

銀行間資金決済ネットワークにおける 最適決済行動と流動性節約効果

まきもと なおき
牧本直樹

要 旨

銀行間資金決済ネットワークの参加者は、流動性コストと遅延コストを勘案しながら、最適な実行方法や実行のタイミングを選択する。本稿では、こうした状況での参加者の決済行動を非協力ゲームの枠組みで分析した *Martin and McAndrews [2008]* をベースに、修正 RTGS 方式に対する 3 タイプのモデルを構築し、おのおののモデルに対して決済行動の均衡を導出した。さらに、決済ネットワークの構造、非戦略的参加者の割合、流動性ショックの分布などが決済行動に与える影響を分析した。その結果、遅延コストが増加することで均衡が変化し、決済システム全体の平均コストが減少するという現象や、早期に支払う参加者が増えると逆に支払いを遅らせる参加者が増えるといった現象が起こることを確認した。また流動性節約効果については、サイクルが短く中核的な参加者の中で活発に決済資金が循環しているほど、オフセット機能が有効に活用されることを確認した。分析したモデルは、1 日を 2 時点でモデル化するなど現実の決済ネットワークを十分に表現しているとはいえないが、実際にも観察される事象を説明するなど、決済行動に関する理解を深めるうえで有用な示唆を与えている。

キーワード：銀行間資金決済ネットワーク、流動性節約機能、流動性コスト、遅延コスト、非協力ゲーム

本稿は、筆者が日本銀行金融研究所客員研究員の期間に行った研究をまとめたものである。本稿の作成に当たっては、同研究所企画役の副島 豊氏（現 日本銀行決済機構局）、小田信之氏、吉羽要直氏、日本銀行金融機構局の今久保 圭氏、および匿名の査読者から有益な助言をいただいた。ここに記して感謝する。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りは、すべて筆者個人に属する。

牧本直樹 筑波大学ビジネス科学研究科教授
(E-mail: makimoto@gssm.gsbs.tsukuba.ac.jp)

1. はじめに

銀行間資金決済システム（以下、決済システムと呼ぶ）は、金融機関の日々の決済を支えるインフラとして金融システムにおいて重要な役割を担っている。そのため、各国中央銀行など決済システムの運営者は、決済が円滑に進むように決済方式や運営ルールを設定している。以前は、決済時点で支払いと受取りを相殺してネットポジション（受払尻）を一括決済する時点ネット決済（Deferred Net Settlement; DNS）方式が主流であったが、日中の決済エクスポージャーが高まるという問題があったため、決済リスク管理への問題意識が高まるにつれて、即時グロス決済（Real-Time Gross Settlement; RTGS）方式への移行が進められた。さらに近年では、RTGS方式に流動性節約機能を付加して資金効率性を高めた修正 RTGS方式が中心となっている。日本銀行金融ネットワークシステム（以下、日銀ネットと呼ぶ）でも、2001年1月にRTGS方式が導入され、さらに2008年10月には修正RTGSに相当する「次世代RTGS」が導入されている。

修正RTGS方式は、未決済の支払指図（payment instruction）を待機させる待ち行列を備えたRTGS方式で、待ち行列内の支払指図の中から同時決済可能なものを見つけて決済するオフセット機能を有している。オフセット機能はネット決済と同等の経済的効果を持つため、これによりRTGS方式の課題である流動性コストを低減させることが期待される。一方、決済システムの参加者は、決済ルールに則りながらも、なるべく有利な決済方法や決済のタイミングを選択しようと戦略的に行動するため、各参加者の決済行動は相互に依存性を持つ。したがって、オフセット機能や、取引相手からの受取りを自身の支払いに充てる流動性節約が期待された効果を発揮するかどうかは、自明ではない。

決済システムに参加する金融機関（以下、参加者と呼ぶ）の行動をモデル化し、決済方法や決済のタイミングを分析した研究として、Angelini [1998, 2000]、Bech and Garratt [2003]、Mills and Nesmith [2008]、Martin and McAndrews [2008] などがある。また、Willison [2004] や Beyeler, Glass, Bech, and Soramäki [2007] は、流動性節約効果の分析を行っている。一方、決済システムの実証研究としては、McAndrews and Rajan [2000]、Soramäki *et al.* [2007]、Becher, Galbiati, and Tudela [2008]、今久保・副島 [2008a, b] などが挙げられる。

本稿では、Martin and McAndrews [2008] のモデルをベースに、修正RTGS方式に対応する理論モデルを構築し、ゲーム理論の枠組みを利用して参加者の決済行動の均衡を分析する。参加者の決済行動には、資金調達に必要な流動性コスト、支払いが遅れることで生じる遅延コスト、決済ネットワークの構造、予期できない流動性ショックなど、さまざまな要因が影響する。参加者は、これらの要因に加えて取引相手からの受取りの可能性を考慮しながら、最適な決済方法や決済のタイミングを選択する。

まず、Martin and McAndrews [2008] のモデルをベースに、決済ネットワークの構

造や流動性ショックの分布などを一般化したモデルを考え、参加者間の決済行動の均衡を導出した。その結果、流動性コストに対して遅延コストが相対的に小さい場合は支払遅延が発生し、遅延コストの増加に伴いオフセット機能の利用が増加し、さらに遅延コストが大きくなると早期支払いへと移行することが明らかになった。また、遅延コストが増加するにもかかわらず均衡における決済システム全体のコストが減少する場合があることを確認した。これは、スループット・ルールなどの決済慣行が一定の経済合理性を持つことを示唆している。また、決済ネットワークの構造が均衡に与える影響についても分析を行った。

次に、流動性ショックの大きさを所与として決済行動を選択するようにモデルを修正し、均衡を導出した。結果として、手元資金が多ければ早期返済、少ない場合は支払遅延、中間的な場合はオフセット機能を選択することが示された。また、モデルパラメータと均衡の関係について最初のモデルと比較を行い、流動性ショックが均衡に与える影響を考察した。

最後に、より現実的な設定として複数単位の支払いを行うモデルへと拡張し、最適な支払分割を選択する場合の均衡を導出してその性質を調べるとともに、前の2つのモデルと比較を行った。

これらの分析は、流動性節約機能の効果に着目しつつ、決済ネットワークの構造をモデルに組み込んでおり、複数単位の支払いを考慮しているなどの点で先行研究にはない特徴を持っている。理論解析を可能とするために、先行研究同様、単純化のための制約を課してはいるが、そこから得られる知見は、実際の決済システムの特徴を理解するための知見を与えてくれるものと期待できる。

本稿の構成は次のとおりである。2節では、決済システムで採用されている決済方式を解説し、決済システムにおける参加者の決済行動に関する理論的および実証的な先行研究を紹介する。3節では、本研究で扱う理論的な決済システムのモデルを説明し、予備的な分析を行う。4節では、決済行動の均衡を導出し、決済システムのさまざまな要件が決済行動に及ぼす影響を考察する。5節では、流動性ショックの大きさを知ったうえで支払方法を選択する場合に、4節の均衡がどのように変化するかを分析する。また、6節では、複数単位の支払いを行うモデルに拡張し、最適な支払分割と均衡を導出する。最後の7節では本稿を総括する。

2. 銀行間資金決済ネットワークと決済行動

(1) 決済システムの決済方式

先進諸国における決済システムでは、以前は、複数の支払指図を決済時点までに差引き計算したうえで、ネットポジションを一括決済するDNS方式が採用されていた。DNS方式は所与の総決済額を最小の資金で決済することができるため、決済方式の中では最も資金効率がよい反面、決済時点まで決済が完了しないため、日中の

決済エクスポージャーが高まるというリスク管理上の問題点を抱えていた。

決済リスクに対する問題意識が高まるにつれて、決済エクスポージャーを削減して決済システムの安全性を高めることを目的として、RTGS方式への移行が一部の決済システムで行われるようになり、1990年代後半には先進国の多くで移行が進んでいった。RTGS方式では、参加者が支払指図を発出する度に、1件ずつ即座にグロスポジションの決済が行われる。そのため、DNS方式に比べて決済エクスポージャーは低減するが、支払いを行う時点でそのための資金が手元に必要になるため、資金効率性は低下する。特に、取引相手から受け取った資金を自身の支払原資として利用している場合、参加者の決済行動が他の参加者の決済行動に間接的に影響を及ぼすため、決済の連鎖性が生じるという特徴がある。

RTGS方式のこうした問題を改善するため、1990年代後半から導入された方式が、RTGS方式をベースとして、グロス決済にネット決済の要素を付加した修正RTGS方式である。修正RTGS方式は、未決済の支払指図を待機させるための中央キュー（central queue、決済システム内の待ち行列）を備えたRTGS方式で、中央キューに待機している複数の支払指図が同時にグロス決済できる場合はそれを決済する機能（オフセット機能）を持つ。オフセット機能による決済は、経済的にはネット決済と同様の効果を持つため、通常のRTGS方式に比べて資金流動性を節約する流動性節約効果を有する。修正RTGS方式には、receipt-reactive型とbalance-reactive型があり、receipt-reactive型は、受け取った資金をそのまま待ち行列中の支払指図の決済に充てるのに対し、balance-reactive型では、口座残高が一定の条件を満たす場合に待ち行列中の支払指図の決済に充当する。

各国の中央銀行などが運営する決済システムでは、ドイツのRTGS^{plus}、イタリアのNew BI-REL、フランスのPNS、米国のCHIPS、カナダのLVTSなどが修正RTGS方式に分類される。日銀ネットでも、2001年1月にRTGS方式を導入し、2008年10月には修正RTGSである「次世代RTGS」に移行している。リーマン・ショックによって金融市場が大きく混乱する中でスタートであったが、流動性節約機能の導入により決済の円滑化に効果があったことが報告されている（日本銀行決済機構局 [2009]）。

(2) 銀行間資金決済における決済行動

決済システムの参加者は、さまざまな要因を考慮しながら決済方法や決済のタイミングを選択する。参加者のこうした決済行動を考えるうえで、特に大きな影響を与えるのが流動性コストと遅延コストである。流動性コストとは、自身の支払いに必要な資金を調達するためのコストを表し、遅延コストとは、自身の支払いが遅延した場合に課されるペナルティや取引相手からの信認の低下などで生じる直接あるいは間接的なコストを表す。

参加者が決済を行うタイミングを考えると、自身の支払いを遅らせるほど取引相手

から支払いを受け取る機会が多くなるため、必要な調達額が抑制される。したがって、流動性コストは支払時間の減少関数となる。逆に、遅延コストは支払いが遅れるほど大きくなるため、支払時間の増加関数となる。参加者は、流動性コストと遅延コストのトレードオフを勘案しながら、自分の支払方法を選択することになる。また、前述したように RTGS 方式では決済の連鎖が生じるため、支払方法の選択においては自分だけでなく取引相手の決済行動も考慮する必要がある。

いくつかの論文では、ゲーム理論の枠組みを利用して決済におけるこのような状況をモデル化し、均衡における決済行動を分析している。Angelini [1998, 2000] は、RTGS 方式において遅延コストと借入コストを考慮したモデルを構築し、支払いを早めるあるいは遅らせるインセンティブが生じる状況を分析している。Bech and Garratt [2003] は、RTGS 方式における決済行動のベイジアン均衡を導出し、囚人のジレンマとスタグハント¹の2つのパラダイムが発生しうることを示している。Mills and Nesmith [2008] は、Bech and Garratt [2003] に決済リスクを加えるなどの修正を行い、早期支払いあるいは支払遅延のインセンティブについて分析している。このほかにも、Acharya, Gromb, and Yorulmazer [2008]、Bartolini, Hilton, and McAndrews [2008]、Kahn, McAndrews, and Roberds [2003]、Johnson, McAndrews, and Soramäki [2004] などが、決済のタイミングについて分析している。

一方、流動性節約効果を分析した研究としては、Willison [2004]、Beyeler, Glass, Bech, and Soramäki [2007]、Martin and McAndrews [2008] などがある。Willison [2004] は、RTGS 方式と修正 RTGS 方式の均衡を比較し、流動性と日中の決済進捗の速さの点で修正 RTGS 方式が好ましいとの結果を得ている。Beyeler, Glass, Bech, and Soramäki [2007] の分析はゲーム理論の枠組みではないが、決済用資金の時間変動を待ち行列でモデル化し、シミュレーションなどを利用して決済ネットワークの特性を明らかにしている。Martin and McAndrews [2008] は、いくつかの点で Willison [2004] を発展させている。本稿の分析は Martin and McAndrews [2008] をもとにしており、3 節でそのモデルと分析内容を説明する。

上記のような理論研究に加え、決済システムの実証分析に関してもさまざまな研究が行われている。McAndrews and Rajan [2000] は、米国 Fedwire (Federal Reserve's wire transfer system) における借入と支払遅延のトレードオフを分析している。また、Becher, Galbiati, and Tudela [2008] は、英国の CHAPS (Clearing House Automated Payment System) の決済取引データを分析し、取引相手からの受取りを

1 2 人のプレーヤーが雄鹿 (stag) か兎 (rabbit) の狩りをする。兎は自分 1 人でも狩りができるが利得は小さく、雄鹿は利得が大きい代わりに 2 人で協力しないと成功しない。利得行列は例えば次のようになる。

	rabbit	stag	
rabbit	(1, 1)	(1, 0)]
stag	(0, 1)	(2, 2)	

均衡は (rabbit, rabbit) = (1, 1) と (stag, stag) = (2, 2) の 2 つ存在し、どちらのプレーヤーにとっても後者が望ましいが、非協力ゲームの場合はそれが実現できるかどうかは定かではない。このような状況をスタグハントと呼ぶ。

支払いに充てる流動性リサイクルが高い水準で利用されていることを確認している。日銀ネットでの決済行動については、今久保・副島 [2008b] に詳しく述べられている。一方、Soramäki *et al.* [2007] は Fedwire の決済ネットワークの構造を分析し、その特徴を明らかにしている。また、今久保・副島 [2008a] は、わが国のコール市場の取引データを分析し、決済ネットワークの構造について興味深い観察を行っている。今久保 [2005] は、決済方式の理論と実証の包括的なサーベイである。

最後に、「スループット・ルール」と呼ばれる取引ルールについて述べておく。このルールは、参加銀行が一定の時間帯ごとに発出・決済すべき支払指図の件数や金額（または、その構成比）を、決済ルールとしてあらかじめ定めたものであり、例えば英国の CHAPS では、1日の決済額の 50% を 12:00 までに、75% を 14:30 までに完了させることを求めている。日銀ネットでは、DNS から RTGS に移行する際に、約定後 1 時間以内の決済を求める 1 時間ルールと、始業 9:00 以降遅くとも 10:00 までに返金決済を行う返金先行ルールが市場慣行として整備され、これによって大半の支払いタイミングが規定されている。こうしたスループット・ルールや決済タイミングを巡る慣行は、決済の後ずれを抑制し、取引相手からの受取りの不確実性を低減する効果を持つ。Buckle and Campbell [2003] は、スループット・ルールが参加者の決済行動に与える影響を理論的に分析している。

3. 銀行間資金決済ネットワークのモデル化

本節では、本稿で分析するモデルを説明するとともに、次節以降で必要となる予備的な解析を行う。また、本稿でベースとする Martin and McAndrews [2008] のモデルとの関係についても触れる。

(1) 決済ネットワークと決済行動のモデル

決済ネットワークに参加している金融機関は、ある 1 人の参加者に対して 1 単位の支払いを行わなければならない。当然、自分の受取りも 1 単位となる。1 単位の支払額は μ で、分割して支払うことはできないものとする²。1 日を午前と午後の 2 時点とし、1 日の最初の口座残高は 0 とする。参加者は、午前に支払う (E で表す)、午前に支払指図を待ち行列へ入れる (Q で表す)、支払いを午後に遅延する (D で表す) の 3 通りの支払方法から 1 つを選択する。一方、参加者は別の 1 人の参加者から 1 単位の支払いを受け取るが、取引相手が午前と午後のどちらで支払うかは事前にはわからない。以下では、自分からみた支払先を受取人、自分に対して支払う取引相手を支払人と呼ぶ。

.....
2 6 節では支払分割が可能な場合の最適決済行動を分析する。

支払方法 Q の待ち行列は、修正 RTGS 方式において流動性節約のために設けられた機能で次のように動作する。まず、支払指図を待ち行列へ入れた参加者が、自分への支払人から支払いを受け取ると、待ち行列中の支払指図が決済されてその資金は受取人へ支払われる。また、サイクル（3 節(2)を参照）に含まれるすべての参加者が Q を選択した場合は、オフセット機能によってすべての支払指図が同時決済される。これら以外の場合、待ち行列中の支払指図は午前中はそのまま、午後になって支払人からの受取りが発生すると、それによって待ち行列中の支払指図も決済される。

上述した通常の支払いと受取り以外に、各参加者は午前に流動性ショックを受け取る。流動性ショックの大きさ S はある分布に従うランダムな量で、参加者ごとに独立に決まるものとする。負の流動性ショック、すなわち $S < 0$ の場合は、 $-S$ を午前中に必ず支払わなければならない。逆に正の流動性ショックの場合は、 $S > 0$ をそのまま保有しても、通常の支払いに充当してもよい。なお、流動性ショックは予想外の日中の資金偏在として定義しており、午前に受けた流動性ショックは午後には相殺される。したがって、午前中に負の流動性ショックを受けて支払いを行った場合は、午後と同額を受け取り、逆に午前中に正の流動性ショックで受取りがあった場合は、午後と同額を返済しなければならない。

午前中に通常または流動性ショックの支払いをする際、資金が不足する場合は不足額を借入金利 R で調達する³。決済システム全体の資金流動性が高ければ、受け取った資金を支払いに充てることで借入の機会を減らすことができる。その意味で、 R は流動性コストの大きさを示すパラメータとなっている。一方、通常の支払いを午後に行う場合は、遅延コストとして γ を支払わなければならない。また、午前中の受取りが支払いより多く資金余剰であっても貸付はしないものとし、利子収入は考えないことにする。

