

マルコフ関数モデルによる 金利オプションの価格付けの実用化

おおた はるやす
太田晴康

要 旨

本稿では、マルコフ関数モデル (*Markov-functional model*) を用いた金利オプション価格の算出について、新たな実装方法を提案する。*Hunt, Kennedy, and Pelsser [2000]* で導入されたマルコフ関数モデルは、状態変数を低次元のマルコフ過程とし、オプション価格の評価に必要な割引債と基準財の価格をその状態変数の関数としてモデル化する。この関数形は自由度が高く、金利オプションの市場価格にボラティリティ・スマイルが存在する場合でも柔軟にフィッティングが可能である。また、低次元のマルコフ過程を状態変数とするため、早期行使権付きの取引を含め、広い範囲の金利オプションについて、効率的な価格計算が可能となる。本稿では、マルコフ関数モデルを実用化するうえで、離散的な権利行使レートにおいてのみ市場価格が観察される金利オプションに対して、安定的なフィッティングを実現する関数の構成方法を提案する。計算例としては、キャブレットやヨーロッパ・スワップションの市場価格を所与として、バミューダン・スワップションの価格付けを行った結果等を示す。

キーワード：マルコフ関数モデル、金利オプション、ボラティリティ・スマイル、バミューダン・スワップション

本稿の作成に当たっては、田中敬一（首都大学東京）、村上秀記（横浜国立大学）、安岡孝司（芝浦工業大学）の各氏をはじめ、早稲田大学、首都大学東京、横浜国立大学でのワークショップ、JAFEE 2009 冬季大会の参加者、および、日本銀行金融研究所のスタッフから有益なコメントをいただいた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

太田晴康 日本銀行金融研究所（現 みずほ情報総研金融技術開発部、
E-mail: haruyasu.ota@mizuho-ir.co.jp）

1. はじめに

金利オプションの価格付け手法の高度化は、精緻な金利リスク管理を求める多くの金融機関等にとって重要な課題の1つである。しかし、仕組債を含む複雑な金融商品の増加により、その課題の克服は容易ではなくなっている。実務での金利オプションの価格付けは、イールドカーブ・モデル（金利の期間構造モデル）を用いて行うことが多いが、金融商品の複雑化・多様化と取得可能な市場データの増加に伴ってモデルの高度化が一段と求められ、同時に、取引件数の増加と金融商品の年限の長期化に伴い、モデルに基づく計算の負荷軽減や安定性向上も望まれている。

Brace, Gatarek, and Musiela [1997]、Jamshidian [1997] 等により開発されてきたLIBOR マーケット・モデルは、市場で観察できるLIBOR (London interbank offered rate) を直接的に対数正規分布でモデル化している点で扱いやすいという長所があり、実務でも多く利用されている。市場で観察されるボラティリティ・スマイルに対応するため、このモデルに確率的ボラティリティ変動を取り入れて拡張した研究 (Rebonato, McKay, and White [2009] 等) もなされている。しかしながら、実用上はいくつかの課題が残されている。まず、第1点は、LIBOR マーケット・モデルはモンテカルロ法で実装されることが多く、計算負荷が比較的大きい点である。第2点は、早期行使権付きのオプションを対象にする場合には、Longstaff and Schwartz [2001] の最小二乗モンテカルロ法のような数値計算の工夫を要し、計算負荷がさらに重くなるほか、岡野 [2005] 等でも指摘されているように、計算の過程で設定する回帰式次第では計算値にバイアスが生じやすい点である。第3点は、市場で観察されるボラティリティ・スマイルに対応するには、対数正規型とは異なるボラティリティや確率的ボラティリティ変動等のモデルを付加することになるが、その場合、モデルのパラメータを市場価格にフィッティングさせること（キャリブレーションともいう）が複雑になる点である。

こうした課題への対応の1つとして、本稿では、マルコフ関数モデル (Markov-functional model) を用いた金利オプション価格の算出について、新たな実装方法を提案する。マルコフ関数モデルは、Hunt, Kennedy, and Pelsler [2000] で導入された比較的新しいモデルであり、状態変数を低次元のマルコフ過程¹とし、オプション価格の評価に必要な割引債と基準財の価格がその状態変数の関数として表されるモデルである。この状態変数のマルコフ性により、早期行使権付きのオプション価格の効率的な計算が可能となる。また、割引債や基準財の価格を表す状態変数の関数形を柔軟に設定できるため、市場で観察されるボラティリティ・スマイルに対しても精度の高いフィッティングを実現できる。フィッティングによって割引債価格の関数を求め、この割引債価格と状態変数のマルコフ過程からイールドカーブの確率過程を求めることができるのも特徴である。この点は、イールドカーブの確率過程を外

.....
1 マルコフ過程とは、将来の状態が、過去の履歴によらず、現在の状態だけで確率的に決まる確率過程。本稿では、状態変数が少数のファクターで表されるマルコフ過程を低次元のマルコフ過程と呼ぶ。

生的に与えていないという意味で、従来のイールドカーブ・モデルと異なっている。

本稿では、市場から取得できるスワップション²価格が離散的な権利行使レート（以下、ストライクと呼ぶ）に限定されることを踏まえ、離散的なストライクのスワップション価格データに対してノンパラメトリックに割引債価格の関数をフィッティングさせる方法を提案する。先行研究で示されているマルコフ関数モデルのノンパラメトリックなフィッティングでは、任意のストライクでデジタル・スワップションの市場価格を取得できるという強い仮定を置くが、本手法では、この仮定を必要としない。また、パラメトリックなフィッティングは行わないため、多変量の同時最適化等の高度な計算技術は不要であり安定的に市場価格への適合性を高めることができる。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、2節では先行研究を整理しつつ、マルコフ関数モデルの概要を説明する。3節では離散的な有限個のストライクのスワップションを用いた新たな関数のフィッティング方法を提案する。4節では、3節で提案したフィッティング方法の評価とバミューダン・スワップション³価格の計算例を示す。5節は本稿のまとめである。

補論1から補論5では、デジタル・スワップションの理論価格、ボラティリティ・スマイルがない市場価格にフィッティングする場合の具体例、ノンパラメトリックなフィッティングにおける関数の算出手順、スワップションの理論価格、離散的な有限個のストライクのスワップションを用いた関数のフィッティング方法の具体例、についてそれぞれ説明する。

2. マルコフ関数モデル

本節では、はじめにマルコフ関数モデルの概要について説明した後、本稿で扱う金利オプションに関して整理したうえで、マルコフ関数モデルの定義を厳密に示す。さらに、典型的な状態変数のモデル化方法、割引債価格関数の設定方法等について主要な先行研究に言及しつつ解説を行い、最後に、それらのモデルを所与とした場合の価格付け計算の手順について説明する。

(1) マルコフ関数モデルの概要

マルコフ関数モデルは、前述のように Hunt, Kennedy, and Pelsser [2000] により導入されたプライシング・モデルであるが、特定のモデルを意味するというより、さ

2 本稿では、特記しない限りヨーロッパ型のパイヤーズ・スワップションである。また、原資産のスワップの変動金利と固定金利の交換が1回だけのスワップションはキャブレットと同じペイオフを持ち、等価な取引となる。ここでのスワップションに関する説明には、キャブレットに関する説明も含まれているとする。

3 バミューダン型のスワップション。バミューダン型のオプションとは、オプション行使可能時刻が離散的に複数あるオプションのこと。複数の繰上満期日がある仕組預金のヘッジ等に利用することができる。

