

行動ファイナンスの新展開： 不確実性下における 投資理論を中心として

やま だ て つ や
山田哲也

要 旨

世界的な金融危機の発生を契機として、行動経済学や行動ファイナンスに対する関心が高まっている。こうした潮流を踏まえ、本稿では、行動ファイナンスと伝統的な投資理論あるいは金融工学との融合を目指した各種の研究をサーベイする。具体的には、バリュエーション・アット・リスク、オプション理論、ポートフォリオ選択、リアルオプションといった従来の理論に、プロスペクト理論や時間非整合割引率といった行動ファイナンスの理論が融合されてきていることを紹介する。これにより、近視眼的な投資が行われることや、損失拡大時に損切りを躊躇してしまうこと、また、価格の分布がファット・テールになることなど、伝統的なファイナンス理論の枠組みでは必ずしも十分な説明ができなかった事象が説明されることを示す。また、こうした研究のアプローチについての有用性および限界に関する議論を整理する。

キーワード：バリュエーション・アット・リスク、ポートフォリオ選択、リアルオプション、インプライド確率分布、プロスペクト理論、時間非整合割引率、投資家の群集行動

本稿を作成するに当たっては、川西 諭准教授（上智大学）、倉澤資成教授（横浜国立大学）、筒井義郎教授（大阪大学）、日本オペレーションズ・リサーチ学会研究部会「ファイナンス理論の展開」の参加者ならびに日本銀行スタッフから貴重なコメントを頂戴した。記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りは、すべて筆者個人に属する。

山田哲也 日本銀行金融研究所企画役補佐
（現 金融機構局企画役補佐、E-mail: tetsuya.yamada@boj.or.jp）

1. はじめに

世界的な金融危機の発生を契機として、従来のファイナンス理論や金融工学を再検討・拡充しようという動きがみられる。こうした流れの1つとして、行動経済学や行動ファイナンスに対する関心が高まっている^{1,2}。とりわけ金融危機との関連が強い行動ファイナンスの分野では、伝統的なファイナンス理論からは予見されない資産価格の特徴を説明するような従来型の研究³に加え、金融危機につながりうる投資家行動を説明するような研究への関心が高まっている。本稿では、こうした潮流を踏まえつつ、行動ファイナンスと伝統的な投資理論あるいは金融工学との融合を目指した研究をサーベイする。具体的には、バリュー・アット・リスク、オプション理論、ポートフォリオ選択、リアルオプションといった従来の理論に、プロスペクト理論や時間非整合割引率といった行動ファイナンスの理論が融合され、不確実性下における投資行動について説明力が向上していることを解説する。

本稿の概要をあらかじめ紹介すると以下のとおりである。まず2節では、行動ファイナンスの基本的な考え方を解説する⁴。行動ファイナンスとは、従来のファイナンス理論では十分に説明できない投資家の行動やその背後にある心理を扱う理論である。例えば、損失拡大時に損切りできず、大穴に賭けてしまうような心理を表したものとしてプロスペクト理論がある。過去の利益水準を取り戻そうとリスクの高い投資を行うこともこの理論により説明される。次に、良いことが続けて起こるとまた良いことが起きると錯覚する心理を表すものとして代表性バイアスが挙げられる。これは地価が上昇し続けると土地神話が形成されることの説明などに使われる。また、将来のことより現在の関心事を重視してしまう心理として、時間非整合割引率を挙げることができる。これは、将来のことまで考えが及ばず近視眼的な行動が選択されることの説明に使われる。このほか、投資家の群集行動や自信過剰についても説明が与えられている。

1 行動経済学は経済学のさまざまな問題に心理学の考え方を応用した研究分野であり、中でもファイナンスの問題へ応用したものが行動ファイナンスである。ファイナンス以外にも例えばマクロ経済の問題へ応用した研究も多く存在し、それらをまとめたものとして Akerlof [2002] がある。

2 例えば、2009 年 12 月に、日本銀行金融研究所で開催されたワークショップ「金融危機後の金融工学の展開」においても、国内の学者と実務家によるパネル討論の場でこうした声が聞かれた。詳細は、日本銀行金融研究所 [2010] 3 節を参照。

3 こうした研究の代表例としてはリスクプレミアム・パズルと呼ばれる現象に関するものと裁定取引の限界に関するものがある。まず、リスクプレミアム・パズルとは、Mehra and Prescott [1985] が指摘した現象であり、投資家のリスク回避度を通常では考えられないほど高く設定しない限り、市場で観測されるリスクプレミアムの水準を説明できないことを指摘したものである。この現象を行動ファイナンスの立場から説明したものとしては Benartzi and Thaler [1995] が有名である。次に、裁定取引の限界に関しては、DeLong, Shleifer, Summers, and Waldmann [1990] によるノイズトレーダー・モデルが有名である。裁定取引を基本とする合理的投資家は、ノイズトレーダーと呼ばれる非合理的な投資家のファンダメンタルとは乖離した価格付けに対して、思い切った裁定取引ができない状況をモデル化している。このような従来の行動ファイナンスの研究に関しては Barberis and Thaler [2003]、高橋 [2004]、多田 [2003] などを参照。

4 2 節をまとめる際に Barberis and Thaler [2003]、多田 [2003]、角田 [2004]、俊野 [2004] を参考にした。

続く3節では、理論研究における最近の潮流を解説する。前述したように、行動ファイナンスと伝統的なファイナンス理論の融合が進められていることを踏まえ、両者がどう組み合わせられて発展しているかを紹介する。具体的には、まず、プロスペクト理論とCAPM (Capital Asset Pricing Model) の融合により投機的な行動を選択するメカニズムを説明した研究を紹介する。前述したように、プロスペクト理論では、過去の利益水準を取り戻すためにリスクの高い投資を行うが、この目標利益水準が高いほど投資家が貪欲であると考え、リスク量やレバレッジに与える影響を考察している。一方、プロスペクト理論のうち「大穴に賭ける心理」に着目し、これをCAPMと融合することで、必ずしも経済合理的でない金融商品が売れることを説明した研究も登場している。逆に、プロスペクト理論のうち「損切りできない心理」に着目し、損切りを躊躇するメカニズムをリアルオプションとの融合により説明した研究もある。また、時間非整合割引率とリアルオプションを融合することで、低金利環境下で駆け込み投資が発生し信用リスクが拡大することを説明した研究もみられる。このほかには、代表性バイアスとアセット・プライシングを融合することで、投資家のセンチメントや市場価格の歪みを説明した研究を紹介する。

次に4節では、行動ファイナンスの実用化へ向けた取組みについて解説する。まず、バリュー・アット・リスクにプロスペクト理論を応用することで、損失分布がファット・テールになりうることを示した研究を紹介する。これは投資家の行動が原因で損失が拡大する「人為的リスク」と考えられ、3節における損切りの躊躇と類似している。また、オプションの価格付け理論にプロスペクト理論を応用することで、ブラック＝ショールズ式を拡張する研究や、投資家の価値判断の基準点をオプション価格から推計する研究が行われている。また、経済合理性のない仕組みデリバティブが売れる理由をプロスペクト理論で説明した研究もみられる。これは3節の議論とも関係する。その他、市場分析への応用例として、投資家のセンチメントや群集行動を把握する研究や金融政策と投資家のセンチメントとの関係に関する研究などを紹介する。

5節では一連のサーベ이를踏まえつつ、行動ファイナンスという研究分野の有効性と限界について考察する。最後に6節で本稿をまとめる。

本稿の構成は以上に述べたとおりであるが、読者の知識や関心によって読み方を変えることができる。例えば、2節は、3節以後を読むための予備知識をまとめたものであるため、行動ファイナンスになじみのある読者は3節以後から読み進めることが可能である。また、3節以降は、各パートを独立して読めるようにしているため、1節と2節を読んで興味を持った研究を選択して読むことが可能である。この際、各研究の概要を3節と4節の冒頭に一覧表としてまとめているのでそれを参照されたい。逆に、研究の詳細ではなく、行動ファイナンス全体の流れを知りたい読者は、1節と2節を読んだ後、5節へ読み進むこともできる。

2. 行動ファイナンスとは

2 節では、行動ファイナンスの基本的な考え方を概説する。はじめに、伝統的なファイナンス理論と行動ファイナンスの違いを整理すると、伝統的なファイナンス理論では、「投資家は新しい情報を正確に処理し価格に反映させる」ということが前提⁵となっている。すなわち、①新しい情報が得られた際に、確率 P を正確に更新し、②その確率のもとで効用 U の期待値を最大化する。

$$\max_x E^P[U(x)]. \quad (1)$$

これに対し、行動ファイナンスの理論では、①と②のどちらかが成立しない場合を扱う（表 1）。例えば、本節で扱うものの中では、①が成立しないものとして代表性バイアスが挙げられる。これは、良いことが続けて起こるとまた良いことが起きると錯覚する心理であり、確率が正確に更新されない例となっている。また、②が成立しないものとして時間非整合割引率がある。これは、将来のことより現在の関心事を重視してしまう心理を表すもので、現在と将来の割引効用が異なることから近視眼的な行動が選択される例である。①と②の両方が成立しないものとしてはプロスペクト理論がある。これは、損失発生時に損切りできず大穴に賭けてしまうことを表すものであり、損切りできないという点の背景には従来の理論と異なる効用があり、大穴に賭けてしまうという点では正確な確率が使われていない。本節ではこれら以外に、投資家の群集行動や自信過剰も扱う。

表 1 行動ファイナンスの代表的な概念

(1) 損失回避バイアスとプロスペクト理論
損失拡大時に損切りできず大穴に賭けてしまう心理。損切りできない心理を S 字型効用関数、大穴に賭けてしまう心理を確率ウエイト関数で表現する。ある損失額（基準点；reference point）を超えるとリスク回避型からリスク選好型に変わる。
(2) 代表性バイアスとベイズの定理
良いことが続けて起こるとまた良いことが起きると期待する心理。ベイズの定理等で表現。地価が上昇し続けると次第に土地神話が形成される現象はこれに相当。
(3) 近視眼的行動と時間非整合割引率
将来のことより現在の関心事を重視してしまう心理。時間選好性。近視眼的な行動が選択されることの説明に使われる。
(4) 投資家の群集行動および自信過剰
人が購入した物を欲しくなる心理。株価がファンダメンタルと乖離して上昇することの説明に使われる。バブル末期に未経験者までが株を買う現象はこれに相当。

5 これを効率的市場仮説（efficient market hypothesis; EMH）と呼ぶ。

(1) 損失回避バイアスとプロスペクト理論

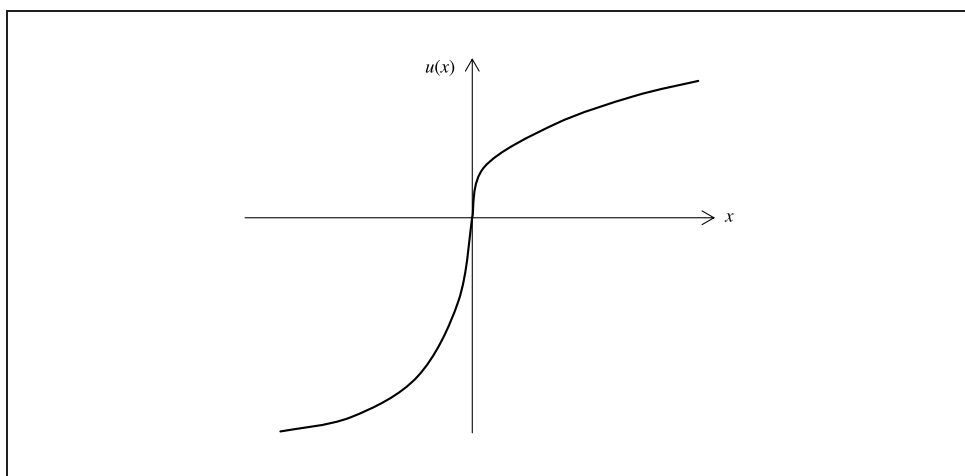
プロスペクト理論は、Kahneman and Tversky [1979] により提案され、Kahneman and Tversky [1992] により精緻化された理論である。プロスペクトとは予想とか見込みという意味であるが、これは、投資家が将来に関する主観的な予想に基づき自らにとっての価値を最大化するように行動する、という本理論の本質的な特徴を反映している。このような特徴には、伝統的な期待効用理論と共通する面もあるが、価値の感じ方（効用関数の形状）や予想の立て方（主観的確率の設定）において心理学的な効果などが勘案されている点で新しいといえる。その結果、例えば、高水準であった過去の利益を取り戻すためにリスクの高い投資を行うといったことなどが、プロスペクト理論によって説明可能となる。

同理論の興味深い点は、会計上の損益とは異なる心理的な損益認識（mental accounting）により投資家の行動を説明している点である。すなわち、会計上の利益はプラスであっても、高水準であった過去の利益を取り戻したいと考える投資家は、心理的な損失を抱えていると考える。この心理的な損失により損切りできない心理をS字型効用関数で表し、それを取り戻すために大穴に賭けてしまう心理を確率ウェイト関数で表現する。

Ⅰ. S字型効用関数

S字型効用関数は、図1に示したように、投資家が「心理的な損失」を抱えるとリスク回避型からリスク選好型に変わり、損切りできなくなることを表現したものである。従来の効用関数と異なる点は、①心理的な損失を感じる分岐点（ $x = 0$ ）が設定されており、②心理的な損益（ x ）がプラスの領域では従来通り凹型効用である一方、マイナスの領域では凸型効用となっている点である。凹型と凸型を組み合わせ

図1 S字型効用関数



わせた形が S 字に似ていることから S 字型効用関数と呼ばれる。心理的に損失を感じる分岐点は基準点 (reference point) と呼ばれ、プロスペクト理論で重要な役割を果たす。S 字型効用関数の代表例としては、Kahneman and Tversky [1979] により提案された (2) 式のようなものがある⁶。

$$u(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0 \quad (0 < \alpha < 1), \\ -\lambda(-x)^\beta, & x < 0 \quad (0 < \beta < 1, \lambda > 1). \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 x は基準点からの損益を表している。また、 α はリスク回避度を表すパラメータであり、これが大きいほどリスク回避的であることを意味する。 β はリスク選好度を表すパラメータであり、これが大きいほど損失時にリスク選好的な行動を選択する。 λ は、損失回避度を表すパラメータであり、 $\lambda > 1$ との条件は利益より損失の方を拡大解釈することを表す。

ロ. 基準点 (reference point)

基準点を資産の購入価格 (購入時の利回り) と設定すれば、心理的な損益 x は会計上の損益と一致する。一方、基準点を値上がり時の最高値と設定すれば、最高値を超えないと利益を感じないため、最高値で売り抜けられなかったことが尾を引いてさらなる利益を追求する投資家を表現できる⁷。最近では、この基準点が高いほど投資家の貪欲さが強いという考え方を CAPM に組み込んだ研究もある。この点は 3 節 (1) で紹介する。また、4 節 (3) では市場の価格から投資家の基準点を推計する研究を紹介する。

ハ. 確率ウエイト関数

次に、損失を取り戻すために大穴に賭けてしまう心理を、確率ウエイト関数で表現する。例えば、宝くじのように、期待利得より高い購入価格が設定された商品を購入してしまうのはこの事例と考えられる。実際にはわずかな確率でしか起きない大きな利益に対して、主観的な確率が大きく見積もられることを表現する。

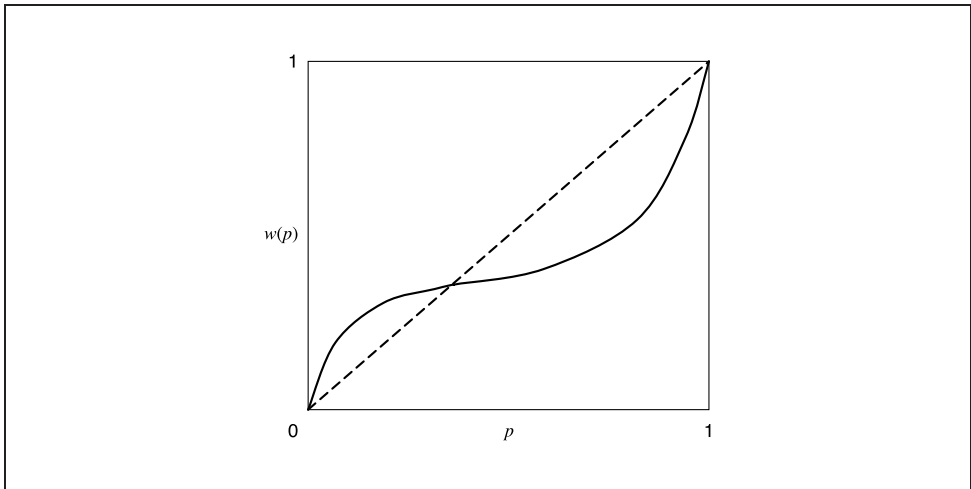
図 2 は、Kahneman and Tversky [1979] により提案された確率ウエイト関数 (3) 式を図示したものである⁸。横軸が実際の確率を表し、縦軸が投資家の主観的な確率を

6 同論文では、複数の設問からなるアンケート調査に基づき、効用関数のパラメータを $\alpha = \beta = 0.88$ 、 $\lambda = 2.25$ と推定している。アンケート調査の内容は、本稿の 2 節 (2) や (3) で説明するような選択問題と類似しているののでそちらを参照されたい。なお、同論文では、もともと $\alpha = \beta$ としているが、3 節以後で紹介する研究を含め、多くの場合 α と β を区別するため、本稿でもこの標記を用いる。

7 基準点が高く設定される例として、ヘッジファンドの成功報酬の 1 つであるハイ・ウォーター・マーク (high-water mark provision) を挙げることができる。ハイ・ウォーター・マークが設定されているファンドでは、持分の価格が過去の最高値を上回らない限り、成功報酬は支払われない。このため、この水準を上回るように積極的な投資が行われる。

8 同論文では、複数の設問からなるアンケート調査に基づき確率ウエイト関数のパラメータを $\gamma = 0.65$ と推定している (詳細は脚注 6 参照)。この確率ウエイト関数を用いた期待効用は、 $E[U(x)] \equiv \int U(x) w'(p(x)) dp(x)$ と定義される。

図2 確率ウェイト関数



備考：横軸は実際の確率、縦軸は投資家の主観的な確率を表す。

表している。実際の確率 p が小さい領域ではグラフが45度線を上回っている。これはわずかな確率でしか起こらない事象が主観的な確率で大きく見積もられていることを意味する。逆に、実際の確率が大きい領域ではグラフが45度線を下回り、主観的な確率が小さく見積もられていることがわかる。

$$w(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{1/\gamma}} \quad (\gamma > 0; 0 \leq p \leq 1). \quad (3)$$

確率ウェイト関数を用いると、前述したように、期待値より高い購入価格が設定された商品を購入してしまう心理を表現できる。最近、こうした点をCAPMに取り入れた研究が登場しており3節(2)で紹介する。また、これと関連して4節(4)では、必ずしも経済合理的でない仕組みデリバティブが売れる背景を説明した研究を紹介する。

(2) 代表性バイアスとベイズの定理

代表性バイアスとは、典型的な特徴や固定観念に判断が引きずられてしまう心理を表現するものであり、例えば、ある場所で良いことが続けて起こるとその後もその場所では良いことが起こると感じてしまうような心理を表すことに使われる。このような固定観念や典型的な特徴を代表性と呼び、これに判断が引きずられることを代表性バイアスと呼ぶ。この性質は、後述するように、ベイズの定理や事後確率等で表現される。

イ. 代表性バイアスの具体例⁹

まず、第1の例として、人の職業を予想する際のことを考える。こうした際に、「セールスマンは話が上手い」とか「図書館の司書は内気で人助けが好き」といった固定観念が影響することが少なくない。例えば、Aさんが話の上手い人だとすると、「セールスマンは話が上手い」という固定観念に判断が引きずられ、Aさんはセールスマンである確率が高いと考えてしまうことがある。こうした思い込みは代表性バイアスの一例である。

また、第2の例としてコイン投げをした場合を考える。この際、次の2系列のうち起こりやすいのはどちらかという質問を考えてみる。

系列1：○○○×××、系列2：○×○××○

Kahneman and Riepe [1998]によれば、多くの人は、系列1をシステマティック、系列2をランダムだと思い込んでいるため、後者の方が起こりやすいと回答する。しかし、実際には、どちらの発生確率も $0.5^6 = 0.0156$ であり、典型的な配列である系列2に判断が引きずられていることがわかる。こうした固定観念にとらわれることも代表性バイアスの一例である。

