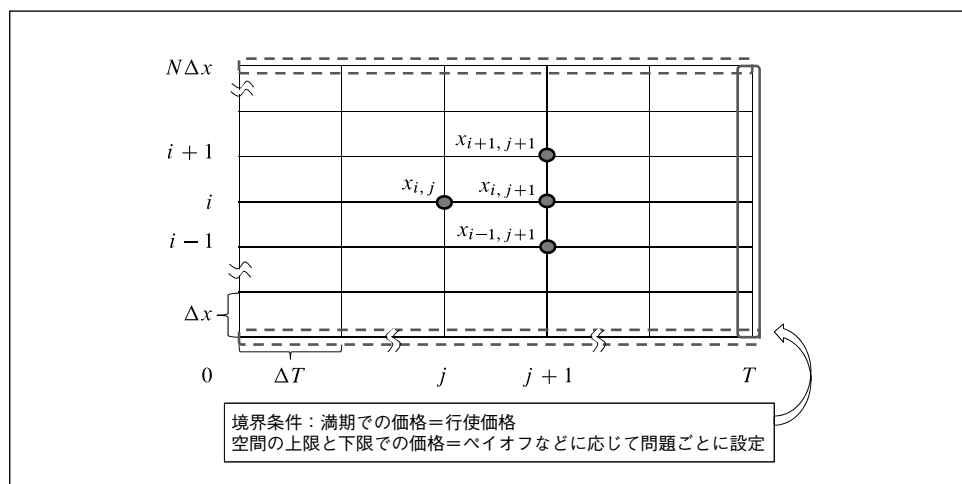


条件を満たすようなツリーが構成できたとしても、ノード数は時間分割数と原資産数の増加に伴い級数的に増加してしまうため、ツリー法を用いて4種類以上の原資産を持つオプションを計算することは事実上不可能といえる。ツリー法を用いたアメリカン・オプションの評価に関する具体的な計算については、例えば Lamberton and Lapeyre [1996] 5章を参照されたい。

ロ. 差分法

差分法とは、オプション価格が従う偏微分方程式を差分近似したうえで、これを数値的に解くことで、オプション価格の評価を行う手法である。初期時点の原資産価格を所与としたうえで原資産価格の時間発展を数値的に表現するツリー法とは異なり、差分法ではあらかじめ計算の対象となる原資産価格の最大値と最小値および初期時点と満期時点を定め（これを状態空間と呼ぶ）、状態空間を有限個の区間に分割して数値計算を行う（図2）。偏微分方程式の境界条件は、満期時点のオプション価格、原資産価格が最大値または最小値となる場合におけるオプション価格を与えることで設定する。境界条件が与えられれば、差分近似された偏微分方程式は簡単に解くことができる。なお、アメリカン・オプション価格を評価する際には、各ノード上で期前行使の有無を判定する必要がある。この際、満期時点の各ノードを出発点として(7)式のDPを実行することでアメリカン・オプションの価格を評価する点はツリー法と同様で、経路依存型オプションの価格計算には特別な工夫を要する。一方で、各ノード上の原資産価格は状態空間を分割した際に定義されるため、計算することなしに得ることができる点は相違している。差分法は、各ノード上で複数のパスが合流するようにツリーを構成する必要がないため、原資産が従う確率過程が複雑な形をしていても、リスク・ファクター数が4未満であれば比較的簡単に対応できる。こうしたこともあり、ツリー法とならんで多くの実務家

図2 差分法



が好んで用いている手法といえる。しかし、ツリー法と同様にノード数が時間分割数と原資産数の増加に伴い級数的に増加してしまうことから、差分法を用いて4種類以上の原資産を持つオプションを計算することは事実上不可能といえる。差分法を用いたアメリカン・オプションの評価に関する具体的な計算については、例えば Lamberton and Lapeyre [1996] 5 章、Duffie [2001] 12 章の H を参照されたい。

3. アメリカン・モンテカルロ法

(1) アメリカン・モンテカルロ法の必要性

モンテカルロ法とは、数値的に発生させた乱数を用いて数値実験を繰り返し行い、実験結果を集計することで期待値を計算する手法である。発生させる乱数が独立であれば試行回数 L を増加させると、大数の法則により集計値はある特定の値に収束する。ここでは $X_l(T)$ 、 $l = 1, \dots, L$ を $X(t, x)$ と独立で同分布の確率変数列としたとき、

$$E[f(X(T, x))] \sim \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L f(X_l(T)),$$

と近似できるという事実を用いる手法をモンテカルロ法と定義することにする。このとき、計算誤差は $X(T, x)$ に分散が存在するならば、ある定数 $C > 0$ に対して、

$$E[|E[f(X(T, x))] - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L f(X_l(T))|^2]^{\frac{1}{2}} \leq CL^{-\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

となることが知られている⁸。(12)式からわかるように、モンテカルロ法の誤差は変数の次元に依存しない。また、モンテカルロ法では確率変数のシミュレーションを繰り返し行うことで、確率過程をシミュレートし、確率過程に依存する期待値計算を行うこともできる。この場合には、確率変数を繰り返し用いて前進的にサンプル・パスを構成していく。このため、初期時点から満期時点に至る途中の情報がペイオフに反映されるなど、経路依存性がある期待値計算も行うことができる。ただし、その際の計算誤差は(12)式の誤差に加え確率過程をシミュレートする際に用いる時間の離散化による誤差を加えたものとなる。時間幅 Δt を用いて離散化すると、例えば(1)式は次のように書ける（オイラー＝丸山近似）。

⁸ 詳しくは、例えば Glasserman [2004] を参照。

$$\begin{aligned}
X^\Delta(t + \Delta t; s, x) = & X^\Delta(t; s, x) + \hat{V}_0(X^\Delta(t; s, x))\Delta t \\
& + \sum_{\alpha=1}^d \hat{V}_\alpha(X^\Delta(t; s, x)) \sqrt{\Delta t} Z^\alpha.
\end{aligned} \tag{13}$$

ここで、 Z^α は独立な標準正規分布に従う確率変数であるとする。一般に、時間方向の離散化に伴う誤差は、ある定数 $C > 0$ 、 $k > 0$ を用いて、

$$|E[f(X^\Delta(t; s, x))] - E[f(X(t; s, x))]| \leq C\Delta t^{-k}, \tag{14}$$

と書ける。なお、オイラー=丸山近似を用いて離散化を行った場合には $k = 1$ となることが知られている。

この手法を用いると、例えば、通常の満期 T のヨーロピアン・オプションと同様のペイオフ $g(T, x)$ をもち、満期までに原資産価格が閾値 b に到達したら権利が消滅するようなオプションの価格 v は、

$$v \sim \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L g(T, X_l(T, x_0)) 1_{\{\sup\{X_l(s); 0 \leq s < T\} < b\}},$$

と計算できる。実務ではこのような経路依存性がある商品をはじめ、多資産を参照する商品など、複雑な商品が数多く取引されているが、経路依存、多次元型の商品はアメリカン・オプションだけでなくヨーロピアン・オプションであっても、その価格をツリー法や有限差分法で計算することはできない。このため、これらの商品の価格計算がヨーロピアン・オプションに対しては比較的容易なモンテカルロ法を用いて経路依存、多次元型のアメリカン・オプションの価格を評価したいという需要は大きい。

ところが、モンテカルロ法は前進的な手法であるのに対し、アメリカン・オプションの計算は後退的であるため、アメリカン・オプションの価格をモンテカルロ法で計算することは簡単ではない。実際、モンテカルロ法により、 c_n を求めながら DP の計算をすると、計算量が膨大になってしてしまう。すなわち n 時点での継続価値を L 本のパスのモンテカルロ法により求めようとすると、各パスの $n + 1$ 時点における継続価値が必要となる。そこでこれも L 本のパスにより求める、ということを繰り返せば、2 節(2)と同様に満期までを N 期間に分割した場合には結局 T_0 時点での価格を求めるために L^N 回のオーダーの計算が必要となってしまう。

このようにモンテカルロ法で DP の計算をすることは難しい。そこで、アメリカン・モンテカルロ法と呼ばれる、モンテカルロ法を用いてアメリカン・オプションを計算するいくつかの手法では、最適停止問題 (11) 式に基づいた計算を行うことで

DP の計算を回避する。すなわち原資産の L 本のサンプル・パス X_1, \dots, X_L (以下、シミュレーション・パスと呼ぶ) を用いて、

$$\tilde{v}_0 = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L g(\tilde{\tau}_0, X_l(\tilde{\tau}_0)), \quad (15)$$

を計算する。ここで τ_0 の推定値 $\tilde{\tau}_0$ は、

$$\tilde{\tau}_0 = \inf\{t \in \{T_0, \dots, T_N\}, g(t, X_l(t)) > \tilde{c}(t, X_l(t))\},$$

で与えられる。すなわち、DP の計算を 2 節(2)ロ. で述べた行使領域を求める最適停止問題に置き換える⁹。しかし、行使領域の推定には継続価値の推定値 \tilde{c}_n が必要であり、何らかの手法で継続価値を計算することが必要である。

アメリカン・モンテカルロ法は、継続価値 c をうまく近似することで計算量が多くなりすぎない形で最適停止問題を計算する手法といえる。この際、継続価値そのものを近似するという意味での近似精度はそれほど高くなくてよいことが知られている。すなわち \tilde{c}_n は行使時刻を求めるためだけに使われ、その値は直接には \tilde{v}_0 に影響を与えないからである。言い換えると (10) 式によれば \tilde{c}_n が真値とどんなに離れても、これらと行使価格との大小関係が常に一致していれば正しい価格を得ることができる。ただし、 \tilde{c}_n と c_n の誤差が大きくなれば、行使判定を誤る可能性が高くなることはいうまでもない。

こうしたことから計算量と行使判定が正確であるという意味での \tilde{c}_n の近似精度のバランスが重要になる。以下では、既存の手法のうち主なものを紹介する。

(2) 既存研究の手法

イ. LSM 法

Longstaff and Schwartz [2001] は、継続価値の推定値 \tilde{c}_n を、

$$\tilde{c}_n(x) = \sum_{k=1}^K a_{n,k} \psi_k(x), \quad (16)$$

というパラメトリックな関数 ψ_1, \dots, ψ_K の線形結合であるとする手法を提案した。ここで係数 $a_{n,1}, \dots, a_{n,K}$ は継続価値を一時点先のオプション価格に回帰することで

.....
⁹ 最適停止問題 (11) 式を用いて計算した \tilde{v}_0 は v_0 以下となる。すなわち、 v_0 は停止時刻全体を代入したときの上限と一致しているため、1 つの停止時刻を代入したものは真の値以下にしかない。こうした理由から \tilde{v}_0 は負のバイアスをもつ推定量 (Low Estimator) と呼ばれる。

決定する（図3）。

LSM 法は比較的高速に計算ができるという長所をもつ。計算量は $O(KL)^{10}$ と表現される¹¹。一方、継続価値を近似する関数を事前に決めるため、継続価値がその関数ではうまく近似できないときには計算誤差が大きくなってしまうという短所がある。

LSM 法のアルゴリズムは、以下の手順1から手順3によって構成される。

手順1: (1) 式、(2) 式に従う原資産のパス $\{Y_l(T_1), \dots, Y_l(T_N)\}_{l=1}^{L_0}$ を発生させる。

手順2: 満期での継続価値は定義により $\tilde{c}_N(x) = g(T_N, x)$ で与えられる。
 \tilde{c}_N から \tilde{c}_{n+1} が与えられたとき、

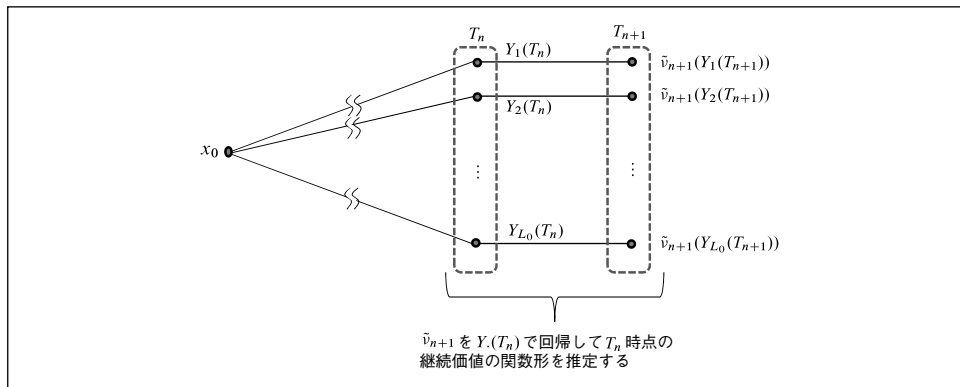
$$\tilde{\tau}_{n+1,l} = \inf \{t \in \{T_{n+1}, \dots, T_N\}; g(t, Y_l(t)) \geq \tilde{c}(t, Y_l(t))\},$$

とする。そして、 $a_{n,k}, k = 1, \dots, K$ を、

$$\frac{1}{L_0} \sum_{l=1}^{L_0} \left| g(\tilde{\tau}_{n+1,l}, Y_l(\tilde{\tau}_{n+1,l})) - \sum_{k=1}^K a_{n,k} \psi_k(Y_l(T_n)) \right|^2,$$

を最小化するように決める¹²。これにより \tilde{c}_n が決まる。この操作を $n = 1$ まで繰り返す。

図3 LSM 法



10 $O(LK)$ は LK の定数倍を表す。

11 各行使時刻において、1つのパスに対し(16)式より K 項の計算から継続価値を計算し、これを L 本全てのパスに関して行う。

12 Longstaff and Schwartz [2001] は回帰に用いるパスはアウト・オブ・ザ・マネーのものを含まないことで計算の効率が上がると指摘している。

手順3: (1)式、(2)式に従うシミュレーション・パス $\{X_l(T_1), \dots, X_l(T_N)\}_{l=1}^L$ を発生させ、

$$\tilde{v}_0 = \left(\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L g(\tilde{\tau}_{1,l}, X_l(\tilde{\tau}_{1,l})) \right) \vee g(T_0, x_0), \quad (17)$$

によって、 \tilde{v}_0 を求める。

LSM 法は、前述のとおり 10 年以上前に提案された手法であるが、その後もなお活発に研究が行われている。ここでは、まず計算結果の一致性に関する研究について紹介する。真の継続価値が得られれば、計算結果は真値に収束するため、この論点に関するほとんどの既存研究が継続価値を近似した際に生じる誤差に関するものとなっている。Clément, Lamberton, and Protter [2001] は基底関数を適切に選べば、シミュレーション・パスの数の増加に伴い継続価値が真値に収束することを示した。また Kusuoka [2003] は基底関数を有限個に固定したもとで得られる推定値と真値との差は、基底関数の線形結合で表される全ての関数と真の継続価値の誤差のうち最も小さいもの¹³と、モンテカルロ法から生じる誤差¹⁴で抑えられることを示した。Glasserman and Yu [2004] はシミュレーション・パスの数を増やすと同時に基底関数の数も増やした時の収束について考察し、原資産をブラウン運動や幾何ブラウン運動とした場合に、シミュレーション・パスの数は基底関数の数の増大に対して指数のオーダーで増大させなければ正しい回帰は行えないことを示した。その一方で、Stentoft [2004] はもし原資産価格の状態空間が有限であれば継続価値を近似するために必要なシミュレーション・パスの数は多項式オーダーで収まることを主張した。そして Gerhold [2011] はレヴィ=メクスナー (Lévy-Meixner) ・モデルと呼ばれる特別なレヴィ過程のクラス¹⁵において、状態空間が有限の場合とそうでない場合について考察を行い、Glasserman and Yu [2004] の主張と Stentoft [2004] の双方の主張が成立することを確認した。

次に回帰手法に関する研究を紹介する。回帰計算には、基底関数の種類をどのようにとるのがよいかという問題と、どのような回帰計算を用いればよいかという問題の2つの論点がある。前者については、単項式のほかエルミート多項式、ルジャンドル多項式などの直交多項式が多く用いられている。例えばブラウン運動は、その特性関数がエルミート多項式の母関数になっている¹⁶ことから、エルミート多項式を基底関数にとると不都合が生じる場合が少なくなるとされているが、一般的にどの基底関数を用いることが最もよいかを示す理論的な根拠は未だ示されていない。また、基底関数をスプライン関数にする手法は Kohler [2008] で行われている。Bally,

13 この誤差は基底関数の次数に関して多項式オーダーより速いオーダーで 0 に収束する。

14 オーダーは $\frac{1}{\sqrt{L}}$ となる。

15 レヴィ過程のうち、確率過程の特性関数が直交多項式の母関数と一致するもの。条件付期待値が直交多項式を用いて表現できる。

16 Schoutens [2000] 参照。

Pages, and Printemps [2003] は量子化 (Quantization) と呼ばれる手法で空間を分割し、各分割のうえで定数関数となる形の関数に回帰する手法を提案している。そこでは、最適な空間分割のアルゴリズムを紹介し、最適な空間分割のもとでは、継続価値の近似値と真の値の誤差は $O(L^{-\frac{1}{d}})$ となることを示した¹⁷。ただし、モンテカルロ法のメリットは次元の増加に伴う計算量の級数的増大を回避できる点にあるのに対し、スプライン関数の活用や空間の分割は再び次元の増加に伴う計算量の級数的増大の問題を招くという欠点がある。このほかに、例えば基底関数の中にペイオフ関数を入れるなど、実務的な試行錯誤も研究されている (Glasserman [2004])。回帰手法についてみると (16) 式は線形回帰であるが、非線形でノンパラメトリックな回帰に拡張するという研究も行われている (Egloff [2005]、Egloff, Kohler, and Todorovic [2007])。

ロ. 確率メッシュ法

Broadie and Glasserman [2004] は、原資産の推移確率密度関数を用いることができれば問題によらず高い精度でアメリカン・オプションの価格を計算することができる確率メッシュ法を提案した。 T_{n+1} 時点での継続価値が L_0 個の点上¹⁸で求まっているとすると、 T_n 時点で状態 x とした時の継続価値は、 T_{n+1} 時点におけるオプション価格の加重和、

$$\tilde{c}_n(x) = \frac{1}{L_0} \sum_{l=1}^{L_0} \tilde{v}_{n+1}(Y_l(T_{n+1})) W_{n,n+1}(x, Y_l(T_{n+1})), \quad (18)$$

によって求められる (図 4)。ここで $W_{n,n+1}(x, Y_l(T_{n+1}))$ を重みと呼ぶ。

確率メッシュ法は準解析的に継続価値を記述しているため、問題によらず計算量に応じた精度でオプション価格を計算できる。また、確率メッシュ法の計算量は $O(L_0 L)$ と表現される¹⁹。LSM 法における基底関数の数 K よりもメッシュの数 L_0 の方が大きい場合、LSM 法に比べ確率メッシュ法の計算量は多くなる。また、重みには原資産の推移確率密度関数を用いるため、使用できる原資産のモデルが推移確率密度関数が書けるものに限られてしまう。

確率メッシュ法のアルゴリズムは、以下のとおりである。

手順 1: (1) 式、(2) 式に従う原資産のパス $\{Y_l(T_1), \dots, Y_l(T_N)\}_{l=1}^{L_0}$ を発生させる²⁰。

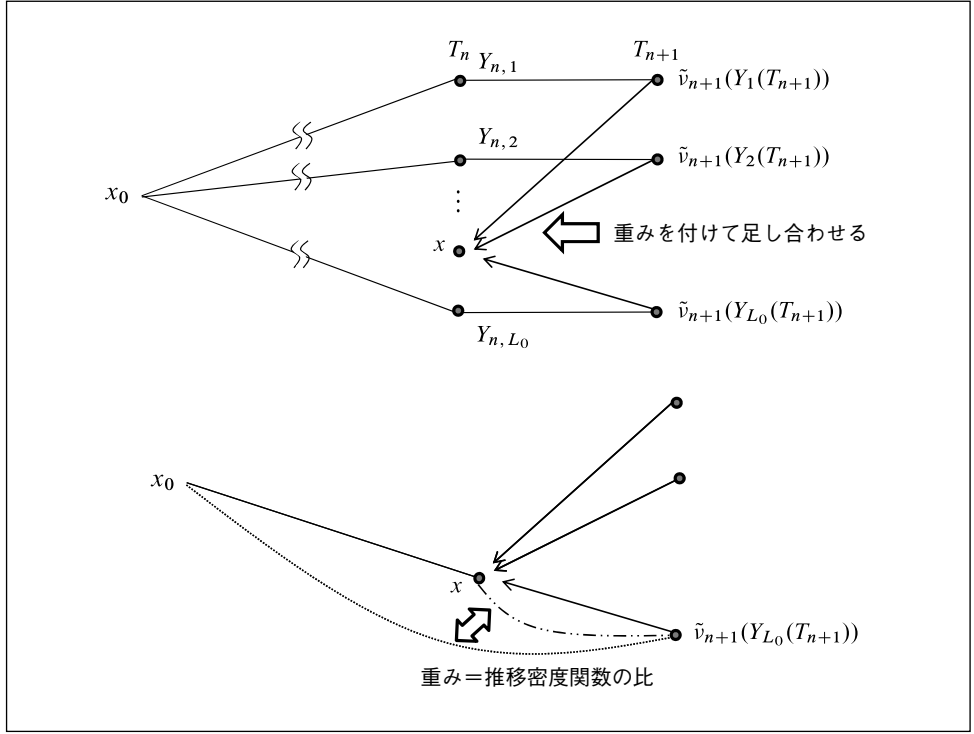
17 ここで D は空間の次元、 L は回帰に用いるサンプルのサイズのことである。

18 この点は数値的に発生させる。この点のことを確率メッシュと呼ぶ。

19 (18) 式より各パスに対して L_0 項の和を計算する必要がある。

20 $Y_l(T_n)$ はあくまでメッシュを作るための確率過程であるため、分布は必ずしも $X_l(T_n)$ と同じである必要はない。しかし、メッシュは原資産のパスが密となっている場所で密になっている方が高い計算精度を得やすい。

図4 確率メッシュ法



手順2: 各時点における継続価値を次のように決める。

- T_N 時点において、

$$\tilde{v}_N(x) = \tilde{c}_N(x) = g(T_N, x),$$

と決める。

- T_{n+1} 時点の継続価値 $\tilde{c}_{n+1}(x)$ が関数として得られているとする。この時、 T_n 時点での状態 x における継続価値は (18) 式を用いて、次のように計算される。

$$\tilde{c}_n(x) = \frac{1}{L_0} \sum_{l=1}^{L_0} (g_{n+1}(Y_l(T_{n+1})) \vee \tilde{c}_{n+1}(Y_l(T_{n+1}))) W_{n,n+1}(x, Y_l(T_{n+1})). \quad (19)$$