さまざまなモデルを包含する枠組みとして理解できる。本稿では、金利オプションの価格付けを扱うため、マルコフ関数モデルによるイールドカーブのモデル化を分析対象とするが⁴、イールドカーブ・モデルについてはこれまでもさまざまな先行研究がある。その中で、例えば CIR モデル (Cox, Ingersoll, and Ross [1985]) やハル＝ホワイト・モデル (Hull and White [1990]) についてはマルコフ関数モデルの一種として捉えられる一方、BGM モデル (Brace, Gatarek, and Musiela [1997]) は低次元のマルコフ関数モデルの枠組みには含まれない。もちろん、マルコフ関数モデルはきわめて一般的な枠組みであるため、先行研究で提唱されてきたモデルのほかにもさまざまなモデリングの可能性があり、本節で紹介する Hunt, Kennedy, and Pelsser [2000]、Pelsser [2000] 等や本稿の 3 節以降で扱うモデルは、この枠組みの中で新たなモデル化を目指した成果として位置付けられる。

このような従来型のイールドカーブ・モデルとマルコフ関数モデルとの関係については、表 1 に整理した⁵。各モデルにおいて、どのような変数を確率過程によるモデル化の対象としているかに着目すると、従来型のイールドカーブ・モデルでは短期金利や市場金利等の具体的な変数がモデル化されていたのに対し、マルコフ関数モデルの枠組みでは抽象的な状態変数をモデル化の対象とできる点が大きな特徴である。この状態変数が低次元のマルコフ過程に従い、さらに、オプション価格の評価に必要な割引債と基準財の価格が状態変数の関数として表現できるということがマルコフ関数モデルの要件である。この要件が満たされていれば、抽象的な状態変数の特殊ケースとして具体的な金利をモデル化の対象とした場合もマルコフ関数モデルに分類することが可能であり、その例が前述の CIR モデルやハル＝ホワイト・モデル等である。

表 1 には、各種モデルの特徴も整理しているが、Hunt, Kennedy, and Pelsser [2000] のようなマルコフ関数モデルの利点としては、第 1 に、関数形の自由度が高いことから市場価格への柔軟なフィッティングが可能であり、ボラティリティ・スマイルのある金利オプション価格にも対応できることがある。また、第 2 に、状態変数の確率過程が低次元のマルコフ過程であるために、早期行使権付きのパミューダン型オプションを含む、広い範囲の金利オプションについて、効率的な価格計算が可能だという点がある。特に早期行使権付きの価格付けを行う場合には、モンテカルロ法の直接的な適用は難しいが、状態変数のマルコフ性とその低次元性を利用すれば条件付期待値の算出をバックワードに繰り返すことで価格付けを効率的に行えるという強みがある。一方、この計算方法の弱点としては、経路依存型のオプションを扱うことが困難である点を指摘できる。

なお、マルコフ関数モデルを効果的に利用するうえでは、リスクファクターが少数個である（すなわち、低次元のマルコフ過程によってモデル化されている）こと

4 Fries [2007] では、株価にマルコフ関数モデルを適用した方法の解説があるが、本稿では、金利にマルコフ関数モデルを適用した方法に限定して先行研究の解説を行う。

5 従来型のイールドカーブ・モデルとマルコフ関数モデルについて、比較分析を行った研究としては、Bennett and Kennedy [2005] や Pietersz and Pelsser [2005] 等がある。

表 1 従来型の金利モデルとマルコフ関数モデルの特徴の比較

		マルコフ関数モデル			
		パラメトリック		ノンパラメトリック	
		従来型の金利モデル			
		マーケットモデル	短期金利モデル		
モデル	論文の例	Brace, Gatarek, and Musiela [1997], Jamshidian [1997] (対数正規型のボラティリティに限定)	Cox, Ingersoll, and Ross [1985]	Hull and White [1990]	Hunt, Kennedy, and Pelsser [2000]
	確率過程としてモデル化される変数	LIBOR、スワップレート等の市場金利	スポット・レート (r)	スポット・レート (r) または状態変数 (x)	抽象的なマルコフ過程となる状態変数 (x)
	マルコフ性	複数の期間の市場金利が同時にマルコフ過程にはならない	○		
市場価格へのフィッティング	スマイルのない金利オプション	○ (インプライド・ボラティリティを直接利用)	△ (金利オプション価格の解析式を用いた多変量の同時最適化でパラメータ算出)		○ (割引債価格の関数の自由度を利用して柔軟なフィッティングが可能)
	スマイルのある金利オプション	△ (対数正規型とは異なるボラティリティや確率的ボラティリティ変動等への拡張が必要)			
価格付け	主な計算方法	モンテカルロ法	複雑な金利デリバティブの価格付けに当該モデルを使用することは少ない	バックワードに条件付期待値を計算	
	計算負荷	×		○	
	バミュンダン型オプション	△ (最小二乗モンテカルロ法等が必要)		○ (状態変数が少数のファクターのマルコフ過程であることと近似多項式による効率的な条件付期待値計算による)	
	経路依存型オプション	○		×	

が要請される。本稿では、そうしたケースの1つとして、シングルファクター・モデルに特化した分析を行う。この場合、イールドカーブの変動についてはパラレルシフトのみが想定され、カーブの傾きや曲率の変化は想定されないという制約がある一方、計算が相対的に容易になるという利点がある。これに対し、金利・為替等のハイブリッド商品や、単通貨金利でもスプレッド・オプション等の商品に対して精緻な価格付けを行うには、マルコフ関数モデルについてもマルチファクター化を行う必要がある⁶。

6 マルチファクターのマルコフ関数モデルを扱った研究としては、Fries and Rott [2004]、Hunt and Kennedy [2005]、Fries and Eckstaedt [2006]、Johnson [2006]、Kaisajuntti and Kennedy [2008] 等がある。

(2) 価格付けおよびフィッティングの対象とするオプション

ここでは、本稿で価格付けおよびフィッティングの対象とするオプションについて説明するとともに、記法の整理を行う。

イ. 価格付けの対象とするオプション

まず、本稿の分析の枠組みを整理するために、主要な記法等をまとめておく。価格付けの対象となる金利オプションの原資産のペイオフに関係する時刻を $T_0, T_1, T_2, \dots, T_M$ とする⁷。価格付けには、これらの時刻を満期とする割引債の価格が必要となる。本稿では、これらの割引債に対し、将来時点 T_M までの確率的変動を扱う⁸。また、時刻 t での満期 T_m の割引債価格を $B_{t,m}$ 、ペイオフ発生時刻の間隔を $\delta_m = T_m - T_{m-1}$ と表記し、フォワード・スワップレート $L_{t,i,j}$ を

$$L_{t,i,j} = \frac{B_{t,i} - B_{t,j}}{\sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{t,k}}, \quad (1)$$

で定義する。

マルコフ関数モデルによる価格付けの対象としては、さまざまな商品を考えることができる。その中でも、特にマルコフ関数モデルの利用によって、効率的な価格付けが可能となる金利オプションとしては、早期行使が可能で、その行使可能時刻が有限個存在するバミューダン型のオプション（例えば、バミューダン・スワップション）がある。この商品については、時刻 t にオプション行使した場合に発生するペイオフが、その時刻 t における割引債価格 $B_{t,i}, B_{t,i+1}, \dots, B_{t,M}$ の関数として表現される。ここで、 i は時刻 t の直後のペイオフ発生時刻 T_i を表すインデックスである。本稿でも、4節ではバミューダン・スワップションの価格付けの例を示す。なお、ペイオフが経路依存性を持つ商品については、本稿の分析の対象外とする⁹。

ロ. フィッティングの対象とするオプション

マルコフ関数モデルによって算出する金利オプションの価格が市場価格と整合的になるようにするには、価格付け計算に先立ち、評価時点での LIBOR、金利スワッ

7 例えば、オプション満期が T_0 で、原資産のスワップのペイオフ発生時刻が T_1, T_2, \dots, T_m ($m \leq M$) となるスワップションであれば、この価格を算出するために時刻 T_0, T_1, \dots, T_m を満期とする割引債価格が必要となる。この場合、時刻 T_0 ではペイオフは発生しないが、価格を算出するために満期 T_0 の割引債価格が必要であり、時刻 T_0 はペイオフに関係する時刻に含まれるとした。