ロ. ベイズの定理との関係

代表性バイアスの全てをベイズの定理として理解できるわけではないが、第1の例のような場合はベイズの定理として理解することが可能であり、3節以降のモデリングで利用される。

例えば、第1の例において、 A = セールスマンの集合、 B = 話が上手い人の集合と考えた場合、第1の例の誤りは、①話の上手い人がセールスマンである確率 $P(A | B)$ と、②セールスマンの中で話が上手い人の確率 $P(B | A)$ が等しいと感じてしまっている点にある。しかし、ベイズの定理によればこれらの確率は一般に等しくなく、

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)}, \quad (4)$$

という関係がある。代表性バイアスとは、(4)式右辺の $P(B | A)$ 、すなわち、セールスマンの中で話が上手い人の確率に判断が引きずられ、基準率である $P(A)$ や $P(B)$ が相対的に軽視されるため、話が上手い人がセールスマンである確率 $P(A | B)$ と $P(B | A)$ が混同されると理解できる。

これと同様に、投資判断に使われる確率は、投資家の固定観念や思い込みにより一般的に異なることがわかる。近年、市場に参加する投資家が互いに異なる確率を想定しているとする、市場の価格分布が歪むことを説明する研究が進んでいる。こ

9 例を作成するに当たって角田 [2004]、俊野 [2004] を参考にした。

うした研究は、「異質な信念 (heterogeneous belief) を持つ投資家の理論」と呼ばれ 3 節(5)で紹介する。

(3) 近視眼的行動と時間非整合割引率

時間非整合割引率とは「将来のことより現在の関心事を重視してしまう心理」を表すものであり、投資家の近視眼的な行動を表現する際などに使われる。この点を理解するために Thaler [1981] の代表的な例を考えてみよう。

イ. 時間非整合割引率の具体例¹⁰

まず、現在、お腹が空いている状況を想像する。この際、第 1 の選択として、次の 2 つを考える。

A：今日、りんごを 1 個もらう。

B：明日、りんごを 2 個もらう。

さらに、第 2 の選択として以下の 2 つを考える。

C：10 年後の今日、りんごを 1 個もらう。

D：10 年後の明日、りんごを 2 個もらう。

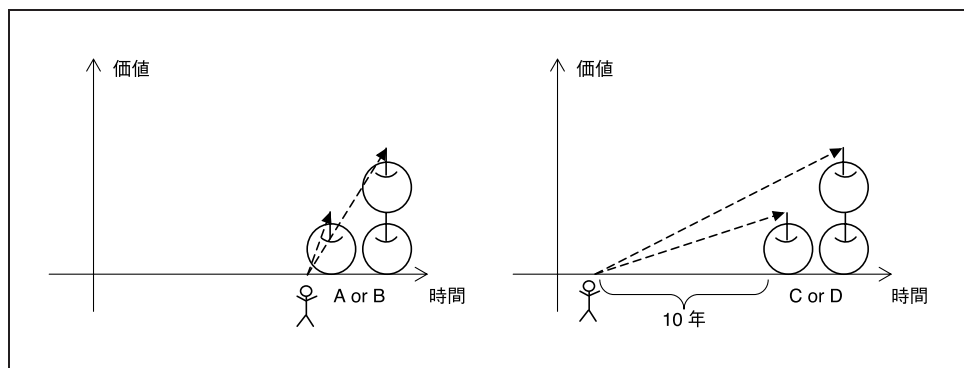
Thaler [1981] によれば、多くの人は、第 1 の選択肢では A と回答する一方、第 2 の選択肢では D と回答することが報告されている。選択肢 1 では、現在お腹が空いているため、明日の 2 個より今日の 1 個の方が価値が高く感じられる。つまりこの 1 日の時間割引率は非常に高い。一方、10 年後のことを考えている選択肢 2 では、10 年後にお腹が空いているかどうかはわからず中立的に判断するため、1 日待つて 2 個もらう方が価値は高いと考える。すなわち 10 年後の 1 日の時間割引率はそれほど高くない。このように、現在と将来で割引率が変わり、それにより判断も変わってしまうことは時間非整合割引率の典型的な例である。図 3 は、こうした状況を直観的に図示したものである。りんごを近くから眺めると手前のりんごが大きく見え（左図）、遠くから眺めると後ろの方が大きく見える（右図）ことは、相対的な価値の高低が評価時点に依存することに対応している。

ロ. 双曲型割引率

このように、近い将来と遠い将来で割引率が異なる時、その割引率を時間非整合割引率と呼ぶ。特に、上述した例のように、近視眼的な行動を表現するには、近い将来に対し大きな割引率を、遠い将来に対し小さな割引率を適用することになり、そうした割引率の代表的なものとしては双曲型割引率 (hyperbolic discount rate)

10 例を作成するに当たって、多田 [2003]、友野 [2006] を参考にした。

図3 近視眼的な時間割引率



がある。これは、割引関数の形が双曲関数となっているもので、心理学の分野において Ainslie [1992] や Lowenstein and Prelec [1992] などにより導入され、Laibson [1997] や Harris and Laibson [2003] などにより経済学の分野に応用されている。これらの論文では、投資家の最適消費問題に対して双曲型割引率が応用されている。一方、伝統的なファイナンス理論で用いられるような割引率はどの時点でも均一な割引率が用いられることから時間整合割引率と呼ばれ、割引関数の形は指数関数となる。

3 節(4)で紹介する Grenadier and Wang [2007] では、現在と将来で割引率が変化する現象を世代の交代として説明している。すなわち、ある企業の経営者がプロジェクトの実行時期を考えているとすると、今日か明日かの選択に関しては真剣に検討する一方、10年後の今日か明日かの選択に関しては経営者が交代した後の出来事であるためそれほど真剣に検討せず、同じ問題に対しても判断が変わることがある。こうした現象は時間非整合割引率で表現される。3 節(4)では、このモデルの拡張として、低金利環境下で駆け込み投資が発生し信用リスクが高まるメカニズムを考察した研究も紹介する。

(4) 投資家の群集行動および自信過剰

投資家の群集行動とは、他人が購入したものを欲しくなる心理を表すものであり、株価がファンダメンタルから乖離して上昇することの説明などに使われる。また、投資家の自信過剰とは、客観的なデータが示す以上に強い自信を抱く心理を表すものであり、同様に資産価格バブルの説明などに使われる。これらの現象については、前述した現象と比較すると、まだ標準的なモデルが確立されていない。これは、群集行動や自信過剰の背景に合理的な根拠を見出すのが容易でないことに関係していると考えられる。

まず、群集行動に関しては、ファイナンス理論の立場からその背景を説明するモデルは多くない¹¹。このため、例えば資産バブルの過程を説明するうえで群集行動の考え方が適用されるのは、合理的な根拠の無くなったバブル末期の状況を説明する場合である。一方、それなりの根拠がある初期段階を説明する際には代表性バイアスが使われる。地価や株価が上がり続けると今後もこの傾向が続くだろうと考えるのがこの例である。これに対し、バブル末期には、全くの未経験者までが他人の行動につられて株を買い始める。こうした現象は群集行動として理解される。本稿では、群集行動のメカニズムを説明する研究ではないが、群集行動の有無を市場データから把握する試みを4節(6)で紹介する。

他方、自信過剰に関しては、これを説明する標準的なモデルが存在するわけではないが、Daniel, Hirshleifer, and Subrahmanyam [1998, 2001] のモデルが有名である。これは、損失が発生した場合は「運が悪かった」と考える一方で、利益が出た場合には「自分の実力である」と思うことを繰り返すと、主観的な確率が歪み、自信過剰に陥ることを説明している。

3. 理論研究の潮流

3節では、理論研究における最近の潮流を解説する。行動ファイナンスと伝統的なファイナンス理論の融合が進められていることを踏まえ、両者がどう組み合わせられて発展しているかという視点で紹介を行う(表2)。

表2 理論研究の潮流

(1) プロスペクト理論とCAPM：投機的な行動を選択する理由 Jin and Zhou [2008, 2010] など。プロスペクト理論の基準点により投資家の貪欲さを表現している。
(2) プロスペクト理論とCAPM：経済合理的でない金融商品が売れる理由 Barberis and Huang [2008]。確率ウエイト関数に注目。宝くじのように期待値より高い購入価格が設定された金融商品が売れるメカニズムを表現。
(3) プロスペクト理論とリアルオプション：損切りを躊躇する理由 Kyle, Yang, and Xiong [2006]。撤退オプションに「損切りの躊躇」を追加。
(4) 時間非整合割引率とリアルオプション：近視眼的な投資が行われる理由 Grenadier and Wang [2007]。低金利環境下において駆込み投資が発生し信用リスクが拡大することを説明した山田 [2010] を紹介。
(5) 代表性バイアスとアセット・プライシング：市場の価格が歪む理由 Shefrin [2005, 2008]、Shefrin and Statman [2002]。価格付けに使われる割引率が歪む背景を説明。

11 一方、ゲーム理論の立場から群集行動のメカニズムを説明したものとして、情報カスケードや合理的群集行動といった理論がある。これらに関しては Brunnermeier [2001] 5章、6章を参照。

(1) プロスペクト理論と CAPM：投機的な行動を選択する理由

ここでは、プロスペクト理論と CAPM の融合により、投機的な投資行動を選択するメカニズムを説明した研究を紹介する。まず、Barberis and Xiong [2009] を例に取り、プロスペクト理論に従う投資家がどのようなポートフォリオ選択をするか解説する。次に、投資家の基準点を明示的に取り入れ、これにより投資家の貪欲さを表現した Jin and Zhou [2008, 2010] を解説する。

イ．Barberis and Xiong [2009] の概要

(イ) モデルの設定

モデルの設定は、基本的に従来の CAPM と同じであるが、1 つだけ異なる点として、投資家の効用関数が 2 次関数ではなくプロスペクト理論の効用関数に従っている点がある。従来の CAPM と同様、市場には無リスク資産とリスク資産が存在し、リスク資産の市場価格 S_t は、2 項ツリーで表現されているとする（図 4 左図）。投資家は、初期時点の富 X_0 をリスク資産と無リスク資産の 2 資産へ投資することで、最終的な富 X_T の期待効用 $E[u(X_T - X_0)]$ を最大化する。ここでの効用関数 u は前掲 (2) 式で表されるようなプロスペクト理論に基づく S 字型効用関数が特徴的である。投資家は、リスク資産の価格変動に応じて同資産への投資比率 θ_t を変えることで最適なポートフォリオを選択する（図 4 右図）。

(ロ) 分析結果と含意

Barberis and Xiong [2009] は、上記モデルのもとでリスク資産への投資比率 θ_t を計算し、通常の 2 次効用に基づく CAPM の結果と比較を行っている（表 3）。まず、通常の CAPM では、価格上昇時にはリスク資産を増加させ、価格があまり変化しな

図 4 資産価格の変動とポートフォリオ選択

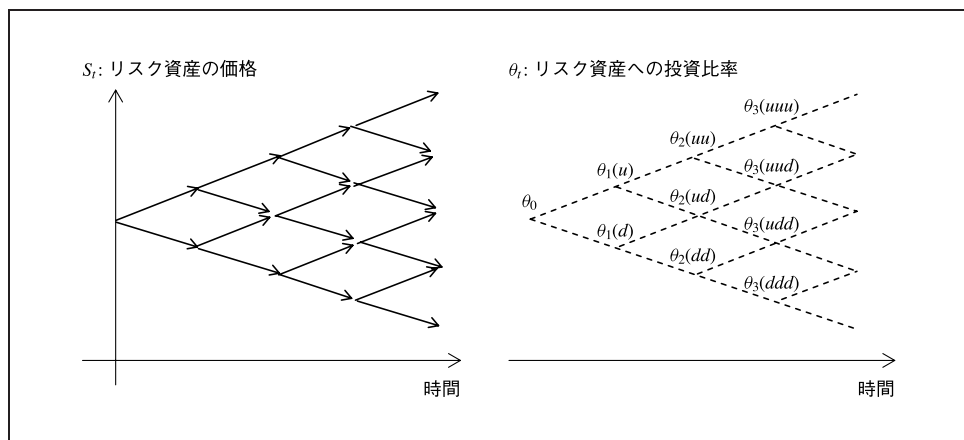


表 3 プロスペクト理論におけるポートフォリオ選択

リスク資産の価格	通常の CAPM	プロスペクト理論の CAPM
基準値から相応に上昇 ($S_t \uparrow$)	リスク資産を増加 ($\theta_t \uparrow$)	リスク資産を増加 ($\theta_t \uparrow$)
基準値付近で推移 ($S_t \rightarrow$)	リスク資産は一定 ($\theta_t \rightarrow$)	リスク資産を減少 ($\theta_t \downarrow$)
基準値から相応に下落 ($S_t \downarrow$)	リスク資産を減少 ($\theta_t \downarrow$)	リスク資産を増加 ($\theta_t \uparrow$)

い場合にはリスク資産をそれほど増減させず、価格下落時にはリスク資産を減少させるという結果になっている。これに対しプロスペクト理論（S 字型効用関数）の場合は、基準値から価格が相応に上昇した際にリスク資産を増加させる点で共通しているが、その他の場合には異なる結果となっている。まず、価格が基準値付近の場合は、リスク資産を減少させる傾向にある。この現象は、大きな利益は狙えないが、確実な利益が獲得できる場合はそれを選好するというブレーク・イーブン効果（break-even effect）を表すものと考えられ、詳細は3節(3)で説明する。一方、基準値から価格が相応に下落した際には、損失を取り戻すためにリスク資産への投資を増加させる点で通常の CAPM の場合と大きく異なっている。

ロ. Jin and Zhou [2008, 2010] の概要

（イ）モデルの設定

上述の Barberis and Xiong [2009] では、投資家の効用関数にプロスペクト理論を適用するとポートフォリオ選択がどのように変化するか考察している。しかし、投資家の基準点を初期時点の富 X_0 と設定しているため、投資判断の基になる投資家の損益認識は会計上の損益 $X_T - X_0$ と一致している。これに対し、Jin and Zhou [2008, 2010] は、初期の富 X_0 とは異なる基準点 B を用いて投資家の心理的な損益 $X_T - B$ を記述している。例えば、投資家の報酬体系が会計上の損益に比例するのではなく B という目標値¹²を超えないと報酬が貰えないようなものであったとする。こうした場合、投資家は、 $X_T - B$ を投資判断の基準とするだろう。Jin and Zhou [2008, 2010] ではこのような投資家を想定し、投資家のポートフォリオ選択の特徴を考察している。特にこの基準点 B が高いほど、ハイリターンを狙って貪欲な投資を行うことが予想される。このように投資家が貪欲になった時に選択されるポートフォリオのリスク特性について調べている。

（ロ）分析結果と含意

投資家が選択したポートフォリオの最終富 X_T^* のリスク特性を調べるために、基準点 B を用いて、心理的なレバレッジ $L(X_T^*)$ 、潜在的な損失額 $I(X_T^*)$ を以下のよう

12 例えば、この目標値が過去の最高値として設定した報酬体系としては、ハイ・ウォーター・マーク（High-Water Mark Provision）がある。ハイ・ウォーター・マークが設定されているファンドでは、持分の価格が過去の最高値を上回らない限り、成功報酬は支払われない。

まず、心理的なレバレッジ $L(X_T^*)$ は、基準点からみた心理的な損失額が投資家に「負債を抱えた」と感じさせるとの考えに基づき、その「心理的な負債」と初期富 X_0 の比率として定義される。同様に、潜在的な損失額 $l(X_T^*)$ は、将来発生しうる心理的な損失額の期待値と初期富 X_0 の比率として定義される。

Jin and Zhou [2008, 2010] は、これらの概念を使って、投資家の貪欲さが大きくなる（基準点が高まる）ほど、心理的なレバレッジや潜在的な損失額は際限なく大きくなること、すなわち、

$$L(X_T^*) \rightarrow \infty \quad (B \rightarrow \infty), \quad l(X_T^*) \rightarrow \infty \quad (B \rightarrow \infty), \quad (5)$$

であることを示している。それにもかかわらず、基準点対比でプラスの利益を取り戻す確率

$$P(X_T^* > B) > 0 \quad (B \rightarrow \infty), \quad (6)$$

はゼロにはならず残ることが示される。つまりわずかな確率ではあるが利益が出るチャンスは消えないことを意味する。このため確率ウエイト関数の置き方次第では、投資家が大穴を狙う可能性があることを指摘している。逆に、(5) 式を読み替えれば、心理的なレバレッジや潜在的な損失額に上限が設定された投資家は、貪欲さがある一定値より大きくならないことを意味する。このため、投資家の基準点が大きくならないようインセンティブ付けすることやペナルティ（規制）を設定することが投資家の貪欲さを抑制するうえで効果的であると指摘している。

以上のようにプロスペクト理論の基準点は投資家の心理を把握するうえで重要である。これに関連して 4 節(3)では投資家の基準点をオプション価格から推計した研究を紹介する。

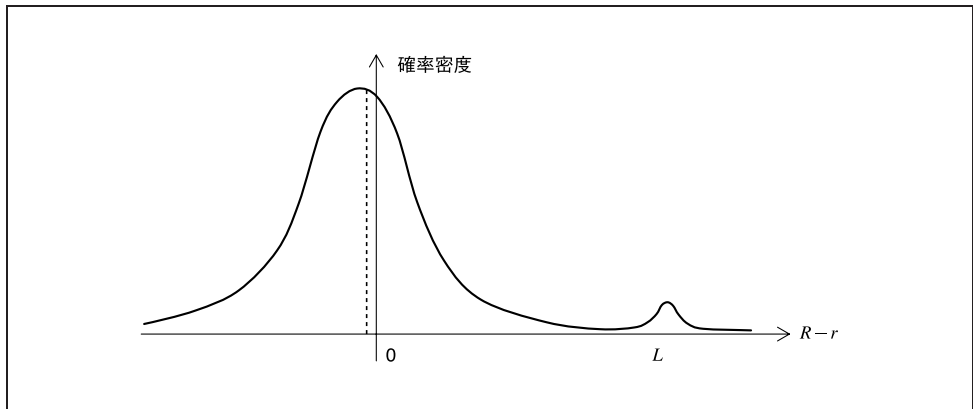
(2) プロスペクト理論と CAPM：経済合理的でない商品が売れる理由

3 節(1)では、プロスペクト理論の S 字型効用関数、特に基準点に着目して投資家の行動を考察した。ここでは、確率ウエイト関数の方に着目した Barberis and Huang [2008] の研究を紹介する。確率ウエイト関数は「大穴に賭ける心理」を表現するものであり、典型的な例として、宝くじを買う心理などを挙げることができる。ここでは、この考え方を金融商品の場合に応用する。

イ. モデルの設定

3 節(1)では多期間における投資家の問題を考えたが、ここでは 1 期間の CAPM を考える ($t = 0, T$)。通常の CAPM ではよく知られたように、(a) 市場に参加する投資家の最適ポートフォリオは投資家のリスク回避度等にかかわらず必ず同じものに

図5 リスク資産の損益分布：歪度の高い金融商品が含まれる場合



なるという分離定理が成立し、(b)そのポートフォリオの期待超過収益率は正になることが知られている。

一方、プロスペクト理論の効用関数に従う投資家のCAPMの場合には、市場に存在するリスク資産の分布次第で、(a)と(b)が成立せず、特に以下に示す宝くじのような分布を持つリスク資産が存在する場合には、期待超過収益率が負のポートフォリオを保有することがあるという興味深い結果を Barberis and Huang [2008] は示している。以下ではそれを説明する。

まず、市場には n 個のリスク資産が存在し、1番目から $n-1$ 番目までのリスク資産の収益分布は正規分布に従い、 n 番目のリスク資産だけ2項分布

$$R_n = \begin{cases} L, & \text{確率 } q, \\ 0, & \text{確率 } 1-q, \end{cases} \quad (7)$$

に従っている場合を考える。これは、宝くじのような金融商品を想定しており、 L は、宝くじでいえば1等の当選金額に対応し、 q はその当選確率を表す。 L を大きく q を小さくするほど分布の裾が厚くなり分布の歪度が高まる。この際、市場ポートフォリオの損益分布はおおよそ図5のような形をしている。わずかな確率で巨額な利益 L が得られる一方で期待超過収益率はマイナスとなっている。

ロ. 分析結果と含意

Barberis and Huang [2008] は、 q が小さく L が大きい（歪度の高い）金融商品が市場に存在する場合には、通常のCAPMで成立する(a)、(b)が成立せず、ある投資家は、期待超過収益率がマイナスとなっていて購入価格が割高なポートフォリオを保有する一方で、他方の投資家は、その逆のポートフォリオを保有する。前者が宝くじの買い手で後者が売り手のような状況が生まれる。