(19) 式により、 T_n 時点における継続価値 $\tilde{c}_n(x)$ も関数として定まる。

- この操作を $n = 1$ まで繰り返す。

手順3: (1)式、(2)式に従うシミュレーション・パス $\{X_l(T_1), \dots, X_l(T_N)\}_{l=1}^L$ を発生させて、

$$\tilde{v}_0 = \left(\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L g(\tilde{\tau}_l, X_l(\tilde{\tau}_l)) \right) \vee g(T_0, x_0), \quad (20)$$

$$\tilde{\tau}_l = \inf \{t \in \{T_1, \dots, T_N\}; g(t, X_l(t)) \geq \tilde{c}(t, X_l(t))\}, \quad (21)$$

によって、 \tilde{v}_0 を計算する。

(18)式、(19)式における重み $W_{n,n+1}(x, Y_l(T_{n+1}))$ の計算手法には色々な手法がありうるが、このうち最も多く用いられている手法は以下のとおりである。

$p_{n,n+1}(x, y)$ を時点 T_n で x 、時点 T_{n+1} で y という値をとる推移確率密度関数とし、 $q_{0,n+1}(x_0, y)$ をパス $Y_l(T_n)$ 、 $l = 1, \dots, L_0$ が時点 T_0 で x_0 、時点 T_{n+1} で y という値を通る推移確率密度関数とする。重み $W_{n,n+1}(x, Y_l(T_{n+1}))$ を、

$$W_{n,n+1}(x, Y_l(T_{n+1})) = \frac{p_{n,n+1}(x, Y_l(T_{n+1}))}{q_{0,n+1}(x_0, Y_l(T_{n+1}))}, \quad (22)$$

と定義する。この時、 $L_0 \rightarrow \infty$ において、

$$\frac{1}{L_0} \sum_{l=1}^{L_0} \tilde{v}_{n+1}(Y_l(T_{n+1})) \frac{p_{n,n+1}(x, Y_l(T_{n+1}))}{q_{0,n+1}(x_0, Y_l(T_{n+1}))} \quad (23)$$

$$\rightarrow \int_{\mathbf{R}^D} \tilde{v}_{n+1}(y) \frac{p_{n,n+1}(x, y)}{q_{0,n+1}(x_0, y)} q_{0,n+1}(x_0, y) dy \quad (24)$$

$$= \int_{\mathbf{R}^D} \tilde{v}_{n+1}(y) p_{n,n+1}(x, y) dy \quad (25)$$

$$= P_{n,n+1} \tilde{v}_{n+1}(x), \quad (26)$$

となるため継続価値の推定値は真値に各点収束する。しかし、この重みは分母がパス $Y_l(T_n)$ の推移確率密度関数であるため、分母の値が非常に小さい場合に重みが大きくなりすぎてうまく計算できないという問題が生じうる。Broadie and Glasserman [2004] はメッシュを原資産価格と同分布 ($p_{0,n+1}(x_0, y) = q_{0,n+1}(x_0, y)$) で発生させたうえで、次のような重みを用いるとこの問題をある程度防ぐことができることを示した。

$$W_{n,n+1}(x, Y_l(T_{n+1})) = \frac{p_{n,n+1}(x, Y_l(T_{n+1}))}{\frac{1}{L_0} \sum_{k=1}^{L_0} p_{n,n+1}(Y_k(T_n), Y_l(T_{n+1}))}. \quad (27)$$

$L_0 \rightarrow \infty$ の時、重みは (22) 式に近づくほか、

$$\frac{1}{L_0} \sum_{k=1}^{L_0} W_{n,n+1}(Y_k(T_n), Y_l(T_{n+1})) = 1,$$

が成り立つため、継続価値の推定値は真値に各点収束する。

4. キューバチャー法を用いた確率メッシュ法

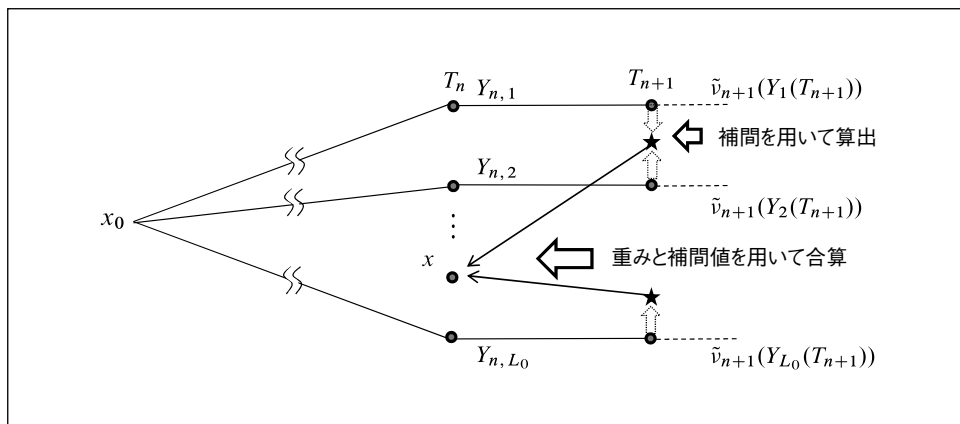
(1) キューバチャー法を用いた確率メッシュ法の概要

本稿が提案するアルゴリズムである、キューバチャー法²¹を用いた確率メッシュ (Stochastic Mesh with Cubature : 以下 SMC) 法は、確率メッシュ法の継続価値の計算をキューバチャー法と補間を用いた計算に置換する。キューバチャー法とは、 X の関数 f の期待値を、有限個の点上の f の値を加重平均することで近似する手法である。この手法では、時間分割に関する (14) 式の誤差のみが生じ、モンテカルロ法に由来する (12) 式の誤差が生じない²²。本稿ではキューバチャー法を確率メッシュ法の重み関数に適用することで、(22) 式のような推移確率密度関数で記述される重みや、2重のモンテカルロ法を用いずに継続価値 \tilde{c}_n を計算する。ただし、確率メッシュ法は T_{n+1} 時点のメッシュ上のオプション価格 $\tilde{v}_{n+1}(Y_l(T_{n+1}))$ 、 $l = 1, \dots, L_0$ を加重平均するのに対し、SMC 法では必ずしもメッシュ上にあるとは限らない点上の値を加重平均する。そこで確率メッシュ法とは異なり、メッシュ上の値を補間するなどをして、キューバチャー法が必要とする点上のオプション価格をあらかじめ計算したうえで、それらを加重平均して \tilde{c}_n を計算する必要がある (図 5)。本手法は確率メッシュ法的一种であるため、考察対象となるアメリカン・オプションの商品性に依存することなしに、その価格を計算量に応じた精度で計算することができる。さらに、継続価値の計算にキューバチャー法を用いることで、原資産の推移確率密度関数が陽に得られない場合でも不都合を生じることなくアメリカン・オプションの価格を計算できる。また、後で説明するように、計算には確率微分方程式の係数

21 キューバチャー法は確率微分方程式の弱近似手法の一種であり、近年ではその発展に貢献した Kusuoka [2004]、Lyons and Victoir [2004]、Ninomiya and Victoir [2008]、Ninomiya and Ninomiya [2009] を踏まえ KLVN 法とも呼ばれている。これらの論文はその着想に共通点が多いものの、Ninomiya and Victoir [2008]、Ninomiya and Ninomiya [2009] がモンテカルロ法を用いた数値積分を意識した考察を行っているのに対し、Lyons and Victoir [2004] がパスの加重和を用いる形で解析的に積分計算を行う手法を考察しているという違いがある。キューバチャー法の詳細については補論 2. を参照。

22 本稿が用いる手法は、Lyons and Victoir [2004] のもので、継続価値を計算する際の積分計算をモンテカルロ法を用いるのではなく解析的に計算する。このため、本稿の手法における継続価値計算では (12) 式の誤差は生じない。もっとも、アメリカン・オプションの価格を計算する際には確率過程に従う変数に対する積分をモンテカルロ法で行うため、そこでの誤差は (12) 式と (14) 式の和となる。

図5 SMC 法



の情報のみが必要であり、途中の計算を全てブラックボックス化できるという長所を持つ。

キューバチャー法の詳細については補論 2. で述べるとして、以下では本手法の概要を示す。すなわち、計算のアルゴリズムは、次の手順 1 から手順 3 によって構成される。

手順 1: (1) 式、(2) 式に従う原資産のパス $\{Y_l(T_1), \dots, Y_l(T_N)\}_{l=1}^{L_0}$ を発生させる。

手順 2: 各時点のオプション価格を次のように定義する。

- T_N については、

$$\tilde{v}_N(x) = \tilde{c}_N(x) = g(T_N, x),$$

と定義する。

- T_{n+1} 時点の継続価値 $\tilde{c}_{n+1}(x)$ が関数として得られているとする。この時、これとキューバチャー法を用いて有限個の状態 $Y_l(T_n)$ 、 $l = 1, \dots, L_0$ における継続価値の近似値、

$$\tilde{c}_l^{(n)}, l = 1, \dots, L_0,$$

を求める。

- $\tilde{c}_l^{(n)}$ 、 $l = 1, \dots, L_0$ を補間し、 T_n における継続価値 $\tilde{c}_n(x)$ を関数として求める。
- この操作を $n = 1$ まで繰り返す。

手順3: (1) 式、(2) 式に従うシミュレーション・パス $\{X_l(T_1), \dots, X_l(T_N)\}_{l=1}^L$ を発生させて、

$$\tilde{v}_0 = \left(\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L g(\tilde{t}_l, X_l(\tilde{t}_l)) \right) \vee g(T_0, x_0), \quad (28)$$

$$\tilde{t}_l = \inf \{t \in \{T_1, \dots, T_N\}; g(t, X_l(t)) \geq \tilde{c}(t, X_l(t))\}, \quad (29)$$

によって、 \tilde{v}_0 を計算する。

(2) 数学的な設定

イ. ストラトノビッチ型確率過程

後述する計算を議論するうえで便利のように、(1) 式を (30) 式のように書き直す。

$$X(t; s, x) = x + \sum_{\alpha=0}^d \int_s^t V_{\alpha}(X(r; s, x)) \circ dB^{\alpha}(r), \quad (30)$$

$$\hat{V}_0^{(i)}(x) = V_0^{(i)}(x) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^d \sum_{j=1}^D V_{\alpha}^{(j)}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} V_{\alpha}^{(i)}(x). \quad (31)$$

ただし、

$$V_{\alpha}(x) = \begin{pmatrix} V_{\alpha}^{(1)}(x) \\ \vdots \\ V_{\alpha}^{(D)}(x) \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, \dots, d,$$

とした。なお (1) 式は確率微分方程式の伊藤型表記と呼ばれるのに対し、(30) 式は確率微分方程式のストラトノビッチ (Stratonovich) 型表記と呼ばれる。上記のように確率微分方程式の係数関数が滑らかな状況では、(31) 式により、伊藤型とストラトノビッチ型は 1 対 1 に対応させることが可能であり自由に書き換えることができる。

ロ. 確定的な継続価値関数と最適停止時刻関数の構成

$y_n^N = (y_n, \dots, y_N) \in (\mathbf{R}^D)^{L_0} \times \dots \times (\mathbf{R}^D)^{L_0}$ に対し、以下の関数を定義する。

定義 4.1 (1) $n = N$ に対し、

$$\hat{c}_N(x, y_N^N) = \hat{v}_N(x, y_N^N) = g_N(x), \quad (32)$$

とする。

(2) $1 \leq n \leq N-1$ とし、 $\hat{c}_{n+1}(x, y_{n+1}^N)$ は決まっているとする。この時、

$$\hat{v}_{n+1}(x, y_{n+1}^N) = \hat{c}_{n+1}(x, y_{n+1}^N) \vee g_{n+1}(x),$$

とする。

$\{(\theta_k, \lambda_k)\}_{k=1}^p$ を m 次のキューバチャー法に対するノードと重みのペアとし、全ての α, k に対し、 $\sup_{t \in [0, T]} |\frac{d\theta_k^\alpha}{dt}| \leq C_w$ かつ、 $\lambda_k > 0, k = 1, \dots, p, \lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1$ を満たすとする。また、自然数 I に対し、行使間隔 $[T_n, T_{n+1}]$ を I 分割して $T_n = t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,I} = T_{n+1}$ とする。また $s_{n,k} = t_{n,k} - t_{n,k-1}$ とし、分割は、 $t_{n,j} = T_n + (T_n - T_{n-1})(1 - (1 - \frac{j}{k})^\gamma), \gamma > m-1$ としておく (図 6)。

m 次のキューバチャー法を用いた関数、

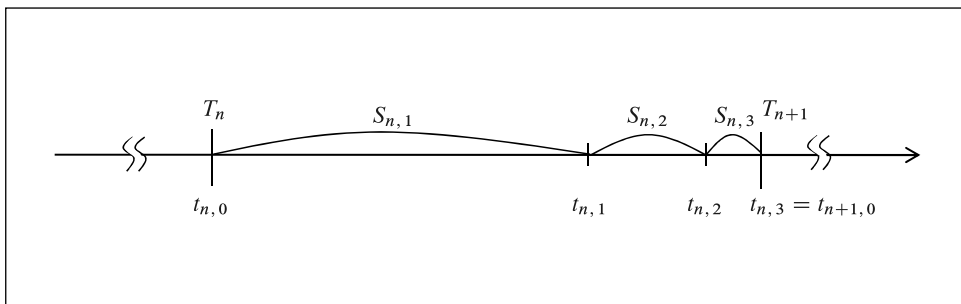
$$\begin{aligned} & \Gamma_n(x, y_{n+1}^N) \\ &= \sum_{k_1=1, \dots, k_I=1}^p \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_I} \hat{v}_{n+1}(\Phi(T_{n+1} - T_n, \theta_{s_{n,1}, k_1}, \otimes \cdots \otimes \theta_{s_{n,I}, k_I}, x), y_{n+1}^N), \end{aligned}$$

と定義する。ここで、 $\Phi(T_{n+1} - T_n, \theta_{s_{n,1}, k_1}, \otimes \cdots \otimes \theta_{s_{n,I}, k_I}, x)$ は補論 2. の (A-26) 式で定義される常微分方程式の解を表す。さらに $y_l^{(n)}, l = 1, \dots, L_0$ における継続価値 $\hat{c}_l^{(n)}, l = 1, \dots, L_0$ を、

$$\hat{c}_l^{(n)} = \Gamma_n(y_l^{(n)}, y_{n+1}^N), l = 1, \dots, L_0,$$

と定めたいで、時点 T_n における継続価値の近似関数 $\hat{c}_n(x, y_n^N)$ を $\hat{c}_l^{(n)}, l = 1, \dots, L_0$ を補間することによって定義する。補間手法は一意に定まらないが、 $\{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0}$ という点を補間して得られた x 上の値を $\Psi(x; \{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0})$ で表すことにする。どのような補間が適用できるかは補論 1. で論ずるが、例えば $D = 1$ の場合、最もシンプ

図 6 時間分割、 $I = 3, \gamma = 3$



ルな補間手法は線形補間である。これは、 $y_1 < \dots < y_{L_0}$ となるように $\{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0}$ を並び替えたとして、

$$\Psi(x; \{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0}) = \begin{cases} z_1, x \leq y_1, \\ z_{l-1} + \frac{z_l - z_{l-1}}{y_l - y_{l-1}}(x - y_{l-1}), y_{l-1} < x \leq y_l, \\ z_{L_0}, x > y_{L_0}, \end{cases} \quad (33)$$

により与えられる。補間を用いて構成される継続価値の近似関数は、

$$\hat{c}_n(x, \mathbf{y}_n^N) = \Psi(x, \{(y_l^{(n)}, \hat{c}_l^{(n)})\}_{l=1}^{L_0}),$$

と表される。

$W_n = \mathbf{R}^{D(N-n+1)}$ 、 $n = 1, \dots, N$ を離散時刻におけるパス空間とする。そして W_n の元を $w_n = (x(T_n), \dots, x(T_N))$ のように表す。上で定まる \hat{c}_n を用いて、各 \mathbf{y}_n^N に対して最適停止時刻を与える W_n 上の関数 $\hat{\tau}_n(\cdot, \mathbf{y}_n^N) : W_n \rightarrow \{T_n, \dots, T_N\}$ 、 $n = 1, \dots, N$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_n(w_n, \mathbf{y}_n^N) &= \inf\{T_m \geq T_n; g(T_m, x(T_m)) \geq \hat{c}_m(x(T_m), \mathbf{y}_n^N)\} \\ &= T_n 1_{\{g_n(x_n) \geq \hat{c}_n(x_n, \mathbf{y}_n^N)\}} + \hat{\tau}_{n+1}(w_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}^N) 1_{\{g_n(x_n) < \hat{c}_n(x_n, \mathbf{y}_n^N)\}}. \end{aligned} \quad (34)$$

また、 $\{w_{1,l}\}_{l=1}^L \in (W_1)^L$ 、 $w_{1,l} = (x_l(T_1), \dots, x_l(T_N))$ に対し、時点 0 における継続価値とオプション価格を表す関数 \hat{c}_0^*, \hat{v}_0^* を、

$$\begin{aligned} \hat{c}_0^*(\{w_{1,l}\}_{l=1}^L, \mathbf{y}_1^N) &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L g(\hat{\tau}_1(w_{1,l}, \mathbf{y}_1^N), x_l(\hat{\tau}_1(w_{1,l}, \mathbf{y}_1^N))), \\ \hat{v}_0^*(\{w_{1,l}\}_{l=1}^L, \mathbf{y}_1^N) &= \hat{c}_0^*(\mathbf{w}_1^L, \mathbf{y}_1^N) \vee g_0(x_0), \end{aligned}$$

と定義する。

ハ. 確率的な継続価値過程と最適停止時刻過程の構成

シミュレーションで発生させるパスを次のように定義する。 L 本の確率変数のパス、

$$X_l = (X_l(T_0), X_l(T_1), \dots, X_l(T_N)), l = 1, \dots, L,$$

と L_0 本の確率変数のパス、

$$Y_l = (Y_l(T_0), Y_l(T_1), \dots, Y_l(T_N)), l = 1, \dots, L_0,$$

を考える。 $X_l, l = 1, \dots, L$ と $Y_l, l = 1, \dots, L_0$ はそれぞれ独立同分布であり、さらに $\sigma\{X_l, l = 1, \dots, L\}$ と $\sigma\{Y_l, l = 1, \dots, L_0\}$ は独立であるとする。そして、確率微分方程式 (30) 式の解の推移核 $p_{m,n}(x, dy)$ と時点 0 からの推移核 $q_{0,n}(x, dy)$ を用いて、 X_l, Y_l の W_1 上の分布 μ, ν を、任意の可測集合 $A_i, i = 1, \dots, N$ に対して、

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \times \dots \times A_N) &= \int_{A_1 \times \dots \times A_N} p_{0,1}(y_0, dy_1) \cdots p_{N-1,N}(y_{N-1}, dy_N), \\ \nu(A_1 \times \dots \times A_N) &= \int_{A_1 \times \dots \times A_N} q_{0,1}(y_0, dy_1) \cdots q_{0,N}(y_0, dy_N) \\ &= \prod_{n=1}^N q_{0,n}(x_0, A_n), \end{aligned}$$

により与える。

フィルトレーション $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^N, \{\mathcal{G}_n\}_{n=0}^N$ をそれぞれ、

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_l(T_m); l = 1, \dots, L, m \leq n\}, \quad (35)$$

$$\mathcal{G}_n = \sigma\{Y_l(T_m); l = 1, \dots, L_0, m \leq n\}, \quad (36)$$

と定める。この時、 X_l はフィルトレーション $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^N$ に関して、推移核 $\{P_{n,m}\}$ を持つマルコフ過程になっており、任意の有界可測関数 f と $m \geq n$ に対して、

$$\begin{aligned} P_{n,m}f(X_n) &= E[f(X_l(m)) | \mathcal{F}_n] \\ &= \int_{R^D} f(y) p_{n,m}(X_l(T_n), dy), \quad P\text{-a.s.}, \end{aligned} \quad (37)$$

が成り立つ。そして $Y_n = \{Y_l(T_n)\}_{l=1}^{L_0}$ とし、 $Y_n^N = (Y_n, \dots, Y_N)$ と表す。

定義 4.2 確率的な継続価値過程と最適停止時刻過程を次のように定義する。
 $n = N$ に対し、

$$\tilde{c}_N(x) = \tilde{v}_N(x) = g_N(x).$$

$1 \leq n \leq N-1$ に対し、

- 継続価値のキューバチャー法による近似値

$$\tilde{c}_l^{(n)} = \Gamma_n(Y_l(T_n), Y_{n+1}^N). \quad (38)$$

- 継続価値の補間による近似関数

$$\tilde{c}_n(x) = \hat{c}_n(x, \mathbf{Y}_n^N). \quad (39)$$

- 価値関数の近似関数

$$\tilde{v}_n(x) = \hat{v}_n(x, \mathbf{Y}_n^N). \quad (40)$$

- 最適停止時刻の推定値 $\tilde{\tau}_n : W_n \rightarrow \{T_n, \dots, T_N\}$

$$\tilde{\tau}_n(w_n) = \hat{\tau}_n(w_n, \mathbf{Y}_n^N). \quad (41)$$

- 時刻 T_0 での継続価値の推定値

$$\tilde{c}_0^* = \hat{c}_0^*({\{X_l\}}_{l=1}^L, \mathbf{Y}_1^N). \quad (42)$$

- 時刻 T_0 でのオプション価格の推定値

$$\tilde{v}_0^* = \hat{v}_0^*({\{X_l\}}_{l=1}^L, \mathbf{Y}_1^N). \quad (43)$$

(3) SMC 法のアルゴリズムと計算量

イ. アルゴリズムの数学的記述

以上の定義を用いて、 \tilde{v}_0^* を求めるアルゴリズムを数学的に再記する。

手順 1 : (1) 式、(2) 式に従う原資産のパス $\{Y_l(T_1), \dots, Y_l(T_N)\}_{l=1}^{L_0}$ を発生させる。

手順 2 : $n = N$ の時、

$$\tilde{c}_N(x) = \tilde{v}_N(x) = g(T_N, x), \quad (44)$$

と定義する。

$n \leq N - 1$ とする。また、あらかじめ $\tilde{v}_{n+1}(x) = \hat{v}_{n+1}(x, \mathbf{Y}_{n+1}^N)$ が決まっているとする。この時各グリッド $Y_l(T_n)$ 、 $l = 1, \dots, L_0$ における継続価値の近似値 $\tilde{c}_l^{(n)}$ を $\tilde{v}_{n+1}(x, \mathbf{Y}_{n+1}^N)$ とキューバチャール法を用いて求める。