8 変動クーポンが1年以上のスワップレートに依存する CMS スワップに関連する商品等では、原資産のペイオフ発生の最大時刻まで確率的変動を考慮する必要はない。ただし、本稿では、説明の簡略化のため、原資産のペイオフ発生の最大時刻まで確率的変動を考慮する。

9 経路依存性を持つ商品の例としては、取引期間が過去の金利に依存する商品（例えば TARN (target redemption note)）やペイオフが過去の金利に依存する商品（例えばスノーボール債）等がある。TARN は、早期償還条項を持ち、早期償還時刻が変動クーポンの累積値に依存する債券である。また、スノーボール債は、変動金利と前期のクーポンに依存して当期のクーポンが定まるタイプの債券である。

プの市場レートをを用いてイールドカーブを生成したうえで、モデルのパラメータを市場価格にフィッティングさせることが一般的である。フィッティングの対象とする商品としては、流動性が高く、市場価格の取得が比較的容易な金利オプションを用いる。具体的には、キャブレットあるいはスワップションが用いられることが多い。キャブレットはスワップションに含めて考えることができるため（脚注2を参照）、フィッティング対象となる個々のキャブレットあるいはスワップションは、オプション満期が T_i でスワップ期間が $[T_i, T_j]$ のスワップションと整理できる¹⁰。ここで、 i は $M - 1$ 以下の非負の整数、 j は i より大きい M 以下の整数である。フィッティングの方法によっては、特定の年限 $[T_i, T_j]$ のスワップションをフィッティング対象とする方法もある。ここでは、2節(5)で後述するようにフィッティング方法をパラメトリック、ノンパラメトリックの2つに大別し、それぞれについてフィッティング対象とするスワップションの年限を表す i と j の選択方法を示す。

パラメトリックなフィッティングの場合、 i と j の選択方法は任意である。ペイオフ発生時刻の基準財価格を表すパラメトリックな関数から、選択した i と j のスワップション価格を算出し、市場価格との差が小さくなるよう関数のパラメータを決めればよい。また、選択した i と j のスワップションで、有限個のストライクの価格をフィッティング対象とすることが可能である。ただし、一般的には、フィッティング対象とするスワップションの個数が増加するほど、フィッティングの精度は低下する。

一方、ノンパラメトリックな方法では、 i と j に一定の関係がある特定の年限のスワップションを対象にモデルのフィッティングを行う場合が多い。ここでは、**Hunt, Kennedy, and Pelsser [2000]** 等で用いられた方法に倣い、キャブレットをフィッティング対象とする方法とスワップションの一部をフィッティング対象とする方法の2つについて、標準的な i と j の選択方法を示す。

時刻0でフィッティングや価格付けを行うとする。まず、キャブレットをフィッティング対象とする場合は、図1のように、オプション満期が $T_0, T_1, T_2, \dots, T_{M-1}$ で、フォワード LIBOR $L_{t,0,1}, L_{t,1,2}, L_{t,2,3}, \dots, L_{t,M-1,M}$ を原資産とするキャブレットを用いる。すなわち、 $i = 0, 1, \dots, M - 1$ に対して、 $j = i + 1$ を選択する。次に、スワップションをフィッティング対象とする場合は、図2のように、オプション満期が $T_0, T_1, T_2, \dots, T_{M-1}$ で、フォワード・スワップレート $L_{t,0,M}, L_{t,1,M}, L_{t,2,M}, \dots, L_{t,M-1,M}$ を原資産とするスワップションを用いる。すなわち、 $i = 0, 1, \dots, M - 1$ に対して、 $j = M$ のみを選択する。

ここで示したフィッティング対象の金利オプションは、いずれの場合も、1つのオプション満期に対し、フィッティング対象オプションが1つであるという特徴を持つ。この場合、1つの満期に2つ以上のオプションが存在する場合に比べ、高い精度のフィッティングを実現する割引債価格の関数を求めることができる。

10 本稿では、説明の簡略化のため、金利のリセット時刻と支払期間の開始時刻は一致するとする。実務では2営業日ずれることが多く、そのずれも勘案した価格付けがなされる。

図1 キャブレットをフィッティング対象とする場合の原資産

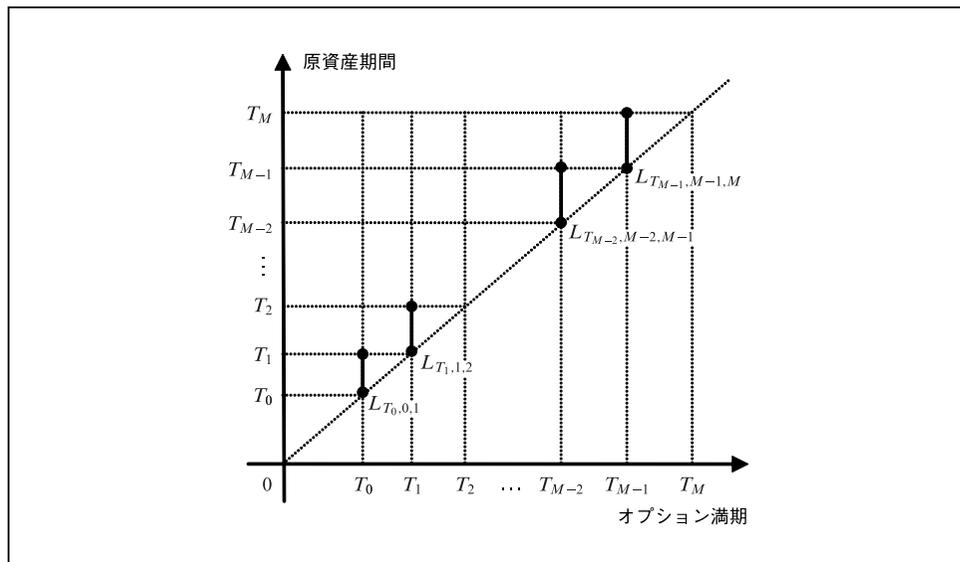
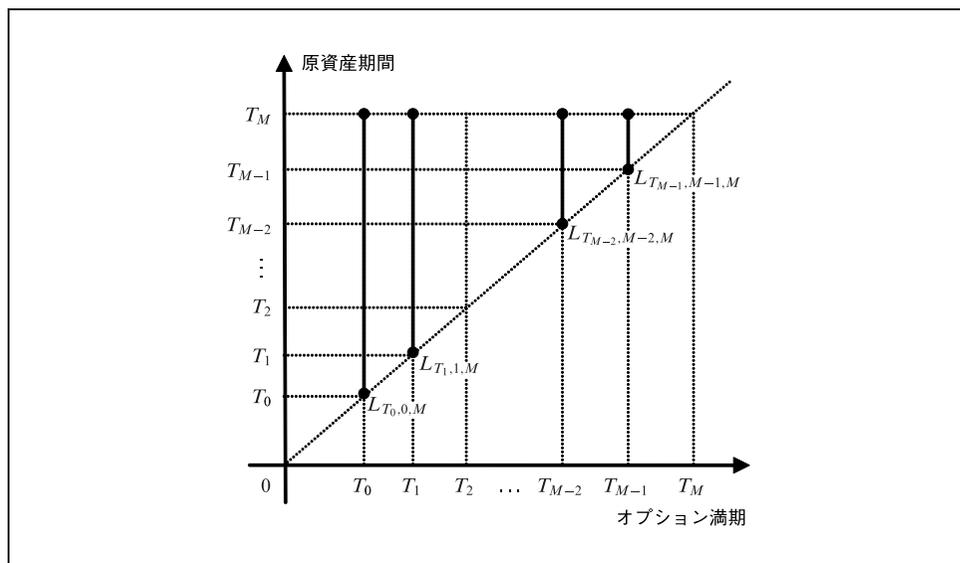