この結果に対して Barberis and Huang [2008] は、以下のような解釈を与えている。まず、宝くじのような商品 R の保有量に関して投資家の効用関数がどのように変化

表 4 プロスペクト理論における均衡ポートフォリオ

市場の性質	通常の CAPM	プロスペクト理論
歪度が大きい商品が含まれる	(a) 同じポートフォリオを保有して均衡 (b) ポートフォリオの期待超過収益率はプラス	(a) 異なるポートフォリオを保有して均衡（宝くじを買う投資家と売る投資家） (b) 買う側のポートフォリオの期待超過収益率はマイナス
歪度が比較的小さい商品のみ		(a) 投資家は同じポートフォリオを保有して均衡 (b) ポートフォリオの期待超過収益率はプラス

するか考察すると、2つの極大値を持つことを示している。すなわち、① R をある一定量保有した場合と、② R をある一定量売った場合である。

まず、①の理由を考えてみる。 R を少しだけ保有したことを考えると、ポートフォリオの裾が少し長くなりリスク分散を妨げるため効用は減少する。しかし、 R の保有量を増やすと 1 等が当選した時の金額が大きくなるため、投資家に大穴を狙うインセンティブが働き、これがリスク分散を妨げる効果を大きく打ち消すため効用関数は増加する。さらに R を多く保有すると、 R の負の期待収益が大きくなることから効用は減少する。

一方、②の場合は、 R を売ることで、確実な利益が入る一方、よほどのことがない限り損失は発生しない。大きな利益は狙えないが、確実な利益が入る場合、それを選好するというブレーク・イーブン効果が働くことが知られている¹³。この効果により R をある一定量売ることが効用を最大化する。ここで、あまり大量に売りすぎると、巨額の損失を抱える可能性が出てくるため効用は減少することに注意しよう。

以上のように、投資家の効用は R の保有量に関して 2つの極大値を取り各投資家の主體的均衡は 2つ存在することがわかる。Barberis and Huang [2008] はさらに数学的な均衡分析を進め、ある一定の投資家が①のポートフォリオを保有し、その他の投資家が②のポートフォリオを保有することを示している。ただし、 q が大きく歪度が小さい金融商品しか存在しない場合には、通常の CAPM と同様に投資家は同じポートフォリオを保有して均衡し、期待超過収益率がマイナスとならないことも示している。以上の結果をまとめたものが表 4 である。

このように、プロスペクト理論を使うと、期待超過収益率がマイナスの金融商品でも売れてしまうことを説明できる。4 節(4)では、これと関連して、経済合理的ではない仕組みデリバティブが売れる理由について説明した研究を紹介する。

13 ブレーク・イーブン効果は、3 節(1)でも示される現象であり、詳細は、3 節(3)および補論 1 において解説する。

(3) プロスペクト理論とリアルオプション：損切りを躊躇する理由

3節(1)、(2)では、CAPMにプロスペクト理論を融合することで投資家のポートフォリオ選択にどのような変化が生じるか説明した。ここでは、企業の投資配分に関する議論ではなく、投資からの撤退行動に着目した研究を紹介する。具体的には、リアルオプションにプロスペクト理論を融合することにより損切りを躊躇するメカニズムを説明した研究を紹介する。Kyle, Yang, and Xiong [2006] は、リアルオプションの中でも、撤退のタイミングを考察する撤退オプションに対してプロスペクト理論を導入し、この現象を説明している。

イ. モデルの設定

モデルの基本的な設定は、従来の撤退オプションのものとほぼ同じであるが、投資家の効用関数がプロスペクト理論の効用関数（S字型効用関数）に従っている点異なる。まず、従来の撤退オプションのモデル設定と同様、ある企業が既にプロジェクトを行っている状況を考える。このプロジェクトには初期費用 K_0 が掛かっており継続するためには単位時間当たり c のランニングコストが必要であるとする。このため、時刻 t までに使われた総費用は、

$$K_t = K_0 + ct, \quad (8)$$

となる。また、時刻 t におけるプロジェクトの価値 X_t は不確実でありブラウン運動

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (9)$$

に従っているとする（図6）。 μ はトレンド、 σ はボラティリティを表す。

この際、プロジェクトの価値 X_t と総費用 K_t を比較して、最適な撤退時刻および撤退のトリガー条件を決定する問題が撤退オプションの理論である。企業は最適な時刻 τ ¹⁴でプロジェクトから撤退する選択肢（オプション）を持ちこの時刻を最適に選択することで期待効用

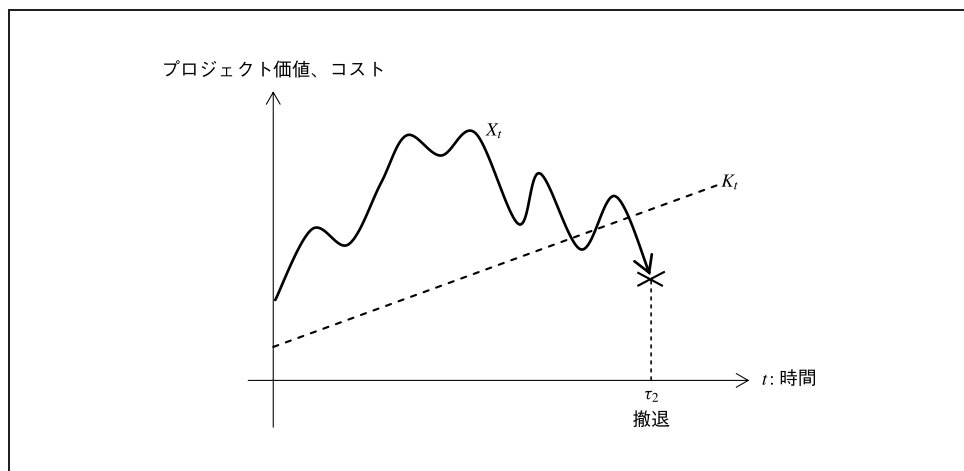
$$V_t \equiv \max_{\tau} E[u(X_{t+\tau} - K_{t+\tau})], \quad (10)$$

を最大化する¹⁵。この際、 u については、2つの指数効用関数を接合したS字型効用関数を用いる。

14 より厳密には、企業は最適な時刻 τ_2 でプロジェクトから撤退するオプションを持つが、これ以外に強制的に撤退させられることもあり、その時刻を τ_1 で表現している。 τ_1 は強度 λ のポアソン時刻とする。企業はこれらの最小時刻 $\tau = \min\{\tau_1, \tau_2\}$ で撤退する。

15 本研究では簡単化のため時間に関する割引率が捨象されている。

図6 撤退オプション：最適な撤退のタイミング



$$u_{t+\tau}(Y) = \begin{cases} \phi_1(1 - e^{-\gamma_1 Y}), & Y \geq 0, \\ \phi_2(e^{-\gamma_2 Y} - 1), & Y < 0, \end{cases} \quad (11)$$

この効用関数は、前掲の (2) 式の関数形と同じ効果を持つ¹⁶。

ロ. 分析結果と含意

Kyle, Yang, and Xiong [2006] は、通常の指数型効用¹⁷の場合と結果を比較している。表5に示すように、プロジェクトのシャープレシオ $\nu = (\mu - r)/\sigma^2$ により投資家の行動が異なることを示している。

まず、通常の指数型効用の場合、プロジェクトのシャープレシオが投資家のリスク回避度 ($\gamma_1/2$) より高いかどうかにより撤退が決まる。すなわち、高い場合 ($\nu > \gamma_1/2$) にはシャープレシオがこの条件を満たし続ける限り撤退せず、低い場合 ($\nu < \gamma_1/2$) にはその時点で撤退する。

一方、プロスペクト理論では、シャープレシオが高い場合 ($\nu > \gamma_1/2$) でも、プロジェクトの現在価値 V_0 とブレイク・イーブン時の効用 $u(0)$ の関係次第では撤退してしまうことがある。例えば、① V_0 が $u(0)$ より高い場合には、指数効用の場合と同様に撤退することはないが、② V_0 が $u(0)$ より低い場合には、ブレイク・イーブンとなった段階 ($X = K$) で早めにプロジェクトを撤退してしまう。これは、大きな利益を狙えるわけではないが、確実に損益ゼロとできる場合はそれを選好するというブレイク・イーブン効果を表すものである（補論1）。

16 なお、本研究では、確率ウェイト関数はいずれ、実確率による期待値を用いている。

17 (11) 式のうち $Y > 0$ の領域における効用関数を $Y < 0$ の領域にもそのまま適用すれば、伝統的な投資理論で用いられている指数型効用関数となる。

表5 プロスペクト理論における撤退のタイミング

v : シャープレシオ	指数型 効用関数	プロスペクト理論 (S 字型効用関数)
高: $v \geq \gamma_1/2$	撤退しない	① $V_0 > u(0)$ なら撤退しない ② $V_0 < u(0)$ ならブレーク・イーブン点 ($X = K$) では撤退してしまう (ブレーク・イーブン効果)
低: $-\gamma_2/2 \leq v < \gamma_1/2$	撤退する	③ プラスの利益 ($X \geq K$) なら撤退 ④ マイナスの利益 ($X < K$) ならブレーク・イー ブン $X = K$ まで撤退しない (損切りの躊躇)
悪: $v < -\gamma_2/2$		⑤ 撤退する

シャープレシオが低い場合 ($v < \gamma_1/2$) については、③ プラスの利益を確保していれば ($X \geq K$) 撤退するが、④ 損失が発生している場合 ($X < K$) には、プロジェクトから撤退せず、プロジェクト価値 X が基準点 K まで回復してブレーク・イーブンとならない限り撤退しない。これは損切りの躊躇 (deposition effect) を表すものである。ただし、⑤ シャープレシオが相当悪くなった場合 ($v < -\gamma_2/2$) には、利益の正負にかかわらず撤退する。

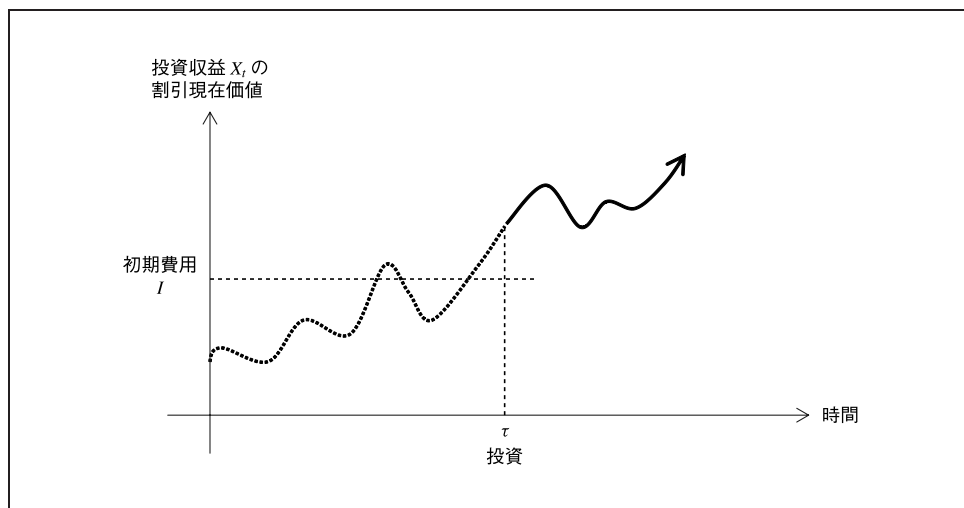
(4) 時間非整合割引率とリアルオプション：近視眼的な投資が行われる理由

3 節(3)では、企業が投資から撤退する問題、すなわち撤退オプションの理論に行動ファイナンスの理論がどのように融合されているか説明した。ここでは、逆に、企業が新規投資を実行する問題、すなわち参入オプションの理論に行動ファイナンスの理論がどのように融合されているか説明する。これに関して、近年、時間非整合割引率とリアルオプションの融合により近視眼的に投資プロジェクトを実行してしまうことを説明した研究が登場している。Grenadier and Wang [2007] は、世代交代のある投資問題を考え、世代交代の前後で割引率が異なることから近視眼的に投資が行われることを説明している。ここでは、この手法をファイナンス理論へ応用した山田 [2010] を紹介する。山田 [2010] は、Grenadier and Wang [2007] と同様に、リスクフリー・レートに時間非整合割引率を導入したうえで、追加的に倒産による信用リスクを考慮し、低金利環境下で駆け込み投資が発生し信用リスクが拡大することを説明している。

イ. モデルの設定

モデルの基本的な設定は、従来の参入オプションの設定とほぼ同じであるが、投資家の割引率が時間非整合的なものになっている点が異なる。まず、従来の参入オプションの設定と同様、企業がある新規の投資を行う状況を考える。投資を実行するためには初期費用 I が必要であり、実行後には、每期 X_t の投資収益が得られる。

図7 参入オプション：最適な投資のタイミング



ただし将来の X_t は不確実で、幾何ブラウン運動

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x, \quad (12)$$

に従っているとする。この投資収益と初期費用を比較して、後述する最適化問題に従い投資時刻 τ を決定する（図7）。この際、企業は投資資金をリスクフリー・レート r で調達するが¹⁸、これが、ポアソン過程に従って変動しているとする¹⁹。

先行き金利が上昇する場合の最適投資問題は、①金利が上昇する前と、②金利が上昇した後に場合分けをして、どちらの環境で投資を行うべきか判断する。

（イ）近視眼的な織込み方

まず、単純に、投資時点におけるリスクフリー・レートを将来にわたる割引率として投資判断に織り込んだ場合の投資価値を考えてみる²⁰。

$$V(X_t) = \max_{\tau} E_t \left[e^{-r_1(\tau-\tau_1)-r_0(\tau_1-t)} \left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-r_1(s-\tau)} X_s ds - I \right) 1_{\{\tau > \tau_1\}} + e^{-r_0(\tau-t)} \left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-r_0(s-\tau)} X_s ds - I \right) 1_{\{\tau \leq \tau_1\}} \right]. \quad (13)$$

右辺の中の第1項は、金利が上昇した後（ $\tau > \tau_1$ ）に投資を行う場合の価値であり、投資時点で既に利上げが行われているため、利上げ後の金利 r_1 が割引率に用いられ

18 山田 [2010] では、さらに負債での資金調達を考え、倒産を考慮したもとの最適調達額を考慮しているが、本稿では簡単化のためリスクフリー・レートでの資金調達を説明する。

19 具体的にはリスクフリー・レートが一定の強度 λ で r_0 から r_1 に上昇するポアソン過程を想定している。

20 ここでは、単純化のため、リスクフリー・レートは1回しかジャンプしない場合を考えている。

ている。一方、第2項の場合は、投資時点ではまだ利上げがされていない ($\tau < \tau_1$) ため、その後の割引率に r_0 が用いられている。

(ロ) 経済合理的な織込み方

これに対し、投資時点までに利上げされる可能性を織り込むだけでなく、いったん投資が行われた後の利上げの可能性も投資時点で織り込むことを考える。この考え方に基づいて投資価値を定式化すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 V(X_t) &= \max_{\tau} E_t \left[e^{-r_1(\tau-\tau_1)-r_0(\tau_1-t)} \left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-r_1(s-\tau)} X_s ds - I \right) 1_{\{\tau > \tau_1\}} \right. \\
 &\quad \left. + e^{-r_0(\tau-t)} \left(\int_{\tau}^{\tau_1} e^{-r_0(s-\tau)} X_s ds + \int_{\tau_1}^{\infty} e^{-r_1(s-\tau)} X_s ds - I \right) 1_{\{\tau \leq \tau_1\}} \right].
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

(イ)の場合と異なるのは第2項であり、投資が実行された後に金利が上昇することを考慮して、利上げ時刻 τ_1 以降は、 r_1 を割引金利として用いている。一方、第1項は、投資後に金利が上昇する可能性がゼロであるため、(13)式と同じ形になっている。

(イ)の織込み方の場合、何が問題なのかを考えてみよう。この場合、利上げ前であれば低金利で調達できるとしているが、将来リファイナンスを行う必要があるにもかかわらず、利上げによるリファイナンス・コストが増加する可能性を考慮していない。この点で(イ)は近視眼的な織込み方となっている。こうした投資判断は経営者が交代した後のことにまで現在の経営者の考えが及んでいない状況などに行われうる。これは時間非整合割引率に基づく企業行動の一例となっている。

ロ. 分析結果と含意

山田 [2010] によると、(13)式および(14)式の最適化問題を解くことにより、表6に示したような結果が得られる。それをみると、低金利環境下のように先行きの金利上昇が見込まれる場合には、企業がその可能性をどのように織り込むかにより、異なる行動が選択されることがわかる。すなわち、近視眼的な企業は、低金利環境が続いているように投資をしておく方が得であると考えするため、中央銀行の利上げの意図とは逆に駆込み的な投資判断を行う。その結果、信用リスクの拡大につながる。逆に、将来の利上げを経済合理的に織り込む企業は、将来の金利上昇による負担を考慮するため、投資をむしろ抑制することになる。

この分析は、金利上昇の効果を考察するうえで、企業の投資行動がどのような基準に従っているかを的確に評価することが重要であることを示している。

表 6 割引率が時間非整合な場合の投資行動と信用リスク

	通常の割引率 (経済合理的)	時間非整合割引率 (近視眼的)
金利上昇の織込み方	投資や資金調達を行った後の金利上昇も織り込んで投資タイミングを決定	投資や資金調達を行う時点までの金利上昇を織り込んで投資タイミングを決定
投資行動	将来の利上げを織り込み投資を抑制	低金利のうちに駆け込み投資を行う
信用リスク	縮小	拡大

(5) 代表性バイアスとアセット・プライシング：市場の価格が歪む理由

3 節(4)までは、CAPM やリアルオプションといった投資家の投資行動に関する従来の理論に対し、行動ファイナンスがどのように融合されているか説明した。ここでは、投資行動そのものではなく、金融資産の市場価格に着目した研究を紹介する。2 節(2)で説明したように、金融市場には、過去の投資実績などの違いにより強気になっている投資家や弱気になっている投資家が混在する。こうした点を代表性バイアスにより表現し、投資家の固定観念や思い込みにより市場の価格分布が歪むことを説明した研究が進んでいる。ここでは、こうした研究の考え方を Shefrin [2005, 2008]、Shefrin and Statman [2002] に基づき紹介する²¹。

イ. モデルの設定

簡単のため 1 期間モデル ($t = 1, 2$) で説明する。まず、将来の状態 ω ($\omega = 1, 2, \dots, n$) に応じて生産量 $w(\omega)$ が変動する経済を想定し、各状態が発生する確率を $P(\omega)$ と表す。これを客観確率と呼ぶ。

これに対し、各投資家 i ($i = 1, 2, \dots, m$) は、異なる信念 (belief)、すなわち、異なる主観確率 $P_i(\omega)$ を持っているとする。2 節(2)で説明したように、過去に何度も儲けた市場なので強気になっている投資家や、過去に何度も失敗しているので弱気になっている投資家が混在することを想定している。この主観確率に基づいて、各期における各投資家の生産 $w_t^{(i)}$ から得られる総所得の割引現在価値（市場価格ベース） W_t を今期の消費と来期の消費のための投資にどう振り分けるか選択する。具体的には、今期と来期の消費量を最適に選択することで、期待効用を最大化する。

21 ここでは Shefrin [2005] による単純化されたモデルの概略を解説するが、同様に主観確率が異質な投資家の理論を扱った研究としては、Calvet, Grandmont, and Lemaire [2004]、Jouini and Napp [2006a, b, 2007]、Gollier [2007]、Huang [2003] などが挙げられる。また、これらを連続時間モデルへ拡張した研究としては、Jouini and Napp [2007] がある。主観確率ではなく時間割引率 δ の異質性に着目した研究としては、Gollier and Zeckhauser [2005]、Hara [2008, 2009] がある。これらの研究では、時間割引率に異質性を導入することで均衡における代表的投資家の時間割引率が双曲割引率（時間非整合割引率の代表例）になるという興味深い結果を得ている。

$$\begin{aligned}
 & \max_{c_0^{(i)}, c_1^{(i)}(\omega)} u(c_0^{(i)}) + \sum_{\omega=1}^n P_i(\omega) \delta u(c_1^{(i)}(\omega)) \\
 \text{s.t. } & c_0^{(i)} + \sum_{\omega=1}^n \pi(\omega) c_1^{(i)}(\omega) \leq w_0^{(i)} + \sum_{\omega=1}^n \pi(\omega) w_1^{(i)}(\omega) \equiv W_i.
 \end{aligned} \tag{15}$$