本稿では、外生的な理由によってあらかじめ支払方法を決めている参加者の存在も許容する。以下では、このような参加者を非戦略的参加者（non-strategic participant）、それ以外の参加者を戦略的参加者（strategic participant）と呼ぶ⁴。均衡分析の対象となるのは戦略的参加者の行動であるが、非戦略的参加者の比率も均衡に影響を与える。

支払方法の選択は、流動性ショックの大きさ S を知る前に行う場合（4 節、6 節）と、流動性ショックの大きさを知ったうえで行う場合（5 節）の 2 通りを考える。流動性ショックの大きさを知る前に支払方法を選択する場合の決済の流れは表 1 のようになる。

3 RTGS では決済のための資金が嵩むため、中央銀行による日中流動性の供給が日中当座貸越や日中レポ取引によって行われている。日中レポ取引では金利負担が発生するほか、日中当座貸越を無担保で提供する Fedwire は 1 分ごとに算出した当座貸越額の平均値に対して利用料を課している。日銀ネットや他の日中当座貸越を採用している先進国では無料とする先が多いが、有担保性のために担保コストが発生している。いずれにおいても、決済資金調達に何らかのコストが生じており、本稿はこれらをモデル化したものとみなせる。

4 文脈から区別が明らかな場合は、戦略的参加者を単に参加者と呼ぶ。

表 1 決済の流れ（流動性ショックを知る前に支払行動を選択する場合）

午前	(a) 参加者が支払方法を選択。 (b) 参加者の流動性ショック S が決まる。 (c) 決済が行われる。 ・負の流動性ショックを受けた参加者は $-S$ を支払う。 ・ E を選択した参加者の支払いが決済される。 ・待ち行列中にある決済可能な支払指図が決済される。 (d) コストが確定する。 ・支払いのための資金が不足する参加者は不足分を金利 R で借り入れる。 ・ D を選択した参加者および Q を選択して決済されなかった参加者に対して遅延コスト γ が課される。
午後	残るすべての決済が行われる。 ・ D を選択した参加者の支払いが決済される。 ・待ち行列に残っていた支払指図が決済される。 ・午前に受けた流動性ショックと逆の受取りまたは支払いを行う。

備考：流動性ショックの大きさを知ったうえで支払方法を選択する場合は、午前の(a)と(b)の順序が逆転する。

流動性コストと遅延コストの間にはトレードオフの関係がある。手元資金を確保して流動性コストを下げるためには支払いを遅らせる方がよく、逆に遅延コストを下げるためには早期に支払う方がよいためである。 E 、 Q 、 D の3つの支払方法を比較すると、流動性コストの面では D 、 Q 、 E の順に有利で、逆に遅延コストの面では E 、 Q 、 D の順に有利となる。参加者はリスク中立的とし、これらのトレードオフを勘案して平均コストを最小化する支払方法を選ぶものとする。

(2) 予備的分析

以下では、本稿で分析するモデルを具体的に説明するとともに、次節以降で利用するいくつかの結果を準備する。

イ. オフセットとサイクル

$\mathbb{N} = \{1, \dots, N\}$ の N 人の参加者からなる決済ネットワークを考える。各参加者は、1日の中で1単位の資金を支払人から受け取り、1単位の資金を受取人へ支払う。ある一群の支払いについて、グループ内のすべての支払いが待ち行列に入っている場合にそれらがオフセットされるならば、そのグループをサイクルと呼ぶ。例えば、参加者1が参加者2へ、参加者2が参加者3へ、参加者3が参加者1へ支払う場合、参加者1～参加者3の支払いはサイクルとなる。特に、参加者全員でサイクルを形成する場合は、長さ N のサイクルが1つだけ、逆にすべてが2者間での受払いの場合は、長さ2のサイクルが $N/2$ 個できることになる。

本稿では、参加者の支払いと受取りを1単位としているので、各参加者の支払いは1つのサイクルに含まれる⁵。実際、参加者1から始めて受取人を順につないでいくと、どこかで参加者1へ戻って1つのサイクルが作られる。残った参加者の1人から始めて同様の操作を行う、ということを繰り返せば、最終的にはネットワーク全体が1つ以上のサイクルに分けられ、すべての参加者の支払いはそのうちの1つに含まれる。

以下では、各参加者の受取人は確率的に日々変化するものと考え、それに伴ってサイクルの数や長さも確率的に変化するものとする。また、戦略的か非戦略的にかかわらず、各参加者がどのサイクルに入るかは、確率的に無差別であると仮定する。参加者を無作為に選んだときに、その参加者が含まれるサイクルの長さを L で表す⁶。 L は確率変数になるので、その分布から

$$\xi(x) = \sum_{l=2}^N x^{l-1} \mathbb{P}[L = l], \quad (1)$$

を定める。上で述べた仮定から、 $\xi(x)$ はすべての参加者に共通である。また、常に $L \geq 2$ が成り立つことに注意する。例として、すべてのサイクルの長さが $L = n$ で常に一定の場合は、

$$\xi(x) = x^{n-1}, \quad (2)$$

となる。

ロ. 支払方法と平均コスト

戦略的参加者が、 $E/Q/D$ の支払方法を選択した場合のコストをそれぞれ計算する。午前中に支払う場合 (E)、流動性ショック S が支払額 μ 以上であれば受取りが支払いを上回るためコストは0となるが、 $S < \mu$ の場合は他の参加者からの受取りが午前がないと支払額 μ が受取りを上回るため、不足額に対する借入コストが発生する。待ち行列に入れる場合 (Q) は、決済されない場合に遅延コストが発生し、さらに流動性ショック $S < 0$ の場合はその支払いのための借入コストが発生する。午後に支払う場合 (D) は、必ず遅延コストが発生し、さらに流動性ショックが他の参加者からの受取りを超える場合は不足額に対する借入コストが発生する。このように、参加者が支払うコストは、支払方法、流動性ショック、支払人からの午前の受取りの有無によって決まる。

このうち、支払人からの受取りの有無については事前にわからないため、参加者は受取りがある確率を推測し、その確率にもとづいて支払方法を選択するものとす

⁵ 複数単位の支払いや受取りを持つ参加者がいる場合には、ある支払いが複数のサイクルに含まれる場合がある。

⁶ サイクルの構成方法の詳細は補論1(1)を参照。

る。確率をどのように推測するかは後述することにして、当面は、支払方法 $X \in \{E, Q, D\}$ を選択した参加者が、支払人から午前に受取りがある確率を π_X で表す。このとき、支払方法 X を選択した流動性ショック S の参加者の平均コスト $C_X(S)$ は、上記の議論から次のように計算される。

$$C_E(S) = \begin{cases} (1 - \pi_E)\mu R - SR, & S < 0, \\ (1 - \pi_E)\mu R + \pi_E SR - SR, & 0 \leq S < \mu, \\ 0, & S \geq \mu, \end{cases} \quad (3)$$

$$C_Q(S) = \begin{cases} (1 - \pi_Q)\gamma - SR, & S < 0, \\ (1 - \pi_Q)\gamma, & S \geq 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$C_D(S) = \begin{cases} \gamma - \pi_D\mu R - SR, & S < -\mu, \\ \gamma + \pi_D SR - SR, & -\mu \leq S < 0, \\ \gamma, & S \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

流動性ショック S は、すべての参加者に対して独立で同一の分布 $F_S(s)$ に従うものとし、以下では、 $F_S(s)$ が $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ をサポートに持つ連続な増加関数であることを仮定する^{7,8}。 S の分布に関して、(3)式~(5)式のコストの平均を計算すると、

$$C_E = \mathbb{E}[C_E(S)] = [(1 - \pi_E)\Theta_1 - G_S(-\infty, 0)]R, \quad (6)$$

$$C_Q = \mathbb{E}[C_Q(S)] = (1 - \pi_Q)\gamma - G_S(-\infty, 0)R, \quad (7)$$

$$C_D = \mathbb{E}[C_D(S)] = \gamma - [\pi_D\Theta_2 + G_S(-\infty, 0)]R, \quad (8)$$

となる。ここで

$$G_S(s, t) = \int_s^t u F_S(du),$$

$$\Theta_1 = \mu F_S(\mu) - G_S(0, \mu),$$

$$\Theta_2 = \mu F_S(-\mu) - G_S(-\mu, 0),$$

と定めた。 Θ_1 は

$$\Theta_1 = \int_{-\infty}^{\mu} (\mu - u) F_S(du) + \int_{-\infty}^0 u F_S(du) = \int_{-\infty}^{\mu} (\mu - u) F_S(du) + \mathbb{E}[S 1_{\{S \leq 0\}}], \quad (9)$$

7 特に断らない限り、関数の減少あるいは増加は狭義の意味で用いる。すなわち、増加関数は狭義単調増加関数、減少関数は狭義単調減少関数を表す。

8 $F_S(s)$ がこれらの仮定を満たさない場合でも仮定を満たす関数によって近似できるため、これらの仮定は本質的なものではない。

と書き直すことができる⁹。(9)式の右辺第1項は、参加者が E を選択して午前に受取りがない場合の平均借入額、第2項は負の流動性ショックの平均で支払方法の選択にかかわらずその絶対値の支払いが求められる。したがって、 Θ_1 はすべての支払方法に共通する支払額を控除したうえで、 E を選択した参加者が受取りがない場合に借り入れる平均金額を表している。なお

$$\Theta_2 = \mu F_S(-\mu) - G_S(-\mu, 0) \geq \mu F_S(-\mu) > 0,$$

$$\Theta_1 - \Theta_2 = \mu \int_{-\mu}^{\mu} F_S(ds) - \int_{-\mu}^{\mu} |s| F_S(ds) > 0,$$

より、 $\Theta_1 > \Theta_2 > 0$ であることに注意する。

ハ. 午前に支払いを受け取る確率

参加者が、支払方法 $X \in \{E, Q, D\}$ を選択した場合に午前に支払いを受け取る確率 π_X を推測する状況を考える。Martin and McAndrews [2008] では、参加者が区間 $[0, 1]$ で連続的に存在するモデルを考え、参加者数が無限であることを利用して π_X を求めているが、本稿ではより現実的な設定として参加者数を有限としているため、1人の参加者の選択が他の参加者の選択に影響することになり、 π_X を正確に推測することは非常に難しい。そこで、 π_X の推測に関して以下の仮定を置くことにする。

仮定 1 参加者が π_X を推測する際には、他の参加者は互いに独立にある確率に従って支払方法を選択するものとする。

参加者数が無限の場合は、1人の参加者の選択が他の参加者の選択確率に与える影響を無視できるため、仮定1が成立すると考えられる。したがって、参加者数 N が十分大きいネットワークであれば、仮定1は妥当と考えてよいであろう。

仮定1のもとでは、他の参加者が $E/Q/D$ を選択する確率を所与とすれば π_X が計算できる。そのため、参加者が E, Q, D を選択する戦略的参加者である確率を $\lambda_E, \lambda_Q, \lambda_D$ 、 E, Q, D を選択する非戦略的参加者である確率を $\tilde{\lambda}_E, \tilde{\lambda}_Q, \tilde{\lambda}_D$ でそれぞれ表す。分析対象は、戦略的参加者の支払選択なので、以下では非戦略的参加者に対する $\tilde{\lambda}_E, \tilde{\lambda}_Q, \tilde{\lambda}_D$ は外生的に与えられているものとする。なお、 $\lambda = 1 - (\tilde{\lambda}_E + \tilde{\lambda}_Q + \tilde{\lambda}_D)$ とし、 $\tilde{\lambda}_E, \tilde{\lambda}_Q, \tilde{\lambda}_D > 0$ ¹⁰ および $\lambda > 0$ を仮定する。

$\mathbf{A} = (\lambda_E, \lambda_Q, \lambda_D)$ を支払選択ベクトルと呼び、仮定1のもとで \mathbf{A} に対して計算される受取確率¹¹を $\pi_X(\mathbf{A})$ または $\pi_X(\lambda_E, \lambda_Q, \lambda_D)$ で表す。戦略的参加者は、他の戦略的参加者の支払方法を勘案しながら、推測した $\pi_X(\mathbf{A})$ をもとに支払方法を選択す

9 I_A は、事象 A が起きれば1、起きなければ0となる確率変数を表す。

10 この仮定は、均衡の分析における本質的ではない場合分けを減らすためのもので、 $\tilde{\lambda}_E, \tilde{\lambda}_Q, \tilde{\lambda}_D$ の中に0となるものがあったとしても、4節以降と同様の結果が成立する。

11 Q を選択した場合は、受取りかオフセットにより決済される確率を表す。

るため、 \mathbf{A} および $\pi_X(\mathbf{A})$ は均衡において決定されることになる。
 \mathbf{A} を所与とすると、 $\pi_X(\mathbf{A})$ は次のように計算される。

補題 1 仮定 1 のもとでは、 $\pi_E(\mathbf{A})$ 、 $\pi_Q(\mathbf{A})$ 、 $\pi_D(\mathbf{A})$ はそれぞれ

$$\pi_E(\mathbf{A}) = \pi_Q(\mathbf{A}) = \frac{\tilde{\lambda}_E + \lambda_E + \xi(\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q)(\tilde{\lambda}_D + \lambda_D)}{1 - (\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q)}, \quad (10)$$

$$\pi_D(\mathbf{A}) = \frac{(1 - \xi(\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q))(\tilde{\lambda}_E + \lambda_E)}{1 - (\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q)}, \quad (11)$$

で与えられる。

証明 補論 1 (2) を参照。 □

本稿では、仮定 1 のもとで計算した (10) 式と (11) 式を参加者の π_X に対する推測とし、そのもとの支払選択行動を分析する。なお、(3) 式~(8) 式で計算したコストも受取確率 π_X を介して支払選択ベクトル \mathbf{A} に依存するため、以下では $C_X(S; \mathbf{A})$ あるいは $C_X(\mathbf{A})$ と表す。 $C_X(S; \mathbf{A})$ や $C_X(\mathbf{A})$ は、所与の \mathbf{A} に対して参加者が支払方法 X を選択したときに、その参加者が推測する平均コストとなっている。

なお、補題 1 から、任意の \mathbf{A} に対して

$$\pi_E(\mathbf{A}) - \pi_D(\mathbf{A}) = \pi_Q(\mathbf{A}) - \pi_D(\mathbf{A}) = \xi(\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q) > 0, \quad (12)$$

が成り立つ。仮定 1 のもとでは、

$$\xi(\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q) = \sum_{l=2}^N (\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q)^{l-1} \mathbb{P}[L = l],$$

は、ある参加者が Q を選択したという条件のもとで、同じサイクル内の他の参加者もすべて Q を選択し、支払指図がオフセットされる確率と考えることができる。なお $\tilde{\lambda}_E > 0$ を仮定しているため、任意の \mathbf{A} に対して $\pi_E(\mathbf{A}), \pi_Q(\mathbf{A}), \pi_D(\mathbf{A}) > 0$ となる。

(3) Martin and McAndrews モデルとの比較

本稿の分析は Martin and McAndrews [2008] をベースとしているので、両者の関係を整理しておく。3 節(1)の設定に沿って述べると、Martin and McAndrews [2008] のモデルは¹²、

.....
 12 記号や用語は本稿で使用するものに合わせているため、Martin and McAndrews [2008] とは異なる。

- 区間 $[0, 1]$ 上で連続的に存在する無限の参加者を想定している。
- 流動性ショックの大きさは、正の定数 S 、 0 、 $-S$ の3通りで、 S と $-S$ の流動性ショックを受ける参加者の割合は等しい。
- サイクルは、 $L = 2$ の固定長または $L = \infty$ のいずれか。

というケースに該当する。本稿のモデルは、流動性ショックの大きさとサイクル長の分布を一般化しており、これらの分布が均衡に与える影響を調べる事が可能となる。

Martin and McAndrews [2008] では、午前中に支払わないと遅延コスト γ が課される時間厳守な (time-critical) 支払いと、午前中に支払わなくても遅延コストが課されない、すなわち $\gamma = 0$ の時間厳守ではない (non-time-critical) 支払いの2種類があるものとし、参加者がどちらの支払いになるかは確率的に決まるものとしている。この場合、支払いが時間厳守ではない参加者は必ず D を選択するため¹³、本稿のモデルでは常に D を選択する非戦略的参加者として $\tilde{\lambda}_D$ に含めて扱えばよい。

本稿では有限の参加者数を仮定しているが、仮定1を置くことで π_X の計算は実質的に Martin and McAndrews [2008] と同様の方法で行うことができる。ただし、Martin and McAndrews [2008] では補題1の $\pi_E(\mathbf{A})$ を(10)式ではなく(11)式の $\pi_D(\mathbf{A})$ に等しいとしている点異なる。この違いは、 $\pi_E(\mathbf{A})$ の計算において、Martin and McAndrews [2008] が無限長のサイクルを暗黙のうちに仮定しているのに対し、本稿ではサイクル長 L を有限としているためである。 $\pi_E(\mathbf{A})$ の違いによって、4節以降で示す均衡の分析結果も異なっており、例えば Martin and McAndrews [2008] では4タイプの均衡が共存するケースが示されている。これに対し、本稿の分析で共存する均衡は基本的に2タイプである(4節、5節を参照)。ただし、モデルパラメータが均衡に与える定性的な影響については、一部で共通点もみられる。

4. 決済ネットワークにおける決済行動

本節では、3節(1)で説明した決済ネットワークのモデルにおいて、流動性ショックの大きさを知る前に支払方法を選択する場合を分析する。2節(1)で紹介した修正RTGS方式の2つのタイプ、receipt-reactive型とbalance-reactive型に対比させると、待ち行列に入れた支払指図は流動性ショックの大きさ(これによって口座残高が決まる)によらず決済されるという点で、receipt-reactive型を模したモデルと考えることができる(Martin and McAndrews [2008])。以下では、本節のモデルをモデル1と呼ぶことにする。