図2 スワップションをフィッティング対象とする場合の原資産



なお、一般に金利オプションの価格付けにおいて、2種類の異なるフィッティング対象を適用して価格を算出すると、両者が等しくなるとは限らない。実務的には、価格付けしたいオプションをヘッジするうえで使用されるスワップションをフィッティング対象として用いるのが自然であり、比較的単純なバミューダン型のスワップションの価格付けであれば、図2のスワップションを選ぶことが考えられる。ただし、理論的に最適なフィッティング対象の選択については今後の課題である。

(3) マルコフ関数モデルの定義

本節では、Hunt, Kennedy, and Pelsser [2000] に基づいて、金利派生商品に対するマルコフ関数モデルの基本的な定義を説明する。

時刻 T でペイオフ V_T が確定する金利派生商品の価格付けを考える。金利派生商品は割引債を原資産とする派生商品と考えることができ、市場が無裁定条件を満たしていれば、時点 t でのその価格 V_t は、基準財価格 β_t を用いて

$$V_t = \beta_t E \left[\frac{V_T}{\beta_T} \mid F_t \right], \quad (2)$$

と書ける。これは、基準財に対する相対価格がマルチンゲールとなるという無裁定価格付け理論の基本的な関係式である。ここで、 F_t は時点 t までに得られている情報を表す（フィルトレーションと呼ばれる）。

マルコフ関数モデルは、価格付けに必要な時点 t での割引債価格や基準財価格 β_t が、その時点の状態変数 X_t の関数として表現でき、状態変数 X_t は過去の履歴によらないマルコフ過程として表現されるものとして定義される。すなわち、ある確率測度のもとで、

- (i) 状態変数 X_t の確率過程がマルコフ過程である、
- (ii) 任意の時刻で、モデル化に必要なすべての割引債の価格が X_t の関数である¹¹、
- (iii) 任意の時刻で、基準財価格が X_t の関数である、

という条件を満たす。

モデル化に必要なすべての割引債の中で最長満期の時刻までがモデルの対象として含まれているとすると、すべての割引債について、価格が 1 となる時刻が存在する。このとき、任意の時刻での基準財価格を X_t の関数として具体的に決めれば、満期での割引債価格が 1 であることと (2) 式を利用して、モデル化に必要なすべての割引債について任意の時刻における価格を X_t の関数として導出できる¹²。すなわち、この場合は、(2) 式と条件 (iii) から、条件 (ii) が導出される¹³。

(2) 式の基本式は、どのような基準財を用いるとしても、その基準財に対応する同値マルチンゲール測度を考えれば成立することが知られている。先行研究では、モデル化に必要な割引債の中で満期の時刻が最大となる割引債を基準財としたフォー

11 Hunt, Kennedy, and Pelsser [2000] では、モデル化に必要な割引債の満期を、ある時刻までの連続的な時刻としている。2 節(2)イ.の商品が価格算出対象ならば、原資産のペイオフ発生時刻が離散的であることから、モデル化に必要な割引債の満期もまた、離散的な時刻となる。

12 時刻 t での満期 T の割引債価格の関数を求める場合は、(2) 式の V を満期 T の割引債価格とすればよい。

13 2 節(2)イ.の条件では、将来時点 T_M までの確率の変動を扱い、モデル化に必要な割引債の満期は離散的な時刻となるため、これらの離散的な満期での基準財の関数と (2) 式より、条件 (ii) が導出される。

ド測度を用いることが多い¹⁴。このようなフォワード測度はターミナル測度と呼ばれる。本稿では以下、このターミナル測度でのマルコフ関数モデルについて説明する。

また、価格付け計算の効率性に配慮し、状態変数 X_t の確率過程としては低次元のマルコフ過程が想定されている。先行研究では、特に、シングルファクターのマルコフ過程が適用されている場合が多く、本稿でも同様とする。

以下、2節(4)では、(i)の状態変数のマルコフ過程の具体的なモデルを、2節(5)では、(ii)と(iii)の価格関数に関する具体的なモデルを先行研究に沿って紹介する。

(4) 状態変数のモデル化

2節(3)で定義したマルコフ関数モデルを金利オプションの価格付けに応用するには、マルコフ過程となる状態変数の確率過程と割引債価格の関数を具体化する必要がある。2節(2)ロ.で特定化したキャブレットまたはスワップションの市場価格を用いてこれらを決定する。

先行研究では、マルコフ過程とする状態変数 X_t を、シングルファクターのブラウン運動

$$dX_t = \sigma_t dW_t, \quad (3)$$

で表現することが多い。ここで、 σ_t は時刻 t に依存するパラメータで、時刻 0 で確定的に決まっている。 W_t は、ターミナル測度での標準ブラウン運動である。(3)式のようなブラウン運動に従う状態変数について、時間間隔 $[t, s]$ での標準偏差を考えると、

$$\sigma_X(t, s) = \sqrt{\int_t^s \sigma_u^2 du}, \quad (4)$$

となる。すなわち、時刻 s の状態変数 X_s を時刻 t でみると、平均 X_t 、分散 $\sigma_X^2(t, s)$ の正規分布に従う。以下では、平均 0、分散 v の正規分布の確率密度関数を $n_v(u)$ 、分布関数を $N_v(u)$ 、 $N_v(\cdot)$ の逆関数を $N_v^{-1}(\cdot)$ と表記する。

状態変数の確率過程として(3)式を用いる場合の利点としては、早期行使権付きのオプションの価格計算で必要となる状態変数の条件付確率密度関数が単純な形になることが挙げられる。これにより、価格付けに必要な条件付期待値を効率的に計算可能となる。

(3)式とは異なる確率過程を状態変数のマルコフ過程とする場合でも、フィッティング対象のスワップションの満期で状態変数の確率密度関数が明らかで、スワップ

14 フォワード測度の考え方を含む測度変換については木島・田中 [2007] が詳しい。Fries [2007] ではスポット測度 (spot measure) を用いたマルコフ関数モデルについての解説がある。

ション価格の計算が可能であれば、フィッティングする割引債価格の関数を精度よく求めることができる。ただし、(3)式とは異なる確率過程に対し、精度よくフィッティングされた割引債価格関数を得られたとしても、そのモデルから算出される金利オプションの価格が、(3)式を用いたモデルによる価格と等しくなるとは限らない。一般には、価格付け対象のオプションの価格は、状態変数の確率過程に依存するためである。この依存性は、扱うオプションの商品性に依りて、大きい場合も小さい場合もあり、状態変数の最適なモデル化方法は、扱う商品によって異なりうる。

(5) 割引債価格関数のフィッティング方法

2節(4)で示した比較的単純な状態変数の確率過程を前提に、先行研究における割引債価格関数のフィッティング方法について、ノンパラメトリックな方法とパラメトリックな方法を紹介する。

Hunt, Kennedy, and Pelsser [2000]、Fries [2007]等の先行研究は、金利のデジタル・オプション価格に対してノンパラメトリックに割引債価格の関数をフィッティングさせる方法を呈示している。それらの研究では、フィッティング対象のスワップション価格が、ストライクについて連続的で微分可能な関数により表されることが仮定されており、微分によってデジタル・オプション価格を導出したうえでフィッティングがなされている。

一方、パラメトリックな方法では、割引債価格をパラメトリックな関数として与え、そのパラメータを調整することでフィッティングを行う。代表的な研究であるPelsser [2000]では指数型の関数形が用いられているほか、Hunt and Kennedy [2000]や村上 [2007]では、従来のイールドカーブ・モデルの1つであるハル＝ホワイト・モデルを含意する関数形が導出されている。