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_l^{(n)} &= \Gamma_n(Y_l(T_n), Y_{n+1}^N) \\
&= \sum_{k_1=1, \dots, k_I=1}^p \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_I} \hat{v}_{n+1} \left(\Phi(T_{n+1} - T_n, \right. \\
&\quad \left. \theta_{s_{n,1}, k_1} \otimes \cdots \otimes \theta_{s_{n,I}, k_I}, Y_l(T_n)), Y_{n+1}^N \right). \quad (45)
\end{aligned}$$

手順3: 補間によって継続価値の近似関数 $\tilde{c}_n(x)$ を求める。

$$\tilde{c}_n(x) = \Psi(x, \{(Y_l(T_n), \tilde{c}_l^{(n)})\}_{l=1}^{L_0}).$$

これを用いて、 T_n における価値関数の近似関数 $\tilde{v}_n(x)$ を求める。

$$\tilde{v}_n(x) = \tilde{c}_n(x) \vee g_n(x). \quad (46)$$

手順4: $n > 1$ ならば $n-1$ として手順2、手順3の操作を繰り返す。 $n = 1$ ならば、手順5に進む。

手順5: (1)式、(2)式に従うシミュレーション・パス $\{X_l(T_1), \dots, X_l(T_N)\}_{l=1}^L$ を発生させる。ここで、既に $\tilde{c}_n, n = 1, \dots, N$ が得られているので最適停止時刻 $\tilde{\tau}_1: W_1 \rightarrow \{T_1, \dots, T_N\}$ を求めることができる。これを用いて \tilde{c}_0^* を求める。

$$\tilde{c}_0^* = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L g(\tilde{\tau}_1, X_l(\tilde{\tau}_1)).$$

なお、時点 T_0 でのオプション価格の推定値 \tilde{v}_0^* は、

$$\tilde{v}_0^* = \tilde{c}_0^* \vee g(T_0, x_0),$$

により求まる。

□. 計算量

上記のアルゴリズムが必要とする計算量について考察を行う。まず手順2において、 $\tilde{c}_l^{(n)}$ を求める際に必要となる計算量を考える。(45)式より計算が必要な項の数は p^I となることがわかる。次に(45)式の各項、

$$\hat{v}_{n+1} \left(\Phi(T_{n+1} - T_n, \theta_{s_{n,1}, k_1} \otimes \cdots \otimes \theta_{s_{n,I}, k_I}, Y_l(T_n)), Y_{n+1}^N \right),$$

の計算量を考える。常微分方程式 $\Phi(T_{n+1} - T_n, \theta_{s_{n,1},k_1} \otimes \cdots \otimes \theta_{s_{n,I},k_I}, Y_l(T_n))$ を s 段階ルンゲ=クッタ法を用いて、各区間 $[T_{n,i}, T_{n,i+1}]$ を r 個に分割して計算すると、計算量は $O(srI)$ となる。次に、 $\hat{v}_{n+1}(x, y_{n+1}^N) = \hat{c}_{n+1}(x, y_{n+1}^N) \vee g_{n+1}(x)$ の計算量を考える必要があるが、これは $\hat{c}_{n+1}(x, y_{n+1}^N) = \Psi(x, \{(Y_l(T_{n+1}), \tilde{c}_l^{(n+1)})\}_{l=1}^{L_0})$ の関数 Ψ を用いた補間に伴う計算量に依存する。例えば、補間関数として近似デルタ関数²³を用いた場合には、各 x に対し $\Psi(x, \{(Y_l(T_{n+1}), \tilde{c}_l^{(n+1)})\}_{l=1}^{L_0})$ を求めるために $O(L_0)$ の計算量が発生する。したがって、 $\tilde{c}_l^{(n)}$ を算出するために必要な計算量は $O(p^I srIL_0)$ となる。また手順2では $\tilde{c}_l^{(n)}$ を $1 \leq l \leq L_0$ について繰り返し計算することから、 $\tilde{c}_l^{(n)}$ を求める際に必要となる計算量は $O(p^I srIL_0^2)$ となる。また、手順4では $1 \leq n \leq N-1$ について同様の操作を繰り返すため、手順1から手順4までに必要な計算量は $O((N-1)p^I srIL_0^2)$ となる。

手順5ではシミュレーション・パス $X_l(\cdot)$ を発生させて、(34)式を用いて最適停止時刻を求めたうえで、各シミュレーション・パスのオプション価格を計算したうえでそれらを平均する。この際、 $\hat{c}_n(x, y_n^N)$ 、 $1 \leq n \leq N-1$ を計算するが、その計算量は手順2の補間関数に関する考察から $O((N-1)L_0)$ となる。 L 本のシミュレーション・パスに対してこれを計算するため、手順5で必要となる計算量は $O((N-1)L_0L)$ となる。これらを合算すると必要な計算量は $O((N-1)(p^I srIL_0^2 + L_0L))$ となる。これを、通常最も大きいパラメータであるシミュレーション・パスの数 L に注目して解釈すると $O((N-1)L_0L)$ と考えられることから、確率メッシュ法と同等の計算量と考えることができる。

なお、SMC法では $p^I srIL_0^2$ も無視できないオーダーになりうる点には留意が必要である。すなわち、キューバチャ法のサイズ p はブラウン運動の個数（ランダムなリスク・ファクターの個数） d とキューバチャ法の次数 m に依存して決まるパラメータであり、 d や m が大きくなれば p も増加する²⁴。したがって、組み合わせによっては p が非常に大きくなる場合も存在しうるため、 $p^I srIL_0^2$ が L_0L を上回るということも考えられる。

(4) 誤差評価

SMC法を用いて計算するアメリカン・オプション価格 \hat{v}_0^* と真の価格 v_0 の差を評価する。

命題 4.3 ある $C_0 > 0$ が存在して、次が成り立つ。

²³ 補論 1. (2)を参照。

²⁴ ただし現状では、 p と d 、 m の間にはっきりとした関係式が存在するわけではなく m が 3、5、7 などの場合と次元 d の組み合わせに応じて、あるサイズ p のキューバチャ法が個々に発見されているに過ぎない。例えば、 $m = 3$ の場合は $p < 4d$ でキューバチャ法を構成できることを補論 2. で解説する。

$$E \left[|\tilde{v}_0^* - v_0|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C_0 L^{-\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{N-1} E \left[P_{0,n} \left(|c_n - \tilde{c}_n|^2 \right) (x_0) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

定理 4.4 (主定理) 次の (A1) と (A2) を仮定する。

(A1): 補間関数 Ψ が次の性質を満たす。

補間点 (y_k, z_l) がサンプル点 $\{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0}$ に対し $|z_k - z_l| \leq K|y_k - y_l|$ を満たす時、

$$\begin{cases} |\Psi(x; \{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0}) - \Psi(y; \{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0})| \leq K|x - y|, \\ \Psi(y_k; \{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0}) = z_k, \end{cases}$$

となる。

(A2): $n = 1, \dots, N$ に対し、 $X_1(T_n)$ と $Y_1(T_n)$ は、それぞれ滑らかな密度関数 $p_{0,n}(x_0, x)$ 、 $q_{0,n}(x_0, x)$ を持ち、

$$p_{0,n}(x_0, x_0) > 0, q_{0,n}(x_0, x_0) > 0, \\ \int_{\mathbf{R}^D} |x|^2 p_{0,n}(x_0, x) dx < \infty, \int_{\mathbf{R}^D} |x|^2 q_{0,n}(x_0, x) dx < \infty,$$

となる。この時、ある定数 $C_0 > 0$ と、分割数 I に依存して決まる定数²⁵ $C_{n,I} > 0$ 、 $n = 1, \dots, N-1$ が存在して、次が成り立つ。

$$E[|\tilde{v}_0^* - v_0|^2]^{\frac{1}{2}} \leq C_0 L^{-\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{N-1} C_{n,I} \left\{ I^{-\frac{m-1}{2}} + L_0^{-\frac{1}{2D}} \right\}. \quad (47)$$

(47) 式により、SMC 法を用いると L 、 I 、 L_0 を十分に大きくとれば計算結果は真値に収束することが確認できる。

5. 数値検証

本節では、数値検証により、本稿が提案するアルゴリズムの有効性を確かめる。このために、LSM 法との比較を軸として、以下の 3 点を確認する。

- LSM 法で高精度に計算できる商品について、SMC 法が同等の精度の計算を行うことができること。

²⁵ $C_{n,I}$ は I によらずにとれることが望ましい。またそのようにとることができると予想される。

- LSM 法では精度良く計算できない商品に対して、SMC 法を用いると精度の高い計算を行うことができること。
- モンテカルロ法以外で評価することが難しい商品についても、SMC 法により十分に誤差が小さい計算を行うことができること。

数値検証に用いる商品としては、次の3つの商品を考える²⁶。例1、例2、例3の検証はそれぞれ本節(1)、(2)、(3)で行う。

例1：バミューダン型2資産最大値オプション（以下、2資産最大値オプション）

$$g(t, x_1, x_2) = \max(x_1 \vee x_2 - K, 0).$$

例2：バミューダン型デジタル・プット・オプション（以下、デジタル・プット・オプション）

$$g(t, x) = 10(K_1 - x) \vee 0 + 1_{\{x > K_2\}}.$$

例3：バミューダン型5資産最大値オプション（以下、5資産最大値オプション）

$$g(t, x_1, \dots, x_5) = \max(x_1 \vee \dots \vee x_5 - K, 0).$$

原資産価格 $X_i(t)$ は D 次元のブラック＝ショールズ・モデルに従うとする。すなわち B_i 、 $i = 1, \dots, D$ を独立な標準ブラウン運動とする時、

$$dX_i(t) = X_i(t) ((r - \mu_i)dt + \sigma_i dB_i(t)),$$

$$X_i(x) = x_i \quad i = 1, \dots, D,$$

を満たす。パラメータを以下の表1のように設定する。ここで、 x は原資産の初期

表1 パラメータ

	D	x	μ	r	σ	T	N	K	K_1	K_2
例1	2	100	0.1	0.05	0.2	3.0	9	100	-	-
例2	1	100	0.0	0.10	0.3	1.0	12	-	100	160
例3	5	100	0.1	0.05	0.2	3.0	9	100	-	-

.....
²⁶ 以下の商品は、行使間隔が1ヵ月から3ヵ月となっており、アメリカン・オプションと呼ぶには行使間隔がやや長めの商品になっている。そこで、本節に限りバミューダンという用語を用いることにする。脚注1も参照。

値、 μ は連続配当率、 r は無リスク金利、 σ はボラティリティを表し、資産の種類によらず一定とする ($x_i = x$ 、 $\mu_i = \mu$ 、 $\sigma_i = \sigma$ 、 $i = 1, \dots, D$)。さらに、 T をオプションの満期、 N を行使可能回数とし、行使間隔は均等とする ($T_i = i \frac{T}{N}$)。

また、計算の際に用いる各種パラメータを以下のとおりに定める。

- サンプル数：モンテカルロ・シミュレーションの回数。
- メッシュ数：SMC 法の手順 2 で用いるパスの数。
- 回帰数：LSM 法の手順 2 で用いるパスの数。
- 分割数：キューバチャ法を用いる際に隣り合う行使時点を分割する分割数²⁷。
- デルタ：近似デルタ関数補間を用いたときのサポートの大きさ²⁸。

真値として、例 1、例 2 では 2 項ツリーを用いて計算した値²⁹、例 3 では Broadie and Glasserman [2004] で示された確率メッシュ法を用いて計算した値³⁰をそれぞれ用いた。そして LSM 法や SMC 法を用いて計算した値と真値との差を推定誤差と呼び、その絶対値を絶対誤差と呼ぶ。また SMC 法では、3 次のキューバチャ法を用いて計算を行う。

(1) 2 資産最大値オプション

このオプションは Glasserman [2004] が LSM 法の検証に用いた商品であり、LSM 法により高精度に計算できる商品例になっている。そこで、当該商品価格を SMC 法により計算しても同等の精度が得られることを確認する。

はじめに SMC 法の計算精度を LSM 法と比較して考察する。表 2 は 2 資産最大値オプションの LSM 法と SMC 法による計算結果である。ここで SMC 法の補間手法としては近似デルタ関数補間を用いており、デルタは 0.0001 として計算している。LSM 法では、絶対誤差はペイオフ関数の選び方によって大きさは異なるものの、いずれも 0.2 程度の低い水準に収まっている。そして、SMC 法でも絶対誤差が 0.2 未満に収まっており、LSM 法と同等以上の高精度でオプション価格を計算できていることが確認できる。ただし、LSM 法は約 1 分程度の計算時間であるのに対し、SMC 法では 15 分から 30 分程度を要する。

図 7 と図 8 は、2 資産最大値オプションについて、満期から 1 期手前の行使時刻における継続価値を LSM 法と SMC 法により近似した関数（以下、近似継続価値）

27 (A-27) 式における k のことである。(A-28) 式より、分割数を増やすとキューバチャ法による近似誤差は小さくなるが、近似式の項数が指数的に増えるため、計算コストも増大する。

28 (A-4) 式における δ のことである。

29 1 年を $\frac{1}{80}$ に分割して計算した。

30 メッシュ数を 3,200、サンプル数を 32,000 とする。

表2 2資産最大値オプション価格のLSM法とSMC法による計算結果

2項ツリー	13.90	
LSM法	回帰数 4,000	サンプル数 4,000
基底関数	推定値	絶対誤差
$1, x_i, x_i^2, x_i^3, i = 1, 2$	13.67	0.23
$1, x_i, x_i^2, x_i^3, x_1 x_2, i = 1, 2$	13.68	0.22
$1, x_i, x_i^2, x_i^3, x_1 x_2, g(x_1, x_2), i = 1, 2$	13.78	0.12
SMC法		
(メッシュ数, サンプル数)	推定値	絶対誤差
(1000, 2000)	13.75	0.15
(2000, 2000)	13.81	0.09

図7 2資産最大値オプションのLSM法による継続価値

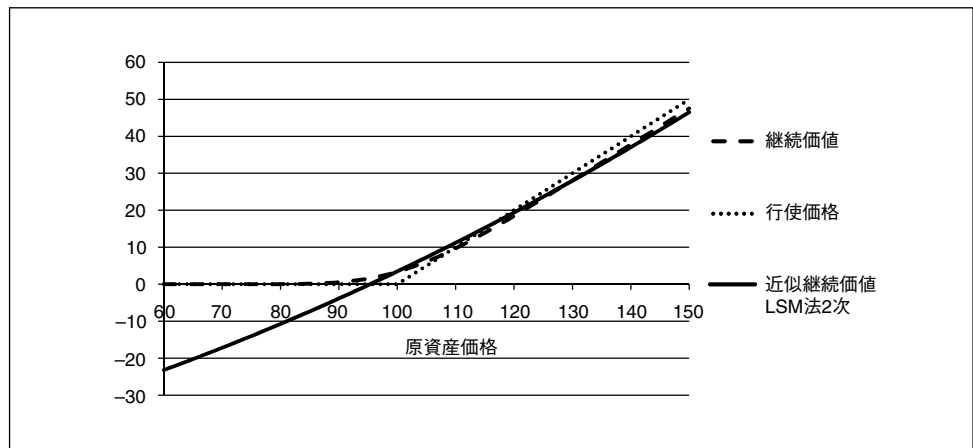
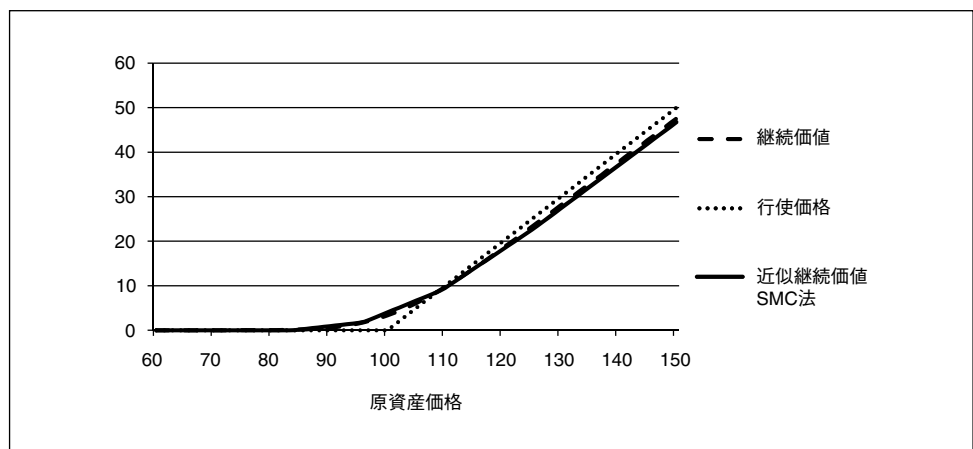


図8 2資産最大値オプションのSMC法による継続価値



を表している³¹。真の行使境界はグラフの継続価値と行使価格が交わる点（原資産価格 115 付近）である。図 7 の LSM 法による近似継続価値は、原資産価格が 90 以下の所では継続価値と大きく乖離しているものの、行使境界付近では概ね良い近似になっている。特に、LSM 法による近似継続価値と行使価格の交点（原資産価格が 120 手前付近）は真の行使境界に近いことがわかる。また、図 8 の SMC 法による近似継続価値は、全体的に継続価値の良い近似になっており、特に行使価格との交点はほぼ真の行使境界と一致していることがわかる。したがって、いずれの手法においても行使境界を精度良く近似できており、その結果表 2 のように絶対誤差が低い水準に収まっていると考えられる。

(2) デジタル・プット・オプション

このオプションは Hamdi and Marcus [2011] で用いられている商品で、LSM 法では精度良く評価できない商品の例である。本商品を用いて、LSM 法では精度が出ないようなオプションに対しても、SMC 法では精度の高い計算が行えることを確認する。

表 3 に示した計算結果から、LSM 法では絶対誤差が大きいのに対し、SMC 法では補間手法によらず小さな誤差でオプション価格を計算できていることがわかる。ただし、計算時間に関しては、LSM 法が約 5 分程度であるのに対し、SMC 法は 90 分程度を要した。

図 9 と図 10 は、それぞれ満期から 1 期手前の行使時刻における近似継続価値を LSM 法と SMC 法により構成した結果を表している。真の行使境界は継続価値と行使価格が交わる点（原資産価格が 90 と 160 の付近）である。図 9 の LSM 法による近似継続価値をみると、真の継続価値と大きく乖離しており、近似継続価値と行使価格は 160 付近では全く交わっていない（交点は 80、130、210 付近）。一方、図 10 の SMC 法による近似継続価値は真の継続価値の良い近似になっており、行使価格

表 3 デジタル・プット・オプション価格の LSM 法と SMC 法による計算結果

2 項ツリー		92.69	
LSM 法		回帰数 10,000	サンプル数 10,000
基底関数		推定値	絶対誤差
$1, x, x^2$		84.41	8.28
SMC 法		メッシュ数 500	サンプル数 30,000
補間手法	時間分割数	推定値	絶対誤差
近似デルタ関数補間（デルタ 0.001）	4	92.54	0.14
近似デルタ関数補間（デルタ 0.0001）	4	92.76	0.07
リプシッツ補間	2	92.45	0.24
線形補間	2	92.78	0.09

31 ただし、図 7 と図 8 は簡単のため 1 資産に単純化した商品の継続価値を表している。

図9 デジタル・プット・オプションのLSM法による継続価値

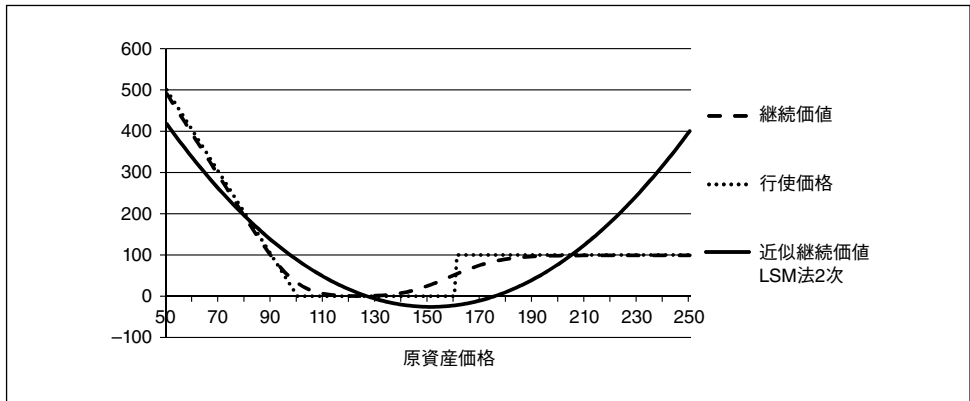
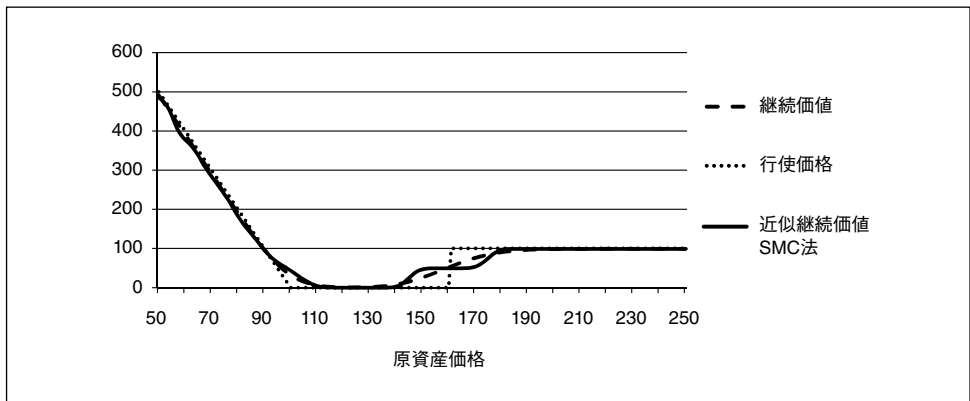


図10 デジタル・プット・オプションのSMC法による継続価値



との交点は真の行使境界のそれとほぼ一致している。この結果、表3のようにLSM法では大きな誤差が生じたのに対し、SMC法では小さい誤差の計算結果を得たと考えられる。