13 各支払方法に対する平均コストを求めた(6)式~(8)式において $\gamma = 0$ とすると、任意の支払選択ベクトル \mathbf{A} に対して

$$C_D(\mathbf{A}) < C_Q(\mathbf{A}) < C_E(\mathbf{A}),$$

が成り立つので、 D が最適となる。

(1) モデル1の均衡

モデル1では流動性ショックを受ける前に支払方法を決めるため、参加者は(6)式~(8)式を比較して平均コストが最小となる支払方法を選択する。ただし平均コストは他の参加者の決済行動に依存するため、参加者は他の参加者の決済行動を推測しながら選択するというゲーム理論的な状況が発生する。この場合、参加者は互いに独立に支払方法を選択するため非協力ゲームとなる。参加者の支払額、流動性ショックとサイクル長の分布は共通なので、最適な支払方法はすべての戦略的参加者で等しくなる。したがって、純戦略における均衡の候補は、すべての戦略的参加者が E 、 Q 、 D のいずれか1つを選択する場合となる。これらを、それぞれ

$$\mathbf{A}^{(E)} = (\lambda, 0, 0), \quad \mathbf{A}^{(Q)} = (0, \lambda, 0), \quad \mathbf{A}^{(D)} = (0, 0, \lambda),$$

で表す。本稿では、モデル1の均衡を次のように定める。

定義1 $\mathbf{A}^{(X)}$ ($X \in \{E, Q, D\}$) がモデル1の均衡であるとは、

$$C_X(\mathbf{A}^{(X)}) \leq C_Y(\mathbf{A}^{(X)}), \quad \forall Y \neq X,$$

が成り立つことを意味する。

定義1は、支払選択ベクトル $\mathbf{A}^{(X)}$ のもとで X が最適な支払方法であることを示している。そのため、 $\mathbf{A}^{(X)}$ のもとでは、戦略的参加者は支払方法を変更するインセンティブを持たない。その意味で、定義1はナッシュ均衡となっている。

モデル1の均衡を導出するために、以下の記号を定める。

$$\delta = \frac{\gamma}{R},$$

$$h(\mathbf{A}) = \frac{\pi_D(\mathbf{A})}{\pi_E(\mathbf{A})}.$$

δ は流動性コストに対する遅延コストの相対的な大きさを表しているため、以下では相対的遅延コストと呼ぶことにする。なお、(12)式から任意の \mathbf{A} に対して $h(\mathbf{A}) < 1$ となる。

定理1 モデル1の均衡は次のように決まる。

(ケース1) $\delta \geq \Theta_1$ のとき、すべての戦略的参加者が E を選択する $\mathbf{A}^{(E)}$ が均衡となる。

(ケース2) $h(\mathbf{A}^{(Q)})\Theta_2 \leq \delta \leq \Theta_1$ のとき、すべての戦略的参加者が Q を選択する $\mathbf{A}^{(Q)}$ が均衡となる。

(ケース 3) $\delta \leq h(\mathbf{A}^{(D)})\Theta_2$ のとき、すべての戦略的参加者が D を選択する $\mathbf{A}^{(D)}$ が均衡となる。

証明 補論 1 (3)を参照。 □

定理 1 は、 δ に応じて均衡が変化することを示している。3 節(2)で述べたように、 Θ_1 はすべての支払方法に共通する支払額を控除したうえで、 E を選択して受取りがない場合の平均借入額なので、ケース 1 の条件 $\delta \geq \Theta_1$ は、その場合の借入コストよりも遅延コストが大きいことを表している。逆に δ が十分に小さいときは借入の可能性を減らすために返済を遅らせ、中間的な δ に対しては、2 つのコストをバランスさせる待ち行列が選ばれることになる。

ケース 2 とケース 3 の均衡が共存するかどうかを確かめるために、 $h(\mathbf{A}^{(Q)})$ と $h(\mathbf{A}^{(D)})$ の大小関係を調べる。そのために、

$$\zeta(x) = \frac{(1-x)\xi(x)}{1-\xi(x)}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (13)$$

と定め、次の条件を仮定する。

条件 1 $\zeta(x)$ は x に関する増加関数である。

条件 1 は、サイクル長分布から決まる $\xi(x)$ に対する技術的な条件で、その意味を直観的に説明することは難しいが、例えばサイクルが固定長の場合は成り立つことが確認できる¹⁴。

次の定理 2 は、条件 1 のもとで複数の均衡が共存しうることを示している。

定理 2 条件 1 のもとでは $h(\mathbf{A}^{(Q)}) < h(\mathbf{A}^{(D)})$ が成り立ち、 $h(\mathbf{A}^{(Q)})\Theta_2 \leq \delta \leq h(\mathbf{A}^{(D)})\Theta_2$ では $\mathbf{A}^{(Q)}$ と $\mathbf{A}^{(D)}$ がともに均衡となる。このとき、任意の $X \in \{E, Q, D\}$ に対して、 $C_X(\mathbf{A}^{(Q)}) < C_X(\mathbf{A}^{(D)})$ が成り立つ。

証明 補論 1 (4)を参照。 □

定理 2 から、 $h(\mathbf{A}^{(Q)})\Theta_2 \leq \delta \leq h(\mathbf{A}^{(D)})\Theta_2$ ではゲーム理論におけるスタグハントが生じていることがわかる。Bech and Garratt [2003] が分析した決済行動のモデルでも、均衡としてスタグハントが生じる状況が示されている。また、決済行動のモ

14 サイクルが固定長 $L = n$ の場合は、(2) 式の $\xi(x) = x^{n-1}$ を代入すると

$$\frac{1}{\zeta(x)} = \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{x},$$

となり、条件 1 が満たされる。

デルで複数の均衡が共存する状況は、Martin and McAndrews [2008] でも紹介されている。

2節では日銀ネットがRTGSに移行する際、決済タイミングを前倒しするような市場慣行が整備された点に触れた。こうした慣行は、スタグハントが生じるような状況下で望ましい均衡を得るための工夫として導入されたものと考えられよう。全国銀行協会のような第三者が慣行形成に関与することで協力ゲームに転じさせた、もしくは、他行からの信認の低下といった間接的なコストを増加させることで望ましい均衡が生じる機会（パラメータ空間の領域）を拡大させたと理解することができる。後者については、モデルでそのメカニズムを明示できることを後述する。

(2) モデル1における最適決済行動

モデル1は、遅延コストと借入金利に加えて、非戦略的参加者の比率、サイクル長の分布、支払額、流動性ショックの分布をパラメータとして含んでいる。これらのパラメータが、定理1で求めた均衡に与える影響を分析する。なお、定理2で示したように、パラメータによってはケース2とケース3の均衡が共存するが、記述を簡潔にするため、その場合はすべての参加者にとって平均コストが小さいケース2が選ばれるものとする。

定理1が示すように、ケース1～ケース3のどの均衡が生じるかは、相対的遅延コスト $\delta = \gamma/R$ と2つの閾値 Θ_1 、 $h(\mathbf{A}^{(Q)})\Theta_2$ の大小関係で決まる。閾値のうち、 Θ_1 と Θ_2 は支払額 μ と流動性ショックの分布 $F_S(s)$ で決まり、 $h(\mathbf{A}^{(Q)})$ は非戦略的参加者の比率とサイクル長の分布によって決まる。以下では、非戦略的参加者の比率、決済ネットワークの構造、流動性ショックと支払額の3つの視点から、モデル1のパラメータが均衡に与える影響を分析する。

イ. 非戦略的参加者の影響

非戦略的参加者の比率 $\tilde{\lambda}_E$ 、 $\tilde{\lambda}_Q$ 、 $\tilde{\lambda}_D$ は、 Θ_1 、 Θ_2 には影響せず $h(\mathbf{A}^{(Q)})$ のみに影響する。したがって、非戦略的参加者の影響は、ケース2の均衡が生じる δ の範囲に現れる。

(A-8) 式から

$$\frac{1}{h(\mathbf{A}^{(Q)})} = 1 + \frac{\zeta(1 - (\tilde{\lambda}_E + \tilde{\lambda}_D))}{\tilde{\lambda}_E},$$

と表せることに注意すると、条件1のもとでは

$$\frac{\partial h(\mathbf{A}^{(Q)})}{\partial \tilde{\lambda}_E} > 0, \quad \frac{\partial h(\mathbf{A}^{(Q)})}{\partial \tilde{\lambda}_Q} = 0, \quad \frac{\partial h(\mathbf{A}^{(Q)})}{\partial \tilde{\lambda}_D} > 0, \quad (14)$$

が成り立つ¹⁵。ここで興味深いのは、午前中の返済 E を選ぶ非戦略的参加者の割合 $\tilde{\lambda}_E$ が増えると、 $\mathbf{A}^{(Q)}$ が均衡となる δ の範囲は狭まり、逆に $\mathbf{A}^{(D)}$ が均衡となる範囲が広がる点である。その理由として、 $\tilde{\lambda}_E$ が増加すると戦略的参加者の受取確率が高まるため、受取りを支払いに充当して流動性コストを節約しようとするインセンティブが働くことが考えられる。したがって、早期返済の参加者が増えることで、決済システム全体ではかえって支払いが遅延する逆効果が生じる可能性があるため注意が必要である。

ロ. 決済ネットワーク構造の影響

銀行間の資金決済ネットワークでは、頻繁に取引を行う銀行同士もあれば、稀にしか取引しない銀行もある。どの銀行間で支払いや受取りが起りやすいかというネットワーク構造は、サイクルの長さに影響を及ぼす。

定理 1 の均衡において、決済ネットワークの構造は仮定 1 のもとで待ち行列に入れた支払指図がオフセットされる確率 $\xi(\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q)$ を介して均衡に影響を与える。すなわち、 δ が大きいケース 1 には影響せず、ケース 2 の均衡が生じる δ の範囲に影響を及ぼす。(13) 式と (A-8) 式より、

$$\frac{dh(\mathbf{A})}{d\xi} = \frac{dh(\mathbf{A})}{d\xi} \frac{d\xi}{d\xi} < 0, \quad (15)$$

となるので、 ξ が大きいほど $h(\mathbf{A})$ は小さくなり、定理 1 において Q を選択する均衡（ケース 2）の範囲が広がる。これは、サイクルが短いほどオフセット確率が大きくなるので、待ち行列に入れてオフセット機能を活用するインセンティブが高まるためと考えられる¹⁶。

図 1 は、固定長のサイクル (2) 式において $n = 2 \sim 10$ としたときの、決済システム全体の平均コストを描いたグラフである。ここで、支払選択ベクトル $\mathbf{A} = (\lambda_E, \lambda_Q, \lambda_D)$ に対する決済システム全体の平均コストは

$$C_{\text{All}}(\mathbf{A}) = (\tilde{\lambda}_E + \lambda_E)C_E(\mathbf{A}) + (\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q)C_Q(\mathbf{A}) + (\tilde{\lambda}_D + \lambda_D)C_D(\mathbf{A}), \quad (16)$$

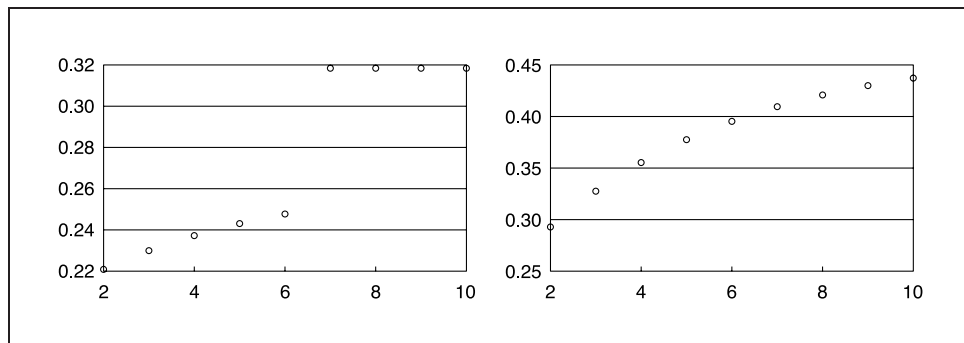
で計算される¹⁷。図 1 の左図は $\delta = 0.1$ に対するグラフで、 $n = 7$ を境に均衡が $\mathbf{A}^{(Q)}$ から $\mathbf{A}^{(D)}$ へと変化することによって平均コストが大きく増加している。これに対し $\delta = 0.5$ に対する右図では、均衡が $\mathbf{A}^{(Q)}$ のまま変化しないため、サイクル長の増加に伴いオフセット確率が減少してコストは徐々に増加する。

15 $\lambda = 1 - (\tilde{\lambda}_E + \tilde{\lambda}_Q + \tilde{\lambda}_D)$ より、 $\tilde{\lambda}_E/\tilde{\lambda}_Q/\tilde{\lambda}_D$ が増加すると、戦略的参加者の割合 λ が減少することに注意する。なお、 $\frac{\partial h(\mathbf{A}^{(Q)})}{\partial \lambda_Q} = 0$ は条件 1 に無関係に成立する。

16 (1) 式で $0 \leq x \leq 1$ であることから、サイクルが短いほど ξ は大きくなる。

17 参加者数が有限の場合、各参加者のコストには相関があるが、平均の計算に関しては相関は影響しない。

図1 サイクルの長さで決済システム全体の平均コスト



備考：固定長のサイクルの長さ(横軸)と決済システム全体の平均コスト(縦軸)。左図は $\delta = 0.1$ 、右図は $\delta = 0.5$ 。他のパラメータは、 $\tilde{\lambda}_E = \tilde{\lambda}_Q = \tilde{\lambda}_D = 0.1$ 、 $R = 1$ 、 $\mu = 0.7$ 、 $F_S(s)$ は平均0、標準偏差0.5の正規分布。

Soramäki *et al.* [2007] や今久保・副島 [2008a] は、実際の決済システムの実証分析を行い、決済ネットワークは、決済のハブとなる少数の金融機関と、ハブを中心とするスター型ネットワークからなる2層構造を持つことを確認している。またこうした2層構造のおかげで、決済ネットワークの規模に比べて資金決済の際に経由される金融機関の数は比較的少なく、Fedwireでは平均2.62ステップで取引相手に到達し(Soramäki *et al.* [2007])、また日銀ネットでも3ステップ以内でネットワークの相当程度に到達可能であることが報告されている(今久保・副島 [2008a])。ネットワークの平均距離長は、サイクルの長さを表す概念ではないが、ネットワークの中核にハブとなる中心的金融機関が存在し、これらの間では活発な決済が行われていることを考慮すると、現実の銀行間資金決済システムのサイクルは短く、したがって、オフセット機能が効果を発揮しやすい状況にあると考えられる。

ハ. 流動性ショックと支払額の影響

モデル1では、流動性ショックの分布 $F_S(s)$ と支払額 μ は、 Θ_1 と Θ_2 を介して均衡に影響を及ぼす。支払額 μ で基準化した流動性ショックの大きさを $S' = S/\mu$ で表すと、

$$\Theta_1 = \mu[F_{S'}(1) - G_{S'}(0, 1)], \tag{17}$$

が成立する。ここで $F_{S'}(s)$ は S' の分布関数、 $G_{S'}(s, t) = \int_s^t u F_{S'}(du)$ を表す。一方、

$$\delta = \frac{\text{支払額 } \mu \text{ に対する遅延コスト } (\gamma)}{\text{1 単位の借入に対する金利負担 } (R)},$$

であるから、支払額1単位当たりの相対的遅延コストは $\delta' = \delta/\mu$ となる。(17)式より

$$\Theta_1 \leq \delta \iff F_{S'}(1) - G_{S'}(0, 1) \leq \delta',$$

が成り立つので、ケース 2 の閾値 Θ_1 と δ の大小は S' と δ' の相対的な関係で決まり、 μ の値には直接依存しない。また、

$$h(\mathbf{A}^{(Q)})\Theta_2 \leq \delta \iff h(\mathbf{A}^{(Q)})[F_{S'}(-1) - G_{S'}(-1, 0)] \leq \delta',$$

となるので、ケース 3 の閾値と δ の大小関係についても同様のことがいえる。

(3) 社会的厚生

本小節では、均衡と決済システム全体の社会的厚生との関係を分析する。社会的厚生を表す尺度として、コスト面では決済システム全体（戦略的、非戦略的参加者の両方を含む）の平均コストを、また決済の円滑さを示す指標として午前中に決済される支払比率を考える。

定理 1 で示したように、相対的遅延コスト δ が増加すると、均衡は「 $\mathbf{A}^{(D)} \rightarrow \mathbf{A}^{(Q)} \rightarrow \mathbf{A}^{(E)}$ 」と変化する。以下では、 δ の変化に伴って均衡が変化するとき、これらの尺度がどのように変化するかを調べる。

イ. 決済システム全体の平均コスト

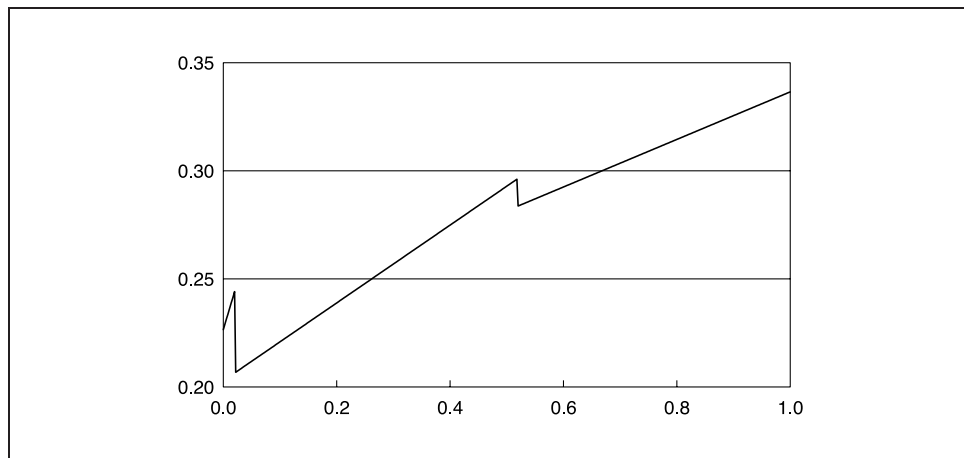
図 2 は、流動性コストを $R = 1$ に固定して δ を増加させたときに¹⁸、(16) 式の決済システム全体の平均コストが変化する様子を示した例である。グラフ上で平均コストが減少しているのは、均衡が $\mathbf{A}^{(D)} \rightarrow \mathbf{A}^{(Q)}$ へと変化する $\delta = h(\mathbf{A}^{(Q)})\Theta_2$ 、および $\mathbf{A}^{(Q)} \rightarrow \mathbf{A}^{(E)}$ へと変化する $\delta = \Theta_1$ である。同じ均衡であれば δ の増加に伴って平均コストも増加するが、均衡が変化する点では δ が増加するにもかかわらず平均コストは減少する。その理由は次のように説明できる。