以下、時刻 t での満期 T_m の割引債価格 $B_{t,m}$ を状態変数 x の関数として表現したものを $B_{t,m}(x)$ 、フォワード・スワップレート $L_{t,i,j}$ を状態変数 x の関数として表現したものを $L_{t,i,j}(x)$ とする。

イ. ノンパラメトリックな方法

ここでは、Hunt, Kennedy, and Pelsser [2000]、Fries [2007]等の多くの先行研究で解説されているデジタル・スワップションを用いたノンパラメトリックなフィッティング方法について説明する。なお、ノンパラメトリックな方法では、説明の便宜上、割引債価格の関数の代わりに、スワップレートの関数をフィッティングの対象とする。スワップレートの関数を決めれば、割引債価格の関数は導出できるため、両者は代替的である¹⁵。また、この方法では、 σ_t を外生的に与え、フィッティング

15 割引債価格の関数形を決める場合には、(1)式に基づいてスワップレートの関数形が定められる一方、スワップレートの関数形を決める場合には、(1)式の関係式を満たすように割引債価格の関数形が定められることとなり、それぞれを独立に決めることはできない。なお、ここでスワップレートの関数形を決める

のためのパラメータとしては使用しない。

最初に、フォワード・スワップレート $L_{t,i,j}$ を原資産とするデジタル・スワップションの価格に対し、スワップレートの関数 $L_{T_i,i,j}(x)$ をフィッティングさせる方法を示す。ここで用いるデジタル・スワップションは、オプション満期 T_i でスワップレート $L_{T_i,i,j}$ がストライク K を上回る場合に、それ以降の時刻 $T_{i+1}, T_{i+2}, \dots, T_j$ で $\delta_{i+1}, \delta_{i+2}, \dots, \delta_j$ のペイオフが発生するオプションとする。ストライク K のデジタル・スワップションの市場価格を $D_{i,j}^{\text{market}}(K)$ とする。

ここで、ペイヤーズ・スワップション¹⁶価格についてストライクで1階微分可能な関数 $C_{i,j}^{\text{market}}(K)$ を仮定すると、デジタル・スワップション価格 $D_{i,j}^{\text{market}}(K)$ は、

$$D_{i,j}^{\text{market}}(K) = -\frac{d}{dK} C_{i,j}^{\text{market}}(K), \quad (5)$$

と算出される。(5)式で算出された $D_{i,j}^{\text{market}}(K)$ が無裁定条件を満たすとすると、この $D_{i,j}^{\text{market}}(\cdot)$ は狭義単調減少関数となり¹⁷、逆関数が存在する。それを $D_{i,j}^{\text{market}^{-1}}(\cdot)$ とする。

このデジタル・スワップション価格 $D_{i,j}^{\text{market}}(K)$ に、時刻 T_i のスワップレートの関数 $L_{T_i,i,j}(x)$ をフィッティングすると、

$$L_{T_i,i,j}(x) = D_{i,j}^{\text{market}^{-1}} \left(\sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k} \int_x^{+\infty} H_{T_i,i+1,j}(u) n_{\sigma_X^2(0,T_i)}(u) du \right), \quad (6)$$

と表すことができる¹⁸。ここで、時刻 t での $L_{t,i,j}$ がマルチンゲールとなる測度の基準財価格とターミナル測度の基準財価格の比 $H_{t,i,j}(x)$ を

$$\begin{aligned} H_{t,i,j}(x) &= \frac{B_{0,M}}{\sum_{k=i}^j \delta_k B_{0,k}} \frac{\sum_{k=i}^j \delta_k B_{t,k}(x)}{B_{t,M}(x)} \\ &= \frac{B_{0,M} \sum_{k=i}^j \delta_k \prod_{h=k+1}^M (1 + \delta_h L_{t,h-1,h}(x))}{\sum_{k=i}^j \delta_k B_{0,k}}, \end{aligned} \quad (7)$$

際には、後述の(7)式の基準財価格の比 $H_{t,i,j}(x)$ 等を導入して割引債価格の具体的な関数形は導出することなく計算が進められるようにしている。

16 ペイヤーズ・スワップションは、フォワード・スワップレートに対するコール・オプションで、オプションを行使すると、固定払い変動受けのスワップが開始される。反対に、レシーバーズ・スワップションは、フォワード・スワップレートに対するプット・オプションで、オプション行使により、固定受け変動払いのスワップが開始される。

17 デジタル・スワップション価格の無裁定条件と狭義単調減少性については補論1を参照。

18 (6)式を用いたモデルによるデジタル・スワップションの理論価格と市場価格は等しい。詳細は補論1を参照。また、市場価格にスマイルがない場合は、ブラック・モデルによるデジタル・スワップション価格からスワップレートの関数 $L_{T_i,i,j}(x)$ を求めることができる。詳細は補論2を参照。なお、ブラック・モデルは、ブラック・ショールズ・モデルを先物契約のヨーロッパ・オプションに拡張したモデル。Black [1976]を参照。

とする。

(6) 式は、任意の i, j について成立するが、ここでのフィッティングでは、2 節 (2) 口. で選択した複数の期間の LIBOR またはスワップレートについて適用する。

(6) 式の右辺には $H_{T_i, i+1, j}(x)$ が含まれているため、複数の年限のスワップレートの関数 $L_{T_i, i, j}(x)$ を求める計算では、その順番に工夫が必要である。(7) 式より、 $H_{T_i, i+1, j}(x)$ は $L_{T_i, i+1, i+2}(x), L_{T_i, i+2, i+3}(x), \dots, L_{T_i, M-1, M}(x)$ に依存する。よって、(6) 式の $L_{T_i, i, j}(x)$ は、 $L_{T_i, i+1, i+2}(x), L_{T_i, i+2, i+3}(x), \dots, L_{T_i, M-1, M}(x)$ によって表された式とみなすことができるため、バックワードに計算することで、段階的に $L_{T_i, i, j}(x)$ を求めることが可能である。具体的に、キャブレットにフィッティングする場合は、 $L_{T_{M-1}, M-1, M}(x), L_{T_{M-2}, M-2, M-1}(x), \dots, L_{T_0, 0, 1}(x)$ の順に、スワップションにフィッティングする場合は、 $L_{T_{M-1}, M-1, M}(x), L_{T_{M-2}, M-2, M}(x), \dots, L_{T_0, 0, M}(x)$ の順に、時刻に関してバックワードにスワップレートの関数を算出する。具体的な計算手順は補論 3 で解説する。

上記の説明では、ペイヤーズ・スワップション価格の 1 階微分可能な関数 $C_{i, j}^{\text{market}}(K)$ を所与としたが、実際にこの価格を市場から取得することは困難である。一般的に市場から取得できるペイヤーズ・スワップション価格 $C_{i, j}^{\text{market}}(K)$ は、離散的なストライクについての価格であり、(5) 式を用いるためには、取得した離散的な価格から、任意のストライクについて 1 階微分可能な関数を推定する必要がある。また、デジタル・スワップション価格が無裁定条件を満たすためには、 $C_{i, j}^{\text{market}}(K)$ が 1 階微分可能という条件だけでなく、補論 1 で示すように、 $C_{i, j}^{\text{market}}(K)$ から算出されるデジタル・スワップション価格 $D_{i, j}^{\text{market}}(K)$ についても、 $\sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0, k}$ 未満の正值、かつ、連続で狭義単調減少となる必要がある。しかし、このデジタル・スワップション価格の無裁定条件を満たす実用的かつ安定的な $C_{i, j}^{\text{market}}(K)$ の補間アルゴリズムを構築することは容易ではないと考えられる¹⁹。