ここで δ は時間割引率を表す。制約式は、総所得の割引現在価値 W_i が今期の消費 $c_0^{(i)}$ と来期の消費 $c_1^{(i)}$ に振り分けられることを意味する。なお、 $\pi(\omega)$ は各状態 ω の状態ごとにアロー＝デブリュー証券を仮定した場合の状態価格である。この価格は、市場の均衡価格として導出されるため、投資家の主観確率に依存しない。

効用関数 u がベキ型の場合、各投資家 (15) 式の最適化問題から、状態価格 $\pi(\omega)$ を所与とした時の消費の決定式が

$$\pi(\omega) = \delta \left(\frac{c_1^{(i)}(\omega)}{c_0^{(i)}} \right)^{-\gamma} P_i(\omega), \tag{16}$$

と導出される。均衡では総消費 $c(\omega)$ と総生産量 $w(\omega)$ が各時点で一致するように、すなわち、

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m c_0^{(i)} &= \sum_{i=1}^m w_0^{(i)} \equiv w_0, \\
 \sum_{i=1}^m c_1^{(i)}(\omega) &= \sum_{i=1}^m w_1^{(i)}(\omega) \equiv w_1(\omega),
 \end{aligned} \tag{17}$$

が満たされるように価格 $\pi(\omega)$ が調整される。その結果、(16) 式と類似した条件式として、

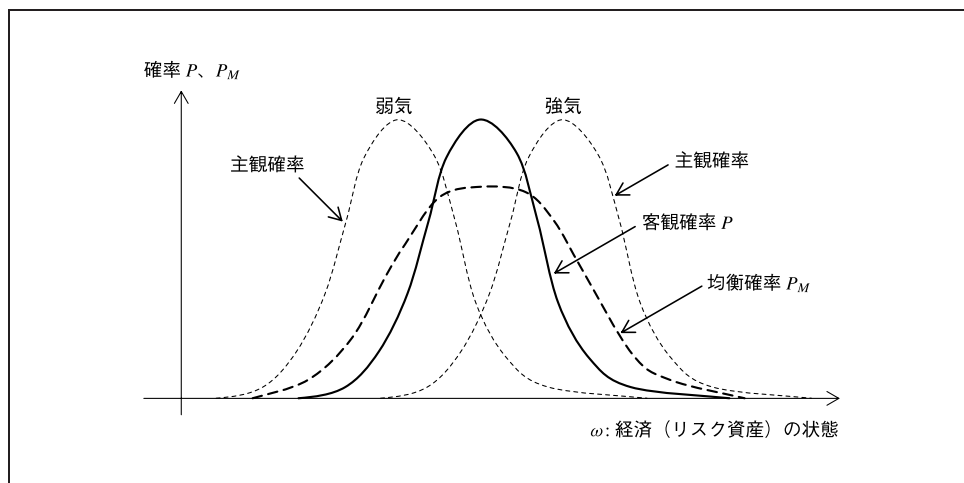
$$\pi(\omega) = \delta \left(\frac{w_1(\omega)}{w_0} \right)^{-\gamma} P_M(\omega), \tag{18}$$

が導出される（補論 2）。ここで、 P_M は、主観確率の加重平均

$$P_M(\omega) \equiv \left(\frac{\sum_{i=1}^m c_0^{(i)} P_i(\omega)^{1/\gamma}}{\sum_{i=1}^m c_0^{(i)}} \right)^{\gamma}, \tag{19}$$

であり、均衡確率と呼ばれる。図 8 は、強気と弱気な投資家が混在する場合の均衡確率分布 P_M を例示したものである。

図8 強気と弱気が混在する市場の確率分布



ロ. 分析結果と含意

(18) 式の意味を解釈するために、状態価格そのものではなく割引率の形に変形する。状態価格 $\pi(\omega)$ は $P(\omega)$ に比例するが経済が変動するリスクがある分だけ $P(\omega)$ より小さく、その比率 $m = \pi(\omega)/P(\omega)$ はリスクを反映した割引を表す。具体的には (18) 式から

$$m = \delta \left(\frac{w_1(\omega)}{w_0} \right)^{-\gamma} \frac{P_M(\omega)}{P(\omega)}, \quad (20)$$

と導出することができる。 m はプライシング・カーネルあるいは確率的割引因子 (stochastic discount factor) と呼ばれ、これが決まればどのような金融商品も価格付けが可能になる。(20) 式から

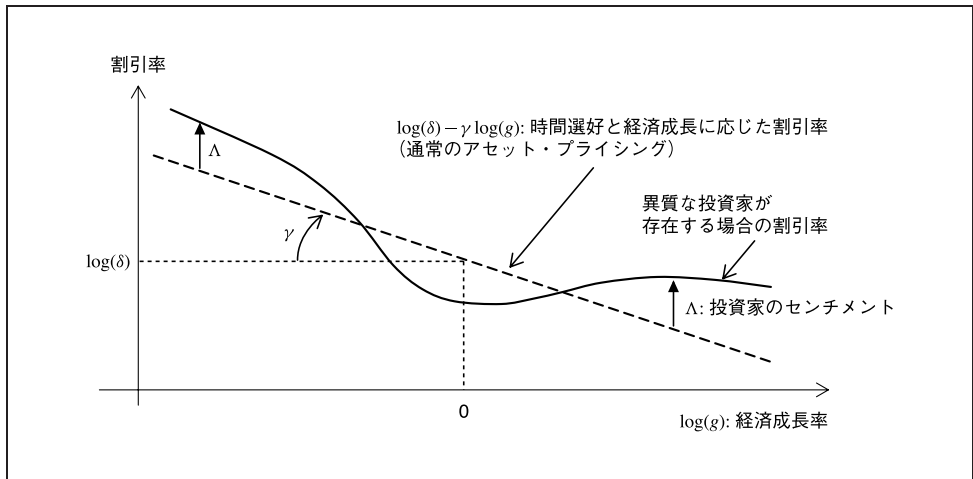
$$\log(m) = \log(\delta) - \gamma \log(g(\omega)) + \log \frac{P_M(\omega)}{P(\omega)}, \quad g(\omega) = \frac{w_1(\omega)}{w_0}, \quad (21)$$

という関係式を導出することができる。右辺の第1項は、時間の選好を反映した時間割引率を表し、第2項は、経済成長率 $\log(g)$ が変動するリスクに応じた割引率を表す。経済成長率 $\log(g)$ が高いほど割引率は低くなり価格が上昇することがわかる。これに対し、第3項は、経済成長率の変動では説明のつかない価格の上昇（下落）を表す割引率である。この第3項の指標を、

$$\Lambda \equiv \log \frac{P_M(\omega)}{P(\omega)}, \quad (22)$$

と定義する。これは「投資家のセンチメント」を表す指標と解釈できる。図9は、この割引率の例を示したものであり、図8と同様に強気と弱気の投資家が混在する

図9 投資家のセンチメント：市場の割引率の歪み



市場を想定している。図9をみると、経済の状態が良い時と悪い時に、リスクに対して大きく割り引かれることがわかる。なお、4節(3)では、投資家のセンチメント Δ の関数形を株式市場とオプション市場の価格分布から推計する方法を示している²²。

4. 行動ファイナンスの実用化へ向けた取組み

4節では、行動ファイナンスの実用化へ向けた応用例について解説する。例えば、バリュ・アット・リスクやブラック＝ショールズ・モデルといった金融工学の理論と行動ファイナンスの理論がどのように融合されているか説明する（表7）。

(1) バリュ・アット・リスクとプロスペクト理論：ファット・テールの表現

株や為替といった金融資産の価格分布は、一般に、正規分布より裾が厚く（ファット・テール）、正規分布を仮定してバリュ・アット・リスクを計測するとリスクを過小に評価することが知られている。こうした点は、今次金融危機においてもしばしば取り上げられた点である。しかし、どのようなメカニズムでファット・テールとなるかについては、コンセンサスが確立しているわけではない。ここでは、バリュ・アット・リスクに関してプロスペクト理論を融合させることで、リスクの源泉であるビジネス・リスクがファット・テールでなかったとしても、プロスペクト理論の

²² 実際には、リスク回避度の推計により効用関数の形状を推察する研究であるが、これを Shefrin [2008] では投資家のセンチメントとして解釈している。

表 7 行動ファイナンスの実用化へ向けた取組み

(1) バリュース・アット・リスクとプロスペクト理論：ファット・テールの表現 Maymin [2009]：市場価格の分布が正規分布（離散的モデルでは 2 項分布）であっても、損失の分布はファット・テールになることを説明。
(2) ブラック＝ショールズとプロスペクト理論：ボラティリティ・スマイルの表現 Wolff, Versluis, and Lehnert [2009]：プロスペクト理論によりボラティリティ・スマイルの背後にある投資家の心理を説明する。
(3) インプライド確率分布とプロスペクト理論：投資家の効用関数の推計 Blackburn and Ukhov [2006]：オプションの市場価格から S 字型効用関数のパラメータ（リスク回避度、基準点等）を推計。
(4) 仕組みデリバティブが売れる背景とプロスペクト理論 Hens and Rieger [2009]：市場で流通している商品の多くは伝統的な効用関数を持つ投資家には最適な商品性といえないが、プロスペクト理論の効用関数を持つ投資家には最適な商品性となりうる。
(5) 投資家のセンチメントを把握する指標 Kurov [2010]：金融政策への応用。政策金利の変更は投資家のセンチメントに影響。特に、政策金利の変更が予期されていない時や市場が弱気な時ほど強く影響する。
(6) 投資家の群集行動を把握する指標 Chiang and Zheng [2010]：18 ヲ国の株式市場に対し今次金融危機を含むデータで確認。米国を除く先進国とアジア諸国で群集行動が確認されたがラ米諸国ではみられなかった。

効用関数を持つ投資家によって形成される市場価格の分布は裾が長くなることを示した Maymin [2009] の研究を紹介する。

イ. モデルの設定

Maymin [2009] はリスク資産の市場を考え、リスクの源泉となっている要因をビジネス・リスクと呼び、その確率過程を次のような 2 項ツリーで与えている²³。

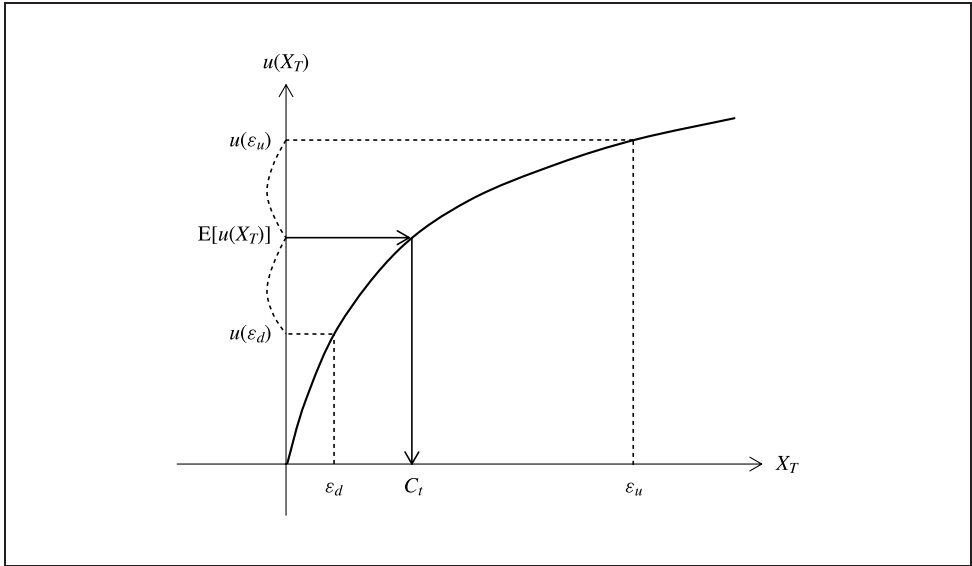
$$\begin{aligned}
 X_T &\equiv A_1 + A_2 + \cdots + A_T, \\
 A_t &= \begin{cases} \varepsilon_u, & \text{確率 } p, \\ \varepsilon_d, & \text{確率 } 1 - p. \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

この X_T で表されるリスク資産に対し、プロスペクト理論における効用関数 u を用いて市場価格を導出する。その際、Maymin [2009] は、3 節で紹介したようなアセット・プライシングの理論を用いるのではなく、より簡便な確実性等価（certainty equivalent）の概念を使ってプライシングを行っている。

確実性等価とは、リスク資産へ投資した時に得られる期待効用 $E_t[u(X_T)]$ をリスクのない資産の価値に換算すると、どのくらいの価値 C_t に等しいか考えたものである。すなわち、

23 T 期間を考え、 i 期（ $i = 1, \dots, T$ ）には上昇（幅は ε_u ）あるいは下落（幅は ε_d ）のいずれかが実現する。上昇確率は i によらず固定値 p で与えられている（2 項分布）。

図 10 確実性等価の概念



備考：横軸はリスク資産の価値、縦軸は投資家の効用を表す。

$$u(C_t) = E_t[u(X_T)], \quad (24)$$

を満たす C_t として定義される。これを図解したものが図 10 である。簡単化のため 1 期間 ($t = 0, T = 1$) としている。

横軸はリスク資産の価値、縦軸は投資家の効用を表している。縦軸においてリスク資産 X_T に対する期待効用 $E_t[u(X_T)]$ を計算すると、ちょうど $u(\varepsilon_u)$ と $u(\varepsilon_d)$ の中間に位置する ($p = 1/2$ としている)。この価値をリスクのない資産の価値に換算したものが横軸上の C_t である。これを式で表現すると、(24) 式を変形して、

$$C_t = u^{-1}[E_t[u(X_T)]] \equiv E_t^Q(X_T), \quad (25)$$

と表すことができる。ここで C_t は、横軸の ε_u と ε_d の中間には位置していない。すなわち、 C_t は単純な期待値 $E_t(X_T)$ には等しくなく、それより小さい。言い換えれば、 ε_u の出る確率を少なくし、 ε_d の出る確率を多くした悲観シナリオの確率 Q のもとで平均した値 $E_t^Q(X_T)$ になっていると解釈できる。これはアセット・プライシング理論におけるリスク中立確率に対応している。このように確実性等価によるプライシング²⁴は、3 節におけるプライシング方法と大きく違う概念ではないことに注意しておく。

24 確実性等価は、リスク中立測度が 1 つに定まらない非完備市場のプライシングに使われることが多い。リスク中立測度によるプライシングと類似しているが、ペイオフに対して価格が線形性を持たないことや、効用関数が指数型の場合を除いて価格が初期資産（すなわち投資額）に依存する（資産効果がある）とい

ロ. 分析結果と含意

一般に、市場参加者の効用関数を所与として C_t を計算すれば、市場価格を導出することができる。Maymin [2009] はこの C_t の分布を調べるうえで以下の比率の分布を分析している。

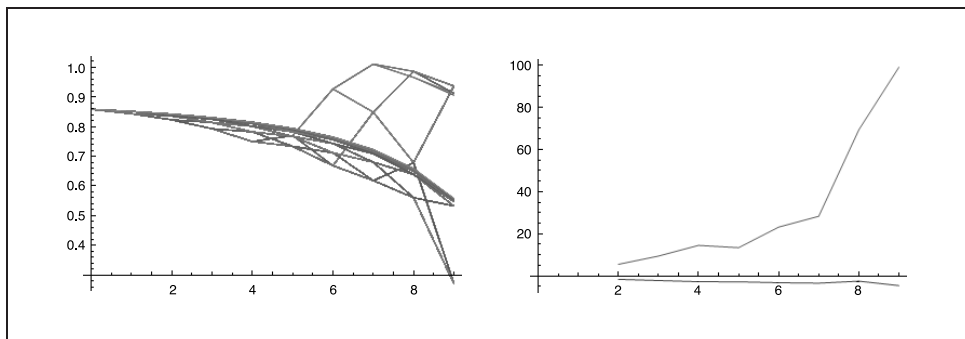
$$P_t = \frac{E_t^0(X_T - X_t)}{E_t(X_T - X_t)}, \quad (26)$$

これは、市場価格（分子）が現実の期待値（分母）からどの程度割引かれているか表現した指標となっており、プロスペクト理論の効用関数を持つ投資家にとっての主観的な価格分布を表している。

まず、第1の数値例として、 $\varepsilon_d = 400$ 、 $\varepsilon_d = -200$ 、 $p = 3/4$ 、 $T = 10$ 、 $t = 0, 1, \dots, 10$ とし、プロスペクト理論のS字型効用関数(2)式および確率ウェイト関数(3)式のパラメータは $\alpha = \beta = 0.88$ 、 $\lambda = 2.25$ 、 $\gamma = 0.65$ とした場合を考えてみる。図11の左図の縦軸は市場価格を(26)式の P_t で表したものであり横軸は時間 t である。ビジネス・リスクの2項分布、すなわちリスクの状態が上下に変化することに対応して P_t がどのように変動するか表している²⁵。また右図の縦軸は分布の歪度と尖度を表している。

図をみると、市場価格の分布は基本的に負の歪度を取っており、下側に裾が長いことが確認される。また尖度が大きいことから、分布の中心と端に二極化が進んでいることが含意されている。

図11 プロスペクト理論に基づく市場価格の分布の特性：標準的なパラメータの場合



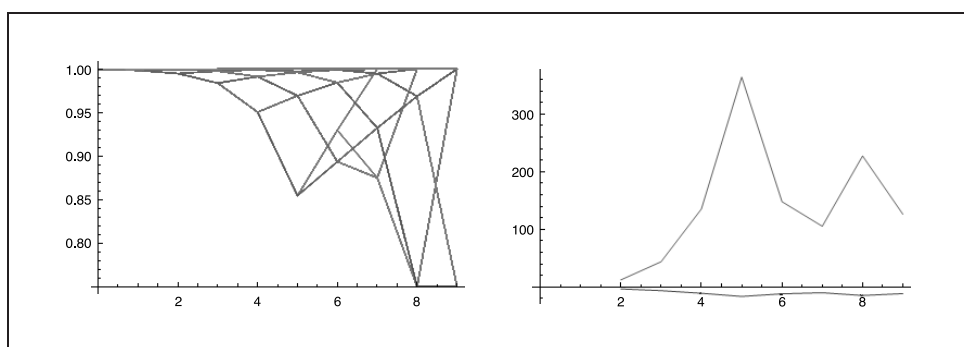
備考：左図の縦軸は市場価格を(26)式の P_t で表現したもの。右図の縦軸は歪度・尖度。横軸は共に時間。

資料：Maymin [2009] を基に作成

.....
う点で異なる。この点を含めた非完備市場のプライシング理論に関しては、Cont and Tankov [2004] 10 章を参照されたい。

25 P_t が 1 より小さいことはより大きく割引いていることを、1 より大きいことは割引が緩く高めに評価していることを表す。

図 12 プロスペクト理論に基づく市場価格の分布の特性：損失回避のみを勘案した場合



備考：左図の縦軸は市場価格を (26) 式の P_t で表現したもの。右図の縦軸は歪度・尖度。横軸は共に時間。

資料：Maymin [2009] を基に作成

このようにして、もともとのビジネス・リスクはファット・テールでないにもかかわらず、プロスペクト理論の効用関数を持つ投資家によって形成される市場価格の分布はファット・テールになる傾向にある。Maymin [2009] はこれを「人為的なリスク」と呼んでいる。

次に、第2の数値例として、リスク資産に関する条件は上記の設定と同様とし、投資家の効用関数のパラメータを $\alpha = \beta = 1$ 、 $\gamma = 1$ とした場合を考える。これは、プロスペクト理論のうち損失回避度に関するパラメータ λ のみを効かせることに対応し、その場合でも上述したような結果が得られるかどうかを確認したものが図 12 である。

図 12 を図 11 と比較すると、歪度は負で尖度が大きいという結果はより鮮明になっている。したがって、「人為的なリスク」を発生させているのは、リスク回避度というより損失回避度によることがわかる。

ここではプロスペクト理論により価格分布がファット・テールになりうることを示したが、数値例のパラメータは、Kahneman and Tversky [1979] の実験値によるものを用いた。これに対し、4 節(2)や(3)では、逆に市場価格からプロスペクト理論のパラメータを推計する方法を紹介する。