$\delta_1 < h(\mathbf{A}^{(Q)})\Theta_2 < \delta_2$ とすると、 δ_1 では $\mathbf{A}^{(D)} = (0, 0, \lambda)$ が均衡、 δ_2 では $\mathbf{A}^{(Q)} = (0, \lambda, 0)$ が均衡となるので、(6) 式～(8) 式より平均コストの差は

$$\begin{aligned} & C_{\text{All}}(\delta_2; \mathbf{A}^{(Q)}) - C_{\text{All}}(\delta_1; \mathbf{A}^{(D)}) \\ &= \{\tilde{\lambda}_E \Theta_1 [\pi_E(\mathbf{A}^{(D)}) - \pi_E(\mathbf{A}^{(Q)})] \\ &\quad + \tilde{\lambda}_Q [\delta_2 - \delta_1 + \pi_Q(\mathbf{A}^{(D)})\delta_1 - \pi_Q(\mathbf{A}^{(Q)})\delta_2] \\ &\quad + \tilde{\lambda}_D [\delta_2 - \delta_1 + (\pi_D(\mathbf{A}^{(D)}) - \pi_D(\mathbf{A}^{(Q)}))\Theta_2] \\ &\quad + \lambda [\delta_2 - \delta_1 + \pi_D(\mathbf{A}^{(D)})\Theta_2 - \pi_Q(\mathbf{A}^{(Q)})\delta_2]\} R, \end{aligned} \tag{18}$$

18 $\delta = \gamma/R$ なので、遅延コスト γ を増加させることに相当する。

図2 モデル1の決済システム全体の平均コスト



備考：相対的遅延コスト δ (横軸) と決済システム全体の平均コスト (縦軸)。 $\tilde{\lambda}_E = \tilde{\lambda}_Q = \tilde{\lambda}_D = 0.1$ 、 $R = 1$ 、 $\mu = 0.7$ 、 $F_S(s)$ は平均 0、標準偏差 0.5 の正規分布、サイクルは長さ 2 の固定長。

表2 支払方法と平均コストの関係

$\delta < h(\mathbf{A}^{(Q)})\Theta_2$	$\delta = h(\mathbf{A}^{(Q)})\Theta_2$	$h(\mathbf{A}^{(Q)})\Theta_2 < \delta < h(\mathbf{A}^{(D)})\Theta_2$
$C_D(\mathbf{A}^{(Q)}) < C_Q(\mathbf{A}^{(Q)})$	$C_D(\mathbf{A}^{(Q)}) = C_Q(\mathbf{A}^{(Q)})$	$C_D(\mathbf{A}^{(Q)}) > C_Q(\mathbf{A}^{(Q)})$
\wedge $C_D(\mathbf{A}^{(D)}) < C_Q(\mathbf{A}^{(D)})$	\wedge $C_D(\mathbf{A}^{(D)}) < C_Q(\mathbf{A}^{(D)})$	\wedge $C_D(\mathbf{A}^{(D)}) < C_Q(\mathbf{A}^{(D)})$

となる¹⁹。補論1(4)の補題3より、任意の $X \in \{E, Q, D\}$ に対して $\pi_X(\mathbf{A}^{(D)}) < \pi_X(\mathbf{A}^{(Q)})$ となることと、 $\delta_2 > h(\mathbf{A}^{(Q)})\Theta_2$ に注意すると、(18)式の右辺第1項は負、第2項～第4項も δ_1 と δ_2 が十分近ければ負となることが示される。よって、 δ が $h(\mathbf{A}^{(Q)})\Theta_2$ を横切って増加する際には、決済システム全体の平均コストは減少することになる。

一見直観に反するのように感じられるこの現象は、次のように考えると理解できる。平均コスト $C_Q(\mathbf{A}^{(Q)})$ 、 $C_Q(\mathbf{A}^{(D)})$ 、 $C_D(\mathbf{A}^{(Q)})$ 、 $C_D(\mathbf{A}^{(D)})$ を比較すると、表2の大小関係が成り立つ(補論2を参照)。

$\delta < h(\mathbf{A}^{(Q)})\Theta_2$ では、均衡での平均コスト $C_D(\mathbf{A}^{(D)})$ が4つの平均コストの最小にはなっていない。すべての戦略的参加者が Q を選択している状況では、個々の参加者に D へ変更するインセンティブが生じ、それによってすべての戦略的参加者が D へ変更した結果、平均コストが増加するためである。特に、 $\delta \simeq h(\mathbf{A}^{(Q)})\Theta_2$ の場合は、 $C_Q(\mathbf{A}^{(Q)}) < C_D(\mathbf{A}^{(D)})$ となるので、すべての戦略的参加者が Q を選択する方が平均コストが小さいにもかかわらず、 D が均衡として選ばれることになる。この状況は、ゲーム理論における囚人のジレンマに対応している。モデルは異なる

19 δ の影響を調べるため、 δ を明示している。

が、決済システムの理論的な分析で囚人のジレンマが発生するケースは、Bech and Garratt [2003] にも例示されている。

δ が Θ_1 を挟んで増加し、 $\mathbf{A}^{(Q)} \rightarrow \mathbf{A}^{(E)}$ へと均衡が変化する場合も同様の状況が生じる。全体としては、 δ が増加していく場合、均衡が変わらなければ平均コストは増加し、均衡が変化するとき減少する。よって、平均コストを最小とする δ は、 0 、 $h(\mathbf{A}^{(Q)})_{\Theta_2}$ 、 Θ_1 のいずれかとなる。

ロ. 早期決済比率

決済がどの程度円滑に行われるかを評価する尺度として、午前中に決済が行われる支払いの比率を分析する。 $\pi_E(\mathbf{A}) = \pi_Q(\mathbf{A})$ を利用すると、ケース1~ケース3の均衡に対する午前中の決済比率は

$$\begin{aligned} M(\mathbf{A}^{(E)}) &= (\tilde{\lambda}_E + \lambda)\pi_E(\mathbf{A}^{(E)}) + \tilde{\lambda}_Q\pi_Q(\mathbf{A}^{(E)}) + \tilde{\lambda}_D\pi_D(\mathbf{A}^{(E)}) \\ &= (1 - \tilde{\lambda}_D)\pi_E(\mathbf{A}^{(E)}) + \tilde{\lambda}_D\pi_D(\mathbf{A}^{(E)}), \\ M(\mathbf{A}^{(Q)}) &= \tilde{\lambda}_E\pi_E(\mathbf{A}^{(Q)}) + (\tilde{\lambda}_Q + \lambda)\pi_Q(\mathbf{A}^{(Q)}) + \tilde{\lambda}_D\pi_D(\mathbf{A}^{(Q)}) \\ &= (1 - \tilde{\lambda}_D)\pi_E(\mathbf{A}^{(Q)}) + \tilde{\lambda}_D\pi_D(\mathbf{A}^{(Q)}), \\ M(\mathbf{A}^{(D)}) &= \tilde{\lambda}_E\pi_E(\mathbf{A}^{(D)}) + \tilde{\lambda}_Q\pi_Q(\mathbf{A}^{(D)}) + (\tilde{\lambda}_D + \lambda)\pi_D(\mathbf{A}^{(D)}) \\ &= (\tilde{\lambda}_E + \tilde{\lambda}_Q)\pi_E(\mathbf{A}^{(D)}) + (\tilde{\lambda}_D + \lambda)\pi_D(\mathbf{A}^{(D)}), \end{aligned}$$

と計算できる。 δ が変化しても均衡が同じであれば受取確率 $\pi_X(\mathbf{A}^{(Y)})$ は変化しない。一方、補題3より任意の $X \in \{E, Q, D\}$ に対して

$$\pi_X(\mathbf{A}^{(E)}) > \pi_X(\mathbf{A}^{(Q)}) > \pi_X(\mathbf{A}^{(D)}),$$

が成り立つ。以上の議論と (12) 式より、ケース1~ケース3の均衡に対しては

$$M(\mathbf{A}^{(E)}) > M(\mathbf{A}^{(Q)}) > M(\mathbf{A}^{(D)}),$$

が成り立つ。したがって、3つの均衡の中では $\mathbf{A}^{(E)}$ 、 $\mathbf{A}^{(Q)}$ 、 $\mathbf{A}^{(D)}$ の順に午前中の決済比率が高いことがわかる。これは、相対的遅延コスト δ が大きい方が各参加者に早期返済のインセンティブが働くというモデルの構造と整合的な結果である。

以上の議論は、遅延コストを大きくすることで、決済システム全体の平均コストと早期決済比率の両面で社会的厚生を改善できる可能性があることを示している。実際の決済システムにおいて遅延コストを自由に設定できるわけではないが、英国の CHAPS で適用されているスループット・ルールや日銀ネットの取引慣行は、支払遅延に対して他行からの信認の低下などによる間接的なペナルティを与えており、一種の遅延コストと考えることができる。上記の分析は、こうしたルールが返済の後

ずれを防ぐことで、決済システム全体のコストを低減させる経済効果を持ちうることを示唆している。

5. 流動性ショックと決済行動

4節で分析したモデル1では、参加者は流動性ショックの大きさがわかる前に支払方法を決定していた。本節では、参加者が流動性ショックの大きさを知ってから支払方法を選択する場合を分析する。これは、自分自身の口座残高に応じて支払指図を決めることができる状況に対応するため、balance-reactive型の修正RTGS方式を模したモデルと考えることができる (Martin and McAndrews [2008])。

4節のモデル1に対して、本節のモデルをモデル2と呼ぶ。以下では特に断りがない限り、3節および4節と同じ用語や記号を用いる。また、決済ネットワークの構造や参加者のタイプなどもモデル1と同じとする。そのため、モデル2での決済の流れは、表1の午前の(a)と(b)の順序が入れ替わったものになる。

参加者は自分自身の流動性ショックの大きさはわかるが、他の参加者の流動性ショックについては分布 $F_S(s)$ のみを知っているものとする。(3)式~(5)式で計算した流動性ショック S に対する平均コスト $C_X(S)$ ($X \in \{E, Q, D\}$) は、受取確率 π_X を介して支払選択ベクトル \mathbf{A} に依存するため、以下では $C_X(S; \mathbf{A})$ で表すことにする。前節までと同様に、参加者は仮定1のもとで計算される (近似的な) $C_X(\mathbf{A})$ にもとづいて支払方法を選択するものとする。

(1) モデル2の均衡

まず、モデル2における均衡を定義する。流動性ショック S を受け取った戦略的参加者の支払方法を $a(S)$ で表す。戦略的参加者は確率的に無差別なので、純戦略の範囲では同じ S に対しては同じ支払方法を選択する。支払方法の集合を $A = \{a(S); S \in \mathbb{R}\}$ で表し、 A のもとで戦略的参加者が E 、 Q 、 D を選択する確率をそれぞれ $\lambda_X^{[A]}$ ($X \in \{E, Q, D\}$) とする。また、 A に対する支払選択ベクトルを

$$\mathbf{A}^{[A]} = (\lambda_E^{[A]}, \lambda_Q^{[A]}, \lambda_D^{[A]}), \quad (19)$$

で定める。

定義2 $A = \{a(S); S \in \mathbb{R}\}$ がモデル2の均衡であるとは、

$$C_{a(S)}(S; \mathbf{A}^{[A]}) \leq C_Y(S; \mathbf{A}^{[A]}), \quad \forall Y \neq a(S),$$

が成り立つことを意味する。

定義2は、支払選択ベクトル $\mathbf{A}^{[A]}$ のもとでは、すべての S に対して $a(S)$ が最適な支払方法であることを示している。したがって、 A のもとでは戦略的参加者が支払行動を変更するインセンティブは生じない。

無作為に選んだ参加者が、流動性ショックの大きさ $S \leq s$ の戦略的参加者である確率を

$$F(s) = \lambda F_S(s),$$

で表す。相対的遅延コスト $\delta > 0$ に対して、 y の方程式

$$y = F(-\delta/h(\lambda - F(\mu - \delta), F(\mu - \delta) - y, y)), \quad (20)$$

は $(0, F(-\delta))$ の範囲に解を持つ（補論3(1)を参照）。この解は δ に依存するので、 $y^*(\delta)$ で表す。3種類の支払方法 $A_i = \{a_i(S); S \in \mathbb{R}\}$ ($i = 1, 2, 3$) を

$$\begin{aligned} a_1(S) &= E, \quad S \in \mathbb{R}, \\ a_2(S) &= \begin{cases} E, & S \geq \mu - \delta, \\ Q, & S < \mu - \delta, \end{cases} \\ a_3(S) &= \begin{cases} E, & S \geq \mu - \delta, \\ Q, & -\delta/h(\lambda - F(\mu - \delta), F(\mu - \delta) - y^*(\delta), y^*(\delta)) \leq S < \mu - \delta, \\ D, & S < -\delta/h(\lambda - F(\mu - \delta), F(\mu - \delta) - y^*(\delta)), \end{cases} \end{aligned}$$

で定める。(19)式の支払選択ベクトル $\mathbf{A}^{[A_i]}$ ($i = 1, 2, 3$) は、それぞれ次のように計算される。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{[A_1]} &= (\lambda_E^{[A_1]}, \lambda_Q^{[A_1]}, \lambda_D^{[A_1]}) = (\lambda, 0, 0), \\ \mathbf{A}^{[A_2]} &= (\lambda_E^{[A_2]}, \lambda_Q^{[A_2]}, \lambda_D^{[A_2]}) = (\lambda - F(\mu - \delta), F(\mu - \delta), 0), \\ \mathbf{A}^{[A_3]} &= (\lambda_E^{[A_3]}, \lambda_Q^{[A_3]}, \lambda_D^{[A_3]}) = (\lambda - F(\mu - \delta), F(\mu - \delta) - y^*(\delta), y^*(\delta)). \end{aligned}$$

定理3 モデル2の均衡は次のように決まる²⁰。

(ケース1) $\delta \geq \mu$ のとき、すべての戦略的参加者が E を選択する A_1 が均衡となる。

(ケース2) $h(\mathbf{A}^{[A_2]})\mu \leq \delta < \mu$ のとき、流動性ショック S に応じて $a_2(S)$ を選択する A_2 が均衡となる。

²⁰ 各ケースの境界となる δ や特定の S の値に対しては、 E と Q あるいは Q と D がともに最適な支払方法になる場合がある。場合分けによって議論が複雑になるのを避けるため、以下では E と Q が最適ならば E を、 Q と D が最適ならば Q を選択するものとする。

(ケース3) $\delta < h(\mathbf{A}^{[A_3]})\mu$ のとき、流動性ショック S に応じて $a_3(S)$ を選択する A_3 が均衡となる。

証明 補論3(2)を参照。 □

ケース2とケース3では、最適な支払方法は流動性ショックのサイズに関する閾値型となっている。すなわち、流動性ショック S が一定値を超えれば E 、逆に一定値以下ならば D を選択し、その間の範囲では Q を選択する。これは、流動性ショックが大きければ支払余力が生じるため、遅延コストを避けるために E を選択し、逆に負の大きな流動性ショックに対しては借入コストを減らすために D が選択されるためと考えることができる。

次の定理4は、モデル1と同様に、モデル2においてもケース2とケース3の均衡が共存し、スタグハントが発生することを示している。

定理4 条件1のもとでは $h(\mathbf{A}^{[A_2]}) < h(\mathbf{A}^{[A_3]})$ が成り立ち、 $h(\mathbf{A}^{[A_2]}) \leq \delta \leq h(\mathbf{A}^{[A_3]})$ では $\mathbf{A}^{[A_2]}$ と $\mathbf{A}^{[A_3]}$ がともに均衡となる。このとき、任意の $X \in \{E, Q, D\}$ に対して、 $C_X(S; \mathbf{A}^{[A_2]}) < C_X(S; \mathbf{A}^{[A_3]})$ が成り立つ。

証明 補論3(3)を参照。 □

なお、(20)式が複数の解を持つ場合は、それぞれに対して均衡が存在する。 $y^1(\delta) < y^2(\delta)$ を(20)式の解とし、それぞれに対する支払方法 $A_3^i = \{a_3^i(S); S \in \mathbb{R}\}$ ($i = 1, 2$) を

$$a_3^i(S) = \begin{cases} E, & S \geq \mu - \delta, \\ Q, & -\delta/h(\lambda - F(\mu - \delta)), F(\mu - \delta) - y^i(\delta), y^i(\delta) \leq S < \mu - \delta, \\ D, & S < -\delta/h(\lambda - F(\mu - \delta)), F(\mu - \delta) - y^i(\delta), \end{cases}$$

で定めると、 A_3^1 と A_3^2 はいずれも均衡となる。また、対応する支払選択ベクトルを

$$\mathbf{A}^{[A_3^i]} = (\lambda - F(\mu - \delta), F(\mu - \delta) - y^i(\delta), y^i(\delta)), \quad i = 1, 2,$$

で表すと、補題2から

$$h(\mathbf{A}^{[A_2]}) < h(\mathbf{A}^{[A_3^1]}) < h(\mathbf{A}^{[A_3^2]}),$$

が成り立つので、重複する δ の区間では均衡が複数存在する。また、補題3から

$$C_X(\mathbf{A}^{[A_3^1]}) < C_X(\mathbf{A}^{[A_3^2]}), \quad X \in \{E, Q, D\},$$

が成り立つので、小さな解に対応する均衡の方が平均コストは小さくなる。

(2) モデル 2 における最適決済行動

4 節のモデル 1 と同様に、非戦略的参加者、決済ネットワークの構造、流動性ショックと支払額の各パラメータが、モデル 2 における決済行動に与える影響を調べる。なお、ケース 2 とケース 3 の均衡が共存する場合は、すべての参加者にとって平均コストが小さいケース 2 の均衡が選ばれるものとする。