口. パラメトリックな方法

パラメトリックな方法では、割引債価格をパラメトリックな関数として与えたいうえで、ヨーロピアン型の金利オプションの理論価格を解析的に導出し、それと当該オプションの市場価格との差が小さくなるように割引債価格関数のパラメータを決める。

具体的には、Pelsser [2000] は、ターミナル測度での基準財となる割引債の価格について、パラメトリックな関数

$$\frac{1}{B_{t, M}(X_t)} = 1 + \bar{a}_t e^{\bar{b}_t X_t} + \bar{d}_t e^{-\frac{1}{2} \bar{c}_t (X_t - \bar{m}_t)^2}, \quad (8)$$

19 Fries [2007] の第 6 章では、オプション価格の補間方法について無裁定条件が成り立たない例の解説がある。一方、Hunt, Kennedy, and Pelsser [2000] 等では、無裁定条件が成り立つデジタル・スワップション価格を前提としており、デジタル・スワップション価格を無裁定条件が成り立つように導出する手続きについては記述されていない。

を仮定し、パラメータ $\bar{a}_t, \bar{b}_t, \bar{c}_t, \bar{d}_t, \bar{m}_t$ を決定する方法を提案した。無裁定価格付け理論の基本的な関係式 (2) 式を用いると、(8) 式で $t = T_i$ とすれば、時刻 $s < T_i$ での割引債価格と基準財価格の比 $B_{s,i}(X_s)/B_{s,M}(X_s)$ を求めることができる。このため、(8) 式のパラメータを決めることは、各時点の割引債価格を決めることにもなっている。Pelsser [2000] は、数値例によって、この手法で高精度なフィッティングが可能であることを示している。

また、Hunt and Kennedy [2000]、村上 [2007]、Hagan [2009] は、金利のハル＝ホワイト・モデルから導出される割引債価格の関数をマルコフ関数モデルで応用する方法を示している。短期金利 r_t について、 θ_t, a_t, v_t を時刻 t に依存するパラメータとして従来のハル＝ホワイト・モデルを記述すると、

$$dr_t = (\theta_t - a_t r_t) dt + v_t d\tilde{W}_t,$$

となる。このとき、時刻 T_i の割引債価格と基準財価格の比は

$$\frac{1}{B_{T_i,M}} = \frac{B_{0,i}}{B_{0,M}} \exp \left\{ (\psi_{T_M} - \psi_{T_i}) \int_0^{T_i} v_u \phi_u dW_u - \frac{1}{2} (\psi_{T_M} - \psi_{T_i})^2 \int_0^{T_i} v_u^2 \phi_u^2 du \right\}, \quad (9)$$

と表すことができる。ここで、 \tilde{W}_t はリスク中立測度でのブラウン運動で

$$dW_t = d\tilde{W}_t + (\psi_{T_M} - \psi_t) v_t \phi_t dt,$$

の関係が成り立ち、 ϕ_t, ψ_t を

$$\phi_t = \exp \left(\int_0^t a_u du \right),$$

$$\psi_t = \int_0^t \frac{1}{\phi_u} du,$$

とする。 v_t, ϕ_t, ψ_t は、時刻 0 で確定している関数であるため、(9) 式の割引債価格と基準財価格の比は幾何ブラウン運動に従う。

(9) 式は従来のハル＝ホワイト・モデルから導出された式であり、マルコフ関数モデルの枠組みでは表記されていない。ここで、マルコフ過程 X_t の確率微分方程式を

$$dX_t = \sigma_t dW_t = v_t \phi_t dW_t,$$

として、 X_t を状態変数とするマルコフ関数モデルを考えると、(9) 式は

$$\frac{1}{B_{T_i,M}(X_{T_i})} = \frac{B_{0,i}}{B_{0,M}} \exp \left\{ (\psi_{T_M} - \psi_{T_i}) X_{T_i} - \frac{1}{2} (\psi_{T_M} - \psi_{T_i})^2 \int_0^{T_i} v_u^2 \phi_u^2 du \right\}, \quad (10)$$

と変形でき、ハル＝ホワイト・モデルをマルコフ関数モデルの枠組みで捉えることが可能となる。無裁定価格付け理論の基本的な関係式 (2) 式を用いて、(10) 式から時刻 s での割引債価格と基準財価格の比を求めると、

$$\frac{B_{s,i}(X_t)}{B_{s,M}(X_t)} = \frac{B_{0,i}}{B_{0,M}} \exp \left\{ (\psi_{T_M} - \psi_{T_i}) X_s - \frac{1}{2} (\psi_{T_M} - \psi_{T_i})^2 \int_0^s v_u^2 \phi_u^2 du \right\},$$

となる。後述するマルコフ関数モデルの条件付期待値の算出方法等は、(10) 式にも適用可能であり、従来のハル＝ホワイト・モデルのツリーを用いた方法と比較しても、高精度かつ効率的な計算が可能となる²⁰。

(8) 式や (10) 式を与えれば各時点の割引債価格が決まることを示したが、これは、ヨーロピアン型のプレーンな金利オプションの理論価格を解析的に導出できることを意味する。その理論価格と当該オプションの市場価格との差が小さくなるように (8) 式や (10) 式のパラメータを決める。例えば、原資産を $L_{t,i,i+1}$ とするストライク K 、オプション満期 T_i のキャレット価格は、時刻 T_{i+1} でのペイオフが $V_{T_{i+1}} = \delta_{i+1} \max(0, L_{T_i,i,i+1}(X_{T_i}) - K)$ で与えられることから、(2) 式を用いて

$$B_{0,M} E \left[\frac{\delta_{i+1} \max(0, L_{T_i,i,i+1}(X_{T_i}) - K)}{B_{T_{i+1},M}(X_{T_{i+1}})} \right],$$

と表せる。この式の $L_{T_i,i,i+1}(X_{T_i})$ に (1) 式を代入し、満期 T_M の割引債について (2) 式を用いて整理すると、

$$B_{0,M} E \left[\max \left(0, \frac{1}{B_{T_i,M}(X_{T_i})} - (1 + \delta_{i+1} K) E \left[\frac{1}{B_{T_{i+1},M}(X_{T_{i+1}})} \mid F_{T_i} \right] \right) \right],$$

となるから、(8) 式または (10) 式の割引債価格と基準財価格の比を用いてキャレット価格を算出することが可能である。ここでの理論価格には、状態変数の標準偏差 σ_t が含まれるが、この σ_t については、外生的な値で固定する方法と、1つのパラメータとみなす方法があり、フィッティングの条件等に応じていずれも適用可能と考えられる。

なお、(8) 式や (10) 式とは異なる関数を使用する場合には、計算負荷を小さくするために、割引債価格の関数からヨーロピアン型のプレーンな金利オプション価格の解析式を導出できることが望ましい。

20 村上 [2007] を参照。

(6) 価格付けの計算

2節(4)、(5)で具体化した状態変数の確率過程と割引債価格の関数を用いれば、金利オプションの価格付けを行うことができる。状態変数は低次元のマルコフ過程としているため、条件付期待値を効率的に計算可能であり、早期行使権付きのオプション価格計算にも応用できる。2節(2)イ.より、価格付け対象の金利オプションの行使時刻におけるペイオフの関数は、具体化した割引債価格の関数から決まり、その関数を用いて条件付期待値を算出することで、オプション価格を求めることができる。

マルコフ関数モデルによる早期行使権付きオプション価格の具体的な計算方法については、従来型モデルのもとでツリーを用いて計算する方法との類似点が多い。まず、将来の各時刻で、状態変数のグリッドを設定しておき、各グリッドにおける条件付オプション価格の計算を満期時点からバックワードに行い、この計算を時刻0まで繰り返すことで、目的のオプション価格を求める。ここで、条件付オプション価格とは、その直後の行使可能時刻における条件付オプション価格の条件付期待値のことで、時刻についてバックワードに求めることができる。ただし、この計算過程において、各グリッドの条件付オプション価格が、そのグリッドでオプションを行使した場合の価値を下回る場合は、その行使した場合の価値で置き換える。以上の計算の枠組みは、ツリーを用いた方法と基本的に共通である。