(2) ブラック＝ショールズとプロスペクト理論：ボラティリティ・スマイルの表現

ブラック＝ショールズ式を通じてオプション市場価格から算出されるインプライド・ボラティリティは、ストライクの異なるオプションについて必ずしも同じ値とならないことが知られている。こうした現象は、ボラティリティ・スマイルと呼ば

れ、ブラック＝ショールズ・モデルの限界を示す現象の1つとして知られている。こうした限界に対し、金融工学の分野では、ボラティリティを一定値と仮定していることが原因であると考え、ボラティリティを確率過程でモデル化した確率ボラティリティ・モデル等による説明が試みられてきた。これに対し、Wolff, Versluis, and Lehnert [2009] は、ブラック＝ショールズ・モデルにプロスペクト理論を融合させることでボラティリティ・スマイルを説明できることを示している。この際、ボラティリティ・スマイルと整合的なプロスペクト理論のパラメータを同時に推計することで、市場で観測されるボラティリティ・スマイルの背後にある投資家の心理を考察している。

イ．モデルの設定

まず、原資産価格 S_t は、通常のブラック＝ショールズ・モデルと同様に、ボラティリティが一定値の幾何ブラウン運動に従うと仮定する。

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (27)$$

ここで Wolff, Versluis, and Lehnert [2009] は、オプション価格の計算に3節で紹介したようなアセット・プライシングの理論ではなく、4節(1)で用いた確実性等価の概念を使ってプライシングを行っている。この際、効用関数としてプロスペクト理論に従う投資家の効用関数を用いている。具体的には、まず、ヨーロピアン・コールオプションを売る投資家²⁶を考えると、将来のペイオフ X_T は、

$$X_T = -L \cdot (S_T - K)^+, \quad (28)$$

と表される。ここで、 K は行使価格、 L はオプションへの投資額である。この対価として受け取る単位投資額当たりのオプション・プレミアムを c とすると、オプション・プレミアム総額の将来価値は、 r をリスクフリー・レートとして $e^{rT} c L$ と書ける。これらを(24)式へ代入することで

$$u(e^{rT} c L) + E_t[u(-L \cdot (S_T - K)^+)] = 0, \quad (29)$$

という条件が導出される。(29)式を c について解くことによりヨーロピアン・オプションの価格は、

$$c = e^{-rT} L^{-1} u^{-1}(E_t[-u(-L \cdot (S_T - K)^+)]), \quad (30)$$

26 Wolff, Versluis, and Lehnert [2009] は、売り手の立場から価格付けを行っているが、買い手の立場から価格付けを行う場合は、投資額 L を $-L$ に変えることで同様に価格付けが可能である。この際、通常のリスク中立測度下での議論と異なり、売り手と買い手の価格が一般に異なることに注意しておく。すなわち、(30)式の L を $-L$ に変えた場合、効用関数が線形（リスク中立）でない限り、 c の値が変わることに注意しよう。これは非完備市場において、買い手と売り手の価格が一般に異なることと類似している。

と求められる。(30) 式の効用関数について、(2) 式の S 字型効用関数と (3) 式の確率ウエイト関数を具体的に与えると、以下のように解析解が導出される。

$$c = e^{-rT} L^{(\beta-\alpha)/\alpha} \left(\lambda \int_K^\infty \psi(1-F(S_T)) f(S_T) (S_T - K)^\beta dS_T \right)^{1/\alpha}. \quad (31)$$

ここで、

$$F(S_T) = \Phi\left(\frac{\ln(S_T/S_0) - (\mu - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad (32)$$

は対数正規分布の分布関数であり（ Φ は標準正規分布の分布関数）、

$$\psi(p) = \frac{dw(p)}{dp}, \quad (33)$$

は確率ウエイト関数の導関数である。また、

$$f(S_T) = \frac{1}{S_T \sigma \sqrt{2\pi T}} \exp\left(\frac{-[\ln(S_T/S_0) - (\mu - \sigma^2/2)T]^2}{2\sigma^2 T}\right), \quad (34)$$

は対数正規分布の確率密度関数である。(31) 式の特例ケースとして、 $\beta = \alpha = 1$ 、 $\lambda = 1$ 、 $\mu = r$ 、 $\gamma = 1$ 、 $w(p) \equiv p$ とするとリスク中立的な投資家の価格を導出することが可能であり、同式は、通常のブラック＝ショールズ式

$$\begin{aligned} c &= e^{-rT} \left(\int_K^\infty f(S_T) (S_T - K) dS_T \right) \\ &= S_0 \Phi(d_+) - K e^{-rT} \Phi(d_-), \\ d_\pm &\equiv \frac{\ln(S_0/K) + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \end{aligned} \quad (35)$$

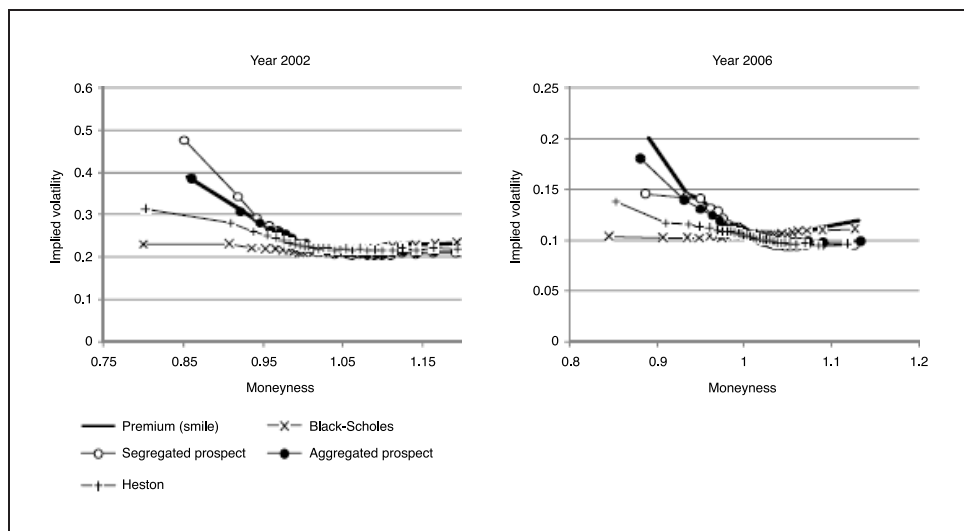
に帰着する。このように、本モデルはブラック＝ショールズ・モデルの拡張になっていることがわかる。

ロ. 分析結果と含意

Wolff, Versluis, and Lehnert [2009] は、まず、米国の 2002 年と 2006 年のオプション価格からボラティリティ・スマイルを観測し、上記モデルと確率ボラティリティ・モデル（ヘストン・モデル）によりフィッティングを行って図 13 の結果を得た。

黒太線（Premium (smile)）は市場から観測されたボラティリティ・スマイルである。白丸線（Segregated prospect）が上記モデルによるフィッティングであり、十字

図 13 プロスペクト理論によるボラティリティ・スマイル



資料：Wolff, Versluis, and Lehnert [2009] Figure 2 を転載

線 (Heston) がヘストン・モデルによるフィッティングである。これをみると、上記モデルは、ヘストン・モデルと同程度の表現力があることが確認される。さらにモデルの表現力を高めるために、Wolff, Versluis, and Lehnert [2009] は、確率ウェイト関数のパラメータ γ が非対称、すなわち、利益の場合と損失の場合で異なる値 (γ_{\pm}) を取るとしたモデルに拡張している。その拡張モデルによるフィッティングが図 13 の黒丸線 (Aggregated prospect) である。上記拡張モデルは、市場から観測されたボラティリティ・スマイルによりよくフィットしているという意味で、ヘストン・モデルより高い表現力を持つ。

この際に得られたプロスペクト理論のパラメータは表 8 のとおりである²⁷。() 内の数字は、拡張モデルにより推計されたパラメータである。この推計結果と Kahneman and Tversky [1979] がアンケート調査²⁸により観測した値と比較すると、拡張前のモデルではやや高めに算出されるものの、拡張モデルでは Kahneman and Tversky [1979] の結果と近い値になっている。オプション市場の背後にある投資家の心理と古くから知られる結果が一致しているのは興味深い点である。

なお、本研究では考察されていないが、市場急変時におけるプロスペクト理論のパラメータを推計することは興味深い研究と考えられる。こうしたパラメータを 3 節のモデルと組み合わせれば、市場急変時における投資家の行動を考察できるほか、4 節(1)で紹介したバリュー・アット・リスクに応用することで、ストレス時の「人為的リスク」を把握することに活用できる可能性がある。

27 このモデルでは、プロスペクト理論の基準点を先験的に現在の株価 S_0 と設定しており、基準点に関する推計は行っていない。

28 詳細は脚注 6 を参照。

表 8 オプション市場から推計されたプロスペクト理論のパラメータ

	σ	μ	α	β	λ	γ_+	γ_-
市場からの推計値・ 2002 年	0.101 (0.359)	-0.019 (0.057)	2.06 (0.44)	2.02 (0.41)	5.73 (1.55)	- (0.81)	0.72 (0.94)
市場からの推計値・ 2006 年	0.045 (0.156)	0.049 (0.046)	2.07 (0.66)	2.05 (0.79)	1.63 (0.81)	- (0.95)	0.66 (1.24)
アンケート調査 (K&T [1979])	-	-	0.88	0.88	2.25	0.65	0.65

備考：() 内の数字は、拡張モデルにより推計されたパラメータ。

資料：Wolff, Versluis, and Lehnert [2009] Table 4 より作成。K&T [1979] は Kahneman and Tversky [1979] を示す。

(3) インプライド確率分布とプロスペクト理論：投資家の効用関数の推計

4 節(2)では、ブラック＝ショールズ・モデルの拡張により、オプション価格からプロスペクト理論のパラメータを推計した。これに対し、ここではノンパラメトリックな方法でパラメータ推計を試みた Blackburn and Ukhov [2006] の研究を紹介する。なお、4 節(2)の研究では、プロスペクト理論の基準点を暗黙のうちに現在の株価に固定しており、推計は行っていなかったが、ここでは基準点も推計の対象としている。

イ. モデルの設定

一般に、投資家のリスク回避度は、効用関数の曲率として

$$\gamma(S) \equiv -\frac{u''(S)}{u'(S)}, \quad (36)$$

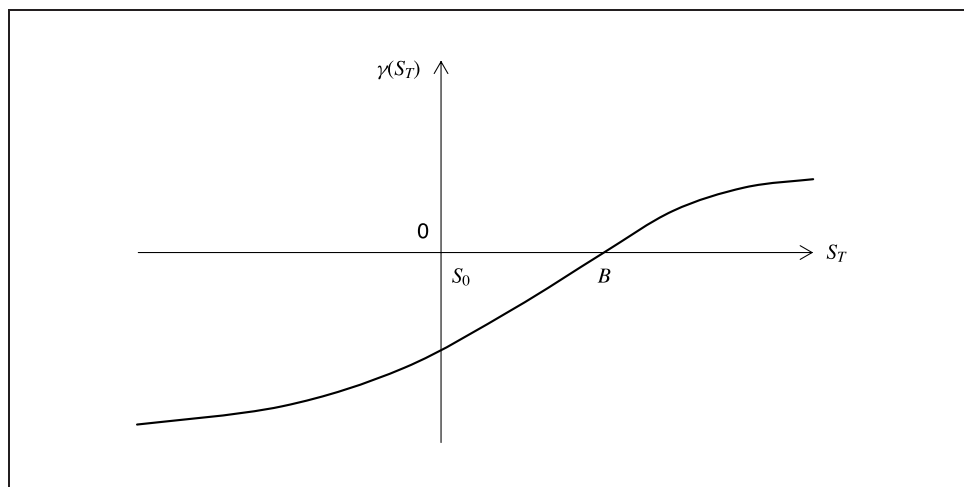
と定義される。ここで S は投資資産の将来価格を表す。この式の右辺に対して、3 節で説明したような投資家の最適化問題を考えると、

$$\gamma(S) \equiv -\frac{u''(S)}{u'(S)} = \frac{df_P(S)}{f_P(S)} - \frac{df_Q(S)}{f_Q(S)}, \quad (37)$$

となることが示され、リスク回避度は、①市場から得られるリスク中立確率の密度関数 $f_Q(S)$ と②実確率の密度関数 $f_P(S)$ により記述できる (Jackwerth [2000] など。詳細は補論 3 参照)。これにより市場価格からノンパラメトリックにリスク回避度を推計することが可能となる。

この方法の興味深い点は、リスク回避度 γ が一定値ではなく、将来の資産価格 S の関数として推計される点である。こうした点から投資家の効用関数の形を推測することが可能である。例えば、リスク回避度の関数が、図 14 のように推計されたと

図 14 リスク回避度と基準点の関係



しよう。リスク回避度が正の値を取る領域（ $S > B$ ）では、投資家はリスク回避的であるから、効用関数は凹型をしている。逆に、リスク回避度が負の領域（ $S < B$ ）では、リスク選好的であるから、効用関数は凸型をしていると推察される。このため、投資家の効用関数は、 B を基準点とした S 字型の効用関数をしていると考えられる。このようにしてプロスペクト理論における基準点を推計することが可能となる。特に図 14 のように推計された基準点 B が現在の資産価格 S_0 と異なる場合は興味深い。この場合、投資家は、基準点を上回らないと利益を感じないため、リスクの高い投資を選好していると解釈される。

ロ. 分析結果と含意

Blackburn and Ukhov [2006] は、この方法を株式市場に適用し、投資家のリスク回避度および効用関数の形を推計している。まず、株式市場のヒストリカルデータから実確率の密度関数 $f_P(S)$ を推計している²⁹。次にオプション市場の価格からリスク中立確率の密度関数 $f_Q(S)$ を推計している。これをノンパラメトリックに推計するために Breeden and Litzenberger [1978] の関係式

$$f_Q(S) = e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 C(S, K, t)}{\partial K^2} \Big|_{K=S}, \quad (38)$$

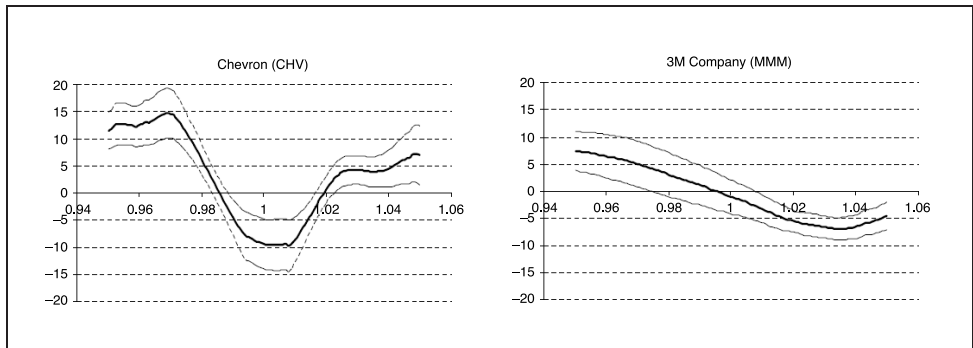
を用いている。ここで $C(S, K, t)$ は、ストライクが K のコールオプションの価格を表す³⁰。

これらの推計方法を米国の個別株式に適用したところ、銘柄によってリスク回避度の関数形が異なり、大きく次の 3 種類に分類できることを確認している。

29 実確率の密度関数の推計は、Jackwerth [2000] の方法を用いている。

30 リスク中立確率の密度関数の推計は、Bliss and Panigirtzoglou [2002, 2004] の方法を用いている。

図 15 リスク回避度と効用関数の推計



備考：縦軸はリスク回避度、横軸は現在の株価で基準化された将来の株価を表す。

資料：Blackburn and Ukhov [2006] Figure 2、Figure 3 を転載。

まず、第1の分類は、図15の左図のようにリスク回避度が横軸と2回交わる場合である。この場合、投資家の効用関数は、凹凸凹型（concave-convex-concave）の形をしており、フリードマン＝サベッジ型の効用関数と呼んでいる³¹。

一方、第2の分類は、図15の右図のようにリスク回避度が横軸と1回交わる場合であり、価格が低い時にリスク回避的になっているため、マーコビッツ型の効用関数と呼んでいる³²。

第3の分類は、リスク回避度が横軸と1回交わるが、価格が低い時にリスク選好的になる場合であり、プロスペクト理論のS字型効用関数（前掲図14）に対応する場合である³³。推計された基準点は銘柄により異なるが、概ね1.00～1.03のレンジにあり、現在の価格より数パーセント程度上側に基準点があることが確認されている。

なお、プロスペクト理論ではなく従来から使われてきた指数型やベキ型の効用関数は、横軸と1回も交わらないが、そのように推計された銘柄はわずかしかなかったことも報告されている。

また、3節(5)で紹介したShefrin [2008]は、以上のような推計結果について、代表的投資家の効用関数ではなく、異質な投資家が混在する市場のセンチメントとして解釈している。まず、投資家のリスク回避度を表す(37)式は、投資家のセンチメントを表す(22)式の両辺にマイナスを掛けて微分したものに等しいことに注意しよう³⁴。このため、推計されたリスク回避度にマイナスを掛けて積分したものは、投資

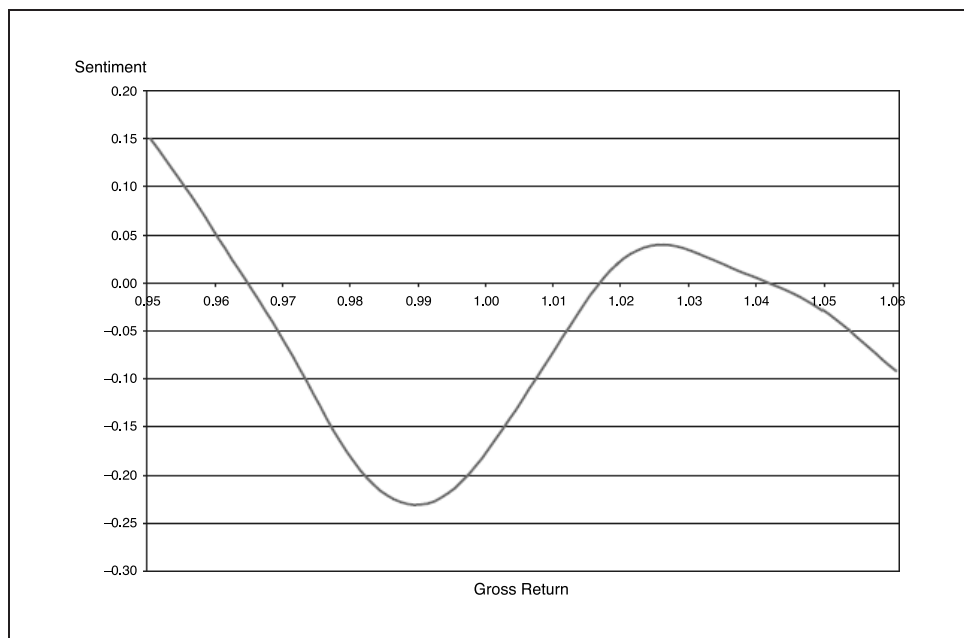
31 このような形に推計された銘柄としては、Chevron 社のほか、General Electric 社、General Motors 社、Procter and Gamble 社がある。

32 このような形に推計された銘柄としては、3M 社のほか、Eastman Kodak 社、Walt Disney 社、Pepsi 社などがあつた。

33 図には示されていないが、これに対応する銘柄として、IBM 社や Union Carbide 社などがある。

34 (22) 式の両辺にマイナスをつけると $-\Lambda = \log(P/P_M)$ となり、これを微分すると、 $-d\Lambda = dP/P - dP_M/P_M$ となり、 P を f_P に、 P_M を f_Q に置き換えることで (37) 式の右辺に等しくなる。