また図11ではSMC法で近似デルタ関数補間を用い、パラメータを分割数4、メッシュ数500、デルタ0.0001としたときの推定誤差の平均と標準偏差を表している。サンプル数を3,000から30,000に増やすと推定誤差0を中心に標準偏差が大きく減少している。

なおメッシュ数やデルタといったパラメータの議論については後述の本節(4)を参照されたい。

(3) 5 資産最大値オプション

このオプションはBroadie and Glasserman [2004] が確率メッシュ法の検証に用いた商品である。SMC法でも高次元のアメリカン・オプションの価格が小さな誤差で

図 11 デジタル・プット・オプション価格の SMC 法による推定誤差の平均と標準偏差

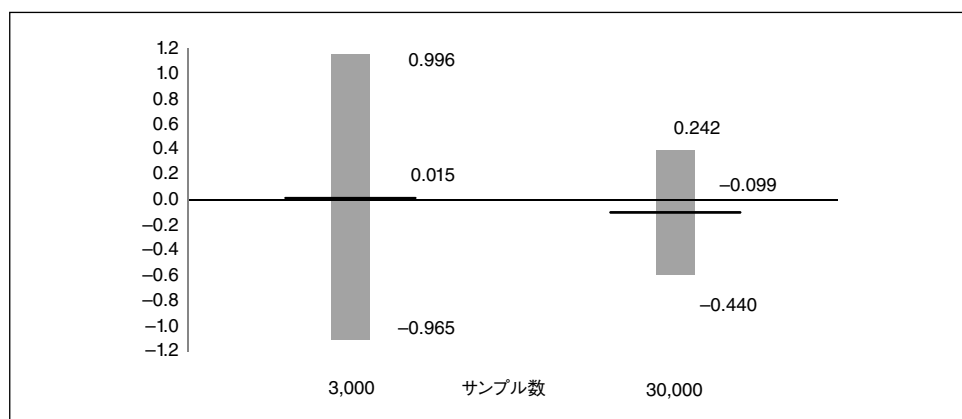
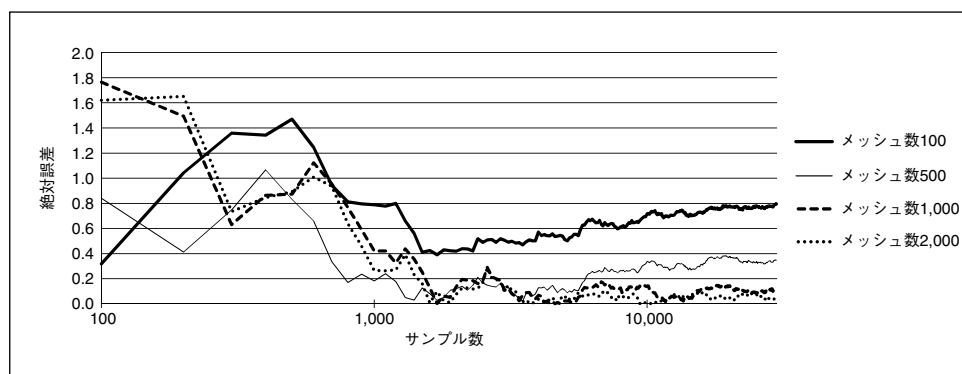


図 12 SMC 法による 5 資産最大値オプション価格の絶対誤差の収束



計算できることを確認する。ここでは、分割数を 2 とし、補間手法は近似デルタ関数補間を用いてデルタを 0.0001 とし計算を行う。

図 12 はサンプル数 30,000 までの収束を表したものである。このような高次元のオプションに関しても、十分に多くのメッシュ数をとればサンプル数が 10,000 以上のサンプル数では絶対誤差が小さな値となっていることがわかる。ただし計算には 2 日程度を要した。

(4) パラメータの考察

SMC 法では、サンプル数、メッシュ数、分割数というパラメータや補間手法を選択する必要がある。ここでは本節(2)で扱った商品を用いて、パラメータの選択について考察する。

イ. 分割数とメッシュ数の比較

図 13 は分割数とメッシュ数の組み合わせを変化させた際の絶対誤差の状況を表している。まず、分割数とメッシュ数の組が (10-50) のときをみると、サンプル数を 100,000 までとっても絶対誤差が 0 に収束していないことから、この問題の計算では少なくとも 100 以上のメッシュ数が必要であると考えられる。また、分割数とメッシュ数の組が (2-500) のときは、サンプル数が 20,000 辺りで絶対誤差が 0.2 を上回るなど、やや不安定になっており、絶対誤差が 0.1 以下となるためにはサンプル数が 70,000 程度必要となっている。一方で、分割数とメッシュ数の組が (4-500) や (10-100) の場合は、サンプル数が 10,000 以上であれば絶対誤差が 0.1 以下となることがわかる。そこで、以下では (4-500) の組を基準として、分割数とメッシュ数の一方を動かすことによって、計算量と計算精度のバランスが比較的よいと思われるパラメータを探すことにする。

ロ. 分割数の比較

図 14 はメッシュ数を 500 に設定し、分割数をそれぞれ 1、2、4、10 と変化させた場合の様子である。分割数が 10 のときはサンプル数が少ないときも安定して絶対誤差の水準が小さくなっているものの、サンプル数が 15,000 以上では分割数が 4 の場

図 13 分割数とメッシュ数の比較

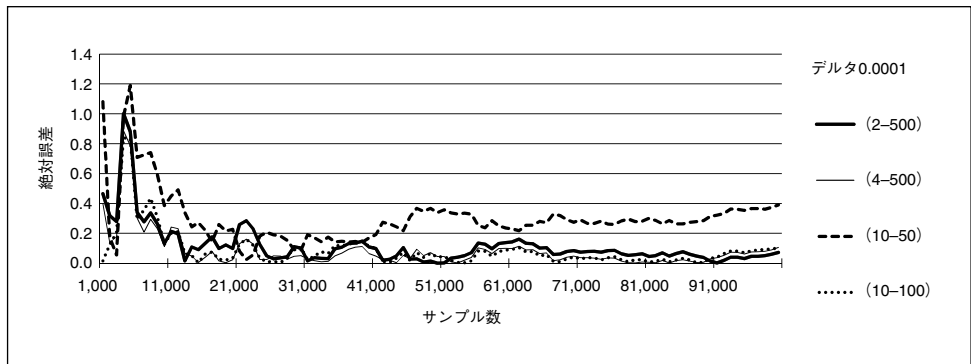
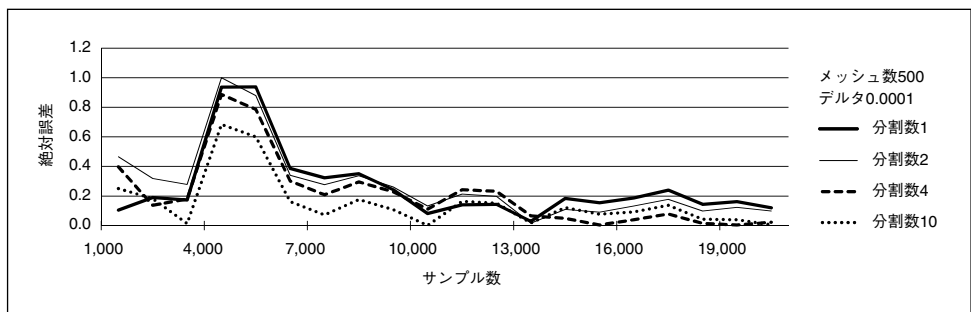


図 14 分割数の比較



合の方が絶対誤差が小さくなっている。したがって、分割数の増大に伴う計算コストも考慮すれば、分割数は4もとれば十分であると考えられる。

ハ. メッシュ数の比較

図15は分割数を4で固定したときに、メッシュ数を50、100、500、1,000と変化した場合の様子である。メッシュ数が100でもサンプル数が15,000以上では絶対誤差が0.1以下となることから、メッシュ数は100程度にまで減らすことも可能であると考えられる。

二. 補間手法の比較

図16ではメッシュ数を500としたとき、補間手法の違いが収束に与える影響を考察する。まず、近似デルタ関数補間のパラメータのデルタを0.001とした場合と0.0001の場合を比較する。サンプル数が100,000以上では、デルタが0.001の場合は絶対誤差が大きくなっていくのに対し、デルタが0.0001の場合は絶対誤差が0付近に収束している。

また、分割数が2の線形補間は、分割数が4の近似デルタ関数補間と同等の絶対誤差の推移を示しているため、分割数を増やすことによる計算コストを考慮すると、

図15 メッシュ数の比較

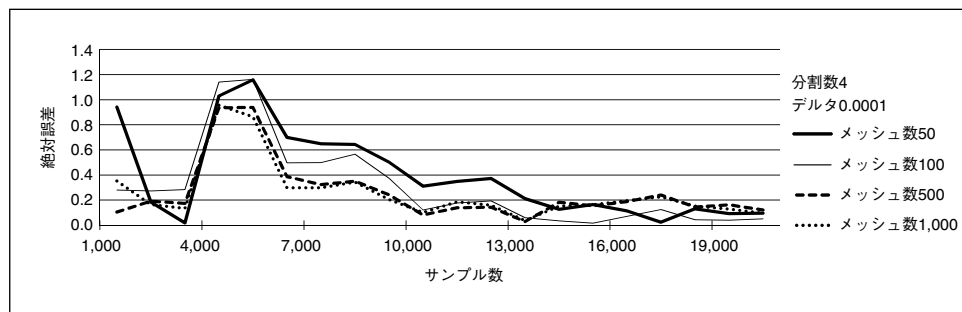
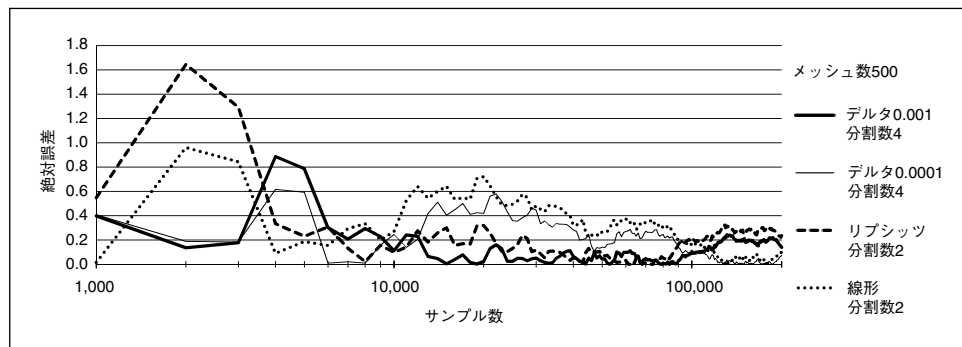


図16 補間手法の比較



この問題の設定では線形補間の方が計算効率が高いと考えられる。もっとも、線形補間は多次元への拡張が難しいため、次元に影響せず汎用的に利用できる近似デルタ関数補間やリプシッツ補間は、問題によっては引き続き有用である点には留意が必要である。

なお、リプシッツ補間は線形補間同様、補間点を通るような補間になっており³²線形補間に近い性質を持っているものの、サンプル数を 100,000 以上にしても絶対誤差が 0 に十分近づいておらず、線形補間や近似デルタ関数補間よりも精度をあげることが難しい。

こうした結果を踏まえると、低次元の問題には線形補間を用い、高次元の問題には近似デルタ関数補間が有効であると考えられる。

6. まとめ

本稿では、アメリカン・モンテカルロ法の価格計算手法について、継続価値の推定法に着目した分析を行った。3 節では、既存の手法のうち LSM 法と確率メッシュ法について、その特徴を議論した。LSM 法は計算量がやや少ないものの、計算精度が回帰の基底関数の選び方に大きく依存して、商品によっては継続価値がうまく近似できずに、大きな計算誤差を生じる可能性がある。また、確率メッシュ法は継続価値を準解析的に計算することから、商品によらず安定した計算結果が得られるというメリットがあるが、継続価値の計算に原資産の推移確率密度関数を用いる必要があるため、使用できるモデルが限られてしまうという限界がある。本稿では、継続価値の計算にキューバチャー法を用いることで、推移確率密度関数の存在を仮定しない新しい確率メッシュ法を提案した。そして、4 節では、本稿が提案する手法の理論的妥当性を確認した。特に定理 4.4 で示した計算誤算の評価は、本稿が提案する手法だけでなく類似した数値解析手法に対して一般的に適用可能な結果であり、本稿の数理ファイナンス面における主たる貢献といえる。5 節では、LSM 法が得意とする商品、LSM 法が不得手とする商品、モンテカルロ法以外では実現不可能な高次元のオプションを例に数値検証を行い、本アルゴリズムの実務的有効性を確認した。

今後の課題としては、本稿が提案した手法の計算速度を向上させることが挙げられる。このためには、速度と精度のバランスという意味で、より計算効率が高い補間手法を見つけることが課題となろう。本稿では 3 次のキューバチャー法を用いたが、5 次以上の手法を適用することで精度が向上することを確認することも課題である。また、メッシュを作る過程やモンテカルロ計算を行う際に、準乱数を用いると収束の速度が向上することが予想されるため、それを数値例を用いて検証することも今後の課題としたい。

32 近似デルタ補間は必ずしも補間点を通らない。

参考文献

- Bally, Vlad, Gilles Pages, and Jacques Printems, “First-Order Schemes in the Numerical Quantization Method,” *Mathematical Finance*, 13, 2003, pp. 1–16.
- Broadie, Mark, and Paul Glasserman, “A Stochastic Mesh Method for Pricing High-Dimensional American Options,” *Journal of Computational Finance*, 7, 2004, pp. 35–72.
- Clément, Emmanuelle, Damien Lamberton, and Philip Protter, “An Analysis of a Least Squares Regression Method for American Option Pricing,” *Finance and Stochastics*, 6, 2002, pp. 449–471.
- Duffie, Darrell, *Dynamic Asset Pricing Theory, Third Edition*, Princeton University Press, 2001.
- Egloff, Daniel, “Monte Carlo Algorithms for Optimal Stopping and Statistical Learning,” *The Annals of Applied Probability*, 15, 2005, pp. 1396–1432.
- , Michael Kohler, and Nebojsa Todorovic, “A Dynamic Look-Ahead Monte Carlo Algorithm for Pricing Bermudan Options,” *The Annals of Applied Probability*, 17, 2007, pp. 1138–1171.
- Föllmer, Hans, and Alexander Schied, *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*, Walter De Gruyter Inc, 2004.
- Gerhold, Stefan, “The Longstaff-Schwartz Algorithm for Lévy Models: Results on Fast and Slow Convergence,” *The Annals of Applied Probability*, 21, 2011, pp. 589–608.
- Glasserman, Paul, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2004.
- , and Bin Yu, “Number of Paths Versus Number of Basis Functions in American Option Pricing,” *The Annals of Applied Probability*, 14, 2004, pp. 2090–2119.
- Hamdi, Ali, and Marten Marcus, “Pricing Bermudan Options—A Nonparametric Estimation Approach,” preprint, KTH, 2011.
- Haug, Martin, and Lenoid Kogan, “Pricing American Options: A Duality Approach,” *Operations Research*, 52, 2004, pp. 258–270.
- Kohler, Michael, “A Regression-Based Smoothing Spline Monte Carlo Algorithm for Pricing American Options in Discrete Time,” *Advances in Statistical Analysis*, 92(2), 2008, pp. 153–178.
- Kusuoka, Shigeo, “Monte Carlo Method for Pricing of Bermuda Type Derivatives,” *Advances in Mathematical Economics*, 5, 2003, pp. 153–166.
- , “Approximation of Expectation of Diffusion Processes Based on Lie Algebra and Malliavin Calculus,” *Advances in Mathematical Economics*, 6, 2004, pp. 69–83.
- Lamberton, Damian, and Bernard Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, Second Edition*, Chapman & Hall / CRC Financial Mathematics Series, 1996.
- Longstaff, Francis, and Eduardo Schwartz, “Valuing American Options by Simulation:

- Simple Least Square Approach,” *Review of Financial Studies*, 14, 2001, pp. 113–147.
- Lyons, Terry, and Nicolas Victoir, “Cubature on Wiener Space,” *Proceedings of the Royal Society A*, 2004, pp. 169–198.
- Ninomiya, Mariko, and Syoiti Ninomiya, “A New Higher-Order Weak Approximation Scheme for Stochastic Differential Equations and the Runge-Kutta Method,” *Finance and Stochastics*, 13, 2009, pp. 415–443.
- Ninomiya, Syoiti, and Nicolas Victoir, “Weak Approximation of Stochastic Differential Equations and Application to Derivative Pricing,” *Applied Mathematical Finance*, 15, 2008, pp. 107–121.
- Rogers, Chris, “Monte Carlo Valuation of American Options,” *Mathematical Finance*, 12, 2002, pp. 271–286.
- Schoutens, Wim, “Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials,” *Lecture Notes in Statistics*, Springer, 2000.
- Stentoft, Lars, “Convergence of the Least Squares Monte Carlo Approach to American Option Valuation,” *Management Science*, 50, 2004, pp. 1193–1203.
- Victoir, Nicolas, “Asymmetric Cubature Formulae with Few Points in High Dimension for Symmetric Measures,” *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 42, 2004, pp. 209–227.

補論 1. 補間関数

SMC 法のアルゴリズムに用いる補間手法についてまとめる。 L_0 個の既知のサンプル点 $\{y_l\}_{l=1}^{L_0}$ とその点上の値 $\{z_l\}_{l=1}^{L_0}$ の組を $\{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0} \in (\mathbf{R}^D \times \mathbf{R})^{L_0}$ とする。そしてこの点列を補間する関数を、

$$\Psi(\cdot; \{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0}) : \mathbf{R}^D \rightarrow \mathbf{R},$$

で表すことにする。以下で、その具体例をいくつか挙げる。

(1) 線形補間

ここでは線形補間として $D = 1$ のときを考える。 $y_1 < \dots < y_{L_0}$ となるように $\{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0}$ を並び替えておく。このとき、例えば以下の関数は線形の補間を与える。

$$\Psi(x; \{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0}) = \begin{cases} z_1, & x \leq y_1, \\ z_{l-1} + \frac{x-y_{l-1}}{y_l-y_{l-1}}(z_l - z_{l-1}), & y_{l-1} < x \leq y_l, \\ z_{L_0}, & x > y_{L_0}. \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

(2) 近似デルタ関数による補間

$\phi_\delta(x) : \mathbf{R}^D \rightarrow \mathbf{R}$ が近似デルタ関数 (approximate identity) であるとは、任意の $r > 0$ に対して、

$$\int_{\mathbf{R}^D} \phi_\delta(x) dx = 1, \quad (\text{A-2})$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|x| > r} \phi_\delta(x) dx = 0, \quad (\text{A-3})$$

となることである。このとき、補間関数を、

$$\Psi(x; \{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0}) = \frac{\sum_{l=1}^{L_0} z_l \phi_\delta(x - y_l)}{\sum_{l=1}^{L_0} \phi_\delta(x - y_l)}, \quad (\text{A-4})$$

とする。このとき、仮に $Y_l, l = 1, \dots, L_0$ が独立同分布で、 $Z_l = f(Y_l)$ となっていたとすると、

$$\frac{\sum_{l=1}^{L_0} Z_l \phi_\delta(x - Y_l)}{\sum_{l=1}^{L_0} \phi_\delta(x - Y_l)} \rightarrow \frac{\int_{\mathbf{R}^D} f(y) \phi_\delta(x - y) p_{0,n}(x_0, y) dy}{\int_{\mathbf{R}^D} \phi_\delta(x - y) p_{0,n}(x_0, y) dy}, L_0 \rightarrow \infty, \quad (\text{A-5})$$

$$\rightarrow \frac{f(x) p_{0,n}(x_0, x)}{p_{0,n}(x_0, x)}, \delta \rightarrow 0, \quad (\text{A-6})$$

$$= f(x), \quad (\text{A-7})$$

となる。すなわちサンプル数を無限大にし、さらに近似デルタ関数のサポートの大きさ δ を無限小にすれば真の関数に各点収束するような補間になっている。本稿では ϕ_δ として以下を用いている。

$$\phi_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\delta}\right).$$

(3) リプシッツ補間

補間点がリプシッツ連続、すなわち $\{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0}$ が、

$$|z_k - z_l| \leq K|y_k - y_l|,$$

となっているとする。

$$\Psi(x; \{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0}) = \inf\{z_l + |x - y_l|; l = 1, \dots, L_0\}. \quad (\text{A-8})$$

このとき、補間関数 Ψ はリプシッツ連続で、同じリプシッツ係数 K を用いて、

$$|\Psi(x; \{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0}) - \Psi(y; \{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0})| \leq K|x - y|,$$

となっている。同様に、

$$\Psi(x; \{(y_l, z_l)\}_{l=1}^{L_0}) = \sup\{z_l - |x - y_l|; l = 1, \dots, L_0\}, \quad (\text{A-9})$$

も補間関数の候補となる。

補論2. キューバチャー法

以下では本稿で提案する手法が用いるキューバチャー法について解説する。

(1) ユークリッド空間におけるキューバチャー法とウィーナー空間におけるキューバチャー法の対応

イ. \mathbf{R}^D 上のキューバチャー法

定義 A-2.1 \mathcal{P}_m を \mathbf{R}^D の多項式で次数が m 次以下のもの全体の集合とする。また μ を \mathbf{R}^D 上の測度とする。このとき、ある自然数 n に対し、ノード $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}^D$ と重み $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ 、 $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ が m 次のキューバチャーを満たすとは、任意の $p \in \mathcal{P}_m$ に対し、

$$\int_{\mathbf{R}^D} p(x) \mu(dx) = \sum_{i=1}^n \lambda_i p(x_i), \quad (\text{A-10})$$

となることである。このとき、 n をキューバチャーのサイズと呼ぶ。

この公式に関する研究は古くから行われている。そしてこの公式の存在と、サイズとして $\dim \mathcal{P}_m$ をとることが可能であることが示されている。

ロ. ウィーナー空間上のキューバチャー法

$C_0([0, \infty); \mathbf{R}^d) = \{w : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^d, w \text{ は連続}, w(0) = 0\}$ という連続パスの空間上の σ 加法族 \mathcal{B} を $0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ 、 $A_i \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ 、 $i = 1, \dots, n$ に対し $\{w; w(t_1) \in A_1, \dots, w(t_n) \in A_n\}$ という集合で生成される最小のものとする。また、測度 μ を、

$$\begin{aligned} \mu(\{w; w(t_1) \in A_1, \dots, w(t_n) \in A_n\}) \\ &= \int_{A_1 \times \dots \times A_n} p_{t_1}(0, dx_1) \cdots p_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n), \\ p_t(x, dy) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t^d}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right) dy, \end{aligned}$$