一方、マルコフ関数モデルの価格付けの計算には、単純なツリーを用いた方法に対し、異なる点も存在する。以下では、2つの相違点を指摘する。この相違点により、ツリーよりも高精度かつ効率的な価格付け計算が可能となる。

まず1つ目の相違点は、条件付オプション価格を求めるグリッドの位置(時刻と状態)を比較的自由に設定できる点である。単純なツリーを用いる方法では、時刻や状態の区切りのとりうる値が等間隔であったり、精緻な価格付けのため時刻の区切りを狭く設定したりするといった特徴がある。一方、マルコフ関数モデルでは、このような制約はない。時刻の区切りについては、早期行使の判定が必要なオプション行使可能時刻を含む限り比較的柔軟に設定することができ、区切った時刻において、必要な計算精度に応じて任意の個数の任意の値の状態を設定することができる。このようなグリッドの設定により、価格付けの計算が効率化される。

もう1つの相違点は、条件付期待値の計算方法である。ツリーを用いた手法では、有限個(\bar{k} 個)の1期先の状態について、

$$\sum_{k=1}^{\bar{k}} f_{i+1,k} w_k,$$

のように条件付確率 w_k で重み付けした平均値をとることで、時刻 T_i からみた価格 f の条件付期待値を算出する。ただし、 $f_{i+1,k}$ は時刻 T_{i+1} の k 番目の状態における f の値である。ここでの計算はバックワードに行うため、時刻 T_i の条件付期待値の計算において、時刻 T_{i+1} の k 番目の状態における f の値 $f_{i+1,k}$ は前もって与えら

れているとする。この方法に対し、マルコフ関数モデルでは、時刻 T_{i+1} の価格 f を連続関数 $\tilde{f}_{i+1}(u)$ で表現し、状態変数についての積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_{i+1}(u) n_{\sigma_X^2(T_{i+1}-T_i)}(u-x) du, \quad (11)$$

により、状態変数が x の場合の時刻 T_i からみた条件付期待値を求める。特に、 $\tilde{f}_{i+1}(u)$ が多項式で表されれば、解析的な積分が可能であり、Fries [2007] でも指摘されているように、高精度かつ効率的な価格付けが可能となる²¹。

時刻の区切りに連動して状態変数の間隔が決まってしまうツリー法と比較し、マルコフ関数モデルでは前述のとおり求められる計算精度に応じてグリッドの状態変数の間隔を時刻とは独立に変化させることが可能であるのは、上記 (11) 式の積分評価法を採用しているからである。なお、(11) 式の条件付期待値の計算は、2 節 (5) イ. で前述したように、ノンパラメトリックなフィッティングにおいて、 $t < T_i$ の $H_{t,i+1,j}(x)$ を算出するときにも必要であり、そこでの多項式近似によって計算の効率化を実現できる。

3. 離散ストライクのオプション価格に基づくフィッティング方法の提案

2 節 (5) では、先行研究に示された割引債価格の関数のフィッティング方法を説明した。先行研究に従って 2 節 (5) イ. のノンパラメトリックな方法を適用するには、所与とするスワップション価格のストライクについての関数が 1 階微分可能である等、いくつかの条件を満たす必要があり、市場から取得できる離散的なスワップション価格からそのような関数を特定化する必要がある。また、2 節 (5) ロ. のパラメトリックな方法を適用するには、市場から取得する金利オプション価格を用いて多変量の同時最適化を行い、割引債価格の関数のパラメータを求める必要がある。

本節では、2 節 (5) で整理した方法とは異なる形で、市場取引されている離散的なストライクのスワップション価格を所与としてノンパラメトリックに割引債価格関数をフィッティングする方法を提案する。この方法では、離散的なストライクのスワップション価格から直接に割引債価格の関数を求められるため、従来のノンパラメトリックな方法で仮定されていた任意のストライクでのデジタル・スワップション価格の算出が不要となるという利点がある。また、パラメトリックな方法で必要とされる多変量の同時最適化も必要なく、1 次元の最適化で安定的に割引債価格の関

21 状態変数のマルコフ性を仮定していることから、同じ時刻の状態変数の値に対して複数の価格 f が対応することはない。その意味でも、価格 f の多項式近似関数 $\tilde{f}_{i+1}(u)$ を用いて価格付けすることには問題は生じない。

表 2 割引債価格関数のフィッティング方法の比較

フィッティングする商品	パラメトリック法	ノンパラメトリック法
デジタル・スワップション	Pelsser [2000]	Hunt, Kennedy, and Pelsser [2000] 等
ペイヤーズ・スワップション		本研究

数を求めることが可能となる。割引債価格関数のフィッティング方法とフィッティング対象の商品について各研究の位置付けを整理すると表 2 のとおりである。

はじめに、本節で提案する方法の大きな流れを整理すると以下のとおりである。まず、フィッティング対象とするスワップションとしては、年限を表す i と j を固定した場合に、 Q 個のストライク ($K_1 < K_2 < \dots < K_Q$) について市場価格 $C_{i,j}^{\text{market}}(K_q)$ が観察されているとする²²。この情報に基づき、時刻 T_i のスワップレートの関数 $L_{T_i,i,j}(x)$ を構成することが本節の最終的な目標である²³。そのためには、まずこの関数上で特定することが可能な点を離散的に定めていき、次にそれらを結んで連続的な関数を生成するという段取りをとる。関数上で特定可能な点の見つけ方については、結論を先取りすると、市場価格 $C_{i,j}^{\text{market}}(K_q)$ の情報を加工することによって特定可能な状態変数 \hat{x}_q の値を決めることができ²⁴、それぞれの \hat{x}_q に対するスワップレート関数の値 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x}_q)$ は、フィッティング対象として利用したスワップションのストライク K_q の水準に一致することになる。このように関数上の点を特定した後は、区分関数によりそれらをつなぐことで最終的な関数を構成することができる。これらの操作をさまざまな i と j について行うことで、必要なスワップレート関数をすべてフィッティングしたことになる。

以下、状態変数 X_t の確率過程については、先行研究と同様に (3) 式で与え、ボラティリティ σ_t は時刻 0 で確定した時刻 t で変化するパラメータとする。

(1) デジタル・スワップション価格の無裁定条件

ここでは、フィッティング方法の説明の準備として、観察されているスワップション価格 $C_{i,j}^{\text{market}}(K_q)$ ($q = 1, \dots, Q$) が無裁定条件を満たすという仮定から導出される不等式を示す。

観察されているペイヤーズ・スワップション価格 $C_{i,j}^{\text{market}}(K_q)$ をプット・コール・パリティに基づきレシーバーズ・スワップション価格に変換し、それを規格化した p_q を次のように定義する。

22 市場でレシーバーズ・スワップションの価格が観察される場合は、プット・コール・パリティでペイヤーズ・スワップションの価格に変換する。
 23 本節では、2 節 (5) イ. と同様に、割引債価格関数の代わりにスワップレート関数のフィッティングを行う。スワップレートの関数を決めれば、割引債価格の関数は導出できる。
 24 \hat{x}_q は後述する (16) 式の関数 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ に代入して用いられる。この関数に入力する変数は、後述する (15) 式で状態変数を変換した値であり、 \hat{x}_q もまた同様の意味を持つ値であるが、本節では簡略化のため状態変数として説明を行う。

$$p_q = \frac{C_{i,j}^{\text{market}}(K_q)}{\sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k}} + K_q - L_{0,i,j}. \quad (12)$$