図 16 投資家のセンチメントとしての解釈



備考：縦軸は投資家のセンチメントを表しこれが大きいほど割引率が高いことを示す。横軸は現在の株価に対する将来の株価の比率を表す。

資料：Shefrin [2008] Figure 6 を転載

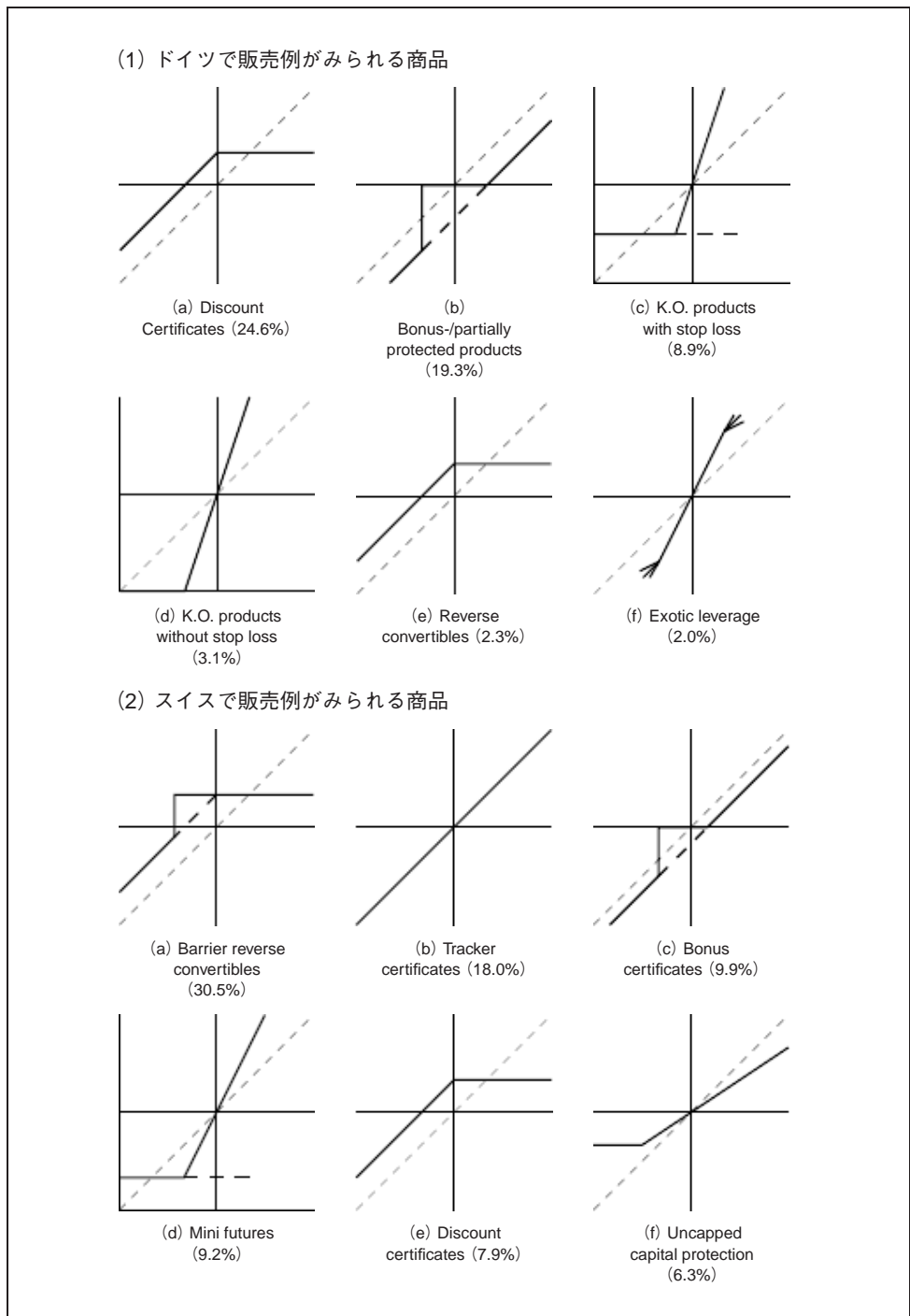
家のセンチメントとして解釈できる。この操作を図 15 の左図（Chevron）に適用したものが図 16 である。景気が良い時（右側）は弱めに、景気が悪い時（左側）は強めに割り引くような割引率となっていることがわかる。

(4) 仕組みデリバティブが売れる背景とプロスペクト理論

4 節(3)では、市場の観測データから投資家の効用関数の形を推計した。ここでは、効用関数の形から投資家が選好する金融商品のペイオフを推測する。これにより、通常では選好されないデリバティブでも、効用関数の形状次第では選好されうること示す。

まず、Hens and Rieger [2009] は、仕組みデリバティブが発達しているドイツとスイスにおいてどのようなペイオフの商品が主流となっているか分類し（図 17）、それらの商品が選好される背景として、投資家の効用関数がどのような特徴を持つと考えられるか分析している。

図 17 各種の仕組みデリバティブのペイオフ



備考：縦軸は当該商品のペイオフ、横軸は原資産価格を表す。

資料：Hens and Rieger [2009] Figure 1、Figure 2 を転載。

イ. モデルの設定

Hens and Rieger [2009] は、一般的な効用関数 u を持つ投資家を想定したうえで、考察対象とする時点 T での状態 ω に応じて投資家が受け取る最終富 $X_T(\omega)$ を分析し、この最終富がどのようなペイオフを有することが望ましいかを投資家の最適化問題として以下のように定式化した。

$$\begin{aligned} \max_{X_T(\omega)} & E[u(X_T(\omega))] \\ \text{s.t.} & E[m(\omega)X_T(\omega)] = X_0, \end{aligned} \quad (39)$$

ここで $m(\omega)$ はプライシング・カーネル、 X_0 は初期時点で投資家が保有する富である。最終富 $X_T(\omega)$ は状態 ω の関数であるが、この状態変数が金融商品の原資産価格で与えられると想定すれば、最適化された $X_T(\omega)$ は投資家が選好する金融商品のペイオフ関数を表すと解釈できる。上記最適化問題を解くと、最適なペイオフ $X_T(\omega)$ は以下のように導出される（導出は補論 4 を参照）。 L_λ は定数であり制約式を満たすように決定される。

$$X_T(\omega) = [u']^{-1}(L_\lambda m(\omega)). \quad (40)$$

ロ. 分析結果と含意

Hens and Rieger [2009] は、数種類の効用関数 u を用いて、それぞれの場合にどのようなペイオフの金融商品が選好されるか考察し、表 9 のような結果を得た³⁵。

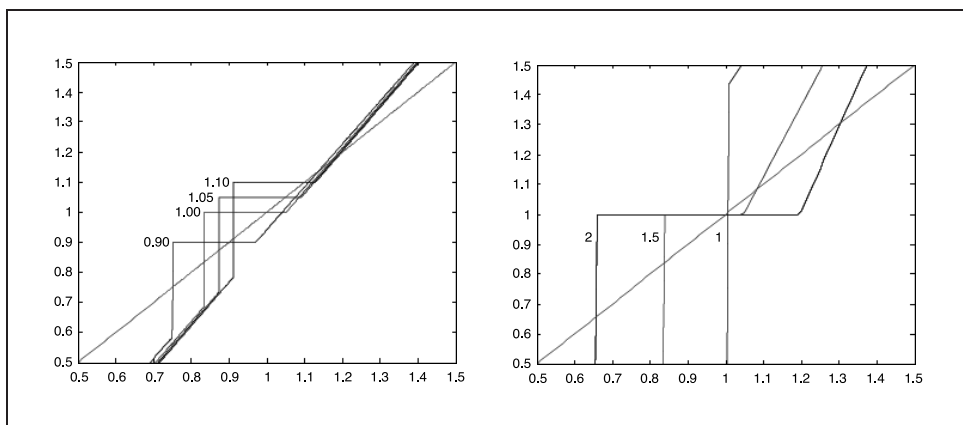
まず、CAPM で想定されるような 2 次の効用関数の場合は、原資産価格に対し線形なペイオフが選好される。このペイオフの傾きはリスク回避度と関係し、これが原資産を保有する比率となっている。これは、CAPM の分離定理、すなわち、無リスク資産とリスク資産を一定の比率で保有するという結果そのものである。原資産

表 9 効用関数の種類と選好される金融商品のペイオフ

効用関数	選好されるペイオフ
2 次効用 ($u''' = 0$)	原資産価格に対し線形（インデックス商品）
CARA 型、CRRA 型 ($u''' < 0$)	原資産価格に対し凹型（プット・オプション型）
プルーデンス型 ($u''' > 0$)	原資産価格に対し凸型（コール・オプション型）
願望付き 2 次効用 (凹凸凹型)	図 18 左図（ボーナス・サーティフィケート〈bonus certificates〉、 バリア・リバース・コンバーティブル〈barrier reverse convertible〉）
プロスペクト型	図 18 右図（同上）

35 簡単化のため、プライシング・カーネルが原資産価格 X の 1 次関数 $a + bX$ の場合を扱っている。このほか、指数型 e^X の場合も扱っているが、おおそ同じような結果が得られている。

図 18 プロスペクト理論の投資家が選好するペイオフ



備考：縦軸は当該商品のペイオフ、横軸は原資産価格を表す。いずれも現在の原資産価格との比率を取ることで基準化している。

資料：Hens and Rieger [2009] Figure 7、Figure 8 を転載。

を市場ポートフォリオと考えれば、投資家はインデックス商品を選好するという解釈になる。

次に、CARA 型と CRRA 型の効用関数の場合は、原資産価格に対して凹型のペイオフが選好される。これはプット・オプション型に対応し、複製ポートフォリオで考えると、原資産価格が高いほどその保有比率を減らし、原資産価格が低い時にその保有比率を増やしたものと見える。この結果は、効用関数の 3 階微分が負となる場合について一般に成立する。

これに対し、効用関数の 3 階微分が正となるプルーデンス型 (prudential) の場合は、原資産価格に対して凸型のペイオフが選好される。これはコール・オプション型に対応し、複製ポートフォリオを考えると、原資産価格が高いほどその保有比率を増やし、原資産価格が低い時にその保有比率を減らすという結果になっている。

ところが、以上のような通常の効用関数を考えていただけでは、図 17 で示したより複雑なペイオフを持つ仕組みデリバティブを選好する投資家を表現することができない。そこで、Hens and Rieger [2009] は、プロスペクト理論のような効用関数を考察している。

具体的には、4 節(3)において市場から観測された凹凸凹型の効用関数³⁶を想定すると、選好されるペイオフは図 18 左図のような形となる。これは、図 17 の金融商品のうち、ボーナス・サーティフィケート (bonus certificates) やバリア・リバーズ・コンバーティブル (barrier reverse convertible) に近い形となっている。また図 18 右図はプロスペクト理論の S 字型効用関数が選好するペイオフを示しており、凹凸凹型の場合と類似した結果となっていることがわかる。

36 Hens and Rieger [2009] では願望付き 2 次効用 (quadratic utility with aspiration level) と呼んでいる。

(5) 投資家のセンチメントを把握する指標

ここでは、株式市場における投資家のセンチメントを把握する指標についての研究を紹介する。まず、基本的な考え方を説明したうえで、金融政策の影響に関する応用分析例を紹介する³⁷。

イ. モデルの設定

株式市場における投資家のセンチメントとは、株式投資に対して投資家がどの程度積極的であるかを表すものである。Baker and Wurgler [2006] は、これに関係する指標として、①取引量 (*TURN*)、②クローズドエンド型ファンドのディスカウント³⁸ (*CEFD*)、③新規株式公開の数 (*NIPO*)、④株式公開時のリターン (*RIPO*)、⑤新株発行割合 (*S*)、⑥配当プレミアム (*PDND*) を取り上げ、これらの第1主成分として投資家のセンチメントを定義している。

$$SENT \overset{P.C.}{\equiv} \rho_1 TURN + \rho_2 CEFD + \rho_3 NIPO + \rho_4 RIPO + \rho_5 S + \rho_6 PDND. \quad (41)$$

ここで、 $\overset{P.C.}{\equiv}$ は、左辺が右辺の主成分であることを表す。

Baker and Wurgler [2006] は、この指標を米国の市場データ (1965 年 7 月～2007 年 12 月) から推計し公表³⁹している (図 19)。

なお、推計結果は以下のとおりであり、各指標をほぼ均等にウエイト付けたものとなっている。

$$SENT = 0.23TURN - 0.23CEFD + 0.24NIPO \\ + 0.29RIPO + 0.23S - 0.32PDND. \quad (42)$$

ロ. 金融政策の影響に関する応用分析

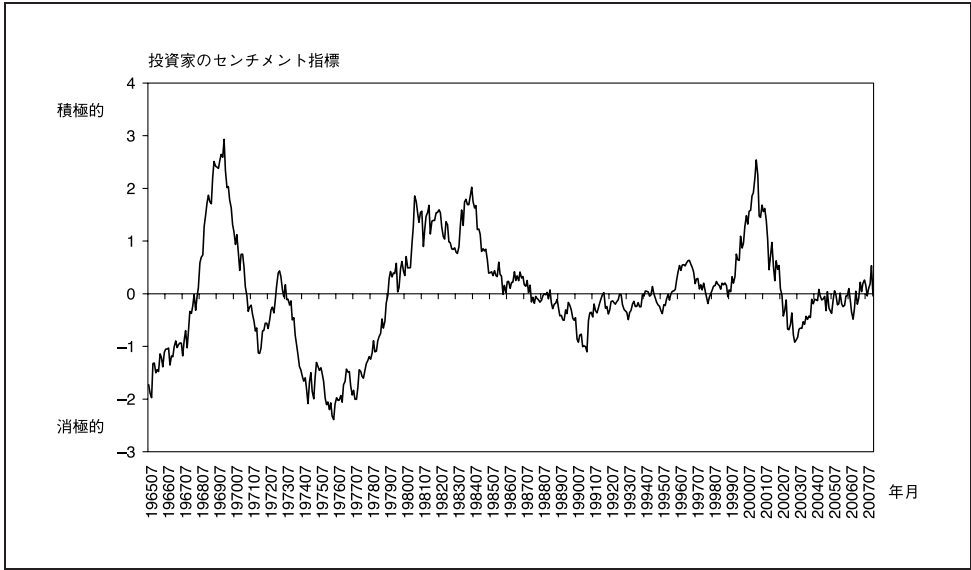
投資家のセンチメントは、資金調達主体や中央銀行からみても重要な指標である。投資家のセンチメントが大きく低下すれば株式市場からの資金調達が困難になるからである。Kurov [2010] は、政策金利の変更が投資家のセンチメントに与える影響を実証分析している。そのために、まず、Kuttner [2001] や Bernanke and Kuttner [2005] に従って、政策金利の変更 Δi_t を予期された成分 Δi_t^e と予期されない成分 Δi_t^u に分解している。具体的には、予期されない政策金利の変更を

37 ここで紹介する研究は必ずしも行動ファイナンスに分類される研究ではないが、投資家のセンチメントを扱っている点で行動ファイナンスと発想が類似しているためサーベイの対象とした。

38 クローズドエンド型ファンドの利回りを意味する。ディスカウントが低いほど投資家が要求する利回りが低くなっていることを意味するため投資家が株式投資に対して積極的になっていることを意味する。

39 著者のホームページ <http://www.stern.nyu.edu/~jwurgler> からダウンロード可能である。

図 19 投資家のセンチメント



資料：著者のホームページに掲載されたデータから作成

$$\Delta i_t^u \equiv \frac{D}{D-d}(f_t^0 - f_{t-1}^0), \quad (43)$$

と定義する。 f_t^0 は、時刻 t における、直近の政策決定会合に関する FF 先物金利であり、 D は直近の会合が行われる月の日数、 d は同月の月初から政策決定会合当日までの日数を表す。ここで、FF 先物金利レートは、将来の FF レートそのものではなく月中平均値と交換する商品性であるため、FF レートの予測値ではなく月中平均値の予測値となっている。このため、 Δi_t^u は単に f_t^0 と f_{t-1}^0 の差ではなく日数調整のファクターである $D/(D-d)$ を掛けたものとなっている。一方、予期された政策金利の変更は実際の政策金利変更から予期されない成分を引いて次式で定義される。

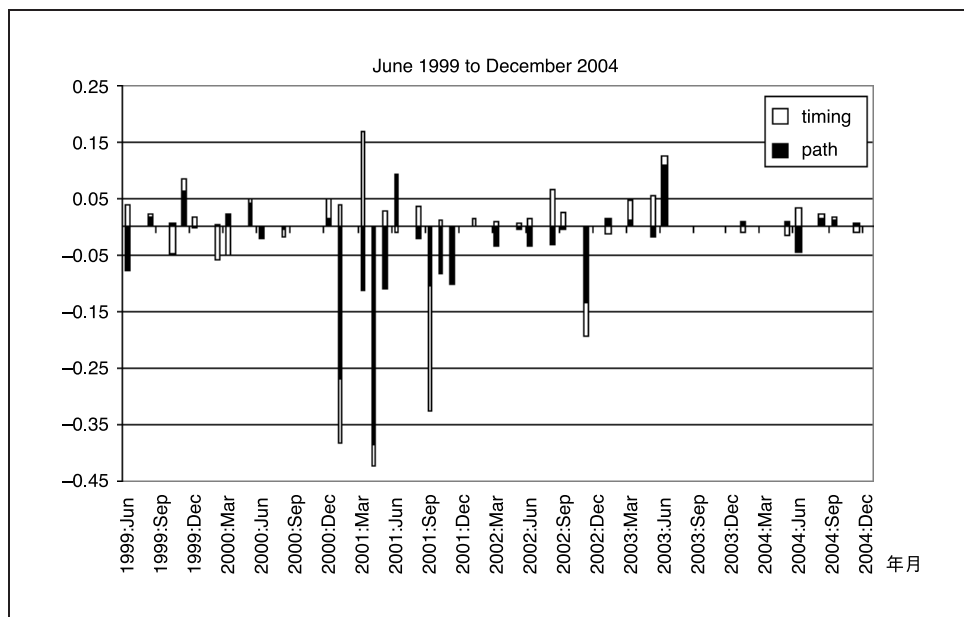
$$\Delta i_t^e \equiv \Delta i_t - \Delta i_t^u. \quad (44)$$

Kuttner [2001] や Bernanke and Kuttner [2005] の結果によると、予期された政策金利の変更は株価に影響を与えないことが知られている。そこで、Kurov [2010] は予期されない政策金利の変更に着目し以下のような分析を行っている。まず、予期されない政策金利の変更を Gürkaynak, Sack, and Swansson [2007] に従って次のようなレベル要因 (LEV_t) とタイミング要因 (TIM_t) に分解する。

$$LEV_t \equiv \left[(f_t^1 - f_{t-1}^1) - \frac{d_1}{D_1} \Delta i_t^u \right] \frac{D_1}{D_1 - d_1}, \quad (45)$$

$$TIM_t \equiv \Delta i_t^u - LEV_t. \quad (46)$$

図 20 予期されない政策金利の変更



備考：縦軸は予期されなかった政策金利の水準を表す。

資料：Gürkaynak, Sack, and Swansson [2007] Figure 4 を転載

ここで、 f_t^1 は、直近の次の政策決定会合に関する FF 先物金利であり、 D_1 は同決定会合が行われる月の日数、 d_1 は同月の月初から政策決定会合当日までの日数を表す。レベル要因の第 1 項である $f_t^1 - f_{t-1}^1$ は、次々回政策決定会合の政策金利水準に関する投資家の予想がどの程度変化したかをおおよそ表している（除く日数調整）。一方、第 2 項の Δi_t^u は直近の決定会合における政策金利の水準に関する投資家の予想がどの程度変化したかを表した部分であり、日数調整の要因である d_1/D_1 や $D_1/(D_1 - d_1)$ を考慮してこの効果を差し引いた LEV_t は、直近の政策決定会合から次々回の政策決定会合までに政策金利の水準が変わることを予想したものとなっている。

図 20 は、このレベル要因とタイミング要因を米国における 1999 年から 2004 年のデータを用いて算出した例である。予期されなかった政策金利の水準を縦軸に示している。このうち黒塗りの部分がレベル要因によるものであり、白塗りの部分がタイミング要因によるものである⁴⁰。

次に、政策金利変更の影響は、市場が強気（bull）な場合と弱気（bear）な場合で異なる可能性があるため、これらのレジームを推計している。すなわち、株価の収益率 R_t を用いた 2 状態のマルコフ・スイッチング・モデル

40 Gürkaynak, Sack, and Swansson [2007] では、タイミング要因のことをパス（path）要因と呼んでいる。どの時点で政策変更が行われるかという金利のパスが変更されるという意味合いである。

$$R_t = \mu_{S_t} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma_{S_t}), \quad (47)$$

を考える。ここで、 S_t は強気と弱気の2つの状態を表し、 μ_{S_t} と σ_{S_t} は、それぞれ状態 S_t における株価収益率のトレンドとボラティリティを表す。この分解により、各時点で市場が強気または弱気のレジームであった確率が推計される。

以上の指標を用いて、予期されない政策金利の変更が株価や投資家のセンチメントに与える影響を次の線形回帰により実証する。

$$R_t \text{ or } SENT_t = \alpha + \beta_1 \Delta i_t^u BP_t + \beta_2 \Delta i_t^u (1 - BP_t) + \varepsilon_t. \quad (48)$$