により定める。このとき $(C[0, \infty), \mathcal{B}, \mu)$ をウィーナー空間と呼ぶ。ここでウィーナー空間上の関数 $B_t : C[0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^d$ を $B_t(w) = w(t)$ により定めると、これはブラウン運動となる。

一方、ストラトノビッチ型確率微分方程式、

$$dX(t, x) = V_0(X(t, x))dt + \sum_{\alpha=1}^d V_{\alpha}(X(t, x)) \circ dB^{\alpha}(t), \quad (\text{A-11})$$

$$X(0, x) = x, \quad (\text{A-12})$$

が強い解を持つとすると、解は $X(t, x) = F(t, x, B)$ と表現できる。このためこの解はウィーナー空間上の汎関数となっている。このとき $f(X(t, x))$ の期待値はウィーナー空間上の積分で表すことができ、

$$E[f(X(t, x))] = \int_{C[0, \infty)} f(X(t, w, x)) \mu(dw), \quad (\text{A-13})$$

となっている。

詳細は後で説明するのでここでは結果のみを記すが、有界変動なパス $\theta_1, \dots, \theta_n$ と重み $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ 、 $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ がキューバチャーをなしているとは、任意の $f: \mathbf{R}^D \rightarrow \mathbf{R}$ に対して、

$$\int_{C[0, \infty)} f(X(t, w, x)) \mu(dw) \sim \sum_{i=1}^n \lambda_i f(X(t, x, \theta_i)), \quad (\text{A-14})$$

という近似ができるということをいう。これは古典的なキューバチャー法のウィーナー空間への拡張であるとみなせる。このとき右辺の計算は、左辺の期待値を近似して計算していると考えることができる。

ただし、このとき右辺 $X(t, w_i, x)$ は何かという問題が残ることに注意が必要である。そもそも確率微分方程式の解は a.s. に定義され、1 本ずつのパスに対して定義されるわけではない。(A-14) 式の $X(t, w_i, x)$ を正確に意味づけると次の常微分方程式の解のことである。

$$d\Phi(t, \theta_i, x) = V_0(\Phi(t, \theta_i, x)) + \sum_{\alpha=1}^d V_{\alpha}(\Phi(t, \theta_i, x)) d\theta_i^{\alpha}(t), \quad (\text{A-15})$$

$$\Phi(0, \theta_i, x) = x. \quad (\text{A-16})$$

この常微分方程式は確率微分方程式 (A-11) 式のブラウン運動の部分を有界変動パス θ_i に置き換えた形になっている。この対応関係を踏まえて $X(t, w_i, x)$ と表記した。

(2) キューバチャー法の定義

イ. 記号の準備

$\mathcal{A}_m = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \{0, \dots, d\}^k, k + \#\{j; \alpha_j = 0\} \leq m, k \in \mathbf{N}\}$ とする³³。また、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_m$ に対し、 $\|\alpha\| = k + \#\{j; \alpha_j = 0\}$ とする。すなわち、ベクトルの大きさに、成分が 0 の個数をさらに加えるというノルムを定める。このような記号を定める理由は重複ウィーナー積分の t に関するオーダーが次のようになることに由来している。

注意 A-2.2 時刻 t までの重複ウィーナー積分は時刻 1 までの重複ウィーナー積分により、次のように表される。

$$\begin{aligned} & \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < t} dB^{\alpha_1}(t_1) \circ \dots \circ dB^{\alpha_k}(t_k) \\ & \stackrel{(d)}{=} t^{\frac{\|\alpha\|}{2}} \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} dB^{\alpha_1}(t_1) \circ \dots \circ dB^{\alpha_k}(t_k). \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

ここで $\stackrel{(d)}{=}$ は分布が等しいという意味で用いた。ただし、

$$\begin{aligned} & \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < t} dB^{\alpha_1}(t_1) \circ \dots \circ dB^{\alpha_k}(t_k) \\ & = \int_0^t \int_0^{t_k} \dots \int_0^{t_2} dB^{\alpha_1}(t_1) \circ \dots \circ dB^{\alpha_k}(t_k), \end{aligned}$$

とする。

さらに $C_{0,bv}([0, \infty); \mathbf{R}^{d+1}) \subset C_0([0, \infty); \mathbf{R}^{d+1})$ を有界変動な関数全体とする。

定義 A-2.3 有界変動なパス $\theta_1, \dots, \theta_n \in C_{0,bv}([0, T]; \mathbf{R}^{d+1})$ と重み、 $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ が m 次のキューバチャーをなすとは、任意の $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_m$ に対し、

$$\begin{aligned} & E\left[\int_{0 < t_1 < \dots < t_k < T} dB^{\alpha_1}(t_1) \circ \dots \circ dB^{\alpha_k}(t_k)\right] \\ & = \lambda_1 \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < T} d\theta_1^{\alpha_1}(t_1) \dots d\theta_1^{\alpha_k}(t_k) + \dots \\ & \quad + \lambda_n \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < T} d\theta_n^{\alpha_1} \dots d\theta_n^{\alpha_k}, \end{aligned} \quad (\text{A-18})$$

となることである。ただし $\theta_i^0(t) = t, i = 1, \dots, n$ とする。

³³ ここで $\#$ は集合の元の個数を表す。

注意 A-2.4 実は $T = 1$ として定義を満たす $\theta_i \in C_{0,bv}([0, 1], \mathbf{R}^{d+1})$, $i = 1, \dots, n$ が存在すれば、 $\theta_{T,i}(t) = \sqrt{T}\theta_i(\frac{t}{T})$ と変数変換した $\theta_{T,i}$ を導入することにより $\theta_{T,i} \in C_{0,bv}([0, T], \mathbf{R}^{d+1})$, $i = 1, \dots, n$ は (A-18) 式を満たす。実際、注意 A-2.2 より、

$$\begin{aligned} & E\left[\int_{0 < t_1 < \dots < t_k < T} dB^{\alpha_1}(t_1) \circ \dots \circ dB^{\alpha_k}(t_k)\right] \\ &= E\left[T^{\frac{\|\alpha\|}{2}} \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} dB^{\alpha_1}(t_1) \circ \dots \circ dB^{\alpha_k}(t_k)\right] \\ &= T^{\frac{\|\alpha\|}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} d\theta_i^{\alpha_1}(t_1) \dots d\theta_i^{\alpha_k}(t_k) \right). \end{aligned}$$

ここで $s_i = Tt_i$ と変数変換すると $d\theta_i^{\alpha_j}(\frac{s_j}{T}) = \frac{1}{T}d\theta_{T,i}^{\alpha_j}(s_j)$ となることに注意して、

$$\begin{aligned} &= T^{-\frac{\|\alpha\|}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{0 < s_1 < \dots < s_k < T} d\theta_i^{\alpha_1}(\frac{s_1}{T}) \dots d\theta_i^{\alpha_k}(\frac{s_k}{T}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{0 < s_1 < \dots < s_k < T} d\theta_{T,i}^{\alpha_1}(s_1) \dots d\theta_{T,i}^{\alpha_k}(s_k), \end{aligned}$$

となる。よって $T = 1$ に対するキューバチャーを求めれば十分である。ここではまず定義 A-2.3 を満たす λ と θ が与えられたと仮定して、それを使ってどのように期待値が近似できるのかをみたのちに、 λ と θ をどうみつければよいかを議論することにする。

そのために、まず確率テイラー展開について説明を行う。

口. 確率テイラー展開

定理 A-2.5

$$\begin{aligned} & f(X(t, x)) \\ &= \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_m} V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_k} f(x) \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < t} dB^{\alpha_1}(t_1) \circ \dots \circ dB^{\alpha_k}(t_k) \\ &+ R_m(t, x, f). \end{aligned} \tag{A-19}$$

ただし、

$$R_m(t, x, f) = \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_m, \\ (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \notin \mathcal{A}_m}} \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < t} V_{\alpha_0} \cdots V_{\alpha_k} f(X(t_0, x)) dB^{\alpha_0}(t_0) \circ \dots \circ dB^{\alpha_k}(t_k),$$

$$\|E[R_m(t, x, f)]\|_{\infty} \leq C t^{\frac{m+1}{2}} \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_{m+2} \setminus \mathcal{A}_m} \|V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_k} f\|_{\infty}, \quad (\text{A-20})$$

である³⁴。

証明 ストラトノビッチ型確率微分方程式に対する伊藤の公式より、

$$\begin{aligned} df(X(t, x)) &= \sum_{j=1}^D \frac{\partial}{\partial x_j} f(X(t, x)) \circ dX^j(t, x) \\ &= \sum_{j=1}^D \sum_{\alpha=0}^d \frac{\partial}{\partial x_j} f(X(t, x)) V_{\alpha}^{(j)}(X(t, x)) \circ dB^{\alpha}(t) \\ &= \sum_{\alpha=0}^d \sum_{j=1}^D V_{\alpha}^{(j)}(X(t, x)) \frac{\partial}{\partial x_j} f(X(t, x)) \circ dB^{\alpha}(t). \end{aligned} \quad (\text{A-21})$$

ここで $V_{\alpha}, \alpha = 0, \dots, d$ を、

$$V_{\alpha} = \sum_{j=1}^D V_{\alpha}^{(j)}(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

という微分作用素と同一視すると、伊藤の公式は、

$$f(X(t, x)) = f(x) + \sum_{\alpha=0}^d \int_0^t V_{\alpha} f(X(s, x)) \circ dB^{\alpha}(s),$$

となる。さらに $V_{\alpha} f(X(s, x))$ に対して伊藤の公式を用いると、

.....
34 $\|\cdot\|_{\infty}$ は $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbf{R}^D\}$ という、一様ノルムを表す。

$$\begin{aligned}
 & f(X(t, x)) \\
 &= f(x) + \sum_{\alpha=0}^d \int_0^t \left\{ V_{\alpha} f(x) + \sum_{\beta=0}^d \int_0^s V_{\beta} V_{\alpha} f(X(r, x)) \circ dB^{\beta}(r) \right\} \circ dB^{\alpha}(s) \\
 &= f(x) + \sum_{\alpha=0}^d V_{\alpha} f(x) \int_0^t \circ dB^{\alpha}(s) \\
 &\quad + \sum_{\alpha=0}^d \sum_{\beta=0}^d \int_0^t \int_0^s V_{\beta} V_{\alpha} f(X(r, x)) \circ dB^{\beta}(r) \circ dB^{\alpha}(s).
 \end{aligned}$$

これを繰り返すことで、(A-19) 式が得られる。また、注意 A-2.2 より (A-20) 式もわかる。

ハ. キューバチャー法に基づく期待値計算

$\theta_k \in C_{0,bv}([0, \infty); \mathbf{R}^{d+1})$ に対し、 $\Phi(t, \theta_k, x)$ を常微分方程式、

$$\frac{du(t, x)}{dt} = \sum_{\alpha=0}^d V_{\alpha}(u(t, x)) \frac{d\theta_k^{\alpha}(t)}{dt}, \quad (\text{A-22})$$

$$u(0, x) = x, \quad (\text{A-23})$$

の解とする。このとき、テイラー展開により、以下を得る。

$$\begin{aligned}
 f(\Phi(t, \theta_k, x)) &= \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathcal{A}_m} V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_l} f(x) \int_{0 < t_1 < \dots < t_l < t} d\theta_k^{\alpha_1}(t_1) \cdots d\theta_k^{\alpha_l}(t_l) \\
 &\quad + \tilde{R}_{m,k}(t, x, f).
 \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{R}_{m,k}(t, x, f)\|_{\infty} &\leq C t^{m+1} \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_{m+2} \setminus \mathcal{A}_m} \|V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_l} f\|_{\infty} \\
 &\leq C t^{\frac{m+1}{2}} \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_{m+2} \setminus \mathcal{A}_m} \|V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_l} f\|_{\infty}, t < 1.
 \end{aligned}$$

上記を使うと以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
& \|E[f(X(t, x))] - \sum_{k=1}^n \lambda_k f(\Phi(t, \theta_k, x))\|_{\infty} \\
&= \left\| \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathcal{A}_m} V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_l} f(x) \int_{0 < t_1 < \dots < t_l < t} dB^{\alpha_1}(t_1) \circ \dots \circ dB^{\alpha_l}(t_l) \right. \\
&\quad \left. + R_m(t, x, f) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \left\{ \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathcal{A}_m} V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_l} f(x) \int_{0 < t_1 < \dots < t_l < t} d\theta_k^{\alpha_1}(t_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdots d\theta_k^{\alpha_l}(t_l) + \tilde{R}_{m,k}(t, x, f) \right\} \right\|_{\infty} \\
&= \left\| \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathcal{A}_m} V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_l} f(x) \int_{0 < t_1 < \dots < t_l < t} dB^{\alpha_1}(t_1) \circ \dots \circ dB^{\alpha_l}(t_l) \right. \\
&\quad \left. + R_m(t, x, f) - \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathcal{A}_m} V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_l} f(x) \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_{0 < t_1 < \dots < t_l < t} d\theta_k^{\alpha_1}(t_1) \right. \\
&\quad \left. \cdots d\theta_k^{\alpha_l}(t_l) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{R}_{m,k}(t, x, f) \right\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

これは、キューバチャー法の定義より、

$$= \left\| R_m(t, x, f) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{R}_{m,k}(t, x, f) \right\|_{\infty},$$

と書ける。したがって、次が成り立つことがわかる。

定理 A-2.6

$$\|E[f(X(t, x))] - \sum_{k=1}^n \lambda_k f(\Phi(t, x, \theta_k))\|_{\infty} \quad (\text{A-24})$$

$$\leq C t^{\frac{m+1}{2}} \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_{m+2} \setminus \mathcal{A}_m} \|V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_l} f\|_{\infty}, t < 1. \quad (\text{A-25})$$

ゆえに、期待値 $E[f(X(t, x))]$ を常微分方程式の解を用いた $\sum_{k=1}^n \lambda_k f(\Phi(t, x, \theta_k))$ により近似できることがわかる。

二. 時間分割

定理 A-2.6 による近似は t が小さい時のみ有効な近似である。しかし、 t がある程度大きい場合にも区間 $[0, t]$ を分割することで、この近似を活用することができる。区間を k 分割して $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t$ とする。また、 $s_l = t_l - t_{l-1}$ とする。このとき、1 区間ごとに定理 A-2.6 を用いると、次を得る。

$$\begin{aligned}
 E[f(X(t, x))] &= E[E[f(X(t, x)) | X(t_{k-1}, x)]] \\
 &\sim E\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i f\left(\Phi(s_k, \theta_{s_k, i}, X(t_{k-1}, x))\right)\right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i E[E[f\left(\Phi(s_k, \theta_{s_k, i}, X(t_{k-1}, x))\right) | X(t_{k-2}, x)]] \\
 &\sim \sum_{i=1}^n \lambda_i E\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j f\left(\Phi(s_k, \theta_{s_k, i}, \Phi(s_{k-1}, \theta_{s_{k-1}, j}, X(t_{k-2}, x)))\right)\right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j E[f\left(\Phi(s_k, \theta_{s_k, i}, \Phi(s_{k-1}, \theta_{s_{k-1}, j}, X(t_{k-2}, x)))\right)].
 \end{aligned}$$

これを t_0 まで繰り返せば、

$$E[f(X(t, x))] \sim \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} f\left(\Phi(t, \theta_{s_1, i_1} \otimes \dots \otimes \theta_{s_k, i_k}, x)\right),$$

という近似ができる。ここで $\Phi(t, \theta_{s_1, i_1} \otimes \dots \otimes \theta_{s_k, i_k}, x)$ は、

$$\begin{aligned}
 &\Phi(t, \theta_{s_1, i_1} \otimes \dots \otimes \theta_{s_k, i_k}, x) \\
 &= \Phi(s_k, \theta_{s_k, i_k}, \Phi(t_{k-1}, \theta_{s_1, i_1} \otimes \dots \otimes \theta_{s_{k-1}, i_{k-1}}, x)),
 \end{aligned} \tag{A-26}$$

により再帰的に定義される、各小区間ごとの常微分方程式 (A-22) 式の解をつなげたものである。そしてこのように近似した場合の誤差評価は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 &\|E[f(X(t, x))] - \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} f\left(\Phi(t, \theta_{s_1, i_1} \otimes \dots \otimes \theta_{s_k, i_k}, x)\right)\|_{\infty} \\
 &\leq C \sum_{j=1}^k s_j^{\frac{m+1}{2}} \sup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathcal{A}_{m+2} \setminus \mathcal{A}_m} \|V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_l} P_{t-t_j} f\|_{\infty}.
 \end{aligned}$$

ここで近似誤差は f の高階の微分 $V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_l} f$ を用いて評価されているが、係数

V_0, \dots, V_d が UFG 条件³⁵という条件を満たすに時にはマリアバン解析を用いてさらに詳細な評価を行うことにより、

$$\begin{aligned} & \|E[f(X(t, x))] - \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} f(\Phi(t, \theta_{s_1, i_1} \otimes \dots \otimes \theta_{s_k, i_k}, x))\|_{\infty} \\ & \leq C \|\nabla f\|_{\infty} \left(s_k^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i^{\frac{m+1}{2}}}{(t-t_i)^{\frac{m}{2}}} \right), \end{aligned}$$

が成り立つ。また、 f がリプシッツ連続の場合も同様の評価が成り立つことが知られている。

さらにこの評価は、時間分割は必ずしも均等分割が効率的でないことを示唆している。実際、時間分割を、

$$t_j = t(1 - (1 - \frac{j}{k})^{\gamma}), \quad (\text{A-27})$$

とすると、誤差評価は、

$$\begin{aligned} & \|E[f(X(t, x))] - \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} f(\Phi(t, \theta_{s_1, i_1} \otimes \dots \otimes \theta_{s_k, i_k}, x))\|_{\infty} \\ & \leq \begin{cases} C k^{-\frac{\gamma}{2}} \|\nabla f\|_{\infty}, & 0 < \gamma < m-1, \\ C k^{-\frac{m-1}{2}} \log(n) \|\nabla f\|_{\infty}, & \gamma = m-1, \\ C k^{-\frac{m-1}{2}} \|\nabla f\|_{\infty}, & \gamma > m-1, \end{cases} \quad (\text{A-28}) \end{aligned}$$

となる。

(3) キューバチャーの構成

イ. 期待値演算の微分作用素としての見方

確率テイラー展開によると拡散過程の期待値は、

³⁵ Kusuoka [2004] 参照。

$$\begin{aligned}
 P_t f(x) &= E[f(X(t, x))] \\
 &= \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_m} V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_k} f(x) E\left[\int_{0 < t_1 < \dots < t_k < t} dB^{\alpha_1}(t_1) \circ \dots \circ dB^{\alpha_k}(t_k)\right] \\
 &\quad + O(t^{\frac{m+1}{2}}) \\
 &= \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_m} E\left[\int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} dB^{\alpha_1}(t_1) \circ \dots \circ dB^{\alpha_k}(t_k)\right] t^{\frac{\|(\alpha_1, \dots, \alpha_k)\|}{2}} V_{\alpha_1} \\
 &\quad \cdots V_{\alpha_k} f(x) + O(t^{\frac{m+1}{2}}), \tag{A-29}
 \end{aligned}$$

と書ける。この式は、拡散過程の期待値作用素 P_t を、重複ウィーナー積分の期待値を係数とした微分作用素の線形結合で近似していると解釈できる。

$$\sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_m} E\left[\int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} dB^{\alpha_1}(t_1) \circ \dots \circ dB^{\alpha_k}(t_k)\right] t^{\frac{\|(\alpha_1, \dots, \alpha_k)\|}{2}} V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_k}.$$

確率微分方程式の係数 V_α がどのような形でも、 P_t は必ずこの形に展開できる。また、 P_t を微分作用素とみたとき、 $\alpha \in \mathcal{A}_m$ の項まで計算すれば、 t に関して $\frac{m+1}{2}$ 次の近似となっている。ただし、係数に表れる重複ウィーナー積分の期待値の計算は必ずしも容易ではない。

上記の微分作用素としての見方に関連して、古くから確率微分方程式の解と偏微分方程式の関係が知られている。

口. 確率微分方程式と偏微分方程式の関係

2 階の微分作用素 L を、

$$L = V_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^d V_\alpha^2,$$

とおく。このときファインマン=カッツの定理より $P_t f(x)$ は次の偏微分方程式の解となる。

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = Lu(t, x), \tag{A-30}$$

$$u(0, x) = f(x). \tag{A-31}$$

$P_t f(x)$ をテイラー展開すると、(A-30) 式により、

$$P_t f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(tL)^k}{k!} f(x) + O(t^{n+1}), \quad (\text{A-32})$$

を得る。右辺は $\exp(tL)$ を形式的に n 次まで展開したものに等しいので、

$$P_t = \exp(tL) = \exp t \left(V_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^d V_{\alpha}^2 \right),$$

と書くこともできる。 L の定義より、(A-32) 式も P_t を微分作用素 V_{α} , $\alpha = 0, \dots, d$ で、展開しているとみなすことができる。そして、(A-29) 式と比較すれば、 $\exp t \left(V_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^d V_{\alpha}^2 \right)$ を展開して、

$$\exp t \left(V_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^d V_{\alpha}^2 \right) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_m} a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_k} + \cdots, \quad (\text{A-33})$$

と考えれば、

$$P_t f(x) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_m} a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_k} f(x) + O(t^{\frac{m+1}{2}}), \quad (\text{A-34})$$

という、誤差 $O(t^{\frac{m+1}{2}})$ の近似になっている。そこで、先ほどの重複ウィーナー積分を計算する問題は $\exp t \left(V_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^d V_{\alpha}^2 \right)$ を展開する問題に置換できた。しかし、この式を直接用いて f が決まるたびに多重の微分計算により期待値を近似するというアルゴリズムは効率的でないほか、ファイナンスの問題では f が滑らかでない場合が多いため微分できない場合がある。そこで、以下では常微分方程式を用いて (A-34) 式をさらに近似する。

ハ. 常微分方程式を用いた計算：ベクトル場とフロー

1 次の微分作用素、

$$V_{\alpha} = \sum_{i=1}^D V_{\alpha}^{(i)}(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