イ. 非戦略的参加者の影響

非戦略的参加者の比率は、 $h(\mathbf{A}^{[A_2]})$ を介してケース 2 の均衡が生じる δ の範囲に影響を与える。(A-8) 式から

$$\frac{1}{h(\mathbf{A}^{[A_2]})} = 1 + \frac{\zeta(\tilde{\lambda}_Q + F(\mu - \delta))}{1 - (\tilde{\lambda}_Q + \tilde{\lambda}_D) - F(\mu - \delta)}, \quad (21)$$

となるので、条件 1 のもとでは

$$\frac{\partial h(\mathbf{A}^{[A_2]})}{\partial \tilde{\lambda}_E} = 0, \quad \frac{\partial h(\mathbf{A}^{[A_2]})}{\partial \tilde{\lambda}_Q} < 0, \quad \frac{\partial h(\mathbf{A}^{[A_2]})}{\partial \tilde{\lambda}_D} < 0,$$

となる。したがって、モデル 1 に対する結果 (14) 式と異なり、 Q および D を選択する非戦略的参加者の増加は、ケース 2 の均衡が生じる δ の範囲を広げる効果を持つ。ケース 2 では、戦略的参加者は E または Q を選択しているため、一部が Q や D に置き換わると受取確率が減少するため、遅延コストの増加を避けるためにケース 3 ではなくケース 2 が選ばれるものと考えられる。

ロ. 決済ネットワーク構造の影響

(15) 式はモデル 2 に対しても成立するので、決済ネットワークの構造が均衡に与える影響は、基本的にモデル 1 の場合と同様である。すなわち、サイクルが短く取引相手との距離が近いほどオフセット機能が効果を発揮しやすくなるため、待ち行列を利用するインセンティブが大きくなる。ただし、 $\delta \geq \mu$ の場合は、決済ネットワークの構造は均衡に影響しない。

ハ. 流動性ショックと支払額の影響

支払額 μ で基準化した相対的遅延コスト $\delta' = \delta/\mu$ で定理 3 を書き直すと、ケース 1 は $\delta' \geq 1$ 、ケース 2 は $h(\mathbf{A}^{[A_2]}) \leq \delta' \leq 1$ 、ケース 3 は $\delta' \leq h(\mathbf{A}^{[A_3]})$ となる。さらに、(21) 式から、条件 1 のもとでは

$$\frac{dh(\mathbf{A}^{[A_2]})}{dF_S} = \frac{dh(\mathbf{A}^{[A_2]})}{dF} \frac{dF}{dF_S} = \lambda \frac{dh(\mathbf{A}^{[A_2]})}{dF} < 0, \quad (22)$$

が成り立つ。

流動性ショック S_1 と S_2 の分布関数の間に

$$F_{S_1}(s) \geq F_{S_2}(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

の大小関係が成り立つとする。直観的には、(23) 式は S_2 の方が S_1 よりも流動性ショックが正の方向へシフトしている、すなわち流動性リスクが小さいことを表す²¹。これは、流動性ショックの判明後にどの決済方法を選択するか対応可能なため、不確実性が低下していることと整合的である。(22) 式から、 S_2 の方が $h(\mathbf{A}^{[A_2]})$ が大きくなるため、ケース 2 の範囲は狭くなる。

(3) モデル 1 とモデル 2 の均衡の比較

ここでは、モデル 1 とモデル 2 の均衡を比較する。いずれのモデルも、 δ の大きさによって均衡が 3 つのケースに分かれ、さらにケース 2 とケース 3 の均衡は共存する可能性がある。比較を簡単にするため、ケース 2 とケース 3 の均衡が共存する場合は、平均コストが小さいケース 2 が選ばれるものとする。

ケース 1 が生じる δ の範囲を比べると、

$$\Theta_1 = \mu F_S(\mu) - G_S(0, \mu) < \mu,$$

となり、すべての戦略的参加者が E を選択する δ の範囲はモデル 2 の方が狭い。また、補題 2 から $h(\mathbf{A}^{(Q)}) < h(\mathbf{A}^{[A_2]})$ となることがわかる。これと $\Theta_2 < \mu$ から、ケース 2 の範囲はモデル 2 の方が上方に位置し、ケース 3 の範囲はモデル 2 の方が広がる (表 3 を参照)。モデル 2 では、流動性ショックの大きさに応じて支払方法を選択できるため、モデル 1 ではすべての戦略的参加者が E を選ぶケースでも、流動性ショックに応じて E または Q を選ぶなど、柔軟に支払方法が選ばれている。

次に、モデル 1 とモデル 2 の社会的厚生を比較する。図 3 は、図 2 と同じパラメータに対して、モデル 1 とモデル 2 の決済システム全体の平均コストを δ の関数として描いたものである²²。モデル 2 のグラフをみると、「 $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3$ 」と均衡が変化する閾値の δ で平均コストが減少し、同じ均衡が続く間は増加している。これは、4 節(3)イ. で示したモデル 1 と同じ理由による。また表 3 で示したよ

21 一般に、確率変数 X_1 の分布関数 $G_1(x)$ と X_2 の分布関数 $G_2(x)$ の間に

$$G_1(x) \geq G_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

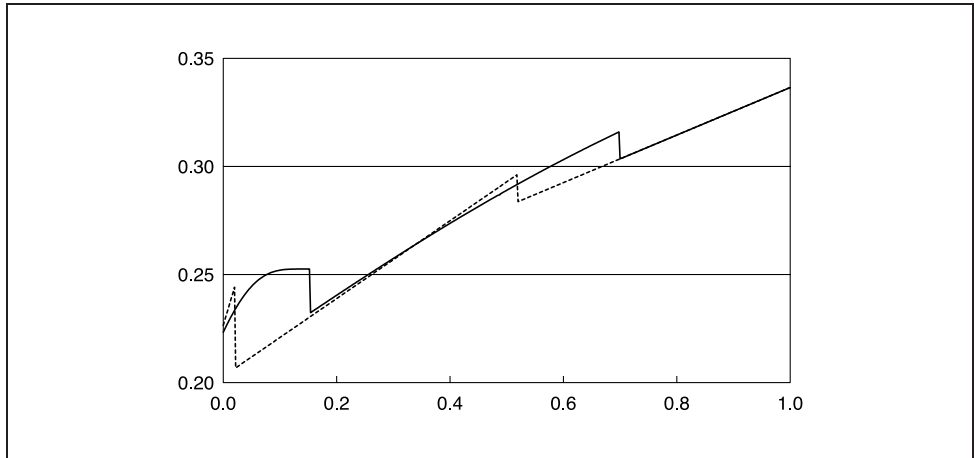
の関係がある場合、 $G_1(x)$ (または X_1) は確率順序の意味で $G_2(x)$ (または X_2) より小さいと呼ぶ。この場合、適当に確率空間を構成すると常に $X_1 \leq X_2$ が成り立つようにできる。また、 X_1 と X_2 が非負確率変数であれば、任意の $r \geq 0$ に対して $\mathbb{E}[X_1^r] \leq \mathbb{E}[X_2^r]$ が成立する。

22 このパラメータに対しては、(20) 式の解は 1 つで、ケース 3 の均衡は一意に定まる。

表 3 δ の値によるモデル 1 とモデル 2 の均衡の比較

δ の範囲	$h(A^{(Q)})\Theta_2$	$h(A^{[A_2]})\mu$	Θ_1	μ
モデル 1	D	Q		E
モデル 2	E or Q or D		E or Q	E

図 3 モデル 1 とモデル 2 の決済システム全体の平均コストの比較



備考：相対的遅延コスト δ (横軸)、決済システム全体の平均コスト (縦軸)。モデル 1 は点線、モデル 2 は実線。 $\tilde{\lambda}_E = \tilde{\lambda}_Q = \tilde{\lambda}_D = 0.1$ 、 $R = 1$ 、 $\mu = 0.7$ 、 $F_S(s)$ は平均 0、標準偏差 0.5 の正規分布、サイクルは長さ 2 の固定長。

うに、ケース 1～ケース 3 の均衡の区間は、モデル 2 の方が上方に位置していることが確認できる。モデル 1 とモデル 2 の平均コストを比較すると、 δ の値によって大小関係が変化する。モデル 1 は 3 タイプの均衡の差が大きく、均衡が変化した直後はコストが大幅に減少するのに対し、モデル 2 の均衡は δ に応じて少しずつ変化する。

6. 支払分割と決済行動

モデル 1 とモデル 2 では、参加者が 1 単位 (金額は μ) を一括して支払うものと仮定した。本節では、より現実的な想定として、参加者が複数単位の支払いを E 、 Q 、 D へ分割して行う状況を考え、最適な支払分割の方法とそのもとの均衡を分析する。以下、本節で分析するモデルをモデル 3 と呼ぶ。

(1) 支払分割モデル

各参加者は μ 単位の支払いを行うが、1 単位ごとに E 、 Q 、 D の中から支払方法を選択できるとする。受取りも 1 単位ずつ計 μ 単位で、支払いと受取りは 1 単位ずつ対応しているものとする。言い換えると、 μ 単位の支払いはそれぞれ別のサイクルに含まれていると考える。1 単位の支払いに対して対応する受取りが午前中に起きる確率は、支払方法 (E 、 Q 、 D) に応じて補題 1 で与えられる。 μ 単位のうち、午前中に支払う単位数を μ_E 、待ち行列へ入れる単位数を μ_Q 、午後には支払う単位数を μ_D で表す。ここで $\mu_E + \mu_Q + \mu_D = \mu$ である。以下では $\mathbf{U} = (\mu_E, \mu_Q, \mu_D)$ とし、 \mathbf{U} を支払分割ベクトルと呼ぶ。

流動性ショックについては、モデル 1 と同様に、参加者は流動性ショックの大きさを知る前に \mathbf{U} を決めるものとする。これによりどの戦略的参加者も同じ \mathbf{U} を選択することになるため、全参加者の支払いに占める E 、 Q 、 D の割合は

$$\lambda_X = \lambda \frac{\mu_X}{\mu}, \quad X \in \{E, Q, D\}, \quad (24)$$

となる。3 節と 4 節では、均衡における $\mathbf{A} = (\Lambda_E, \Lambda_Q, \Lambda_D)$ を導出したが、(24) 式から \mathbf{A} を決めることと \mathbf{U} を決めることは同じになるため、本節では \mathbf{A} を \mathbf{U} で置き換えて考える。そのため、これまでの $\pi_X(\mathbf{A})$ を $\pi_X(\mathbf{U})$ で、 $h(\mathbf{A})$ を $h(\mathbf{U})$ で表記する。

戦略的参加者全体の支払分割ベクトルを \mathbf{V} として、個々の戦略的参加者の最適な支払分割を考える。ある参加者が $\mathbf{U} = (\mu_E, \mu_Q, \mu_D)$ を選択した場合、遅延コストの平均は

$$[(1 - \pi_Q(\mathbf{V}))\mu_Q + \mu_D]\gamma, \quad (25)$$

となる²³。一方、この参加者は午前中に μ_E 単位の支払いを行うので、1 単位ごとの支払いに対して確率 $\pi_E(\mathbf{V})$ で午前中に受取りがある。この受取単位数を T_E で表す。また、午前中に支払わない μ_D 単位に対してそれぞれ確率 $\pi_D(\mathbf{V})$ で午前中に受取りが発生するので、この受取単位数を T_D で表す。1 単位ごとの支払いに対して午前中に受取りが起きるかどうかは独立に決まると仮定すると、 T_E と T_D は試行回数がそれぞれ μ_E と μ_D 、1 回当たりの生起確率が $\pi_E(\mathbf{V})$ と $\pi_D(\mathbf{V})$ の二項分布に従い、互いに独立となる。この参加者は、必要に応じて受け取った $T_E + T_D$ 単位を支払いに充当できるため、不足金額を借り入れるためのコストは

$$W = \max(\mu_E - (T_E + T_D) - S, 0) \times R, \quad (26)$$

23 遅延コストは、 Q を選択した μ_Q 単位のうち決済されなかった部分と、 D を選択した μ_D 単位に対して課される。

となる²⁴。(26)式の W の平均 $\mathbb{E}[W]$ は μ_E と μ_D の複雑な関数となり、それにもとづいて最適な支払分割を求めることは難しい²⁵。そのため、以下では(26)式の $T_E + T_D$ を期待値で置き換える近似を考える。

前述した T_E と T_D の分布から、

$$\mathbb{E}[T_E + T_D] = \pi_E(V)\mu_E + \pi_D(V)\mu_D, \quad (27)$$

と求まるので、(26)式の $T_E + T_D$ を(27)式の期待値 $\mathbb{E}[T_E + T_D]$ で置き換えると、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W] &\approx \mathbb{E}[\max(\mu_E - \mathbb{E}[T_E + T_D] - S, 0)]R \\ &= R \int_{-\infty}^{\kappa} (\kappa - s) F_S(ds) \\ &= R[\kappa F_S(\kappa) - G_S(-\infty, \kappa)], \end{aligned} \quad (28)$$

という近似式を得る。ここで

$$\kappa = \kappa(\mu_E(V), \mu_D(V)) = \mu_E - \mathbb{E}[T_E + T_D] = (1 - \pi_E(V))\mu_E - \pi_D(V)\mu_D, \quad (29)$$

とした。参加者は、(25)式の平均遅延コストと(28)式の近似的な平均流動性コストの和

$$C_U(V) = [(1 - \pi_Q(V))\mu_Q + \mu_D]\gamma + [\kappa F_S(\kappa) - G_S(-\infty, \kappa)]R, \quad (30)$$

を最小化するように支払方法を選択するものとする。

(2) モデル3の均衡

まず、モデル3の均衡を定義する。

24 待ち行列に入れた μ_Q 単位の支払指図は、午前中に決済されるか待ち行列に残るかのどちらかで、他の支払いには充当できない。

25 例えば、 $t \leq \min(\mu_E, \mu_D)$ に対しては、

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T_E + T_D = t] &= \sum_{k=0}^t \mathbb{P}[T_E = k, T_D = t - k] = \sum_{k=0}^t \mathbb{P}[T_E = k] \mathbb{P}[T_D = t - k] \\ &= \sum_{k=0}^t \binom{\mu_E}{k} \pi_E(V)^k (1 - \pi_E(V))^{\mu_E - k} \binom{\mu_D}{t - k} \pi_D(V)^{t - k} (1 - \pi_D(V))^{\mu_D - (t - k)}, \end{aligned}$$

と計算される。

定義 3 支払分割ベクトル U がモデル 3 の均衡であるとは、

$$C_U(U) \leq C_V(U), \quad \forall V \neq U, \quad (31)$$

が成り立つことを意味する。

モデル 1 やモデル 2 と同様に、支払分割ベクトル U が均衡ならば、戦略的参加者には U を変更するインセンティブが生じない。

均衡を求めるために、 z の方程式

$$F_S([1 - \pi_E(z, \mu - z, 0)]z) = \delta, \quad (32)$$

が $z \in [0, \mu]$ で解を持つ場合、それを $\mu_E^*(\delta)$ で表す。また、 z の方程式

$$h(0, \mu - z, z)F_S(-\pi_D(0, \mu - z, z)z) = \delta, \quad (33)$$

が $z \in [0, \mu]$ で解を持つ場合、それを $\mu_D^*(\delta)$ で表す。さらに、

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= (\mu, 0, 0), \quad U^{(2)} = (\mu_E^*(\delta), \mu - \mu_E^*(\delta), 0), \quad U^{(3)} = (0, \mu, 0), \\ U^{(4)} &= (0, \mu - \mu_D^*(\delta), \mu_D^*(\delta)), \quad U^{(5)} = (0, 0, \mu), \end{aligned}$$

と定める。

定理 5 (28) 式の近似を用いた場合、モデル 3 の均衡は次のように決まる。

- (ケース 1) $\delta \geq F_S([1 - \pi_E(U^{(1)})]\mu)$ のとき、 $U^{(1)}$ が均衡となる。
- (ケース 2) $F_S(0) < \delta < F_S([1 - \pi_E(U^{(1)})]\mu)$ のとき、 $U^{(2)}$ が均衡となる。
- (ケース 3) $h(U^{(3)})F_S(0) \leq \delta \leq F_S(0)$ のとき、 $U^{(3)}$ が均衡となる。
- (ケース 4) $h(U^{(5)})F_S(-\pi_D(U^{(5)})\mu) < \delta < h(U^{(3)})F_S(0)$ のとき、 $U^{(4)}$ が均衡となる。
- (ケース 5) $\delta \leq h(U^{(5)})F_S(-\pi_D(U^{(5)})\mu)$ のとき、 $U^{(5)}$ が均衡となる。

証明 補論 4 (1) を参照。 □

定理 5 において、 $h(U^{(5)})F_S(-\pi_D(U^{(5)})\mu) \geq h(U^{(3)})F_S(0)$ の場合はケース 4 は起こらない²⁶。一方、 $F_S(0) < F_S([1 - \pi_E(U^{(1)})]\mu)$ は必ず成り立つので、ケース 2

26 一般に、 $h(U^{(5)})F_S(-\pi_D(U^{(5)})\mu)$ と $h(U^{(3)})F_S(0)$ の大小関係はパラメータに依存する。実際、図 2 のパラメータでは $h(U^{(5)})F_S(-\pi_D(U^{(5)})\mu) = 0.06 < 0.22 = h(U^{(3)})F_S(0)$ であるが、 $\tilde{\lambda}_E = \tilde{\lambda}_Q = \tilde{\lambda}_D = 0.3$ に変更すると、 $h(U^{(5)})F_S(-\pi_D(U^{(5)})\mu) = 0.21 > 0.17 = h(U^{(3)})F_S(0)$ と逆転する。