ここで、 BP_t は(47)式から推計された市場が強気になる確率を表す。

さらに、予期されない政策金利の変更をレベル要因とタイミング要因に分解して次の線形回帰も行っている。

$$\begin{aligned} R_t \text{ or } SENT_t = \alpha + \gamma_1 LEV_t BP_t + \gamma_2 TIM_t BP_t \\ + \gamma_3 LEV_t (1 - BP_t) + \gamma_4 TIM_t (1 - BP_t) + \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (49)$$

ハ. 分析結果と含意

分析結果と含意を表10にまとめた。まず、予期されない政策金利の引上げは、株価を下落させる方向に影響し ($\beta_1 = -1.50$, $\beta_2 = -11.81$)、市場が弱気な時ほどその影響が大きいとの結果を得ている。これは、予期された政策金利の変更が株価に影響しないという Kuttner [2001] や Bernanke and Kuttner [2005] の結果と対照的である。特にレベル要因は、市場が強気、弱気どちらの場合でも株価を下落させる方向に影響し ($\gamma_1 = -3.63$, $\gamma_3 = -9.71$)、その影響は弱気な時ほど大きい。一方、タイミング要因 (利上げの早期化) は強気な時に株価を上昇させる方向に、弱気な時に株価を下落させる方向に影響する ($\gamma_2 = 2.21$, $\gamma_4 = -24.37$)。特に、市場が弱気な時は、レベル要因よりタイミング要因の方が強く影響し、政策金利の変更はタイミングがより重要であることを指摘している。

次に、予期されない政策金利の引上げは、投資家のセンチメントにも影響を及ぼし ($\beta_1 = 2.43$, $\beta_2 = -7.10$)、その影響は弱気な時ほど大きいとの結果を得ている。市場が弱気な時は、投資家のセンチメントを冷やす方向に影響する一方で、強気な時は投資家のセンチメントを上昇させる方向に影響する。これをレベル要因とタイミング要因に分解しても、どちらも同程度に影響する。ただし、弱気な市場に限ってみれば、レベル要因よりタイミング要因が強く影響し、この場合もタイミングがより重要であるとの結果を得ている。

クレジットスプレッドに与える影響については、Baa 格の10年物スプレッドを分析の対象として推計を行っている。予期されない利上げの影響は、市場が強気なほど大きく、クレジットスプレッドを拡大させる方向に影響する ($\beta_1 = 0.18$, $\beta_2 =$

表 10 予期されない政策金利引き上げの影響

影響を受ける対象	影響の方向	詳細
株価	下落させる	弱気市場の時に影響大（タイミング＞レベル要因） 予期された政策金利の変更が影響しないのと対照的
投資家のセンチメント	（弱気市場）低下させる （強気市場）上昇させる	弱気市場の時に影響大（タイミング＞レベル要因）
クレジットスプレッド	拡大させる	強気市場の時に影響大
タームスプレッド	縮小させる	—

0.02)。他方、イールドカーブに与える影響については、10年債と1年債のタームスプレッドを推計の対象として調べている。強気と弱気いずれの場合も、予期されない政策金利の引き上げは、タームスプレッドを縮小する方向に影響することが示されている。

(6) 投資家の群集行動を把握する指標

ここでは、株式市場における群集行動を把握する指標についての研究を紹介する。従来は、ファンドマネージャーの群集行動⁴¹や金融アナリストの群集行動⁴²を扱った研究が比較的多く行われてきたが、最近では、株式市場における群集行動を把握する研究も進められている。以下、モデルの基本的な考え方を説明し、今次金融危機に関する応用例を紹介する。

イ. モデルの設定

株式市場において群集行動が発生すると、どの銘柄もファンダメンタルと関係なく「価格が同じ方向に動く」と考えられる。Christie and Huang [1995] は、銘柄間における株価変動率の「ばらつき度合い」を用いて群集行動を把握する指標を考案している。具体的には、銘柄間における標準偏差（cross-sectional standard deviation; $CSSD_t$ ）：

$$CSSD_t \equiv \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_t^i - R_t^M)^2}, \quad (50)$$

と絶対偏差（cross-sectional absolute deviation; $CSAD_t$ ）：

41 例えば Lakonishok, Shleifer, and Vishny [1992] や Wermers [1999] がある。

42 例えば Trueman [1994]、Graham [1999]、Welch [2000]、Hong, Kubik, and Solomon [2000]、Gleason and Lee [2003]、Clement and Tse [2005] がある。

$$CSAD_t \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |R_t^i - R_t^M|, \quad (51)$$

を用いている。ここで R_t^i は個別銘柄 i の収益率を表し、 R_t^M は市場ポートフォリオの収益率（ R_t^i の平均値）を表す。

単純に考えれば、この「ばらつき度合い」が小さいほど、どの銘柄も同じ方向に動いているため、投資家が群集行動をしている可能性がある。しかし、 $CSSD_t$ や $CSAD_t$ は、株価の変動が小さい時ほど低下するという性質があり、これらの指標が低いからといって群集行動が発生しているとは早計である。この点は、CAPM の理論を援用すると理解しやすい。CAPM によれば、個別銘柄 i の収益率 R_t^i は、市場ポートフォリオの収益率 R_t^M とベータ値 β^i および各銘柄の総時価のウェイト n_i による加重平均値 β^M を用いて以下のように表せる。

$$E_t(R_t^i) = r + \beta^i E_t(R_t^M - r), \quad \sum_{i=1}^n n_i \beta^i = \beta^M. \quad (52)$$

この式を $CSAD_t$ の定義へ代入すると、

$$E_t[CSAD_t] \equiv \sum_{i=1}^n n_i |\beta^i - \beta^M| E_t[R_t^M - r], \quad (53)$$

となり、 $CSAD_t$ は、市場ポートフォリオの収益率、すなわち株価全体の変動に比例して動くことがわかる。このため、こうした性質を考慮したうへでも $CSAD_t$ が低いと判断できるかが問題となる。

Christie and Huang [1995] は、株価が大きく変動したストレス時においても $CSSD_t$ が低く観測されれば群集行動を確認できると考え、ストレス・ダミーと呼ばれる指標 D_t^U と D_t^D で $CSSD_t$ を線形回帰している。

$$CSSD_t = a + b_1 D_t^U + b_2 D_t^D + \varepsilon_t. \quad (54)$$

ここでストレス・ダミーとは、株価収益率が分布の上側（あるいは下側）1% など極端な状態となった場合に 1 の値を取り、それ以外の平時では 0 の値を取る変数である。(54) 式の $CSSD_t$ は、平常時には a 、ストレス時には $a + b_1$ （あるいは $a + b_2$ ）の値を取るため、 b_1 と b_2 が有意に負の値と推計されれば、ストレス時において通常時より低い値を取ることが確認され、群集行動の可能性を指摘できる。同論文は、この手法を米国の株式市場（分析期間：1925 年 12 月～1988 年 12 月および 1962 年 7 月～1998 年 12 月）に適用したが、明確な群集行動は確認されなかった。

これに対し、Chang, Cheng, and Khorana [2000] は、ダミー変数で回帰を行うのではなく、市場ポートフォリオの収益率 R_t^M で 2 次回帰する方法を提案した。

$$CSAD_t = a_0 + b_1 R_t^M + b_2 |R_t^M| + b_3 (R_t^M)^2 + \varepsilon_t. \quad (55)$$

右辺の第2項目までは(53)式のCAPMで予測される式であるため、それ以降の b_2 と b_3 が有意に負の値で推計されれば群集行動を確認できる。

さらにChiang and Zheng [2010]では、今次金融危機を意識して群集行動の「連鎖・連鎖」を意識した分析に拡張している。すなわち、(55)式の説明変数に他国（例えば米国）の $CSAD_t$ 指標等を加え、以下のような回帰を行っている。

$$CSAD_t = a_0 + b_1 R_t^M + b_2 |R_t^M| + b_3 (R_t^M)^2 + b_4 CSAD_t^{us} + b_5 (R_t^{us,M})^2 + \varepsilon_t. \quad (56)$$

ロ. 分析結果と含意

Chiang and Zheng [2010]は、まず、市場間の連鎖を考慮しない(55)式を先進国・ラ米諸国・アジア諸国の計18カ国⁴³の株式市場に適用した。データ期間は1989年4月25日～2009年4月24日と今次金融危機を含んでいる。推計の結果、米国を除く先進国およびアジア諸国において群集行動が確認された一方で、米国とラ米諸国では群集行動が確認されなかった。

次に、米国市場を説明変数として導入した(56)式で分析をしている。これを同じ期間のデータで推計した結果、 b_4 は有意に正の値に推計された。すなわち、米国の市場において $CSAD_t$ が低下し、群集行動が発生しやすい状況になった場合には、他の国においても群集行動が発生しやすい構造にあることが確認された。ただし、前述のように上記期間のデータでは米国自身に明確な群集行動は確認されなかったほか、今次金融危機時のデータ（2008年3月3日～2009年3月31日）についても同様であった。このため、今次金融危機の発生原因が米国の群集行動にあるとは結論付けられないものの、群集行動が発生しにくい米国においても $CSAD_t$ が低下した場合には、世界で群集行動が発生する可能性があるとは指摘している。

ハ. その他の分析例

以上の分析とは異なるが、同様にCAPMをベースに群集行動を分析している研究としてHwang and Salmon [2001, 2004, 2009]の一連の結果がある。Hwang and Salmon [2001]では、米国、英国、韓国の株式市場を分析し、市場安定期ほどむしろ群集行動が起きやすいことを報告している。また、Hwang and Salmon [2004]では、通貨危機前後の米国と韓国の株式市場を分析し、通貨危機後に群集行動が消えたことを確認している。

43 具体的には、先進国（豪州、フランス、ドイツ、香港、日本、英国、米国）、ラ米諸国（アルゼンチン、ブラジル、チリ、メキシコ）、アジア諸国（中国、韓国、台湾、インドネシア、マレーシア、シンガポール、タイ）の計18カ国。

5. 有用性と限界に関する議論：一連のサーベイを振り返って

最後に行動ファイナンスの有用性と限界について、いくつかの論調を紹介しつつ整理する。

(1) 行動ファイナンスに対する批判的見解

本稿では、主として行動ファイナンスの有用性が示唆される研究例を説明してきたが、伝統的なファイナンス理論の立場からは、これらのアプローチに対する限界を指摘する声も少なくない。例えば、行動ファイナンスの有用性と限界を整理した文献としては Hirshleifer [2001] が有名である。また、今次金融危機の経験を踏まえて、行動ファイナンスが一段と注目されていることに對し、やや批判的な見解を示した文献として Ball [2009] がある。それらの主な論調に基づき、行動ファイナンスに対する批判的な見方をまとめると以下のとおりである。

第1に、Friedman [1953] が指摘したように、行動ファイナンスが提示するような非合理的な投資家が存在したとしても、合理的な投資家が裁定取引を行えば、非合理的な投資家は損失を抱え市場から淘汰される。こうした市場淘汰仮説（market selection hypothesis）を前提とすれば、非合理的な投資家を考察する必要性は大きくないと考えることができる。

第2に、伝統的ファイナンス理論の出発点である効率的市場仮説が成立しないとしても、一方で、行動ファイナンスがこれに取って代わるほど広範囲に通用する理論であるとはいえない。すなわち、行動ファイナンスという学術体系は、系統だった理論に依拠して構成されているとはいえず、分析目的や局面に応じて異なる理論を適用するなど、パッチワーク的な体系となっている点で限界がある。

第3に、行動ファイナンスの多くは、投資家の効用関数や確率が伝統的ファイナンス理論のものとは異なるとして表現されるが、そのような関数形が根源的に与えられたものであるのか、あるいは外的要因の影響を受けて形成されたものであるのかについてはあまり言及されていない^{44,45}。実証的な立場からは、アンケート調査などに基づき関数形を研究する試みがあるが、その場合でも、例えば投資家に課せられた制約や報酬体系といった外的要因の影響を完全に制御したうえで根源的な効

44 この論点は、マクロ経済学における構造モデルと誘導モデルの相違に関する問題と類似している。もし、行動ファイナンスにおける効用関数等が誘導モデルのような性格を持つとすると、政策や制度などの外的条件が変化すればその関数形は変化してしまう可能性がある。この場合、ルーカス批判と同じ意味で、行動ファイナンスの分野から政策合意を導出することには限界があることになってしまう。

45 理論経済学においては、経済主体の行動について根源的な公理を設定したうえで効用関数や主観確率などを導出するスタイルの研究も少なくない。例えば、Gilboa and Schmeidler [1989] は、不確実性回避という公理を前提としてミニマックス効用関数を導出しているほか、それに続く理論研究も多数存在する。ただし、そのような理論研究の成果を行動ファイナンスにおける実証とどう結び付けるかという点では、なお課題が残っていると考えられる。

用関数を導出できているかどうかは明らかでないケースが多い。

このように、行動ファイナンスに基づく研究が進展する中でも、伝統的なファイナンス理論に取って代わる位置付けに達していないというのが主な批判の内容といえる。

(2) 伝統的ファイナンス理論と共存するとの見方

一方、行動ファイナンスの有用性を強調する見方もある。例えば、合理的な投資家による裁定取引には限界があり、特に市場が不安定化した非常時において冷静に裁定取引を行うだろうかという見方がある (Shleifer [2000])。そうした投資家の「非合理性」を説明するうえで、行動ファイナンスが不可欠であるという指摘である。

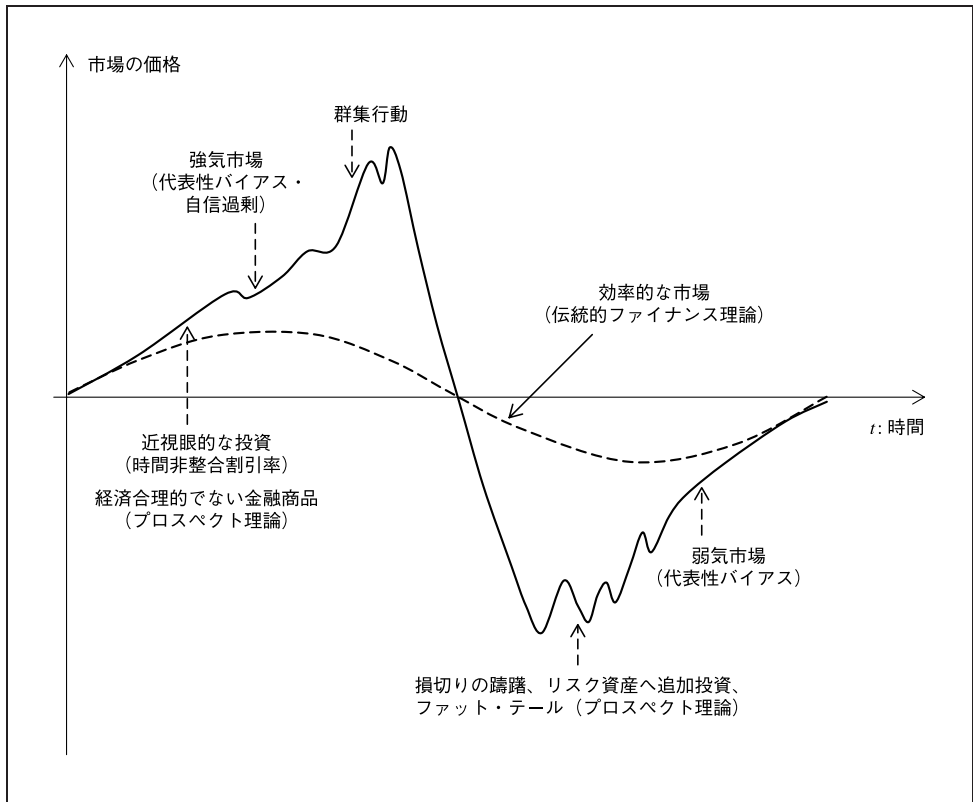
また、行動ファイナンスと伝統的ファイナンスは、互いに補完する立場にあり、同じコインの両面にすぎないという見方も存在する (Lo [2004])。簡単にいえば、平常時を表現するのが伝統的ファイナンス理論であり、非常時あるいは平常時への収束過程を表すのが行動ファイナンスであるという考え方である。例えば、本稿で紹介した研究を用いてこの考え方を示すと以下ようになる (図 21)。

まず、平常時から非常時へ乖離する過程を考えてみると、近視眼的な投資が行われていたとか、経済合理的でない金融商品が売られていたということが少なくない。こうした現象は、伝統的ファイナンス理論に時間非整合割引率を融合することやプロスペクト理論を融合することで説明可能であった。次に、平常時からの乖離が大きくなっていく段階では、投資家が過去の実績を過信していたということが少なくない。これは代表性バイアスや投資家の自信過剰により説明された。また、非常時の最終段階では、他人が購入しているから自分も買うという合理的な根拠のない状況に陥る。こうした点は、投資家の群集行動として説明され、市場データから分析する研究が進められている。

以上とは逆に、非常時から平常時へ戻る過程においては、過去の利益水準をあきらめきれずに損切りを躊躇する、あるいはリスク資産への追加投資を行ってしまうことがある。こうした点は、プロスペクト理論とリアルオプションあるいは CAPM を融合させることにより説明された。また、こうしたことが原因で金融資産の価格分布がファット・テールになることも説明が可能であった。

以上のように整理すれば、平常時の分析には基本的に伝統的なファイナンス理論を利用し、ストレス時の分析には行動ファイナンスを援用するというのが、実用的な方法の 1 つと考えられる。例えば、4 節 (2) や (3) では、プロスペクト理論に従う投資家の効用関数を市場のデータから推計している。特に、ストレス時のデータから投資家の効用関数を推計すれば、非常時に投資家がどのような行動特性を持つか分析できる。さらに、推計されたパラメータを 3 節で紹介したプロスペクト理論に従う投資家の CAPM やリアルオプション・モデルに適用すれば、非常時における投資家のリスク選好的な投資行動を記述でき、その含意を検討できる。同様に、推計

図 21 伝統的ファイナンス理論と行動ファイナンスの補完関係



されたパラメータを4節(1)で紹介したプロスペクト理論に従う投資家のバリュー・アット・リスクへ適用することで、こうした投資家が非常時にどのような価格付けを行い、市場価格をどの程度ファット・テールにさせるか分析することができる。こうして算出されたバリュー・アット・リスクと、もともと正規分布ないし2項分布で与えたビジネスリスクの差を考えれば「人為的リスク」を推計できるだろう。また、3節(1)では、プロスペクト理論のパラメータのうち基準点は投資家の貪欲さを表すことを説明した。この考えに基づき「人為的リスク」を分析するストレステストを導入することも考えられる。その場合、どのような条件が揃うと市場が平常時の状態から乖離して行動ファイナンスの世界に入るのかをあらかじめ整理しておくことが重要と考えられる。

6. おわりに

本稿では、行動ファイナンスの基本的な考え方を説明したうえで、行動ファイナンスと伝統的な投資理論あるいは金融工学との融合を目指した各種の研究を紹介した。具体的には、ポートフォリオ選択、リアルオプションといった従来のファイナンス理論に対し、プロスペクト理論や時間非整合割引率といった行動ファイナンスの理論が融合されて市場における各種の事象に対する説明力が向上していることを示した。こうした一連の研究は、単に理論モデルへの応用にとどまらず、バリュー・アット・リスクやオプション理論、市場分析にも応用され始めており、行動ファイナンスの実用化へ向けた取組みも進展しつつあることを確認した。

もっとも、これらの研究は、現段階ではなお発展途上にあり、従来のファイナンス理論や金融工学に取って代わって金融実務の根幹を形成するほどの体系が構築されているわけではない。また、行動ファイナンスのアプローチそのものに対して限界が指摘されることもある。しかし、それでも行動ファイナンスからの知見には、今次金融危機を踏まえたリスク管理や市場分析のあり方を考えるうえで参考になる点が多く、例えばストレステストなど、非常時の分析に活用していくことは考えられる。また、どのような条件のもとで従来のファイナンス理論では説明できない事態が発生するのかをあらかじめ整理しておけば、行動ファイナンスに基づく分析が必要な局面を見極めるうえで有益であろう。このようにして、行動ファイナンスは、伝統的なファイナンス理論とともに今後も発展し、金融実務への応用がさらに進むことが期待される。

参考文献

- 角田康夫、『行動ファイナンスⅡ：例題と用語集で読み解く非合理の謎』、金融財政事情研究会、2004年
- 高橋典孝、「証券価格変動のモメンタム現象とリバーサル現象に関する考察：行動ファイナンスの考え方の整理とそれに基づく定量分析」、『金融研究』第23巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2004年、43～70頁
- 多田洋介、『行動経済学入門』、日本経済新聞社、2003年
- 友野典男、『行動経済学：経済は「感情」で動いている』、光文社、2006年
- 俊野雅司、『証券市場と行動ファイナンス』、東洋経済新報社、2004年
- 日本銀行金融研究所、「ファイナンス・ワークショップにおけるパネル討論『金融危機後の金融工学の展開』の模様」、『金融研究』第29巻第3号、日本銀行金融研究所、2010年、1～18頁
- 山田哲也、「低金利下における企業の投資行動と信用リスク：リアルオプション・モデルによる考察」、『金融研究』第29巻第2号、日本銀行金融研究所、2010年、121～158頁
- Ainslie, George, *Picoeconomics*, Cambridge University Press, 1992.
- Akerlof, George A., “Behavioral Macroeconomics and Macroeconomic Behavior,” *American Economic Review*, 92 (3), 2002, pp. 411–433.
- Baker, Malcolm, and Jeffrey Wurgler, “Investor Sentiment and the Cross-Section of Stock Returns,” *Journal of Finance*, 61 (4), 2006, pp. 1645–1680.
- Ball, Ray, “The Global Financial Crisis and the Efficient Market Hypothesis: What Have We Learned?” *Journal of Applied Corporate Finance*, 21 (4), 2009, pp. 8–16.
- Barberis, Nicholas, and Richard Thaler, “A Survey of Behavioral Finance,” in G. M. Constantinides, M. Harris, and R. Stulz, eds. *Handbook of the Economics of Finance*, North-Holland, 2003.
- , and Ming Huang, “Stocks as Lotteries: The Implications of Probability Weighting for Security Prices,” *American Economic Review*, 98 (5), 2008, pp. 2066–2100.
- , and Wei Xiong, “What Drives the Disposition Effect? An Analysis of a Long-Standing Preference-Based Explanation,” *Journal of Finance*, 64 (2), 2009, pp. 751–784.
- Benartzi, Shlomo, and Richard Thaler, “Myopic Loss Aversion and the Equity Premium Puzzle,” *Quarterly Journal of Economics*, 110 (1), 1995, pp. 73–92.
- Bernanke, Ben S., and Kenneth N. Kuttner, “What Explains the Stock Market’s Reaction to Federal Reserve Policy?” *Journal of Finance*, 60 (3), 2005, pp. 1221–1257.
- Blackburn, Douglas W., and Andrey D. Ukhov, “Estimating Preferences toward Risk: Evidence from Dow Jones,” Working Paper, International Center for Finance at Yale School of Management, 2006.