は \mathbf{R}^D 上のベクトル場³⁶であると考えられる。例えば空間内に流れがあったとする

³⁶ 空間の全ての点にベクトルが配置されているとき、この空間をベクトル場と呼ぶ。

と空間の各点でその流れの速度ベクトルを観測できる。このためこの空間はベクトル場となる。あるベクトル場、

$$V = \sum_{i=1}^D V^{(i)}(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

が与えられたとする。このとき、このベクトル場を時間微分として持つ関数は次の常微分方程式の解として表される。

$$\begin{aligned} \frac{du^i(t, x)}{dt} &= V^{(i)}(u(t, x)), \\ u(0, x) &= x. \end{aligned} \tag{A-35}$$

これをフローと呼び $Exp(tV)(x)$ で表す。また、 $Exp(tV)(x)$ は次のように展開できる。

命題 A-2.7

$$\begin{aligned} f(Exp(tV)(x)) &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} V^k f(x) \\ &\quad + \int_0^t \frac{(t-s)^{n+1}}{(n+1)!} V^{n+1} f(Exp(sV)(x)) ds. \end{aligned} \tag{A-36}$$

特に、

$$f(Exp(V)(x)) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} V^k f(x) + \frac{1}{(n+1)!} \|V^{n+1} f\|_{\infty}, \tag{A-37}$$

となる。

証明 テイラー展開により、

$$\begin{aligned} f(Exp(tV)(x)) &= f(x) + \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \left(\frac{d}{dt} \right)^k f(Exp(tV)(x))|_{t=0} \\ &\quad + \int_0^t \frac{(t-s)^{n+1}}{(n+1)!} V^{n+1} f(Exp(sV)(x)) ds, \end{aligned}$$

となる。さらに (A-35) 式より、

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt}\right)^k (f(\text{Exp}(tV)(x))) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1} \sum_{i=1}^D \frac{\partial}{\partial x_i} f(\text{Exp}(tV)(x)) V^{(i)}(u(t, x)) \\
 &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1} Vf(\text{Exp}(tV)(x)) \\
 &= \dots \\
 &= \frac{d}{dt} V^{k-1} f(\text{Exp}(tV)(x)) = V^k f(\text{Exp}(tV)(x)),
 \end{aligned}$$

となる。

注意 A-2.8 (A-37) 式の右辺は $\exp(V)$ を形式的に展開した形になっているので、「ベクトル場 V に対して $\exp(V)$ を n 次まで形式的に展開したものを f に作用させたものは、関数 f の中にフローを代入したもので近似できる」ということを表している。すなわち、1 階の微分作用素（ベクトル場）に対して \exp を作用させた $\exp(V)$ という微分作用素は常微分方程式の解で表現できる。ただし、今求めたい微分作用素は $\exp(L)$ であり、 L は 2 階の微分作用素になっているため、さらに $V_\alpha, \alpha = 0, \dots, d$ で生成されるベクトル場によって L を近似し、その結果 P_t を常微分方程式を用いて近似する。

二. 近似作用素をみつける空間：ベクトル場のなすリー代数

注意 A-2.8 で述べたように、作用素 L を近似するために、近似を探す空間を考える。 $V_\alpha, \alpha = 0, \dots, d$ から派生するベクトル場について考える。ベクトル場の線形結合全体はベクトル空間をなすため $a, b \in \mathbf{R}$ に対し、

$$aV_\alpha + bV_\beta,$$

も再びベクトル場になる。一方、ベクトル場の積は、

$$V_\alpha V_\beta = \sum_{k,l=1}^D \left(V_\alpha^{(k)}(x) \frac{\partial V_\beta^{(l)}(x)}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l} + V_\alpha^{(k)}(x) V_\beta^{(l)}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \right), \quad (\text{A-38})$$

より、2 階の微分作用素となるためベクトル場ではない。ところが $[V_\alpha, V_\beta]$ を $V_\alpha V_\beta - V_\beta V_\alpha$ とおいて、これを計算すると 2 階微分の項が消え、

$$[V_\alpha, V_\beta] = \sum_{k,l=1}^D \left(V_\alpha^{(k)}(x) \frac{\partial V_\beta^{(l)}(x)}{\partial x_k} - V_\beta^{(k)}(x) \frac{\partial V_\alpha^{(l)}(x)}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_l},$$

というベクトル場になる。これを交換子積と呼ぶ。そして $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ に対し、ベクトル場 $V_{(\alpha)}$ を、

$$V_{(\alpha)} = [V_{\alpha_1}, V_{(\alpha_2, \dots, \alpha_k)}],$$

として再帰的に定義する。なお、 $\text{Span}\{V_{(\alpha)}, (\alpha) \in \mathcal{A}\}$ ³⁷は交換子積で閉じた集合³⁸になっている。これを「 $V_{\alpha}, \alpha = 0, \dots, d$ が生成するリー代数」と呼び $\mathcal{L}(V_0, \dots, V_d)$ で表す。 $L_i \in \mathcal{L}(V_0, \dots, V_d), i = 1, \dots, n$ により P_t を、

$$\sum_{i=1}^n a_i \exp L_i,$$

により近似できたとする。このとき $\sum_{i=1}^n a_i \exp L_i$ という微分作用素は、

$$\sum_{i=1}^n a_i \text{Exp}(L_i),$$

というフローを用いて表現できる。

ホ. 近似作用素の構成：代数的構造

適当な係数 $a_i \in \mathbf{R}$ と $L_i \in \mathcal{L}(V_0, \dots, V_d), i = 1, \dots, n$ により P_t を $\sum_{i=1}^n a_i \exp L_i$ という形で近似することを考える。

ここで、確率テイラー展開 (A-29) 式を再記する。

$$\begin{aligned} P_t f(x) = & \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_m} E \left[\int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} dB^{\alpha_1}(t_1) \circ \dots \circ dB^{\alpha_k}(t_k) \right] t^{\frac{\|(\alpha_1, \dots, \alpha_k)\|}{2}} V_{\alpha_1} \\ & \dots V_{\alpha_k} f(x) + O(t^{\frac{m+1}{2}}). \end{aligned}$$

そして、今考えている近似の特徴を (A-29) 式を踏まえて整理すると、次の2点となる。

- $\sum_{i=1}^n a_i \exp L_i$ を展開したときに、 V_{α} の並びが重要であり、具体的な微分作用素としての構造は近似を探す際は必要としない。
- $\alpha \in \mathcal{A}_m$ となっている項のみを考慮するため、 V_{α} がどのブラウン運動に付随していたのかという情報が重要であり、むしろ微分作用素としてみても、この情報が失われてしまう。

³⁷ $\text{Span} X$ は X の元の線形結合全体のなすベクトル空間を表す。

³⁸ 閉じた集合とは、任意の2つの元の交換子積が再びその集合の元になること。

例えば $V_0 = V_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ となっているとすると、微分作用素として V_0 と V_1 を区別できない。このため v_0, \dots, v_d というシンボル³⁹を導入する。これから考える近似を、シンボルの並び方で考察したうえでみつけ、そののちに再びシンボルにベクトル場を代入すれば、それが近似になる。さらに、このように構成した近似は V_α の具体的な構造を一切仮定していないため、汎用性が高い。

上記を数学的に表現し直す。まずシンボルの空間を、

$$D_\infty(v_0, \dots, v_d) = \left\{ \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}} a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} v_{\alpha_1} \cdots v_{\alpha_k}; a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \in \mathbf{R} \right\},$$

$$D_m(v_0, \dots, v_d) = \left\{ \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_m} a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} v_{\alpha_1} \cdots v_{\alpha_k}; a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \in \mathbf{R} \right\},$$

とし、 $D_\infty(v_0, \dots, v_d)$ にはシンボルをつなげるという積、

$$(v_{\alpha_1} \cdots v_{\alpha_k}) \cdot (v_{\beta_1} \cdots v_{\beta_l}) = v_{\alpha_1} \cdots v_{\alpha_k} v_{\beta_1} \cdots v_{\beta_l},$$

が入っているとする。そして、

$$v = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{B}} a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} v_{\alpha_1} \cdots v_{\alpha_k},$$

に対し、 $\langle v, v_{\alpha_1} \cdots v_{\alpha_k} \rangle = a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}$ という係数を返す写像を考える。 $D_\infty(v_0, \dots, v_d)$ から $D_m(v_0, \dots, v_d)$ への射影 j_m を、

$$j_m(v_{\alpha_1} \cdots v_{\alpha_k}) = \begin{cases} v_{\alpha_1} \cdots v_{\alpha_k}, & (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_m, \\ 0, & (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \notin \mathcal{A}_m, \end{cases}$$

とし、 $\Psi_t : D_m(v_0, \dots, v_d) \rightarrow D_m(v_0, \dots, v_d)$ 、 $m = 1, \dots, \infty$ を、

$$\Psi_t(v_{\alpha_1} \cdots v_{\alpha_k}) = t^{\frac{\|(\alpha_1, \dots, \alpha_k)\|}{2}} v_{\alpha_1} \cdots v_{\alpha_k},$$

とおいたうえで、シンボルと微分作用素の対応を与える写像を、

$$\Phi(v_{\alpha_1} \cdots v_{\alpha_k}) = V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_k},$$

と定義する。

.....
39 シンボルとは特定の演算や値を示さない文字で、列の長さや順序のみが意味をもつ記号のこと。

ここでシンボルが生成するリー代数⁴⁰を考える。まず、

$$[v_\alpha, v_\beta] = v_\alpha v_\beta - v_\beta v_\alpha,$$

とし、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ に対し、

$$v_{(\alpha)} = [v_{\alpha_1}, v_{(\alpha_2, \dots, \alpha_k)}],$$

とおく。そして、

$$\mathcal{L}(v_0, \dots, v_d) = \text{Span}\{v_{(\alpha)}, (\alpha) \in \mathcal{A}\},$$

とする。以上を準備したうえで、次の定義をする。

定義 A-2.9 $\lambda_i \in \mathbf{R}$ と $l_i \in \mathcal{L}(v_0, \dots, v_d)$ 、 $i = 1, \dots, n$ が m 次のモーメント条件を満たすとは、次を満たすことである。

$$j_m \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \exp(l_i) \right) = j_m \left(\exp(v_0 + \sum_{\alpha=1}^d \frac{v_\alpha^2}{2}) \right), \quad (\text{A-39})$$

$$\langle l_i, v_0 \rangle = 1. \quad (\text{A-40})$$

ここで、次の命題が成り立つ。

命題 A-2.10 $\lambda_i \in \mathbf{R}$ と $l_i \in \mathcal{L}(v_0, \dots, v_d)$ 、 $i = 1, \dots, n$ が m 次のモーメント条件を満たすとする。このとき、 f に依存して決まる定数 $C_f > 0$ が存在して、

$$\left\| P_t f(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\text{Exp}(\Phi j_m \Psi_t(l_i)(x))) \right\|_\infty \leq C_f t^{\frac{m+1}{2}}, \quad (\text{A-41})$$

となる。

.....
40 シンボルの集合のうち交換子積で閉じているもの。

証明の概略

$$\begin{aligned}
& \left\| P_t f(\cdot) - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\text{Exp}(\Phi_{j_m} \Psi_t(l_i)(\cdot))) \right\|_{\infty} \\
& \leq \left\| P_t f - \Phi_{j_m} \Psi_t \left(\exp(v_0 + \sum_{\alpha=1}^d \frac{v_{\alpha}^2}{2}) \right) f \right\|_{\infty} \\
& + \left\| \Phi_{j_m} \Psi_t \left(\exp(v_0 + \sum_{\alpha=1}^d \frac{v_{\alpha}^2}{2}) \right) f - \Phi_{j_m} \Psi_t \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \exp(l_i) \right) f \right\|_{\infty} \\
& + \left\| \Phi_{j_m} \Psi_t \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \exp(l_i) \right) f - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\text{Exp}(\Phi_{j_m} \Psi_t(l_i)(\cdot))) \right\|_{\infty},
\end{aligned}$$

であり、右辺の3つの項がそれぞれ $O(t^{\frac{m+1}{2}})$ となっている。

よって、シンボルが m 次のモーメント条件という代数的な関係式を満たせば、 $P_t f(x)$ を $\sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Exp}(\Phi_{j_m} \Psi_t(l_i)(x))$ というフローで近似できる。

注意 A-2.11 キューバチャー法と類似点が多い楠岡近似では ξ を $\mathcal{L}(v_0, \dots, v_d)$ 値確率変数に拡張して、

$$j_m E[\exp(\xi)] = j_m \exp(v_0 + \sum_{\alpha=1}^d \frac{v_{\alpha}^2}{2}), \quad (\text{A-42})$$

$$\langle \xi, v_0 \rangle = 1, \quad (\text{A-43})$$

となるものを考える。この枠組みで考えれば、キューバチャー法で探している ξ とは、

$$P(\xi = l_i) = \lambda_i, \quad (\text{A-44})$$

となる離散状態の確率変数であると考えることができる。したがってキューバチャー法は楠岡近似の枠組みの中に含まれていることがわかる。

楠岡近似の具体的な構成として代表的なものに、Ninomiya and Victoir [2008]（以下、NV 法）や Ninomiya and Ninomiya [2009]（以下、NN 法）などがある。キューバチャー法が (A-44) 式のような離散状態の確率変数を用いた構成と考えられるのに対し、これらの手法では連続分布であるガウス型の確率変数を用いた構成となっている点が相違している。

NV 法、NN 法とキューバチャー法はいずれも楠岡近似の一種であるという点では同じであるが、実際の計算に活用する際に、キューバチャー法は理論的に決められた有限個のパスの値を加重平均することで期待値を近似するのに対し NV 法、NN 法はモンテカルロ法を用いる。このため、キューバチャー法の近似誤差は時間を離散

分割したことから生じる誤差のみであるのに対し NV 法、NN 法の近似誤差は、大数の法則の収束に関する誤差と、時間を離散分割したことによる誤差の合計となる。ただし、キューバチャー法は時間を離散分割する数を増大させると計算量が級数的に増大するため、必ずしもキューバチャー法が高速、高精度というわけではない。本稿では、アメリカン・オプションの継続価値計算にはそれほど高い精度の計算は必要とならないと考えたうえで、それほど精度を高めない範囲では計算量を比較的小さく抑えることができるキューバチャー法を用いた。さらに、こうした立場から、本稿では 5 節の計算例でキューバチャー法の中でも最も計算量が少ない 3 次のキューバチャー法を採用した。以下では 3 次のキューバチャー法について詳しく説明する。

へ. 3 次のキューバチャーの構成

命題 A-2.12 $z_i = (z_i^1, \dots, z_i^d) \in \mathbf{R}^d, i = 1, \dots, n, \lambda_i > 0$ が \mathbf{R}^d 上のガウス測度に対する 3 次のキューバチャーになっているとする。このとき、

$$l_i = v_0 + \sum_{k=1}^d z_i^k v_k,$$

とすると、 $(\lambda_i, l_i)_{i=1}^n$ は 3 次のモーメント条件を満たす。

証明 まず、

$$j_3(\exp(v_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^d v_{\alpha}^2)) = 1 + v_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^d v_{\alpha}^2,$$

となることに注意して、以下を得る。

$$\begin{aligned} j_3(\exp(l_i)) &= j_3(1 + l_i + \frac{1}{2} l_i^2 + \frac{1}{6} l_i^3) \\ &= j_3\{1 + v_0 + \sum_{k=1}^d z_i^k v_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d z_i^k (v_0 v_k + v_k v_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d (z_i^k)^2 v_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k>l} z_i^k z_i^l (v_k v_l + v_l v_k) \\ &\quad + \frac{1}{6} (\sum_{k=1}^d (z_i^k v_k)^3)\}. \end{aligned}$$

一方、 (z_i, λ_i) はガウス測度に対するキューバチャーなので、

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{k=1}^d z_i^k v_k \right) = 0, \quad (\text{ガウス測度の1次のモーメント} = 0)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{k>l} z_i^k z_i^l (v_k v_l + v_l v_k) \right) = 0, \quad (\text{ガウス測度の相関} = 0)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{k=1}^d (z_i^k v_k)^3 \right) = 0, \quad (\text{ガウス測度の3次モーメント} = 0)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i j_3(\exp(l_i)) &= 1 + v_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^d v_\alpha^2 \\ &= j_3(\exp(v_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^d v_\alpha^2)), \end{aligned}$$

となる。

注意 A-2.13 \mathbf{R}^d 上のガウス測度に対する3次のキューバチャーの構成法はよく知られている。例えば、最も簡単な例としては $z_i = (z_i^1, \dots, z_i^d) \in \mathbf{R}^d$ 、 $z_i^k \in \{-1, 1\}$ を用いて、 $\{z_1, \dots, z_n\} = \{-1, 1\}^d$ 、 $z_i \neq z_j$ 、 $i \neq j$ となるように構成し、 $\lambda_i = \frac{1}{2^d}$ 、 $i = 1, \dots, 2^d$ とすれば、 (λ_i, z_i) 、 $i = 1, \dots, 2^d$ は3次のキューバチャーとなる。

ここまでで3次のモーメント条件を満たす λ_i を具体的に構成できた。引き続き、

$$\begin{aligned} &E \left[\int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} dB^{\alpha_1}(t_1) \circ \dots \circ dB^{\alpha_k}(t_k) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} d\theta_i^{\alpha_1}(t_1) \cdots d\theta_i^{\alpha_k}(t_k), \end{aligned} \quad (\text{A-45})$$

となるようなパス $\theta_i \in C_{0,bv}([0, 1], \mathbf{R}^{d+1})$ 、 $i = 1, \dots, n$ をみつける。

(A-29) 式より、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \lambda_i j_3 \exp(l_i) \\ &= j_3 \left(\sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_m} E \left[\int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} dB^{\alpha_1}(t_1) \circ \dots \circ dB^{\alpha_k}(t_k) \right] v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_k} \right), \end{aligned}$$

となっている。一方、(A-45) 式を満たすパスが存在するすると、

$$\begin{aligned} &= j_3 \left(\sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_m} \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} d\theta_i^{\alpha_1}(t_1) \dots d\theta_i^{\alpha_k}(t_k) v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i j_3 \left(\sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_m} \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} d\theta_i^{\alpha_1}(t_1) \dots d\theta_i^{\alpha_k}(t_k) v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_3} \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} d\theta_i^{\alpha_1}(t_1) \dots d\theta_i^{\alpha_k}(t_k) v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_k}, \end{aligned}$$

となる。よって、

$$j_3 \exp(l_i) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_3} \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} d\theta_i^{\alpha_1}(t_1) \dots d\theta_i^{\alpha_k}(t_k) v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_k}, \quad (\text{A-46})$$

となるようなパス $\theta_i \in C_{0,bv}([0, 1], \mathbf{R}^{d+1})$, $i = 1, \dots, n$ をみつけられればよい。例えば 3 次の場合は簡単にみつけることができ、

$$\theta_i(t) = (t, z_i^1 t, \dots, z_i^d t),$$

とすると、(A-46) 式を満たしている。

さらに、一般に $l_i \in \mathcal{L}(v_0, \dots, v_d)$ に対し、

$$j_3 \exp(l_i) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_m} \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} d\theta_i^{\alpha_1}(t_1) \dots d\theta_i^{\alpha_k}(t_k) v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_k},$$

となる $w \in C_{0,bv}([0, 1]; \mathbf{R}^{d+1})$ が存在することが、知られている (チェンの定理)。

(4) ガウス測度に対するキューバチャーの構成について

$n = 2^d$ 、 $z_1, \dots, z_n \in \{-1, 1\}^d$ 、 $\lambda_i = \frac{1}{2^d}$ とすると、注意 A-2.13 で述べたとおり、これは 3 次のキューバチャーとなる。よって、 $\{-1, 1\}^d$ の各点に $\frac{1}{2^d}$ の重みのある \mathbf{R}^d 上の測度を $\delta_{\mathcal{G}_d}$ 、さらにガウス測度を μ と表せば、

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x) \mu(dx) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x) \delta_{\mathcal{G}_d}(dx), f \in \mathcal{P}_3,$$

となる。ただしこの手法はサイズが 2^d であり、次元に対し指数的にサイズが増加してしまう。そこで次元の増加に対しサイズの増加が線形なオーダーで収まるような構成法について述べる。

イ. 直交配列

定義 A-2.14 集合 S の元を用素とする $N \times k$ の 2 次元配列が $|S|$ レベルの直交配列 (Orthogonal Array : OA) であるとは、ある $t, \lambda \in \mathbf{Z}$ で、任意の $N \times t$ 部分配列が行方向の t 個の要素の組に対し、同じ組を λ 個ずつ含んでいることとする。これを、

$$OA(N, k, |S|, t),$$

と表記する。

注意 A-2.15 $OA(N, k, |S|, t)$ には λ は含まれていないが、 λ と他のパラメータは $\lambda = \frac{N}{|S|^t}$ という関係がある。

例 : $OA(4, 3, 2, 2)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 A-2.16 (Victoir [2004])

$$OA(N, d, 2, 2m+1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, S = \{-1, 1\},$$

と表し、重みを $\lambda_j = \frac{1}{N}$ 、 $j = 1, \dots, N$ とすると、 $\{(x_j, \lambda_j)\}_{j=1}^N$ は $\delta_{\mathcal{G}_d}$ に対する $2m+1$ 次のキューバチャーになっている。

すなわち、任意の $f \in \mathcal{P}_{2m+1}$ に対し以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} f(x_k) &= \int f(z) \delta_{\mathcal{G}_d}(dz) \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} f(x) \mu(dx). \end{aligned}$$

したがって、 $OA(N, d, 2, 2m+1)$ を構成できればガウス測度に対する $2m+1$ 次のキューバチャーがサイズ N で作れることになる。

□. アダマール行列

定義 A-2.17 (アダマール行列) $H \in M_n(\{-1, 1\})$ がアダマール (Hadamard) 行列であるとは、

$$HH^T = nI_n,$$

となることである。ここで $M_n(\{-1, 1\})$ は成分が $\{-1, 1\}$ から成る n 次の正方行列の集合を表す。

$A \in M_n(\{-1, 1\})$, $B \in M_m(\{-1, 1\})$ に対して、演算 \otimes を次のように定義しテンソルと呼ぶ。

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix} \in M_{mn}(\{-1, 1\}).$$

命題 A-2.18 $H_n \in M_n(\{-1, 1\})$ 、 $H_m \in M_m(\{-1, 1\})$ をアダマール行列とすると、 $H_n \otimes H_m$ もアダマール行列になる。