はパラメータによらず起こる。

モデル 1 とモデル 2 では、 δ の値によっては複数の均衡が共存したが、 $h(U^{(5)})F_S(-\pi_D(U^{(5)})\mu) < h(U^{(3)})F_S(0)$ の場合、モデル 3 の均衡はすべての δ に対して一意に定まる。これは、支払分割によって均衡が連続的に変化するためと考えられる。ただし、 $h(U^{(5)})F_S(-\pi_D(U^{(5)})\mu) \geq h(U^{(3)})F_S(0)$ の場合は、 $h(U^{(3)})F_S(0) \leq \delta \leq h(U^{(5)})F_S(-\pi_D(U^{(5)})\mu)$ の範囲でケース 3 とケース 5 の均衡が共存する。

(3) モデル 3 における最適決済行動

モデル 3 において、非戦略的参加者、決済ネットワークの構造、流動性ショックと支払額の各パラメータが、決済行動に与える影響を調べる。5 節と同様に、ケース 3 とケース 5 の均衡が共存する場合は、すべての参加者にとって平均コストが小さいケース 3 の均衡が選ばれるものとする。

イ. 非戦略的参加者の影響

定理 5 でどの均衡が生じるかは、 δ に対する 3 つの閾値 $F_S([1 - \pi_E(U^{(1)})]\mu)$ 、 $h(U^{(3)})F_S(0)$ 、 $h(U^{(5)})F_S(-\pi_D(U^{(5)})\mu)$ によって決まる。非戦略的参加者の比率 $\tilde{\lambda}_E$ 、 $\tilde{\lambda}_Q$ 、 $\tilde{\lambda}_D$ が増加した場合の、これらの閾値の増減を計算すると表 4 のようになる（補論 4 (2) を参照）。

$\tilde{\lambda}_E$ が増加すると、ケース 4 またはケース 5 の均衡が生じる δ の範囲が広がる。これはモデル 1 と同じく、受取確率が高まることに乗じて流動性節約を図るインセンティブが生じるためと思われる。一方、 $\tilde{\lambda}_Q$ が増加すると、 Q を選択するケース 2～ケース 4 の範囲が広がるが、これは $\tilde{\lambda}_Q$ の増加によってオフセット確率が高まるためと考えられる。また、 $\tilde{\lambda}_D$ が増加すると、ケース 1 とケース 3 の範囲の一部がそれぞれケース 2 とケース 4 になる。 $\tilde{\lambda}_D$ が増加すると受取確率が減少するため、流動性コストを避けるために $E \rightarrow Q$ あるいは $Q \rightarrow D$ へと選択が変わるためと考えられる。

ロ. 決済ネットワーク構造の影響

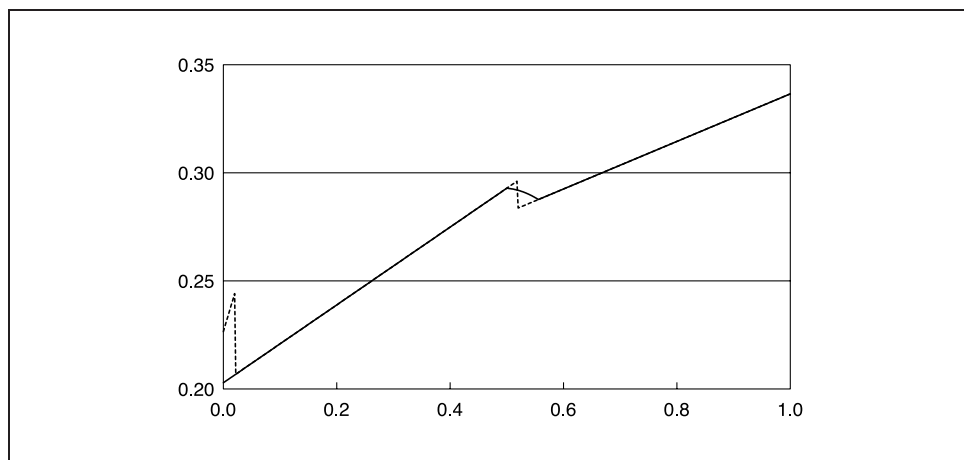
(15) 式はモデル 3 に対しても成立するので、決済ネットワークの構造が均衡に与える影響は、モデル 1 やモデル 2 と同様である。すなわち、サイクルが短く取引相手との距離が近いほど、オフセット機能が効果を発揮しやすくなるため、待ち行列

表 4 非戦略的参加者が増加したときの均衡の閾値の増減

	$F_S([1 - \pi_E(U^{(1)})]\mu)$	$h(U^{(3)})F_S(0)$	$h(U^{(5)})F_S(-\pi_D(U^{(5)})\mu)$
$\tilde{\lambda}_E \nearrow$	\rightarrow	\nearrow	*
$\tilde{\lambda}_Q \nearrow$	\nearrow	\rightarrow	\searrow
$\tilde{\lambda}_D \nearrow$	\nearrow	\nearrow	\rightarrow

備考：* は増減が一意に定まらないことを示す。

図4 モデル1とモデル3の決済システム全体の平均コストの比較



備考：相対的遅延コスト δ (横軸) と決済システム全体の平均コスト (縦軸)。モデル1は点線、モデル3は実線。 $\tilde{\lambda}_E = \tilde{\lambda}_Q = \tilde{\lambda}_D = 0.1$ 、 $R = 1$ 、 $\mu = 0.7$ 、 $F_S(s)$ は平均0、標準偏差0.5の正規分布、サイクルは長さ2の固定長。

を利用するインセンティブが大きくなる。

ハ. 流動性ショックと支払額の影響

モデル1およびモデル2と同様、流動性ショックと支払額が均衡に与える影響は、 μ で基準化した相対的遅延コスト $\delta' = \delta/\mu$ で決まることがわかる。また、流動性ショックの分布 $F_S(s)$ が確率順序の意味で小さくなると、各ケースが生じる δ の範囲は上方にシフトする。これは流動性リスクの増加により、早期返済のインセンティブが低下するためと考えられる。

(4) モデル1とモデル3の均衡の比較

モデル3では支払分割が可能なため、モデル1やモデル2に比べて均衡は連続的に変化する。例えば、 δ の増加に伴って均衡が $U^{(3)} \rightarrow U^{(2)}$ へ変化する場合、閾値の $\delta = F_S(0)$ では $\mu_E^*(\delta) = 0$ となり2つの均衡は一致する。図4は、モデル1とモデル3に対する決済システム全体の平均コストを比較したものである。図3に示したように、モデル1とモデル2では均衡の変化に伴い下方ジャンプが発生したが、モデル3では連続的に変化している²⁷。なお、中央付近で平均コストが減少しているのは、ケース2の $U^{(2)}$ が均衡の区間であるが、常にこのような状況が現れるとは限らず、パラメータによっては平均コストが増加し続ける場合もある。

27 この例では $h(U^{(5)})F_S(-\pi_D(U^{(5)})\mu) < h(U^{(3)})F_S(0)$ が成り立っている。

7. おわりに

銀行間資金決済ネットワークの参加者は、流動性コストと遅延コストを勘案しながら、最適な実行方法や実行のタイミングを選択する。本稿では、こうした状況での参加者の決済行動を非協力ゲームの枠組みで分析した Martin and McAndrews [2008] をベースに、修正 RTGS 方式に対する 3 タイプのモデルを構築し、おのおののモデルに対して決済行動の均衡を導出した。さらに、決済ネットワークの構造、非戦略的参加者の割合、流動性ショックの分布などが決済行動に与える影響を分析した。

観察された主な事象としては、(1)相対的な遅延コストの増加が均衡を変化させ、決済システム全体の平均コストがかえって減少する場合があること、(2)早期に支払う参加者が増えると、流動性節約のインセンティブが働いて他の参加者の支払いが遅くなる場合があること、(3)決済ネットワークのサイクル長が短く、中核的な参加者の中で活発に決済資金が循環しているほどオフセット機能が有効に働くため、流動性節約機能の利用が増えることなどが挙げられる。また、これらの観察事象から、支払遅延を抑制するスループット・ルールや市場慣行が、決済システム全体の厚生価値を高める経済効果を持つこと、実際の資金決済システムではハブ的な役割を果たしている主要参加者間で活発な取引が行われているため、流動性節約機能の効果が期待できることなどの示唆を得ることができた。

分析したモデルは、1 日を 2 時点でモデル化するなど現実の決済ネットワークを十分に表現しているとはいえないが、実際に観察されるいくつかの事象を説明するなど、決済行動に関する理解を深めるうえで有用と考えられる。今後の展開として、こうした理論的な分析とシミュレーションを組み合わせることでより現実的な状況設定で分析を行うことができるようになれば、さらに興味深い知見が得られるものと期待される。

参考文献

- 今久保 圭、「決済方式が参加者行動に及ぼす影響」、日本銀行ワーキングペーパー No. 05-J-14、日本銀行、2005 年
- ・副島 豊、「コール市場の資金取引ネットワーク」、『金融研究』第 27 巻第 2 号、日本銀行金融研究所、2008 年 a、47~100 頁
- ・——、「コール市場のマイクロストラクチャー」、『金融研究』第 27 巻第 2 号、日本銀行金融研究所、2008 年 b、101~132 頁
- 日本銀行決済機構局、「次世代 RTGS 第 1 期対応実施後の決済動向」、日銀レビュー 2009-J-4、日本銀行、2009 年
- Acharya, Viral V., Denis Gromb, and Tanju Yorulmazer, “Imperfect Competition in the Interbank Market for Liquidity as a Rationale for Central Banking,” CEPR Discussion Paper No. 6984, 2008.
- Angelini, Paolo, “An Analysis of Competitive Externalities in Gross Settlement Systems,” *Journal of Banking and Finance*, 22 (1), 1998, pp. 1–18.
- , “Are Banks Risk Averse? Intraday Timing of Operations in the Interbank Market,” *Journal of Money, Credit, and Banking*, 32 (1), 2000, pp. 54–73.
- Bartolini, Leonardo, Spence Hilton, and James McAndrews, “Settlement Delays in the Money Market,” Staff Report No. 319, Federal Reserve Bank of New York, 2008.
- Bech, Morten L., and Rod Garratt, “The Intraday Liquidity Management Game,” *Journal of Economic Theory*, 109, 2003, pp. 198–219.
- Becher, Christopher, Marco Galbiati, and Merxe Tudela, “The Timing and Funding of CHAPS Sterling Payments,” *Economic Policy Review*, 14 (2), Federal Reserve Bank of New York, 2008, pp. 113–133.
- Beyeler, Walter E., Robert J. Glass, Morten L. Bech, and Kimmo Soramäki, “Congestion and Cascades in Payment Systems,” *Physica A*, 384, 2007, pp. 693–718.
- Buckle, Simon, and Erin Campbell, “Settlement Bank Behaviour and Throughput Rules in an RTGS Payment System with Collateralised Intraday Credit,” Working Paper No. 209, Bank of England, 2003.
- Johnson, Kurt, James J. McAndrews, and Kimmo Soramäki, “Economizing on Liquidity with Deferred Settlement Mechanisms,” *Economic Policy Review*, 10 (3), Federal Reserve Bank of New York, 2004, pp. 51–72.
- Kahn, Charles M., James J. McAndrews, and William Roberds, “Settlement Risk under Gross and Net Settlement,” *Journal of Money, Credit, and Banking*, 35 (4), 2003, pp. 591–608.
- Martin, Antoine, and James McAndrews, “Liquidity-Saving Mechanisms,” *Journal of Monetary Economics*, 55 (3), 2008, pp. 554–567.

- McAndrews, James, and Samira Rajan, “The Timing and Funding of Fedwire Funds Transfer,” *Economic Policy Review*, 6 (2), Federal Reserve Bank of New York, 2000, pp. 17–32.
- Mills, David C. Jr., and Travis D. Nesmith, “Risk and Concentration in Payment and Securities Settlement Systems,” *Journal of Monetary Economics*, 55 (3), 2008, pp. 542–553.
- Soramäki, Kimmo, Morten L. Bech, Jeffrey Arnold, Robert J. Glass, and Walter E. Beyeler, “The Topology of Interbank Payment Flows,” *Physica A*, 379, 2007, pp. 317–333.
- Willison, Matthew, “Real-Time Gross Settlement and Hybrid Payment Systems: A Comparison,” Working Paper No. 252, Bank of England, 2004.

補論 1. 3 節の補足説明と証明

(1) サイクルの構成方法について

3 節(2)で述べたように、各参加者が 1 単位の受払いを行うことから、すべての参加者の支払いはある 1 つのサイクルに含まれる。したがって、参加者の集合 $\mathbb{N} = \{1, \dots, N\}$ において、同じサイクルに含まれる参加者を 1 つの部分集合とすると、部分集合の全体は \mathbb{N} の分割となる。

サイクル、すなわち \mathbb{N} の分割は日々変動するものと考え、そのランダムネスを分布

$$F_C(m_2, \dots, m_N) = \mathbb{P}[M_2 = m_2, \dots, M_N = m_N],$$

で与える。ここで、 M_k は k 人の参加者を含むサイクルの個数を表す。参加者数は N 人だから、常に $\sum_{k=2}^N k M_k = N$ が成立する²⁸。例えば、参加者数 $N = 8$ とし、確率 $1/2$ で長さ 2 のサイクルが 4 つ、確率 $1/2$ で長さ 2 のサイクルが 1 つと長さ 3 のサイクルが 2 つできる場合は、

$$F_C(4, 0, \dots, 0) = F_C(1, 2, 0, \dots, 0) = \frac{1}{2},$$

で、それ以外は 0 となる。

F_C が与えられると、無作為に選んだ参加者が含まれるサイクルの長さ L の分布は、

$$\mathbb{P}[L = l] = \sum_{m_2, \dots, m_N} \frac{l m_l}{N} F_C(m_2, \dots, m_N),$$

で計算できる。上の例では、 $\mathbb{P}[L = 2] = 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 2/8 = 5/8$ 、 $\mathbb{P}[L = 3] = 1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 6/8 = 3/8$ となる。なお、参加者ではなく、サイクルを（長さに無関係に）無作為に選ぶ場合のサイクル長の分布は、一般に L の分布と異なるので両者を区別されたい。

(2) 補題 1 の証明

無作為に選んだ参加者を参加者 1 とし、参加者 1 を含むサイクルの長さを L 、参加者 1 の支払人を参加者 2、参加者 2 の支払人を参加者 3、というように参加者 L まで番号を付ける。参加者 1 が D を選択した場合に支払いを受け取るのは、参加者 2

²⁸ $\sum_{k=2}^N k m_k \neq N$ に対しては、 $F_C(m_2, \dots, m_N) = 0$ と定める。

が E 、参加者 2 が Q で参加者 3 が E 、以下同様に、参加者 $1 \sim L-1$ が Q で参加者 L が E を選択する場合となる。仮定 1 のもとでは、各参加者は互いに独立に確率 $\tilde{\lambda}_X + \lambda_X$ で支払方法 $X \in \{E, Q, D\}$ を選択すると考えられるから、

$$\begin{aligned}\pi_D(\mathbf{A}) &= \sum_{l=2}^N \mathbb{P}[L = l] \sum_{k=0}^{l-2} (\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q)^k (\tilde{\lambda}_E + \lambda_E) \\ &= \sum_{l=2}^N \mathbb{P}[L = l] \frac{\{1 - (\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q)^{l-1}\} (\tilde{\lambda}_E + \lambda_E)}{1 - (\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q)} \\ &= \frac{(1 - \xi(\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q))(\tilde{\lambda}_E + \lambda_E)}{1 - (\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q)},\end{aligned}$$

と計算することができる。次に参加者 1 が E を選択した場合に支払いを受け取るのは、 D を選択して支払いを受け取る場合の他の参加者の選択に加えて、参加者 $2 \sim L$ がすべて Q を選択する場合である。したがって、

$$\begin{aligned}\pi_E(\mathbf{A}) &= \pi_D(\mathbf{A}) + \sum_{l=2}^N \mathbb{P}[L = l] (\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q)^{l-1} \\ &= \pi_D(\mathbf{A}) + \xi(\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q) \\ &= \frac{\tilde{\lambda}_E + \lambda_E + \xi(\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q)(\tilde{\lambda}_D + \lambda_D)}{1 - (\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q)},\end{aligned}$$

となる。参加者 1 が Q を選択した場合、受取りによって決済されるのは D を選択した場合と同じで、オフセット決済されるのは参加者 $2 \sim L$ がすべて Q を選択する場合だから、 $\pi_Q(\mathbf{A}) = \pi_E(\mathbf{A})$ となる。□

(3) 定理 1 の証明

(6) 式、(7) 式および $\pi_E(\mathbf{A}) = \pi_Q(\mathbf{A})$ から、

$$C_E(\mathbf{A}) \leq C_Q(\mathbf{A}) \iff \Theta_1 \leq \delta, \quad (\text{A-1})$$

となる。また (7) 式と (8) 式から、

$$C_Q(\mathbf{A}) \leq C_D(\mathbf{A}) \iff h(\mathbf{A})\Theta_2 \leq \delta, \quad (\text{A-2})$$

となる。 $\Theta_1 > \Theta_2$ と $h(\mathbf{A}) < 1$ から、 $\Theta_1 \leq \delta$ ならば $h(\mathbf{A})\Theta_2 < \delta$ が成り立つ。したがって、任意の \mathbf{A} に対して

$$\Theta_1 \leq \delta \implies C_E(\mathbf{A}) \leq C_Q(\mathbf{A}) < C_D(\mathbf{A}), \quad (\text{A-3})$$

$$h(\mathbf{A})\Theta_2 \leq \delta \leq \Theta_1 \implies C_Q(\mathbf{A}) \leq \min\{C_E(\mathbf{A}), C_D(\mathbf{A})\}, \quad (\text{A-4})$$

$$\delta \leq h(\mathbf{A})\Theta_2 \implies C_D(\mathbf{A}) \leq C_Q(\mathbf{A}) < C_E(\mathbf{A}), \quad (\text{A-5})$$

が成り立つ²⁹。

$\Theta_1 \leq \delta$ の場合、(A-3) 式から

$$C_E(\mathbf{A}^{(E)}) \leq C_Q(\mathbf{A}^{(E)}) < C_D(\mathbf{A}^{(E)}),$$

が成り立つので、定義 1 より $\mathbf{A}^{(E)}$ が均衡となる。(A-4) 式に $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(Q)}$ を代入すると、 $h(\mathbf{A}^{(Q)})\Theta_2 \leq \delta \leq \Theta_1$ の場合は

$$C_Q(\mathbf{A}^{(Q)}) \leq \min\{C_E(\mathbf{A}^{(Q)}), C_D(\mathbf{A}^{(Q)})\},$$