- Bliss, Robert R., and Nikolaos Panigirtzoglou, "Testing the Stability of Implied Volatility Density," *Journal of Banking and Finance*, 26 (2–3), 2002, pp. 381–442.
- , and ———, "Option-Implied Risk Aversion Estimates," *Journal of Finance*, 59 (1), 2004, pp. 407–446.
- Breeden, Douglas T., and Robert H. Litzenberger, "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices," *Journal of Business*, 1978, 51 (4), pp. 621–651.
- Brunnermeier, Markus K., *Asset Pricing under Asymmetric Information: Bubbles, Crashes, Technical Analysis and Herding*, Oxford University Press, 2001.
- Calvet, Laurent, Jean-M. Grandmont, and Isabelle Lemaire, "Aggregation of Heterogeneous Beliefs, Asset Pricing and Risk Sharing in Complete Financial Markets," Working Paper No. 2004-12, Centre de Recherche en Economie et Statistique, 2004.
- Chang, Eric C., Joseph W. Cheng, and Ajay Khorana, "An Examination of Herd Behavior in Equity Markets: An International Perspective," *Journal of Banking and Finance*, 24 (10), 2000, pp. 1651–1679.
- Chiang, Thomas C., and Dazhi Zheng, "An Empirical Analysis of Herd Behavior in Global Stock Markets," *Journal of Banking and Finance*, 34 (8), 2010, pp. 1911–1921.
- Christie, William G., and Roger D. Huang, "Following the Pied Piper: Do Individual Returns Herd around the Market?" *Financial Analysts Journal*, 51 (4), 1995, pp. 31–37.
- Clement, Michael B., and Senyo Y. Tse, "Financial Analyst Characteristics and Herding Behavior in Forecasting," *Journal of Finance*, 60 (1), 2005, pp. 307–341.
- Cont, Rama, and Peter Tankov, *Financial Modeling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC, 2004.
- Daniel, Kent, David Hirshleifer, and Avanidhar Subrahmanyam, "Investor Psychology and Security Market Under- and Overreactions," *Journal of Finance*, 53 (6), 1998, pp. 1839–1885.
- , ———, and ———, "Overconfidence, Arbitrage and Equilibrium Asset Pricing," *Journal of Finance*, 56 (3), 2001, pp. 921–965.
- DeLong, J. Bradford, Andrei Shleifer, Lawrence Summers, and Robert Waldmann, "Positive Feedback Investment Strategies and Destabilizing Rational Speculation," *Journal of Finance*, 45 (2), 1990, pp. 379–395.
- Friedman, Milton, "The Case for Flexible Exchange Rates," *Essays in Positive Economics*, University of Chicago Press, 1953.
- Gilboa, Itzhak, and David Schmeidler, "Maxmin Expected Utility with Non-unique Prior," *Journal of Mathematical Economics*, 18 (2), 1989, pp. 141–153.
- Gleason, Cristi A., and Charles M. C. Lee, "Analyst Forecast Revisions and Market Price Discovery," *Accounting Review*, 78 (1), 2003, pp. 193–225.

- Gollier, Christian, "Whom Should We Believe? Aggregation of Heterogeneous Beliefs," *Journal of Risk and Uncertainty*, 35 (2), 2007, pp. 107–127.
- , and Richard Zeckhauser, "Aggregation of Heterogeneous Time Preferences," *Journal of Political Economy*, 113 (4), 2005, pp. 878–896.
- Graham, John R., "Herding among Investment Newsletters: Theory and Evidence," *Journal of Finance*, 54 (1), 1999, pp. 237–268.
- Grenadier, Steven R., and Neng Wang, "Investment under Uncertainty and Time-Inconsistent Preferences," *Journal of Financial Economics*, 84 (1), 2007, pp. 2–39.
- Gürkaynak, Refet S., Brian Sack, and Eric Swansson, "Market-Based Measure of Monetary Policy Expectations," *Journal of Business and Economic Statistics*, 25 (2), 2007, pp. 201–212.
- Hara, Chiaki, "Complete Monotonicity of the Representative Consumer's Discount Factor," *Journal of Mathematical Economics*, 44 (12), 2008, pp. 1321–1331.
- , "Heterogeneous Impatience in a Continuous-Time Model," *Mathematics and Financial Economics*, 2 (2), 2009, pp. 129–149.
- Harris, Christopher, and David Laibson, "Hyperbolic Discounting and Consumption," in Mathias Dewatripont, Lars P. Hansen, and Stephen J. Turnovsky, eds. *Advances in Economics and Econometrics, Theory and Applications 8th World Congress Volume 1*, Econometric Society, 2003, pp. 258–298.
- Hens, Thorsten, and Marc O. Rieger, "The Dark Side of the Moon: Structured Products from the Customer's Perspective," EFA 2009 Bergen Meeting Paper, 2009.
- Hirshleifer, David A., "Investor Psychology and Asset Pricing," *Journal of Finance*, 56 (4), 2001, pp. 1533–1597.
- Hong, Harrison, Jeffrey D. Kubik, and Amit Solomon, "Security Analysts' Career Concerns and Herding of Earnings Forecasts," *RAND Journal of Economics*, 31 (1), 2000, pp. 121–144.
- Huang, James, "Impact of Divergent Consumer Confidence on Options Prices," *Review of Derivatives Research*, 6 (3), 2003, pp. 165–177.
- Hwang, Soosung, and Mark Salmon, "A New Measure of Herding and Empirical Evidence," Working Paper Series No. WP01-12, Financial Econometrics Research Centre, Warwick Business School, 2001.
- , and ———, "Market Stress and Herding," *Journal of Empirical Finance*, 11 (4), 2004, pp. 585–616.
- , and ———, "Sentiment and Beta Herding," Working Paper, Financial Econometrics Research Centre, Warwick Business School, 2009.
- Jackwerth, Jens C., "Recovering Risk Aversion from Option Prices and Realized Returns," *Review of Financial Studies*, 13 (2), 2000, pp. 433–451.
- Jin, Hanqing, and Xun Y. Zhou, "Behavioral Portfolio Selection in Continuous Time," *Mathematical Finance*, 18 (3), 2008, pp. 385–426.

- , and ———, “Greed, Leverage, and Potential Losses: A Prospect Theory Perspective,” Working Paper, Oxford University, 2010.
- Jouini, Elyès, and Clotilde Napp, “Heterogeneous Beliefs and Asset Pricing in Discrete Time: An Analysis of Pessimism and Doubt,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30 (7), 2006a, pp. 1233–1260.
- , and ———, “Aggregation of Heterogeneous Beliefs,” *Journal of Mathematical Economics*, 42 (6), 2006b, pp. 752–770.
- , and ———, “Consensus Consumer and Intertemporal Asset Pricing with Heterogeneous Beliefs,” *Review of Economic Studies*, 74 (4), 2007, pp. 1149–1174.
- Kahneman, Daniel, and Mark W. Riepe, “Aspect of Investor Psychology: Beliefs, Preferences, and Biases Investment Advisors Should Know About,” *Journal of Portfolio Management*, 24 (4), 1998, pp. 52–65.
- , and Amos Tversky, “Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk,” *Econometrica*, 47 (2), 1979, pp. 263–292.
- , and ———, “Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty,” *Journal of Risk and Uncertainty*, 5 (4), 1992, pp. 297–323.
- Kurov, Alexander, “Investor Sentiment and the Stock Market’s Reaction to Monetary Policy,” *Journal of Banking and Finance*, 34 (1), 2010, pp. 139–149.
- Kuttner, Kenneth N., “Monetary Policy Surprises and Interest Rates: Evidence from the Fed Funds Futures Market,” *Journal of Monetary Economics*, 47 (3), 2001, pp. 523–544.
- Kyle, Albert S., Hui Ou-Yang, and Wei Xiong, “Prospect Theory and Liquidation Decisions,” *Journal of Economic Theory*, 129 (1), 2006, pp. 273–288.
- Laibson, David, “Golden Eggs and Hyperbolic Discounting,” *Quarterly Journal of Economics*, 112 (2), 1997, pp. 443–477.
- Lakonishok, Josef, Andrei Shleifer, and Robert W. Vishny, “The Impact of Institutional Trading on Stock Prices,” *Journal of Financial Economics*, 32 (1), 1992, pp. 23–43.
- Lo, Andrew W., “The Adaptive Markets Hypothesis,” *Journal of Portfolio Management*, 30 (5), 2004, pp. 15–29.
- Lowenstein, George, and Drazen Prelec, “Anomalies in Intertemporal Choice: Evidence and an Interpretation,” *Quarterly Journal of Economics*, 107 (2), 1992, pp. 573–597.
- Maymin, Philip, “Prospect Theory and Fat Tails,” *Risk and Decision Analysis*, 1 (3), 2009, pp. 187–195.
- Mehra, Rajnish, and Edward C. Prescott, “The Equity Premium: A Puzzle,” *Journal of Monetary Economics*, 15 (2), 1985, pp. 145–161.
- Shefrin, Hersh, *A Behavioral Approach to Asset Pricing*, Academic Press, 2005.
- , “Risk and Return in Behavioral SDF-Based Asset Pricing Models,” *Journal of Investment Management*, 6 (4), 2008, pp. 4–22.

- , and Meir Statman, “Behavioral Portfolio Theory,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, June 2000, pp. 127–151.
- Shleifer, Andrei, *Inefficient Markets: An Introduction to Behavioral Finance*, Oxford University Press, 2000.
- Thaler, Richard H., “Some Empirical Evidence on Dynamic Inconsistency,” *Economic Letters*, 8 (3), 1981, pp. 201–207.
- , and Erich J. Johnson, “Gambling with the House Money and Trying to Break Even: The Effects of Prior Outcomes on Risky Choice,” *Management Science*, 36 (6), 1990, pp. 643–660.
- Trueman, Brett, “Analyst Forecasts and Herding Behavior,” *Review of Financial Studies*, 7 (1), 1994, pp. 97–124.
- Welch, Ivo, “Herding among Security Analysts,” *Journal of Financial Economics*, 58 (3), 2000, pp. 369–396.
- Wermers, Russ, “Mutual Fund Herding and the Impact on Stock Prices,” *Journal of Finance*, 54 (2), 1999, pp. 581–622.
- Wolff, Christian C. P., Cokki Versluis, and Thorsten Lehnert, “A Cumulative Prospect Theory Approach to Option Pricing,” LSF Research Working Paper Series No. 09-03, Luxembourg School of Finance, 2009.

補論 1. ブレーク・イーブン効果

3 節(3)で説明を省略したブレーク・イーブン効果に関して説明する。この効果を説明するために、Thaler and Johnson [1990] による代表的な例を考えよう。先に行ったギャンブルで既に 450 円を損している状況を考える。次の投資として行おうとすればどちらがよいか次の 2 つから選択する。

A：確実な 500 円の獲得

B：1/3 の確率で 1,500 円を獲得するが確率 2/3 でゼロ

さらに次の 2 つの選択肢であった場合はどうするか考える。

C：確実な 50 円の獲得

D：1/3 の確率で 1,050 円を獲得するが確率 2/3 で 450 円を損する

多くの人は A と D を選択する。A はリスク回避的な行動に対し D はリスク選好的な行動である。A は賭けを選択しなくても損をせず終われる（ブレーク・イーブン）ことが可能である。

補論 2. Shefrin [2008] における投資家の価格付け問題

3 節(5)において省略した投資家の価格付け問題を説明する。まず、投資家 i ($i = 1, 2, \dots, n$) の最適化問題を次のように考える。

$$\begin{aligned} \max_{c_0, c_1} & u(c_0^{(i)}) + \sum_{\omega=1}^n P_i(\omega) \delta u(c_1^{(i)}(\omega)) \\ \text{s.t.} & c_0^{(i)} + \sum_{\omega=1}^n \pi(\omega) c_1^{(i)}(\omega) = W_i. \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

ラグランジアンは、

$$\begin{aligned} \max_{c_0, c_1, \lambda_i} & u(c_0^{(i)}) + \sum_{\omega=1}^n P_i(\omega) \delta u(c_1^{(i)}(\omega)) \\ & - \lambda_i \left(c_0^{(i)} + \sum_{\omega=1}^n \pi(\omega) c_1^{(i)}(\omega) - W_i \right), \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

となる。効用関数がベキ効用型の場合の 1 階条件は、

$$\frac{1}{c_0^{(i)\gamma}} - \lambda_i = 0, \quad \frac{\delta P_i(\omega)}{c_1^{(i)}(\omega)^\gamma} - \lambda_i \pi(\omega) = 0, \quad (\text{A-3})$$

となり、ここから λ_i を消去することで、各投資家のプライシング式

$$\pi(\omega) = \left(\frac{c_0^{(i)}}{c_1^{(i)}(\omega)} \right)^\gamma \delta P_i(\omega), \quad (\text{A-4})$$

が導出される。財市場の均衡では消費 $c(\omega)$ と生産量 $w(\omega)$ が一致するように、すなわち、

$$\sum_{i=1}^m c_0^{(i)} = w_0, \quad \sum_{i=1}^m c_1^{(i)}(\omega) = w_1(\omega), \quad (\text{A-5})$$

が満たされるように価格 $\pi(\omega)$ が調整される。(A-4) 式をこの式へ代入するために消費 c について整理すると次のようになる。

$$c_1^{(i)}(\omega) = \left(\frac{\delta P_i(\omega)}{\pi(\omega)} \right)^{1/\gamma} c_0^{(i)}. \quad (\text{A-6})$$

この式を (A-5) 式の第 2 式へ代入すると、

$$w_1(\omega) = \left(\frac{\delta}{\pi(\omega)} \right)^{1/\gamma} \sum_{i=1}^m P_i(\omega)^{1/\gamma} c_0^{(i)}, \quad (\text{A-7})$$

と c_1 を消去することができる。ここで、 $P_i = P$ と信念が等質であれば、(A-7) 式は

$$w_1(\omega) = \left(\frac{\delta P(\omega)}{\pi(\omega)} \right)^{1/\gamma} \underbrace{\sum_{i=1}^m c_0^{(i)}}_{w_0}, \quad (\text{A-8})$$

と簡単になり、(17) 式の第 1 式を代入することで c_0 を消去することができる。しかし信念が異質である場合は、こうした計算ができないため、両者の違いを明確にするために、(A-7) 式を

$$w_1(\omega) = \left(\frac{\delta}{\pi(\omega)} \right)^{1/\gamma} \left(\frac{\sum_{i=1}^m P_i(\omega)^{1/\gamma} c_0^{(i)}}{\sum_{i=1}^m c_0^{(i)}} \right) \underbrace{\sum_{i=1}^m c_0^{(i)}}_{w_0}, \quad (\text{A-9})$$

と変形する。ここで、右辺第 2 項は信念の加重平均となっているため、

$$P_M(\omega) \equiv \left(\frac{\sum_{i=1}^m c_0^{(i)} P_i(\omega)^{1/\gamma}}{\sum_{i=1}^m c_0^{(i)}} \right)^\gamma, \quad (\text{A-10})$$

と表すと、状態価格 π は

$$\pi(\omega) = \delta \left(\frac{w_1(\omega)}{w_0} \right)^\gamma P_M(\omega), \quad (\text{A-11})$$

と導出することができる。

補論 3. リスク回避度と市場の価格分布との関係

以下のような投資家の最適化問題（3 節でも登場した最終富の最適化問題）を考える。

$$\max_W E^P[u(W)] \quad \text{s.t.} \quad E^Q[W] = (1+r)^t. \quad (\text{A-12})$$

ラグランジュの未定乗数 L_λ を用いて問題を書きなおすと、

$$\max_{W, \lambda} E^P[u(W)] - L_\lambda \left(E^Q \left[\frac{W}{(1+r)^t} \right] - 1 \right), \quad (\text{A-13})$$

となる。 W に対する最適性の条件、すなわち、1 階微分がゼロとなる条件から

$$f_P(W)u'(W) - L_\lambda \left(f_Q(W) \frac{1}{(1+r)^t} \right) = 0, \quad (\text{A-14})$$

が得られる。これを $W = S$ として整理することで効用関数の 1 階微分は

$$u'(S) = \frac{L_\lambda}{(1+r)^t} \left(\frac{f_Q(S)}{f_P(S)} \right), \quad (\text{A-15})$$

と計算される。この式を再度微分することで効用関数の 2 階微分も

$$u''(S) = \frac{L_\lambda}{(1+r)^t} \left(\frac{df_Q(S)f_P(S) - f_Q(S)df_P(S)}{f_P(S)^2} \right), \quad (\text{A-16})$$

と計算される。これらの比を取ることで、

$$-\frac{u''(S_T)}{u'(S_T)} = \frac{df_P(S_T)}{f_P(S_T)} - \frac{df_Q(S_T)}{f_Q(S_T)}, \quad (\text{A-17})$$

となり、(37) 式が導出される。

補論 4. 投資家が選好するペイオフの導出

Hens and Rieger [2009] は、一般的な効用関数 u を持つ投資家を想定し、その投資家の最終富に関する最適化問題を考察することで、その投資家が選好する金融商品のペイオフを考察している。

$$\begin{aligned} \max_{X_T(\omega)} & E[u(X_T(\omega))] \\ \text{s.t.} & E[m(\omega)X_T(\omega)] = X_0. \end{aligned} \quad (\text{A-18})$$

すなわち、最適化された最終富が、投資家が選好する金融商品のペイオフであるとする。まず、(A-18) 式のラグランジアンは、

$$\max_{X_T} E[u(X_T)] - L_\lambda (E[mX_T] - X_0), \quad (\text{A-19})$$

となり、その 1 階条件から、

$$f_P(\omega)u'(X_T(\omega)) - L_\lambda f_P(\omega)m(\omega) = 0, \quad (\text{A-20})$$

が導出される。これを整理すると

$$u'(X_T(\omega)) - L_\lambda m(\omega) = 0, \quad (\text{A-21})$$

となり、 u' の逆関数 $[u']^{-1}$ により次の解を求めることができる。

$$X_T(\omega) = [u']^{-1}(L_\lambda m(\omega)). \quad (\text{A-22})$$