この命題を用れば、サイズ 2^m 、 $m \in \mathbf{N}$ のアダマール行列は m 回テンソルを繰り返すことにより構成できる。

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_{2^m} = \bigotimes_{i=1}^m H_2.$$

ハ. 直行配列の構成

アダマール行列から $OA(N, d, 2, 3)$ を構成することができる。実際次のようにすればよい。

手順 1: $2^{m-1} < d \leq 2^m$ の自然数 m をとり $n = 2^m$ とおく。そして A をアダマール行列 H_n とする (なお、ここで $n < 2d$ が成り立っている)。

手順 2: $2n \times n$ 行列 B を、

$$B = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix},$$

とする。

手順 3: B の第 $d+1$ 列から第 n 列までを消したものを C とする。このとき、 C は $OA(2n, d, 2, 3)$ になっている。ここで、 $2d \leq 2n < 4d$ となっていることに注意すれば、ガウス測度に関するキューバチャーを $4d$ 未満のサイズで構成できたことになる。すなわち δ_{g_d} では必要なサイズが次元の増加に対して指数的に増大したが、この手法を用いると必要なサイズは次元に対して線形で増大する形に抑えることができる。

(5) キューバチャー法の数値例

以下では、2 資産ブラック=ショールズ・モデルにおける、ヨーロッパ型 2 資産最大値オプションの価格を例にとり、解析解と 3 次のキューバチャー法を用いて計算した近似解を比較する。

原資産の価格が従う確率微分方程式とオプションのペイオフ関数は、

$$X_k(t) = x_k + \int_0^t X_k(s)((r - \mu_k)ds + \sigma_k dB_k(s)), k = 1, 2, \quad (\text{A-47})$$

$$d\langle B_1, B_2 \rangle(t) = \rho dt,$$

$$g(x_1, x_2) = (\max(x_1, x_2) - K) \vee 0,$$

と書ける。オプションの価格は、

$$E[g(X_1(T), X_2(T))],$$

と書ける。まず、(A-47) 式をストラトノビッチ型に書き直すと以下を得る。

$$X_k = x_k + \sum_{\alpha=0}^2 \int_0^t V_{\alpha}^{(k)}(X(s)) \circ d\tilde{B}_{\alpha}(s). \quad (\text{A-48})$$

ただし、

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1(t) &= B_1(t), \\ \tilde{B}_2(t) &= \rho B_1(t) + \sqrt{1-\rho^2} B_2(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_0^{(1)}(x_1, x_2) &= (\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)x_1, \\ V_1^{(1)}(x_1, x_2) &= \sigma_1 x_1, \\ V_2^{(1)}(x_1, x_2) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_0^{(2)}(x_1, x_2) &= (\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2)x_2, \\ V_1^{(2)}(x_1, x_2) &= \sigma_2 \rho x_2, \\ V_2^{(2)}(x_1, x_2) &= \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} x_2. \end{aligned}$$

補論 2. (4) で解説した直行配列によるガウス測度に対する 3 次のキューバチャーを $(z_i, \lambda_i)_{i=1}^n$ 、 $z_i = (z_i^1, z_i^2)$ とする。また、 $\theta_{s,i}(t) = \frac{z_i}{\sqrt{s}}t$ と変数変換する。
(A-15) 式の常微分方程式は、

$$\begin{pmatrix} \frac{du^1(t, x_1)}{dt} \\ \frac{du^2(t, x_2)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} + \sigma_1 \frac{z_i^1}{\sqrt{s}})u_i^1(t, x_1) \\ (\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} + \sigma_2(\rho \frac{z_i^1}{\sqrt{s}} + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \frac{z_i^2}{\sqrt{s}}))u_i^2(t, x_2) \end{pmatrix},$$

と書ける。この常微分方程式は解析的に解くことができ、

$$\begin{cases} u_i^1(t, x) = x_1 \exp\left(\left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} + \sigma_1 \frac{z_i^1}{\sqrt{s}}\right)t\right), \\ u_i^2(t, x) = x_2 \exp\left(\left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} + \sigma_2(\rho \frac{z_i^1}{\sqrt{s}} + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \frac{z_i^2}{\sqrt{s}})\right)t\right), \end{cases}$$

となる。例えば時間の離散分割を $0 = t_0 < t_1 < t_2 = T$ としたとき、期待値の近似計算は、

$$E[g(X(T))] = \sum_{i_1, i_2=1}^n \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} g(u_{i_2}(t_2 - t_1, u_{i_1}(t_1, x))),$$

となる。

以下ではパラメータを表 A-1 のように設定する。また、ガンマを (A-27) 式の γ で時間の離散分割におけるパラメータとする。

表 A-2 はガンマと時間分割数をそれぞれ変化させた際の計算結果を表す。ここでは解析解とキューバチャ法による近似解の誤差の絶対値を絶対誤差と呼ぶ。分割数が 6 以上であれば、ガンマは 3 の場合に絶対誤差が最も小さくなっている。

図 A-1 は各ガンマに対し、分割数を変化させた際の絶対誤差の様子を表している。ガンマが 2、3 の場合は分割数に対し速いオーダーで絶対誤差が減少し、十分に精度が高い近似となっていることが確認できる。

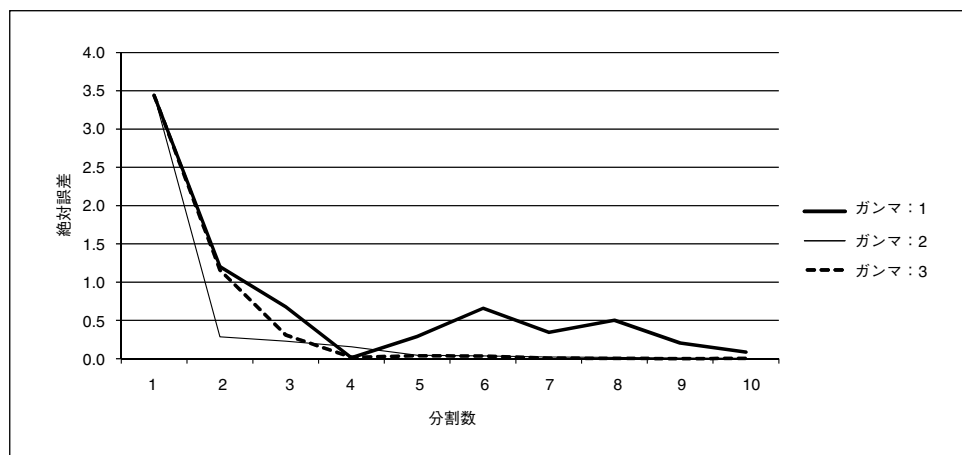
表 A-1 パラメータ

x	μ	r	σ	ρ	T	K
100	0.0	0.0	0.3	0.0	3.0	120

表 A-2 分割による比較

解析解		10.226				
ガンマ:1	時間分割数	2	4	6	9	10
	近似解	11.428	10.238	9.568	10.430	10.139
	絶対誤差	1.202	0.012	0.658	0.204	0.087
ガンマ:2	時間分割数	2	4	6	9	10
	近似解	10.510	10.072	10.262	10.234	10.231
	絶対誤差	0.284	0.154	0.036	0.008	0.005
ガンマ:3	時間分割数	2	4	6	9	10
	近似解	9.070	10.242	10.191	10.225	10.224
	絶対誤差	1.156	0.016	0.035	0.001	0.002

図 A-1 分割数に対する絶対誤差の推移



補論 3. 定理 4.4 の証明

本補論では、本研究における数理ファイナンス面での主要な貢献である定理 4.4 の証明を行う。

(7) 式より、時点 T_n の継続価値関数 $c_n(x)$ は、時点 T_{n+1} の継続価値関数 $c_{n+1}(x)$ を用いた条件付期待値計算により $c_n(x) = P_{n,n+1}(c_{n+1} \vee g_{n+1})(x)$ と計算される。一方、近似計算では、 T_{n+1} の継続価値を近似した関数 $\tilde{c}_{n+1}(x)$ を用いて行使判断を行い、時点 T_n の継続価値 $\tilde{c}_n(x)$ を求める。ここでは、1 時点先の継続価値を近似した関数 $\tilde{c}_{n+1}(x)$ を用いて行使判断を行い、時点 T_n の継続価値を誤差なく計算できたと仮定したときの時点 T_n の継続価値を $u_n(x)$ または $U_n(x)$ とし、これを準継続価値と呼び、次のように定義する。

定義 A-3.1 準継続価値 $u_n(x)$ は以下で定義される。 $n = N$ のとき、

$$u_N(x) = g(T_N, x).$$

$0 \leq n \leq N-1$ のとき、

$$u_n(x, \mathbf{y}_{n+1}^N) = P_{n,n+1} \left(g(T_{n+1}, \cdot) 1_{\{g(T_{n+1}, \cdot) \geq \tilde{c}_{n+1}(\cdot, \mathbf{y}_{n+1}^N)\}} + u_{n+1}(\cdot, \mathbf{y}_{n+2}^N) 1_{\{g(T_{n+1}, \cdot) < \tilde{c}_{n+1}(\cdot, \mathbf{y}_{n+1}^N)\}} \right) (x).$$

さらに $U_n : \mathbf{R}^D \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ を、

$$U_n(x) = u_n(x, \mathbf{Y}_{n+1}^N), \tag{A-49}$$

とおく。

(1) 準継続価値の性質

命題 A-3.2 \tilde{c}_n は (41) 式で与えられるものとする。このとき、 $n = 0, \dots, N-1$ と任意の $l = 1, \dots, L$ に対し、次が成り立つ。

$$P_{0,n} U_n(x_0) = E [g(\tilde{c}_{n+1}, X_l(\tilde{c}_{n+1})) | \mathcal{G}_{n+1}]. \tag{A-50}$$

証明のために次の補題を用意する。

補題 A-3.3 $n = 0, \dots, N-1$ に対し、次が成り立つ。

$$u_n(X_l(T_n), \mathbf{y}_{n+1}^N) = E \left[g(\hat{\tau}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N), X_l(\hat{\tau}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N))) | \mathcal{F}_n \right]. \quad (\text{A-51})$$

証明 帰納法で示す。 $\hat{\tau}_N(\mathbf{y}_N^N) = T_N$ に注意して、

$$\begin{aligned} u_{N-1}(X_l(T_{N-1}), \mathbf{y}_N^N) &= P_{N-1,N} g(T_N, \cdot)(X_l(T_{N-1})) \\ &= E [g(T_N, X_l(T_N)) | \mathcal{F}_{N-1}] \\ &= E [g(\hat{\tau}_N(\mathbf{y}_N^N), X_l(\hat{\tau}_N(\mathbf{y}_N^N))) | \mathcal{F}_{N-1}], \end{aligned}$$

となる。よって $n = N-1$ のとき成り立つ。

$n+1$ まで成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned} &E [g(\hat{\tau}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N), X_l(\hat{\tau}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N))) | \mathcal{F}_n] \\ &= E \left[g(T_{n+1}, X_l(T_{n+1})) 1_{\{\hat{c}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N) \geq g(T_{n+1})\}} \right. \\ &\quad \left. + g(\hat{\tau}_{n+2}(\mathbf{y}_{n+2}^N), X_l(\hat{\tau}_{n+2}(\mathbf{y}_{n+2}^N))) 1_{\{\hat{c}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N) < g(T_{n+1})\}} | \mathcal{F}_n \right] \\ &= E \left[g(T_{n+1}, X_l(T_{n+1})) 1_{\{\hat{c}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N) \geq g(T_{n+1})\}} \right. \\ &\quad \left. + E [g(\hat{\tau}_{n+2}(\mathbf{y}_{n+2}^N), X_l(\hat{\tau}_{n+2}(\mathbf{y}_{n+2}^N))) | \mathcal{F}_{n+1}] 1_{\{\hat{c}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N) < g(T_{n+1})\}} | \mathcal{F}_n \right]. \end{aligned}$$

ここで帰納法の仮定より、

$$E [g(\hat{\tau}_{n+2}(\mathbf{y}_{n+2}^N), X_l(\hat{\tau}_{n+2}(\mathbf{y}_{n+2}^N))) | \mathcal{F}_{n+1}] = u_{n+1}(X_l(T_{n+1}), \mathbf{y}_{n+2}^N),$$

であるので、

$$\begin{aligned} &E [g(\hat{\tau}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N), X_l(\hat{\tau}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N))) | \mathcal{F}_n] \\ &= E \left[g(T_{n+1}, X_l(T_{n+1})) 1_{\{\hat{c}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N) \geq g(T_{n+1})\}} \right. \\ &\quad \left. + u_{n+1}(X_l(T_{n+1}), \mathbf{y}_{n+2}^N) 1_{\{\hat{c}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N) < g(T_{n+1})\}} | \mathcal{F}_n \right] \\ &= P_{n,n+1} \left(g(T_{n+1}, \cdot) 1_{\{g(T_{n+1}, \cdot) \geq \hat{c}_{n+1}(\cdot, \mathbf{y}_{n+1}^N)\}} \right. \\ &\quad \left. + u_{n+1}(\cdot, \mathbf{y}_{n+1}^N) 1_{\{g(T_{n+1}, \cdot) < \hat{c}_{n+1}(\cdot, \mathbf{y}_{n+1}^N)\}} \right) (X_l(T_n)) \\ &= u_n(X_l(T_n), \mathbf{y}_{n+1}^N), \end{aligned}$$

となり、 n のときも成り立つ。

補題 A-3.3 を用いて命題 A-3.2 を示す。

証明 (命題 A-3.2)

$$\begin{aligned}
 & E [g(\tilde{t}_{n+1}, X_l(\tilde{t}_{n+1})) | \mathcal{G}_{n+1}] \\
 &= E \left[g(\hat{t}_{n+1}(\mathbf{Y}_{n+1}^N), X_l(\hat{t}_{n+1}(\mathbf{Y}_{n+1}^N))) | \mathcal{G}_{n+1} \right] \quad (X_l \text{ と } \mathcal{G}_n \text{ は独立より}) \\
 &= E \left[g(\hat{t}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N), X_l(\hat{t}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N))) \right] \Big|_{\{\mathbf{y}_{n+1}^N = \mathbf{Y}_{n+1}^N\}} \\
 &= E \left[u_n(X_l(T_n), \mathbf{y}_{n+1}^N) \right] \Big|_{\{\mathbf{y}_{n+1}^N = \mathbf{Y}_{n+1}^N\}} \quad (\text{補題 A-3.3 より}) \\
 &= P_{0,n} u_n(\mathbf{y}_{n+1}^N)(x_0) \Big|_{\{\mathbf{y}_{n+1}^N = \mathbf{Y}_{n+1}^N\}} \\
 &= P_{0,n} U_n(x_0).
 \end{aligned}$$

よって、題意が従う。

(2) 準継続価値と継続価値の差

次に準継続価値 $u_n(x)$ と継続価値 $c_n(x)$ の差について考える。

命題 A-3.4 以下が成り立つ。

$$P_{0,1} (|u_1(\mathbf{y}_2^N) - c_1|)(x_0) \leq \sum_{n=2}^{N-1} P_{0,n} (|\hat{c}_n(\mathbf{y}_n^N) - c_n|)(x).$$

命題の証明の前に次を示す。

補題 A-3.5 以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 |u_n(x, \mathbf{y}_{n+1}^N) - c_n(x)| &\leq P_{n,n+1} (|u_{n+1}(\mathbf{y}_{n+2}^N) - c_{n+1}|)(x) \\
 &\quad + P_{n,n+1} (|\hat{c}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N) - c_{n+1}|)(x).
 \end{aligned} \tag{A-52}$$

証明 A_n を準継続価値の行使領域、 B_n を継続価値の行使領域とし、

$$\begin{aligned}
 A_n &= \{x \in \mathbf{R}^D; g(T_n, x) \geq \hat{c}_n(x, \mathbf{y}_n^N)\}, \\
 B_n &= \{x \in \mathbf{R}^D; g(T_n, x) \geq c_n(x)\},
 \end{aligned}$$

とおく。以下の証明では記号の簡略のため \mathbf{y}_n^N を略す。このとき、

$$\begin{aligned}
& |u_n(x) - c_n(x)| \\
&= \left| P_{n,n+1}((g(T_{n+1})1_{A_{n+1}} + u_{n+1}1_{A_{n+1}^c}) \right. \\
&\quad \left. - P_{n,n+1}(g(T_{n+1}) \vee c_{n+1}))(x) \right| \\
&= \left| P_{n,n+1}((g(T_{n+1}) - c_{n+1})1_{A_{n+1} \cap B_{n+1}^c})(x) \right| \\
&\quad + \left| P_{n,n+1}((u_{n+1} - g(T_{n+1}))1_{A_{n+1}^c \cap B_{n+1}})(x) \right| \\
&\quad + \left| P_{n,n+1}((u_{n+1} - c_{n+1})1_{A_{n+1}^c \cap B_{n+1}^c})(x) \right| \\
&\leq P_{n,n+1}(|g(T_{n+1}) - c_{n+1}|1_{A_{n+1} \cap B_{n+1}^c})(x) \\
&\quad + P_{n,n+1}(|u_{n+1} - c_{n+1}|1_{A_{n+1}^c \cap B_{n+1}^c})(x) \\
&\quad + P_{n,n+1}(|u_{n+1} - c_{n+1}|1_{A_{n+1}^c \cap B_{n+1}})(x) \\
&\quad + P_{n,n+1}(|c_{n+1} - g(T_{n+1})|1_{A_{n+1}^c \cap B_{n+1}})(x) \\
&\leq P_{n,n+1}(|u_{n+1} - c_{n+1}|)(x) \\
&\quad + P_{n,n+1}(|g(T_{n+1}) - c_{n+1}|1_{\{A_{n+1} \cap B_{n+1}^c\} \cup \{A_{n+1}^c \cap B_{n+1}\}})(x),
\end{aligned}$$

となる。ここで最後の式の右辺第2項において、 $x \in A_{n+1} \cap B_{n+1}^c$ に対して、

$$\tilde{c}_{n+1}(x) \leq g(T_n + 1)(x) < c_{n+1}(x),$$

であり、 $x \in A_{n+1}^c \cap B_{n+1}$ に対して、

$$\tilde{c}_{n+1}(x) > g(T_n + 1)(x) \geq c_{n+1}(x),$$

となるので、 $x \in \{A_{n+1} \cap B_{n+1}^c\} \cup \{A_{n+1}^c \cap B_{n+1}\}$ において、

$$|g(T_n + 1)(x) - c_{n+1}(x)| \leq |\tilde{c}_{n+1}(x) - c_{n+1}(x)|,$$

となる。よって (A-52) 式が成り立つ。

証明 (命題 A-3.4) 補題 A-3.5 より、以下を得る。

$$\begin{aligned}
& P_{0,n}(|u_n(x, \mathbf{y}_{n+1}^N) - c_n(x)|) - P_{0,n+1}(|u_{n+1}(\mathbf{y}_{n+2}^N) - c_{n+1}|)(x) \\
& \leq P_{0,n+1}(|\hat{c}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N) - c_{n+1}|)(x).
\end{aligned} \tag{A-53}$$

(3) 命題 4.3 の証明

命題 A-3.6 以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} & |\tilde{v}_0^*(\mathbf{y}_1^N) - v_0| \\ & \leq \left| \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L g(\hat{\tau}_1(\mathbf{y}_1^N), X_l(\hat{\tau}_1(\mathbf{y}_1^N))) - u_0(x_0, \mathbf{y}_1^N) \right| + \sum_{n=1}^{N-1} P_{0,n} (|c_n - \hat{c}_n(\mathbf{y}_n^N)|)(x_0). \end{aligned}$$

証明の前に次の補題を示す。

補題 A-3.7 $a, b, c \in \mathbf{R}$ に対し、以下が成り立つ。

$$|a \vee c - b \vee c| \leq |a - b|.$$

証明 $a \geq b$ とする。

$$|a \vee c - b \vee c| = \begin{cases} |a - b|, a \geq b \geq c, \\ |a - c| \leq |a - b|, a \geq c \geq b, \\ |c - c| = 0 \leq |a - b|, c \geq a \geq b, \end{cases}$$

より、題意が成立する。

証明 (命題 A-3.6) $\hat{v}_0^*(\mathbf{y}_1^N) = \hat{c}_0^*(\mathbf{y}_1^N) \vee g(T_0, x_0)$ 、 $v_0 = c_0(x_0) \vee g(T_0, x_0)$ であり、補題 A-3.7 より、 $|\hat{c}_0^*(\mathbf{y}_1^N) \vee g(T_0, x_0) - c_0(x_0) \vee g(T_0, x_0)| \leq |\hat{c}_0^*(\mathbf{y}_1^N) - c_0(x_0)|$ となる。一方、

$$\begin{aligned} |\hat{c}_0^*(\mathbf{y}_1^N) - c_0(x_0)| &= \left| \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L g(\hat{\tau}_1(\mathbf{y}_1^N), X_l(\hat{\tau}_1(\mathbf{y}_1^N))) - c_0(x_0) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L g(\hat{\tau}_1(\mathbf{y}_1^N), X_l(\hat{\tau}_1(\mathbf{y}_1^N))) - u_0(x, \mathbf{y}_1^N) \right| \\ &\quad + |u_0(x, \mathbf{y}_1^N) - c_0(x_0)|, \end{aligned}$$

となる。ここで命題 A-3.4 より、

$$|u_0(x, \mathbf{y}_1^N) - c_0(x_0)| \leq P_{0,1}(|\hat{c}_1(\mathbf{y}_1^N) - c_1|)(x) + P_{0,1}(|u_1(\mathbf{y}_1^N) - c_1|)(x),$$

となり、さらに命題 A-3.4 を用いれば題意が成立する。

次に命題 4.3 を示す。

証明 (命題 4.3)

$$\begin{aligned} & E \left[|\tilde{v}_0^* - v_0(x_0)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= E \left[E \left[|\tilde{v}_0^* - v_0|^2 \mid \mathcal{G}_1 \right] \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= E \left[E \left[|\hat{v}_0^*(\{X_l\}_{l=1}^L, y_1^N) - v_0|^2 \mid \{y_1^N = Y_1^N\} \right] \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

となる。ここで命題 A-3.6 より、

$$\begin{aligned} & E \left[|\tilde{v}_0^* - v_0|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq E \left[\left| \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L g(\tilde{\tau}_1, X_l(\tilde{\tau}_1)) - U_0(x_0) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{N-1} E \left[P_{0,n}(|c_n - \tilde{c}_n|^2)(x_0) \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