となり $\mathbf{A}^{(Q)}$ が均衡となる。同様に (A-5) 式に $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(D)}$ を代入すると、 $\delta \leq h(\mathbf{A}^{(D)})\Theta_2$ の場合は

$$C_D(\mathbf{A}^{(D)}) \leq C_Q(\mathbf{A}^{(D)}) < C_E(\mathbf{A}^{(D)}),$$

となり $\mathbf{A}^{(D)}$ が均衡となる。以上で定理 1 が示された。 □

(4) 定理 2 の証明

補題 2 条件 1 を仮定する。2 つの支払選択ベクトル $\mathbf{A}^{(i)} = (\lambda_E^{(i)}, \lambda_Q^{(i)}, \lambda_D^{(i)})$ ($i = 1, 2$) が

$$\lambda_E^{(1)} \geq \lambda_E^{(2)} \quad \text{かつ} \quad \lambda_Q^{(1)} \leq \lambda_Q^{(2)}, \quad (\text{A-6})$$

を満たすならば、

$$h(\mathbf{A}^{(1)}) \geq h(\mathbf{A}^{(2)}), \quad (\text{A-7})$$

が成り立つ。さらに、(A-6) 式の少なくとも一方が不等式ならば、(A-7) 式も不等式となる。

²⁹ (A-3) 式で $C_E(\mathbf{A}) = C_Q(\mathbf{A})$ となるのは $\delta = \Theta_1$ の場合のみである。同様に、(A-4) 式で $C_Q(\mathbf{A}) = C_E(\mathbf{A})$ となるのは $\delta = \Theta_1$ 、 $C_Q(\mathbf{A}) = C_D(\mathbf{A})$ となるのは $\delta = h(\mathbf{A})\Theta_2$ の場合、(A-5) 式で $C_D(\mathbf{A}) = C_Q(\mathbf{A})$ となるのは $\delta = h(\mathbf{A})\Theta_2$ の場合のみである。

証明 補題 1 より、支払選択ベクトル $\mathbf{A} = (\lambda_E, \lambda_Q, \lambda_D)$ に対して

$$\frac{1}{h(\mathbf{A})} = \frac{1}{h(\lambda_E, \lambda_Q, \lambda_D)} = 1 + \frac{\zeta(\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q)}{\tilde{\lambda}_E + \lambda_E}, \quad (\text{A-8})$$

が成り立つ。よって、条件 1 および (A-6) 式が成り立てば、(A-7) 式が成立する。(A-6) 式の少なくとも一方が不等式ならば、(A-8) 式から (A-7) 式も不等式となる。□

次に、支払選択ベクトルを比較するための半順序を導入する。

定義 4 2つの支払選択ベクトル $\mathbf{A}^{(i)} = (\lambda_E^{(i)}, \lambda_Q^{(i)}, \lambda_D^{(i)})$ ($i = 1, 2$) に対して、

$$\lambda_E^{(1)} \geq \lambda_E^{(2)} \quad \text{かつ} \quad \lambda_D^{(1)} \leq \lambda_D^{(2)}, \quad (\text{A-9})$$

のとき、 $\mathbf{A}^{(1)} \leq \mathbf{A}^{(2)}$ と定義する³⁰。さらに、(A-9) 式の少なくとも一方が不等式のとき、 $\mathbf{A}^{(1)} \prec \mathbf{A}^{(2)}$ と定義する。

直観的には、支払選択ベクトルの間に $\mathbf{A}^{(1)} \leq \mathbf{A}^{(2)}$ の順序がある場合、 $\mathbf{A}^{(1)}$ の方が早いタイミングで支払いが起こりやすく、その結果として受取りも起こりやすいことを意味する。実際、 $\mathbf{A}^{(1)} \leq \mathbf{A}^{(2)}$ の場合、受取確率と平均コストの間に以下の大小関係が成り立つ。

補題 3 $\mathbf{A}^{(1)} \leq \mathbf{A}^{(2)}$ ならば、任意の $X \in \{E, Q, D\}$ に対して

$$\pi_X(\mathbf{A}^{(1)}) \geq \pi_X(\mathbf{A}^{(2)}), \quad (\text{A-10})$$

$$C_X(\mathbf{A}^{(1)}) \leq C_X(\mathbf{A}^{(2)}), \quad (\text{A-11})$$

が成り立つ。さらに、 $\mathbf{A}^{(1)} \prec \mathbf{A}^{(2)}$ ならば、(A-10) 式と (A-11) 式は不等式となる。

証明 サンプルパスの議論を利用する。 $\mathbf{A} = (\lambda_E, \lambda_Q, \lambda_D)$ に対して、参加者 1 が含まれるサイクルの他の参加者 2~L の支払方法を

$$\text{参加者 } i \text{ は } \begin{cases} E \text{ を選択, } & 0 \leq U_i < \tilde{\lambda}_E + \lambda_E, \\ Q \text{ を選択, } & \tilde{\lambda}_E + \lambda_E \leq U_i < \tilde{\lambda}_E + \lambda_E + \tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q, \\ D \text{ を選択, } & \tilde{\lambda}_E + \lambda_E + \tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q \leq U_i \leq 1, \end{cases} \quad (\text{A-12})$$

30 定義 4 の \leq は、確率分布に対する確率順序の一種と考えることができる。

で定める。ただし U_i ($i = 2, \dots, L$) は互いに独立な $[0, 1]$ 上の一様乱数である³¹。このとき、 E 、 Q 、 D を選択する確率はそれぞれ $\tilde{\lambda}_E + \lambda_E$ 、 $\tilde{\lambda}_Q + \lambda_Q$ 、 $\tilde{\lambda}_D + \lambda_D$ となる。 $\mathbf{A}^{(1)}$ と $\mathbf{A}^{(2)}$ に対して、(A-12) 式に従ってサイクル中の参加者の行動を選択する。ただし、一様乱数 U_i は $\mathbf{A}^{(1)}$ と $\mathbf{A}^{(2)}$ に共通のサンプルを使用する。 $\mathbf{A}^{(1)} \preceq \mathbf{A}^{(2)}$ を仮定すると、

参加者 i が $\mathbf{A}^{(1)}$ で E を選択 $\implies \mathbf{A}^{(2)}$ では E または Q を選択、

参加者 i が $\mathbf{A}^{(1)}$ で Q を選択 $\implies \mathbf{A}^{(2)}$ では Q または D を選択、

参加者 i が $\mathbf{A}^{(1)}$ で D を選択 $\implies \mathbf{A}^{(2)}$ では D を選択、

となる。 $\mathbf{A}^{(2)}$ のもとで、参加者 1 がある支払方法を選択し、その結果受取りが発生したとする。 $\mathbf{A}^{(2)}$ を $\mathbf{A}^{(1)}$ に変更すると、このサイクルに含まれる支払方法のうち、 $D \rightarrow Q$ 、 $Q \rightarrow E$ に変更される部分が生じるが、このように変更されても参加者 1 はやはり支払いを受け取ることができる。したがって、 $\mathbf{A}^{(2)}$ で参加者 1 の受取りが発生するならば、 $\mathbf{A}^{(1)}$ においても受取りが発生する。この議論は任意のサンプル U_i に対して成り立つから、 $\mathbf{A}^{(1)} \preceq \mathbf{A}^{(2)}$ ならば $\pi_X(\mathbf{A}^{(1)}) \geq \pi_X(\mathbf{A}^{(2)})$ となることが示された。特に $\mathbf{A}^{(1)} \prec \mathbf{A}^{(2)}$ ならば、 $D \rightarrow Q$ または $Q \rightarrow E$ への変更が正の確率で起こるため、(A-10) 式は不等式となる。

(6) 式～(8) 式より、 $C_E(\mathbf{A})$ 、 $C_Q(\mathbf{A})$ 、 $C_D(\mathbf{A})$ はいずれも $\pi_E(\mathbf{A})$ 、 $\pi_Q(\mathbf{A})$ 、 $\pi_D(\mathbf{A})$ の減少関数だから、上記の議論と合わせると $\mathbf{A}^{(1)} \preceq (<) \mathbf{A}^{(2)}$ ならば $C_X(\mathbf{A}^{(1)}) \leq (<) C_X(\mathbf{A}^{(2)})$ が成り立つ。□

最後に定理 2 を示す。 $\mathbf{A}^{(Q)} = (0, \lambda, 0)$ と $\mathbf{A}^{(D)} = (0, 0, \lambda)$ は (A-6) 式を不等式で満たすから、補題 2 より $h(\mathbf{A}^{(Q)}) < h(\mathbf{A}^{(D)})$ となる。また、 $\mathbf{A}^{(Q)} \prec \mathbf{A}^{(D)}$ だから、補題 3 より、任意の X に対して $C_X(\mathbf{A}^{(Q)}) < C_X(\mathbf{A}^{(D)})$ が成り立つ。□

31 仮定 1 のもとでは、参加者 2～ L は独立に確率 $\tilde{\lambda}_X + \lambda_X$ で支払方法 $X \in \{E, Q, D\}$ を選択する。

補論 2. 4 節の表 2 の計算

まず、 $\mathbf{A}^{(Q)} < \mathbf{A}^{(D)}$ だから、補題 3 より δ の値にかかわらず $C_Q(\mathbf{A}^{(Q)}) < C_Q(\mathbf{A}^{(D)})$ かつ $C_D(\mathbf{A}^{(Q)}) < C_D(\mathbf{A}^{(D)})$ が成立する。次に、(A-2) 式で $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(Q)}$ とすると、

$$\delta \lesseqgtr h(\mathbf{A}^{(Q)})\Theta_2 \iff C_D(\mathbf{A}^{(Q)}) \lesseqgtr C_Q(\mathbf{A}^{(Q)}),$$

を得る。最後に、(A-2) 式で $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(D)}$ とすると $\delta < h(\mathbf{A}^{(D)})\Theta_2$ に対して $C_D(\mathbf{A}^{(D)}) < C_Q(\mathbf{A}^{(D)})$ が示される。□

補論 3. 5 節の証明

(1) (20) 式の解の存在の証明

条件 1 のもとで、(20) 式が $y \in (0, F(-\delta))$ の範囲に解を持つことを示す。 $F(s)$ が増加関数であることと、任意の \mathbf{A} に対して $h(\mathbf{A}) < 1$ が成り立つことから、 $y \in (0, F(-\delta))$ に対して (20) 式の右辺は

$$0 < F(-\delta/h(\lambda - F(\mu - \delta), F(\mu - \delta) - y, y)) < F(-\delta),$$

の範囲に収まる。よって、(20) 式の左辺 y が $0 \rightarrow F(-\delta)$ まで連続的に変化すれば、両辺が一致する $y^*(\delta)$ が存在する。□

(2) 定理 3 の証明

まず支払選択ベクトル \mathbf{A} を所与としたときの最適な支払方法を求め、それをもとに定理 3 を証明する。支払選択ベクトル \mathbf{A} に対して、流動性ショック S を受け取った参加者の最適な支払方法を $a^*(S; \mathbf{A})$ で表す。なお、5 節で仮定したように、 E と Q がともに最適となる場合は E を、 Q と D がともに最適となる場合は Q を選択するものとする。

補題 4 支払選択ベクトル \mathbf{A} に対して、 $a^*(S; \mathbf{A})$ は以下のように決まる。

(ケース 1) $\delta \geq \mu$ のとき、任意の S に対して $a^*(S; \mathbf{A}) = E$ 。

(ケース 2) $h(\mathbf{A})\mu \leq \delta < \mu$ のとき

$$a^*(S; \mathbf{A}) = \begin{cases} E, & \mu - \delta \leq S, \\ Q, & S < \mu - \delta. \end{cases}$$

(ケース 3) $\delta < h(\mathbf{A})\mu$ のとき

$$a^*(S; \mathbf{A}) = \begin{cases} E, & \mu - \delta \leq S, \\ Q, & -\delta/h(\mathbf{A}) \leq S < \mu - \delta, \\ D, & S < -\delta/h(\mathbf{A}). \end{cases}$$

証明 流動性ショック S の値によって 4 つの場合に分けて考える。

(1) $S \geq \mu$ のとき

(3) 式~(5) 式から、 $C_E(S; \mathbf{A}) < \min(C_Q(S; \mathbf{A}), C_D(S; \mathbf{A}))$ が成り立つので、 $a^*(S; \mathbf{A}) = E$ となる。

(2) $0 \leq S < \mu$ のとき

(4) 式と (5) 式から $C_Q(S; \mathbf{A}) < C_D(S; \mathbf{A})$ が成り立つので、 $C_E(S; \mathbf{A})$ と $C_Q(S; \mathbf{A})$ を比較する。 $\pi_E(\mathbf{A}) = \pi_Q(\mathbf{A})$ だから、

$$C_E(S; \mathbf{A}) \leq C_Q(S; \mathbf{A}) \iff (\mu - S)R \leq \gamma \iff S \geq \mu - \delta, \quad (\text{A-13})$$

が成り立つ。 δ の値によって 2 つの場合に分けて考える。

(2-a) $\delta \geq \mu$ のときは、 $\mu - \delta \leq 0 \leq S$ となるので $C_E(S; \mathbf{A}) \leq C_Q(S; \mathbf{A})$ が成立する。よって $a^*(S; \mathbf{A}) = E$ となる。

(2-b) $\delta < \mu$ のときは、(A-13) 式で最適な支払方法が決まる。すなわち、 $\mu - \delta \leq S < \mu$ ならば $a^*(S; \mathbf{A}) = E$ 、 $0 \leq S < \mu - \delta$ ならば $a^*(S; \mathbf{A}) = Q$ となる。

(3) $-\mu \leq S < 0$ のとき

$\pi_E(\mathbf{A}) = \pi_Q(\mathbf{A})$ だから、(3) 式~(5) 式より

$$C_E(S; \mathbf{A}) \leq C_Q(S; \mathbf{A}) \iff \mu R \leq \gamma \iff \delta \geq \mu,$$

$$\begin{aligned} C_Q(S; \mathbf{A}) \leq C_D(S; \mathbf{A}) &\iff -\pi_Q(\mathbf{A})\gamma \leq \pi_D(\mathbf{A})SR \\ &\iff S \geq -\delta/h(\mathbf{A}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_E(S; \mathbf{A}) \leq C_D(S; \mathbf{A}) &\iff (1 - \pi_E(\mathbf{A}))\mu R \leq \gamma + \pi_D(\mathbf{A})SR \\ &\iff S \geq \frac{(1 - \pi_E(\mathbf{A}))\mu - \delta}{\pi_D(\mathbf{A})}, \end{aligned}$$

となる。 δ の値によって 2 つの場合に分けて考える。

(3-a) $\delta \geq \mu$ のときは、 $C_E(S; \mathbf{A}) \leq C_Q(S; \mathbf{A})$ が成り立つので、 $C_E(S; \mathbf{A})$ と $C_D(S; \mathbf{A})$ を比較する。 $\pi_E(\mathbf{A}) > \pi_D(\mathbf{A})$ より、 $\delta \geq \mu$ かつ $S \geq -\mu$ ならば

$$\frac{(1 - \pi_E(\mathbf{A}))\mu - \delta}{\pi_D(\mathbf{A})} \leq -\frac{\pi_E(\mathbf{A})}{\pi_D(\mathbf{A})}\mu < -\mu \leq S,$$

が成立する。よって $C_E(S; \mathbf{A}) < C_D(S; \mathbf{A})$ となり、 $a^*(S) = E$ が得られる。

(3-b) $\delta < \mu$ のときは、 $C_E(S; \mathbf{A}) > C_Q(S; \mathbf{A})$ となるので、 $C_Q(S; \mathbf{A})$ と $C_D(S; \mathbf{A})$ を比較する。 $\delta \geq h(\mathbf{A})\mu$ のときは $S \geq -\mu \geq -\delta/h(\mathbf{A})$ となるので $C_Q(S; \mathbf{A}) \leq C_D(S; \mathbf{A})$ 、よって $a^*(S) = Q$ となる。逆に $\delta < h(\mathbf{A})\mu$ のときは、 $S \geq -\delta/h(\mathbf{A})$ ならば $a^*(S) = Q$ 、 $-\mu \leq S \leq -\delta/h(\mathbf{A})$ ならば $a^*(S) = D$ となる。

(4) $S < -\mu$ のとき

(3) 式~(5) 式から

$$C_E(S; \mathbf{A}) \leq C_Q(S; \mathbf{A}) \iff \delta \geq \mu,$$

$$\begin{aligned} C_Q(S; \mathbf{A}) \leq C_D(S; \mathbf{A}) &\iff -\pi_Q(\mathbf{A})\gamma \leq -\pi_D(\mathbf{A})\mu R \\ &\iff \delta \geq h(\mathbf{A})\mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_E(S; \mathbf{A}) \leq C_D(S; \mathbf{A}) &\iff (1 - \pi_E(\mathbf{A}))\mu R \leq \gamma - \pi_D(\mathbf{A})\mu R \\
&\iff (1 - \pi(\mathbf{A}))\mu \leq \delta - \pi_D(\mathbf{A})\mu,
\end{aligned}$$

が成り立つ。 $\delta \geq \mu$ ならば $C_E(S; \mathbf{A}) \leq C_Q(S; \mathbf{A})$ となるので、 $C_E(S; \mathbf{A})$ と $C_D(S; \mathbf{A})$ を比較する。 $\pi_E(\mathbf{A}) > \pi_D(\mathbf{A})$ より、

$$\delta - \pi_D(\mathbf{A})\mu \geq \mu - \pi_D(\mathbf{A})\mu = (1 - \pi_D(\mathbf{A}))\mu > (1 - \pi_E(\mathbf{A}))\mu,$$