となる。一方、命題 A-3.2 において $n = 0$ の場合を用いれば、右辺第 1 項について、ある $C_0 > 0$ が存在して、

$$E \left[\left| \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L g(\tilde{\tau}_1, X_l(\tilde{\tau}_1)) - U_0(x_0) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C_0}{\sqrt{L}},$$

となる。よって題意が成り立つ。

(4) 定理 4.4 の証明

命題 A-3.8 以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 & P_{0,n}(|c_n - \hat{c}_n(\mathbf{y}_n^N)|^2)(x_0)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq P_{0,n+1}(|c_{n+1} - \hat{c}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N)|^2)(x_0)^{\frac{1}{2}} \\
 & + \|P_{n,n+1}(\hat{c}_{n+1} \vee g_{n+1}) - \Gamma_n(\cdot, \mathbf{y}_{n+1}^N)\|_{\infty} \\
 & + \int_{\mathbf{R}^D} \inf_{1 \leq l \leq L_0} \{|\Gamma_n(x, \mathbf{y}_{n+1}^N) - \Gamma_n(y_l^{(n)}, \mathbf{y}_{n+1}^N)| + |\tilde{c}_n(y_l^{(n)}, \mathbf{y}_{n+1}^N) \\
 & - \hat{c}_n(x, \mathbf{y}_{n+1}^N)|\}^2 p_{0,n}(x_0, dx)^{\frac{1}{2}}. \tag{A-54}
 \end{aligned}$$

なお、(A-54) 式の右辺第 2 項と、第 3 項をそれぞれ E_1 、 E_2 とおく。

証明

$$\begin{aligned}
 & P_{0,n}(|c_n - \hat{c}_n(\mathbf{y}_n^N)|^2)(x_0)^{\frac{1}{2}} \\
 & = \int_{\mathbf{R}^D} |c_n(x) - \hat{c}_n(x, \mathbf{y}_n^N)|^2 p_{0,n}(x_0, dx)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \int_{\mathbf{R}^D} |P_{n,n+1}(c_{n+1} \vee g_{n+1})(x) \\
 & - P_{n,n+1}(\hat{c}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N) \vee g_{n+1})(x)|^2 p_{0,n}(x_0, dx)^{\frac{1}{2}} \\
 & + \int_{\mathbf{R}^D} |P_{n,n+1}(\hat{c}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N) \vee g_{n+1})(x) \\
 & - \Gamma_n(x, \mathbf{y}_{n+1}^N)|^2 p_{0,n}(x_0, dx)^{\frac{1}{2}} \\
 & + \int_{\mathbf{R}^D} |\Gamma_n(x, \mathbf{y}_{n+1}^N) - \hat{c}_n(x, \mathbf{y}_{n+1}^N)|^2 p_{0,n}(x_0, dx)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

ここで、右辺第 1 項は、

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbf{R}^D} |P_{n,n+1}(c_{n+1} \vee g_{n+1})(x) \\
 & - P_{n,n+1}(\hat{c}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N) \vee g_{n+1})(x)|^2 p_{0,n}(x_0, dx)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \int_{\mathbf{R}^D} P_{n,n+1}(|c_{n+1} - \hat{c}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N)|^2)(x) p_{0,n}(x_0, dx) \\
 & = P_{0,n+1}(|c_{n+1} - \hat{c}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N)|^2)(x_0)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

となり、右辺第 2 項は、

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbf{R}^D} |P_{n,n+1}(\tilde{c}_{n+1} \vee g_{n+1})(x) - \Gamma_n(x, \mathbf{y}_{n+1}^N)|^2 p_{0,n}(x_0, dx)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \|P_{n,n+1}(\tilde{c}_{n+1} \vee g_{n+1}) - \Gamma_n(\cdot, \mathbf{y}_{n+1}^N)\|_{\infty},
 \end{aligned}$$

となる。最後に右辺第 3 項は、

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^D} |\Gamma_n(x, \mathbf{y}_{n+1}^N) - \hat{c}_n(x, \mathbf{y}_{n+1}^N)|^2 p_{0,n}(x_0, dx)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \int_{\mathbf{R}^D} \inf_{1 \leq l \leq L_0} \{|\Gamma_n(x, \mathbf{y}_{n+1}^N) - \Gamma_n(y_l^{(n)}, \mathbf{y}_{n+1}^N)| + |\hat{c}_n(y_l^{(n)}, \mathbf{y}_{n+1}^N) \\ & \quad - \hat{c}_n(x, \mathbf{y}_{n+1}^N)|\}^2 p_{0,n}(x_0, dx)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

となり、題意が成り立つ。

以下 E_1 、 E_2 を評価していく。その前に次の補題を示す。

補題 A-3.9 各 $n = 1, \dots, N-1$ に対し、ある \mathbf{y}_n^N によらない定数 $K_{n,I} > 0$ が存在し、任意の $x, y \in \mathbf{R}^D$ に対して、

$$|\Gamma_n(x, \mathbf{y}_n^N) - \Gamma_n(y, \mathbf{y}_n^N)| \leq K_{n,I} |x - y|, \quad (\text{A-55})$$

$$|\hat{c}_n(x, \mathbf{y}_n^N) - \hat{c}_n(y, \mathbf{y}_n^N)| \leq K_{n,I} |x - y|, \quad (\text{A-56})$$

が成り立つ。

証明 帰納法で示す。関数 g のリプシッツ係数を $Lip(g)$ で表す。 $n = N$ のとき、

$$|g(n, x) - g(n, y)| \leq Lip(g) |x - y|,$$

より成り立つ。 $n + 1$ まで成り立つとすると、 $T_n = t_{n,0} < \dots < t_{n,I} < T_{n+1}$ より、

$$\begin{aligned} & \Gamma_n(x, \mathbf{y}_{n+1}^N) \\ & = \sum_{k_1, \dots, k_I=1}^p \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_I} \hat{v}_{n+1}(\Phi_{T_n, T_{n+1}} \{\theta_{s_{n,1}, k_1} \otimes \cdots \otimes \theta_{s_{n,I}, k_I}; x\}, \mathbf{y}_{n+1}^N) \\ & = \sum_{k_1, \dots, k_I=1}^p \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_I} \hat{v}_{n+1}(\Phi_{t_{n,I-1}, T_{n+1}} \{\theta_{s_{n,I}, k_I}, \\ & \quad \Phi_{T_n, t_{n,I-1}} \{\theta_{s_{n,1}, k_1} \otimes \cdots \otimes \theta_{s_{n,I-1}, k_{I-1}}, x\}\}, \mathbf{y}_{n+1}^N), \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\phi_m(x) = \Phi_{t_{n,m-1}, t_{n,m}}(\theta_{s_{n,m}, k_m}, \phi_{m-1}(x)),$$

とおく。また、

$$\hat{v}_{n+1}(x, \mathbf{y}_{n+1}^N) = \hat{c}_{n+1}(x, \mathbf{y}_{n+1}^N) \vee g(n+1, x),$$

より、

$$Lip(\hat{v}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N)) = K_{n+1} \vee Lip(g),$$

であり、これを \hat{K}_{n+1} とおく。このとき、以下を得る。

$$\begin{aligned} & |\Gamma_n(x, \mathbf{y}_{n+1}^N) - \Gamma_n(y, \mathbf{y}_{n+1}^N)| \\ & \leq \sum_{k_1, \dots, k_I=1}^p \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_I} |\hat{v}_{n+1}(\Phi_{t_n, I-1, T_{n+1}}\{\theta_{s_n, I, k_I}, \phi_{I-1}(x)\}) \\ & \quad - \hat{v}_{n+1}(\Phi_{t_n, I-1, T_{n+1}}\{\theta_{s_n, I, k_I}, \phi_{I-1}(y)\})| \\ & \leq \sum_{k_1, \dots, k_I=1}^p \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_I} \hat{K}_{n+1} |\Phi_{t_n, I-1, T_{n+1}}\{\theta_{s_n, I, k_I}, \phi_{I-1}(x)\} \\ & \quad - \Phi_{t_n, I-1, T_{n+1}}\{\theta_{s_n, I, k_I}, \phi_{I-1}(y)\}|. \end{aligned}$$

ここで $\Phi_{t_n, m-1, t_n, m}(\theta_{s_n, m, k_m}, x)$ は次の常微分方程式、

$$\begin{aligned} \frac{du(t, x)}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^d V_{\alpha}(u(t, x)) \frac{d\theta_{s_n, m, k_m}^{\alpha}(t)}{dt}, \\ u(0, x) &= x, \end{aligned}$$

の解であり、仮定より全ての k, α に対し、 $\sup_{t \in [0, T]} |\frac{d\theta_k^{\alpha}}{dt}| \leq C_w$ であるので、

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\theta_{s_n, m, k_m}^{\alpha}(t)}{dt} \right| &= \left| \frac{\sqrt{s_{n, m}} d\theta_{k_m}^{\alpha}(t/s_{n, m})}{dt} \right| \\ &\leq C_w / \sqrt{s_{n, m}}, \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに、 $V_{\alpha} \in C_b(\mathbf{R}^D, \mathbf{R}^D)$ より、 V_{α} はリプシッツ条件を満たすので、ある定数 $\beta > 0$ が存在して、

$$\begin{aligned}
|u(t, x) - u(t, y)| &\leq |x - y| + \int_0^t \sum_{\alpha=1}^d |V_\alpha(u(s, x)) - V_\alpha(u(s, y))| \frac{d\theta_{s_n, m, k_m}^\alpha(s)}{ds} ds \\
&\leq |x - y| + \int_0^t \frac{C_w \beta}{\sqrt{s_{n, m}}} |u(s, x) - u(s, y)| ds,
\end{aligned}$$

となる。グロンウォールの不等式より、

$$|\Phi_{t_n, m-1, t_n, m}(\theta_{s_n, m, k_m}, x) - \Phi_{t_n, m-1, t_n, m}(\theta_{s_n, m, k_m}, y)| \leq |x - y| \exp(C_w \beta \sqrt{s_{n, m}}),$$

が成り立つ。したがって、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&|\Gamma_n(x, y_{n+1}^N) - \Gamma_n(y, y_{n+1}^N)| \\
&\leq \sum_{k_1, \dots, k_I=1}^p \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_I} \hat{K}_{n+1}(\exp(C_w \beta \sqrt{s_{n, i}})) |\phi_{I-1}(x) - \phi_{I-1}(y)| \\
&\leq \sum_{k_1, \dots, k_I=1}^p \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_I} \hat{K}_{n+1} \prod_{i=1}^{I-1} (\exp(C_w \beta \sqrt{s_{n, i}})) |x - y|.
\end{aligned}$$

ゆえに n のときも成り立つ。したがって (A-55) 式が示された。また、リプシッツ補間の定義により (A-55) 式から (A-56) 式が成り立つ。

(5) E_1 の評価

補題より \hat{c}_n がリプシッツ連続であることがいえたので、キューバチャー法の誤差評価より、ある $C_{n, I}^{(1)} > 0$ が存在して、

$$\left\| P_{n, n+1}(\hat{c}_{n+1}(y_{n+1}^N) \vee g_{n+1}) - \Gamma_n(y_{n+1}^N) \right\|_\infty \leq C_{n, I}^{(1)} I^{-\frac{m-1}{2}}, \quad (\text{A-57})$$

となる。

(6) E_2 の評価

命題 A-3.10 以下が成り立つ。

$$E_2 \leq \int_0^\infty P(|X_1(T_n) - Y_1(T_n)| > \frac{\sqrt{z}}{2K_{n, I}})^{L_0} dz^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A-58})$$

証明

$$\begin{aligned}
 E_2 &= E\left[\int_{\mathbf{R}^D} \inf_{1 \leq l \leq L_0} \{|\Gamma_n(x, \mathbf{Y}_{n+1}^N) - \Gamma_n(Y_l(T_n), \mathbf{Y}_{n+1}^N)|\right. \\
 &\quad \left.+ |\hat{c}_n(Y_l(T_n), \mathbf{Y}_{n+1}^N) - \hat{c}_n(x, \mathbf{Y}_{n+1}^N)|\}^2 p_{0,n}(x_0, dx)\right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \int_{\mathbf{R}^D} E\left[\inf_{1 \leq l \leq L_0} \{|\Gamma_n(x, \mathbf{Y}_{n+1}^N) - \Gamma_n(Y_l(T_n), \mathbf{Y}_{n+1}^N)|\right. \\
 &\quad \left.+ |\hat{c}_n(Y_l(T_n), \mathbf{Y}_{n+1}^N) - \hat{c}_n(x, \mathbf{Y}_{n+1}^N)|\}^2\right] p_{0,n}(x_0, dx)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \int_{\mathbf{R}^D} \int_0^\infty P\left(\inf_{1 \leq l \leq L_0} \{|\Gamma_n(x, \mathbf{Y}_{n+1}^N) - \Gamma_n(Y_l(T_n), \mathbf{Y}_{n+1}^N)|\right. \\
 &\quad \left.+ |\hat{c}_n(Y_l(T_n), \mathbf{Y}_{n+1}^N) - \hat{c}_n(x, \mathbf{Y}_{n+1}^N)|\}^2 > z\right) dz p_{0,n}(x_0, dx)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

ここで Γ_n のリプシッツ連続性により、

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_{\mathbf{R}^D} \int_0^\infty P\left(\inf_{1 \leq l \leq L_0} \{2K_{n,I}|x - Y_l(T_n)|\}^2 > z\right) dz p_{0,n}(x_0, dx)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \int_{\mathbf{R}^D} \int_0^\infty P\left(|x - Y_1(T_n)| > \frac{\sqrt{z}}{2K_{n,I}}\right)^{L_0} dz p_{0,n}(x_0, dx)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\int_0^\infty P\left(|X_1(T_n) - Y_1(T_n)| > \frac{\sqrt{z}}{2K_{n,I}}\right)^{L_0} dz\right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

となる。

命題 A-3.11 以下を満たす $C_{n,I}^{(2)} > 0$ が存在する。

$$\int_0^\infty P\left(|X_1(T_n) - Y_1(T_n)| > \frac{\sqrt{z}}{2K_{n,I}}\right)^{L_0} dz^{\frac{1}{2}} \leq C_{n,I}^{(2)} L_0^{-\frac{1}{2D}}. \quad (\text{A-59})$$

証明 $k = \frac{1}{2K_{n,I}}$ とおく。

$$\begin{aligned}
 &P(|X_1(T_n) - Y_1(T_n)| > k\sqrt{z}) \\
 &\leq P(|X_1(T_n) - x_0| + |Y_1(T_n) - x_0| > k\sqrt{z}) \\
 &\leq P(|X_1(T_n) - x_0| > \frac{k\sqrt{z}}{2}) + P(|Y_1(T_n) - x_0| > \frac{k\sqrt{z}}{2}).
 \end{aligned}$$

チェビシェフの不等式より、

$$P(|X_1(T_n) - x_0| > \frac{k\sqrt{z}}{2}) \leq \frac{4}{k^2 z} E[|X_1(T_n) - x_0|^2],$$

となる。ここで、

$$k_1 = \frac{4}{k^2} (E[|X_1(T_n) - x_0|^2] + E[|Y_1(T_n) - x_0|^2]),$$

とおき、 $r_1 > k_1$ となる r_1 を 1 つ固定しておく。このとき、

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{\infty} P(|X_1(T_n) - Y_1(T_n)| > k\sqrt{z})^{L_0} dz &\leq \frac{1}{L_0 - 1} \left(\frac{k_1}{r_1} \right)^{L_0} r_1 \\ &\equiv \frac{r_1}{L_0 - 1}, \end{aligned} \quad (\text{A-60})$$

となる。次に $r_0 > 0$ を、

$$\inf_{|x-x_0| \leq \frac{k\sqrt{r_0}}{2}} p_{0,n}(x_0, x) > 0, \quad \inf_{|x-x_0| \leq \frac{k\sqrt{r_0}}{2}} q_{0,n}(x_0, x) > 0,$$

となるようにとり、 $\epsilon > 0$ を、

$$\inf_{|x-x_0| \leq \frac{k\sqrt{r_0}}{2}} p_{0,n}(x_0, x) > \epsilon, \quad \inf_{|x-x_0| \leq \frac{k\sqrt{r_0}}{2}} q_{0,n}(x_0, x) > \epsilon,$$

となるようにとる。このとき、

$$\begin{aligned} &P(|X_1(T_n) - Y_1(T_n)| \leq k\sqrt{z}) \\ &\geq P(|X_1(T_n) - x_0| \leq \frac{k\sqrt{z}}{2}, |Y_1(T_n) - x_0| \leq \frac{k\sqrt{z}}{2}) \\ &= P(|X_1(T_n) - x_0| \leq \frac{k\sqrt{z}}{2}) P(|Y_1(T_n) - x_0| \leq \frac{k\sqrt{z}}{2}), \end{aligned}$$

となる。一方 $z \leq r_0$ のとき、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 & P(|X_1(T_n) - x_0| \leq \frac{k\sqrt{z}}{2}) \\
 &= \int_{\{|x-x_0| \leq \frac{k\sqrt{z}}{2}\}} p_{0,n}(x_0, x) dx \\
 &\geq \inf_{|x-x_0| \leq \frac{k\sqrt{z}}{2}} p_{0,n}(x_0, x) k^D \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{D}{2}} \\
 &\geq \epsilon k^D \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{D}{2}}.
 \end{aligned}$$

ここで、 $k_2 = \frac{\epsilon^2 k^{2D}}{2^D}$ とおくと、

$$P(|X_1(T_n) - Y_1(T_n)| \leq k\sqrt{z}) \geq k_2 z^D, \quad (\text{A-61})$$

となる。よって、次を得る。

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{r_0} P(|X_1(T_n) - Y_1(T_n)| > k\sqrt{z})^{L_0} dz \\
 &\leq \int_0^{r_0} (1 - k_2 z^D)^{L_0} dz \\
 &\leq \int_0^{r_0} \exp(-k_2 L_0 z^D) dz.
 \end{aligned}$$

ここで、 $u = k_2 L_0 z^D$ と変数変換することにより、

$$\begin{aligned}
 \int_0^{r_0} \exp(-k_2 L_0 z^D) dz &= \int_0^{k_2 L_0 r_0^D} \frac{1}{D} (k_2 L_0)^{-\frac{1}{D}} u^{\frac{1}{D}-1} e^{-u} du \\
 &\leq \int_0^\infty \frac{1}{D} (k_2 L_0)^{-\frac{1}{D}} u^{\frac{1}{D}-1} e^{-u} du,
 \end{aligned}$$

となる。 $k_3 = \frac{1}{D} k_2^{-\frac{1}{D}} \Gamma(\frac{1}{D})$ とおくと、

$$\int_0^{r_0} P(|X_1(T_n) - Y_1(T_n)| > k\sqrt{z})^{L_0} dz \leq k_3 L_0^{-\frac{1}{D}}, \quad (\text{A-62})$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
 & \int_{r_0}^{r_1} P(|X_1(T_n) - Y_1(T_n)| > k\sqrt{z})^{L_0} dz \\
 &\leq P(|X_1(T_n) - Y_1(T_n)| > k\sqrt{r_0})^{L_0} (r_1 - r_0),
 \end{aligned}$$

であり、さらに (A-61) 式より、

$$P(|X_1(T_n) - Y_1(T_n)| > k \sqrt{r_0})^{L_0} \leq (1 - k_2 r_0^D)^{L_0},$$

となるので、

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{r_1} P(|X_1(T_n) - Y_1(T_n)| > k \sqrt{z})^{L_0} dz &\leq (1 - k_2 r_0^D)^{L_0} (r_1 - r_0) \\ &\leq \exp(-k_2 r_0^D L_0) (r - r_0), \quad (\text{A-63}) \end{aligned}$$

を得る。したがって、(A-60) 式、(A-62) 式、(A-63) 式より、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty P(|X_1(T_n) - Y_1(T_n)| > \frac{\sqrt{z}}{2K_{n,I}})^{L_0} dz \\ &\leq \frac{r_1}{L_0 - 1} + k_3 L_0^{-\frac{1}{D}} + \exp(-k_2 r_0^D L_0) (r - r_0). \end{aligned}$$

よって、ある $C_{n,I}^{(2)} > 0$ が存在して、

$$\int_0^\infty P(|X_1(T_n) - Y_1(T_n)| > \frac{\sqrt{z}}{2K_{n,I}})^{L_0} dz \leq C_{n,I}^{(2)} L_0^{-\frac{1}{D}},$$

を満たす。

系 A-3.12 以下を満たす $\hat{C}_{n,I} > 0$ が存在する。

$$\begin{aligned} &P_{0,n}(|c_n - \hat{c}_n(\mathbf{y}_n^N)|^2)(x_0)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq P_{0,n+1}(|c_{n+1} - \hat{c}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}^N)|^2)(x_0)^{\frac{1}{2}} + \hat{C}_{n,I} \left\{ I^{-\frac{m-1}{2}} + L_0^{-\frac{1}{2D}} \right\}. \end{aligned}$$

証明 (定理 4.4) 命題 4.3 より、 $\sum_{n=1}^{N-1} E \left[P_{0,n}(|c_n - \tilde{c}_n|^2)(x_0) \right]^{\frac{1}{2}}$ を評価すればよい。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{N-1} E \left[P_{0,n} \left(|c_n - \tilde{c}_n|^2 \right) (x_0) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sum_{n=1}^{N-1} E \left[E \left[P_{0,n} \left(|c_n - \tilde{c}_n|^2 \right) (x_0) | \mathcal{G}_n \right] \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sum_{n=1}^{N-1} E \left[P_{0,n} \left(|c_n - \hat{c}_n(\mathbf{Y}_n^N)|^2 \right) (x_0) \right]^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

また、系 A-3.12 より、

$$\begin{aligned}
 & \leq \hat{C}_{1,I} \left\{ I^{-\frac{m-1}{2}} + L_0^{-\frac{1}{2D}} \right\} + 2E^P \left[P_{0,2} \left(|c_2 - \hat{c}_2(\mathbf{Y}_2^N)|^2 \right) (x_0) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 & + \sum_{n=3}^{N-1} E \left[P_{0,n} \left(|c_n - \hat{c}_n(\mathbf{Y}_n^N)|^2 \right) (x_0) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \cdots \leq \sum_{n=1}^{N-1} n \hat{C}_{n,I} \left\{ I^{-\frac{m-1}{2}} + L_0^{-\frac{1}{2D}} \right\},
 \end{aligned}$$

となる。よって $n\hat{C}_{n,I} = C_{n,I}$ として、定理 4.4 が成り立つ。