となるので $C_E(S; \mathbf{A}) < C_D(S; \mathbf{A})$ が成り立つ。 よって $a^*(S) = E$ となる。 次に $h(\mathbf{A})\mu \leq \delta < \mu$ では、 $C_E(S; \mathbf{A}) > C_Q(S; \mathbf{A})$ かつ $C_Q(S; \mathbf{A}) \leq C_D(S; \mathbf{A})$ より $a^*(S) = Q$ となる。 最後に $\delta < h(\mathbf{A})\mu$ の場合は、 $C_Q(S; \mathbf{A}) > C_D(S; \mathbf{A})$ が成り立つ。 さらに、

$$\delta - \pi_D(\mathbf{A})\mu < h(\mathbf{A})\mu - \pi_D(\mathbf{A})\mu = h(\mathbf{A})(1 - \pi_E(\mathbf{A}))\mu < (1 - \pi_E(\mathbf{A}))\mu,$$

より、 $C_E(S; \mathbf{A}) > C_D(S; \mathbf{A})$ となるので、 $a^*(S) = D$ である。

(1)~(4)の場合分けの結果をまとめると次のようになる。

	$\delta \geq \mu$	$h(\mathbf{A})\mu \leq \delta < \mu$	$\delta < h(\mathbf{A})\mu$
(1) $S \geq \mu$	E	E	E
(2-a) $0 \leq S < \mu$	E		
(2-b) $\mu - \delta \leq S < \mu$		E	E
$0 \leq S < \mu - \delta$		Q	Q
(3-a) $-\mu \leq S < 0$	E		
(3-b) $-\delta/h(\mathbf{A}) \leq S < 0$		Q	Q
$-\mu \leq S < -\delta/h(\mathbf{A})$		Q	D
(4) $S < -\mu$	E	Q	D

以上より、補題4が示された。 □

次に、定理3を示す。そのためには、ケース1~ケース3において、 A_i が $\mathbf{A}^{[A_i]}$ に対する最適な支払方法となっていることが示せればよい。補題4で示したように、ケース1では支払選択ベクトル \mathbf{A} と流動性ショック S によらず E を選択する A_1 が最適になるので、これが均衡となる。ケース2の最適な支払方法は、補題4から流動性ショック S に応じて E または Q となる。このうち戦略的参加者が E を選択するのは $S \geq \mu - \delta$ となる場合だから、その確率は

$$\int_{\mu - \delta}^{\infty} F(ds) = \lambda - F(\mu - \delta),$$

となる。同様に、戦略的参加者が Q を選択する確率は $F(\mu - \delta)$ である。この支払選択ベクトルは $\mathbf{A}^{[A_2]}$ だから、ケース 2 では A_2 が均衡となる。同様にケース 3 で戦略的参加者が E 、 Q 、 D を選択する確率はそれぞれ

$$E: \int_{\mu-\delta}^{\infty} F(ds) = \lambda - F(\mu - \delta),$$

$$\begin{aligned} Q: & F(\mu - \delta) - F(-\delta/h((\lambda - F(\mu - \delta), F(\mu - \delta) - y^*(\delta), y^*(\delta))) \\ & = F(\mu - \delta) - y^*(\delta), \end{aligned}$$

$$D: F(-\delta/h((\lambda - F(\mu - \delta), F(\mu - \delta) - y^*(\delta), y^*(\delta))) = y^*(\delta),$$

と計算される。これは支払選択ベクトル $\mathbf{A}^{[A_3]}$ だから、ケース 3 では A_3 が均衡となる。□

(3) 定理 4 の証明

$\mathbf{A}^{[A_2]}$ と $\mathbf{A}^{[A_3]}$ は $\lambda_E^{[A_2]} = \lambda_E^{[A_3]}$ 、 $\lambda_Q^{[A_2]} > \lambda_Q^{[A_3]}$ を満たすから、補題 2 より $h(\mathbf{A}^{[A_2]}) < h(\mathbf{A}^{[A_3]})$ が成り立つ。また、 $\mathbf{A}^{[A_2]} < \mathbf{A}^{[A_3]}$ だから、補題 3 より、任意の X に対して $C_X(\mathbf{A}^{[A_2]}) < C_X(\mathbf{A}^{[A_3]})$ が成立する。□

補論 4. 6 節の証明

(1) 定理 5 の証明

表記を簡単にするため $\pi_E(\mathbf{V})$ 、 $\pi_Q(\mathbf{V})$ 、 $\pi_D(\mathbf{V})$ をそれぞれ π_E 、 π_Q 、 π_D と略記する。まず、戦略的参加者全体の支払分割ベクトル \mathbf{V} を所与として、個々の参加者の最適な支払方法を求める。

平均コスト (30) 式を R で割り、 $\pi_E = \pi_Q$ と $\mu_E + \mu_Q + \mu_D = \mu$ を用いて整理した

$$G(\mu_E, \mu_D) = [(1 - \pi_E)(\mu - \mu_E) + \pi_E \mu_D] \delta + \kappa F_S(\kappa) - G_S(-\infty, \kappa),$$

の最小化を考える。 $G(\mu_E, \mu_D)$ の μ_E 、 μ_D に関する偏微分をそれぞれ

$$G_E(\mu_E, \mu_D) = \frac{\partial G(\mu_E, \mu_D)}{\partial \mu_E}, \quad G_D(\mu_E, \mu_D) = \frac{\partial G(\mu_E, \mu_D)}{\partial \mu_D},$$

で表す。

$$\frac{d[\kappa F_S(\kappa) - G_S(-\infty, \kappa)]}{d\kappa} = F_S(\kappa) + \kappa f_S(\kappa) - \kappa f_S(\kappa) = F_S(\kappa),$$

となることと (29) 式を利用すると、

$$G_E(\mu_E, \mu_D) = (1 - \pi_E) H(\mu_E, \mu_D), \quad (\text{A-14})$$

$$G_D(\mu_E, \mu_D) = \pi_E L(\mu_E, \mu_D), \quad (\text{A-15})$$

と計算できる。ここで

$$H(\mu_E, \mu_D) = F_S(\kappa) - \delta,$$

$$L(\mu_E, \mu_D) = \delta - h(\mathbf{V}) F_S(\kappa),$$

とした。(29) 式から、 $H(\mu_E, \mu_D)$ と $L(\mu_E, \mu_D)$ は以下の性質を満たす。

1. $H(\mu_E, \mu_D)$ は μ_E の増加関数、 μ_D の減少関数。
2. $L(\mu_E, \mu_D)$ は μ_E の減少関数、 μ_D の増加関数。
3. 任意の \mathbf{V} 、 μ_E 、 μ_D に対して

$$H(\mu_E, \mu_D) + L(\mu_E, \mu_D) = (1 - h(\mathbf{V})) F_S(\kappa) > 0, \quad (\text{A-16})$$

となることから、(A-14)式～(A-16)式より

$$H(\mu_E, \mu_D) \leq 0 \implies G_E(\mu_E, \mu_D) \leq 0, G_D(\mu_E, \mu_D) > 0, \quad (\text{A-17})$$

$$L(\mu_E, \mu_D) \leq 0 \implies G_D(\mu_E, \mu_D) \leq 0, G_E(\mu_E, \mu_D) > 0. \quad (\text{A-18})$$

戦略的参加者全体の支払分割ベクトル \mathbf{V} に対して、 z の方程式

$$H(z, 0) = 0 \iff F_S([1 - \pi_E(\mathbf{V})]z) = \delta,$$

の解が存在すれば、それを $\theta_E(\mathbf{V})$ で表す。同様に、

$$L(0, z) = 0 \iff h(\mathbf{V})F_S(-\pi_D(\mathbf{V})z) = \delta,$$

の解が存在すれば、それを $\theta_D(\mathbf{V})$ で表す。

補題 5 戦略的参加者全体の支払分割ベクトル \mathbf{V} を所与とすると、個々の参加者の最適な支払方法は次のように与えられる。

(ケース 1) $\delta \geq F_S([1 - \pi_E(\mathbf{V})]\mu)$ のとき、 $\mathbf{U}^{(1)} = (\mu, 0, 0)$ 。

(ケース 2) $F_S(0) < \delta < F_S([1 - \pi_E(\mathbf{V})]\mu)$ のとき、 $(\theta_E(\mathbf{V}), \mu - \theta_E(\mathbf{V}), 0)$ 。

(ケース 3) $h(\mathbf{V})F_S(0) \leq \delta \leq F_S(0)$ のとき、 $\mathbf{U}^{(3)} = (0, \mu, 0)$ 。

(ケース 4) $h(\mathbf{V})F_S(-\pi_D(\mathbf{V})\mu) < \delta < h(\mathbf{V})F_S(0)$ のとき、 $(0, \mu - \theta_D(\mathbf{V}), \theta_D(\mathbf{V}))$ 。

(ケース 5) $\delta \leq h(\mathbf{V})F_S(-\pi_D(\mathbf{V})\mu)$ のとき、 $\mathbf{U}^{(5)} = (0, 0, \mu)$ 。

証明 可能な支払分割 (μ_E, μ_D) の範囲は、

$$\mathcal{D} = \{(\mu_E, \mu_D) : \mu_E, \mu_D \geq 0, \mu_E + \mu_D \leq \mu\},$$

である。(A-17)式と(A-18)式から、 $G(\mu_E, \mu_D)$ の μ_E 方向と μ_D 方向の少なくとも一方の偏微分は正になるので、 \mathcal{D} の内点は $G(\mu_E, \mu_D)$ の最小化問題の解になりえない。同様に、 $(0, \mu)$ と $(\mu, 0)$ を除く線分 $\mu_E + \mu_D = \mu$ 上の点も最適解にならない。したがって、最適解は

$$\mathcal{D}_1 = \{(\mu_E, 0) : 0 \leq \mu_E \leq \mu\} \cup \{(0, \mu_D) : 0 \leq \mu_D \leq \mu\},$$

の範囲に存在する。さらに、 $H(\mu_E, \mu_D)$ と $L(\mu_E, \mu_D)$ の性質 1～性質 3 を利用すると、以下のように最適解を求めることができる³²。

.....
32 (A-16)式から、4 と 5 においては $H(0, 0) \geq 0$ が成り立っている。

1. $H(\mu, 0) \leq 0$ のとき :
 $0 \leq \mu_E < \mu$ に対して $H(\mu_E, 0) < 0$ 、よって $0 \leq \mu_D \leq \mu$ に対して $L(0, \mu_D) > 0$ となるので、 $(\mu_E, \mu_D) = (\mu, 0)$ が最適解。
2. $H(\mu, 0) > 0$ かつ $H(0, 0) < 0$ のとき :
 $H(\theta_E(\mathbf{V}), 0) = 0$ を満たす $\theta_E(\mathbf{V})$ が存在する。また $0 \leq \mu_D \leq \mu$ に対して $L(0, \mu_D) > 0$ となるので、 $(\mu_E, \mu_D) = (\theta_E(\mathbf{V}), 0)$ が最適解。
3. $H(0, 0) \geq 0$ かつ $L(0, 0) \geq 0$ のとき :
 $0 < \mu_E \leq \mu$ に対して $H(\mu_E, 0) > 0$ 、および $0 < \mu_D \leq \mu$ に対して $L(0, \mu_D) > 0$ となるので、 $(\mu_E, \mu_D) = (0, 0)$ が最適解。
4. $L(0, 0) < 0$ かつ $L(0, \mu) > 0$ のとき :
 $L(0, \theta_D(\mathbf{V})) = 0$ を満たす $\theta_D(\mathbf{V})$ が存在する。また $0 \leq \mu_E \leq \mu$ に対して $H(\mu_E, 0) > 0$ となるので、 $(\mu_E, \mu_D) = (0, \theta_D(\mathbf{V}))$ が最適解。
5. $L(0, \mu) \leq 0$ のとき :
 $0 \leq \mu_D < \mu$ に対して $L(0, \mu_D) < 0$ 、よって $0 \leq \mu_E \leq \mu$ に対して $H(\mu_E, 0) > 0$ となるので、 $(\mu_E, \mu_D) = (0, \mu)$ が最適解。

一方、 $H(\mu_E, \mu_D)$ と $L(\mu_E, \mu_D)$ 定義から、

$$\begin{aligned}
H(\mu, 0) \leq 0 &\iff F_S([1 - \pi_E(\mathbf{V})]\mu) \leq \delta, \\
H(0, 0) \leq 0 &\iff F_S(0) \leq \delta, \\
L(0, 0) \leq 0 &\iff h(\mathbf{V})F_S(0) \geq \delta, \\
L(0, \mu) \leq 0 &\iff h(\mathbf{V})F_S(-\pi_D(\mathbf{V})\mu) \geq \delta,
\end{aligned}$$

となるので、以上をまとめると補題 5 が得られる。 □

続いて定理 5 を示す。ケース 1、ケース 3、ケース 5 については、 $\mathbf{U}^{(1)}$ 、 $\mathbf{U}^{(3)}$ 、 $\mathbf{U}^{(5)}$ をそれぞれ \mathbf{V} に代入すると、補題 5 から (31) 式が成り立つので均衡となる。次にケース 2 を示す。まず、(32) 式の左辺に関して、

$$\begin{aligned}
\min_{z \in [0, \mu]} F_S([1 - \pi_E(z, \mu - z, 0)]z) &\leq F_S(0), \\
\max_{z \in [0, \mu]} F_S([1 - \pi_E(z, \mu - z, 0)]z) &\geq F_S([1 - \pi_E(\mathbf{U}^{(1)})]\mu),
\end{aligned}$$

が成り立つことから、ケース 2 の δ に対して (32) 式は解 $\mu_E^*(\delta)$ を持つ。さらに、 $\theta_E(\mathbf{U}^{(2)}) = \mu_E^*(\delta)$ となるため、補題 5 から $\mathbf{U}^{(2)}$ が (31) 式を満たすことが示せる。最後にケース 4 を示す。 $h(\mathbf{U}^{(5)})F_S(-\pi_D(\mathbf{U}^{(5)})\mu) < h(\mathbf{U}^{(3)})F_S(0)$ の場合、(33) 式の左辺に関して、

$$\min_{z \in [0, \mu]} h(0, \mu - z, z)F_S([- \pi_D(0, \mu - z, z)]z) \leq h(\mathbf{U}^{(5)})F_S([1 - \pi_D(\mathbf{U}^{(5)})]\mu),$$

$$\max_{z \in [0, \mu]} h(0, \mu - z, z) F_S([- \pi_D(0, \mu - z, z)]z) \geq h(\mathbf{U}^{(3)}) F_S(0),$$

が成り立つことから、ケース 4 の δ に対して (33) 式は解 $\mu_D^*(\delta)$ を持つ。さらに、 $\theta_D(\mathbf{U}^{(4)}) = \mu_D^*(\delta)$ となるため、補題 5 から $\mathbf{U}^{(4)}$ が (31) 式を満たすことが示せる。

□

(2) 表 4 の計算

(10) 式と (11) 式を用いて計算すると

$$\pi_E(\mathbf{U}^{(1)}) = 1 - \frac{\tilde{\lambda}_D(1 - \xi(\tilde{\lambda}_Q))}{1 - \tilde{\lambda}_Q}, \quad \pi_D(\mathbf{U}^{(5)}) = \frac{\tilde{\lambda}_E(1 - \xi(\tilde{\lambda}_Q))}{1 - \tilde{\lambda}_Q},$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_E(\mathbf{U}^{(1)})}{\partial \tilde{\lambda}_E} &= 0, & \frac{\partial \pi_E(\mathbf{U}^{(1)})}{\partial \tilde{\lambda}_Q} &\leq 0, & \frac{\partial \pi_E(\mathbf{U}^{(1)})}{\partial \tilde{\lambda}_D} &< 0, \\ \frac{\partial \pi_D(\mathbf{U}^{(5)})}{\partial \tilde{\lambda}_E} &> 0, & \frac{\partial \pi_D(\mathbf{U}^{(5)})}{\partial \tilde{\lambda}_Q} &\geq 0, & \frac{\partial \pi_D(\mathbf{U}^{(5)})}{\partial \tilde{\lambda}_D} &= 0, \end{aligned}$$

と計算される³³。また、(A-8) 式より、

$$\frac{1}{h(\mathbf{U}^{(3)})} = 1 + \frac{\zeta(1 - (\tilde{\lambda}_E + \tilde{\lambda}_D))}{\tilde{\lambda}_E}, \quad \frac{1}{h(\mathbf{U}^{(5)})} = 1 + \frac{\zeta(\tilde{\lambda}_Q)}{\tilde{\lambda}_E},$$

となるので、条件 1 のもとでは

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\mathbf{U}^{(3)})}{\partial \tilde{\lambda}_E} &> 0, & \frac{\partial h(\mathbf{U}^{(3)})}{\partial \tilde{\lambda}_Q} &= 0, & \frac{\partial h(\mathbf{U}^{(3)})}{\partial \tilde{\lambda}_D} &> 0, \\ \frac{\partial h(\mathbf{U}^{(5)})}{\partial \tilde{\lambda}_E} &> 0, & \frac{\partial h(\mathbf{U}^{(5)})}{\partial \tilde{\lambda}_Q} &< 0, & \frac{\partial h(\mathbf{U}^{(5)})}{\partial \tilde{\lambda}_D} &= 0, \end{aligned}$$

となる。これらの結果と、 $F_S(s)$ が増加関数であることから、表 4 の増減が示される。

33 $k(x) = \frac{x - \xi(x)}{1 - x}$ とすると、

$$k(x) = \frac{\sum_{l=2}^N \mathbb{P}[L = l](1 - x^{l-1})}{1 - x} = \mathbb{P}[L = 2] + \sum_{l=3}^N \mathbb{P}[L = l] \left(1 + \sum_{m=1}^{l-2} x^m \right).$$

より、 $x \geq 0$ で $k'(x) \geq 0$ となる。よって $\frac{\partial \pi_E(\mathbf{U}^{(1)})}{\partial \tilde{\lambda}_Q} = -\tilde{\lambda}_D k'(\tilde{\lambda}_Q) \leq 0$ 、および $\frac{\partial \pi_D(\mathbf{U}^{(5)})}{\partial \tilde{\lambda}_Q} = \tilde{\lambda}_E k'(\tilde{\lambda}_Q) \geq 0$ が示せる。