ここで、市場が無裁定であれば、

$$0 < \frac{p_1 - p_0}{K_1 - K_0} < \frac{p_2 - p_1}{K_2 - K_1} < \dots < \frac{p_Q - p_{Q-1}}{K_Q - K_{Q-1}} < 1, \quad (13)$$

という不等式関係が成立する（ただし、 $p_0 = K_0 = 0$ ）²⁵。

次に、時刻 T_i でスワップレート $L_{T_i,i,j}$ がストライク K_q を下回る場合に、時刻 T_{i+1} , T_{i+2}, \dots, T_j で $\delta_{i+1} / \sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k}$, $\delta_{i+2} / \sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k}, \dots, \delta_j / \sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k}$ のペイオフが発生するデジタル・スワップション²⁶を考え、その価格を d_q とする。このデジタル・スワップション価格 d_q が無裁定条件を満たすためには、(13) 式の p_q の不等式関係に加え、

$$0 < \frac{p_1 - p_0}{K_1 - K_0} < d_1 < \frac{p_2 - p_1}{K_2 - K_1} < d_2 < \dots < d_{Q-1} < \frac{p_Q - p_{Q-1}}{K_Q - K_{Q-1}} < d_q < 1, \quad (14)$$

を満たす必要がある²⁷。

2節(5)イ.では、デジタル・スワップション価格を所与としていたのに対し、ここでは(14)式を満たすある d_q が存在するとして、以下フィッティング方法を説明する。なお、 d_q の具体的な値はさまざまに設定することが可能であるが、その与え方の例は後掲3節(3)で示す。

(2) スワップレートの関数形の導出

ここでは、(14)式の無裁定条件を満たす規格化されたデジタル・スワップション価格 d_q とレシーバーズ・スワップション価格 p_q にスワップレートの関数 $L_{T_i,i,j}(x)$ をフィッティングさせる。ただし、オプション価格式の単純化等の都合上、 $L_{T_i,i,j}(x)$ を直接フィッティングさせるのではなく、

25 (13) 式の各項は、元本 $1/(K_{q+1} - K_q)$ の規格化したレシーバーズ・スワップションについて、ストライク K_{q+1} で買い、ストライク K_q で売りを組み合わせたポジションの価格に対応する。(13) 式の大小関係が成立しない不等式が存在する場合は、その成立しない不等式のストライクで、このポジションを組み合わせることで裁定取引が可能となる。

26 2節(5)イ.のデジタル・スワップションでは、スワップレート $L_{T_i,i,j}$ がストライク K を上回る場合に、時刻 $T_{i+1}, T_{i+2}, \dots, T_j$ でのペイオフが $\delta_{i+1}, \delta_{i+2}, \dots, \delta_j$ となっており、ここでのデジタル・スワップションとは異なる。

27 (14) 式の大小関係が成立しない不等式が存在する場合は、その成立しない不等式のストライクで、脚注 25 で説明したレシーバーズ・スワップションの売り買いとデジタル・スワップションを組み合わせることで裁定取引が可能となる。

$$\hat{x} = \hat{H}_{0,T_i,i+1,j}(0, x), \quad (15)$$

という x から \hat{x} への変数変換を利用し、

$$\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x}) = L_{T_i,i,j}(x), \quad (16)$$

で定義される $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ をフィッティングさせる。(15)式の変数変換で用いられる $\hat{H}_{t,s,i,j}(x', x)$ は、(7)式の基準財価格の比率 $H_{t,i,j}(x)$ を用いて

$$\hat{H}_{t,s,i,j}(x', x) = x' + N_{\sigma_{\hat{x}}^2(t,s)}^{-1} \left(\int_{-\infty}^x \frac{H_{s,i,j}(u)}{H_{t,i,j}(x')} n_{\sigma_{\hat{x}}^2(t,s)}(u - x') du \right), \quad (17)$$

で定義された関数である。

フィッティングの手続きは、まず、 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ を所与のオプション価格にフィッティングさせ、次に、(16)式により、 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ から $L_{T_i,i,j}(x)$ を求めるという手続きになる。以下、 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ のフィッティングに焦点を当てる。 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ のフィッティングでは、まず、規格化されたデジタル・スワップション価格 d_q とのフィッティングを行うことで

$$\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x}_q) = K_q, \quad q = 1, 2, \dots, Q, \quad (18)$$

となる \hat{x}_q ($q = 1, \dots, Q$) を求め、次に、規格化されたレシーバーズ・スワップション価格 p_q とのフィッティングから、それらを区分関数でつなぎ、 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ を構成する。

規格化されたデジタル・スワップション価格 d_q とのフィッティングでは、 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ によるデジタル・スワップションの理論価格

$$\begin{aligned} & \frac{B_{0,M}}{\sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k}} E \left[\frac{\sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{T_i,k}(x) 1_{\{L_{T_i,i,j}(x) < K_q\}}}{B_{T_i,M}(x)} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\{L_{T_i,i,j}(x) < K_q\}} H_{T_i,i+1,j}(x) n_{\sigma_{\hat{x}}^2(0,T_i)}(x) dx, \end{aligned} \quad (19)$$

を用いる。(19)式のデジタル・スワップションの理論価格は、(15)式の変数変換により

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\{\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x}) < K_q\}} n_{\sigma_{\hat{x}}^2(0,T_i)}(\hat{x}) d\hat{x}, \quad (20)$$

となる。 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ を狭義単調な連続関数と仮定すれば、(20)式の不等式条件 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x}) < K_q$ を $\hat{x} < \hat{x}_q$ という条件に置き換えることができるため、(20)式の理論価格を d_q と等しいとした式から

$$\hat{x}_q = \begin{cases} -\infty, & q = 0, \\ N_{\sigma_{\hat{x}}^{-2}(0, T_i)}^{-1}(d_q), & q = 1, 2, \dots, Q, \\ +\infty, & q = Q + 1, \end{cases} \quad (21)$$

となる。ただし、 \hat{x}_0 、 \hat{x}_{Q+1} は便宜的に定めたものである。

次に、規格化されたレシーバース・スワップション価格 p_q とのフィッティングから区間 $[\hat{x}_q, \hat{x}_{q+1}]$ ごとに $\hat{L}_{T_i, i, j}(\hat{x})$ の関数形を定めていく。この区間ごとの関数形には自由度があり、1つの関数形に決まるわけではない。関数形的具体例は3節(3)で後述することとし、ここでは、以下、区間ごとの関数形が満たすべき条件とその条件を満たす関数形の存在を示していく。

$q = 0, \dots, Q$ について関数 $\hat{L}_{T_i, i, j}(\hat{x})$ を区間 $[\hat{x}_q, \hat{x}_{q+1}]$ について積分した式

$$y_q = \int_{\hat{x}_q}^{\hat{x}_{q+1}} \hat{L}_{T_i, i, j}(u) n_{\sigma_{\hat{x}}^{-2}(0, T_i)}(u) du, \quad (22)$$

を考える。 $\hat{L}_{T_i, i, j}(\hat{x})$ によるレシーバース・スワップションの理論価格

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \max(0, K_q - \hat{L}_{T_i, i, j}(\hat{x})) n_{\sigma_{\hat{x}}^{-2}(0, T_i)}(\hat{x}) d\hat{x},$$

は所与のレシーバース・スワップション価格 p_q と等しくなる必要がある。この条件は、補論4で後述するとおり、(22)式の y_q について、

$$y_q = \begin{cases} K_{q+1}d_{q+1} - K_qd_q - p_{q+1} + p_q, & q = 0, 1, 2, \dots, Q - 1, \\ L_{0, i, j} - K_Qd_Q + p_Q, & q = Q, \end{cases} \quad (23)$$

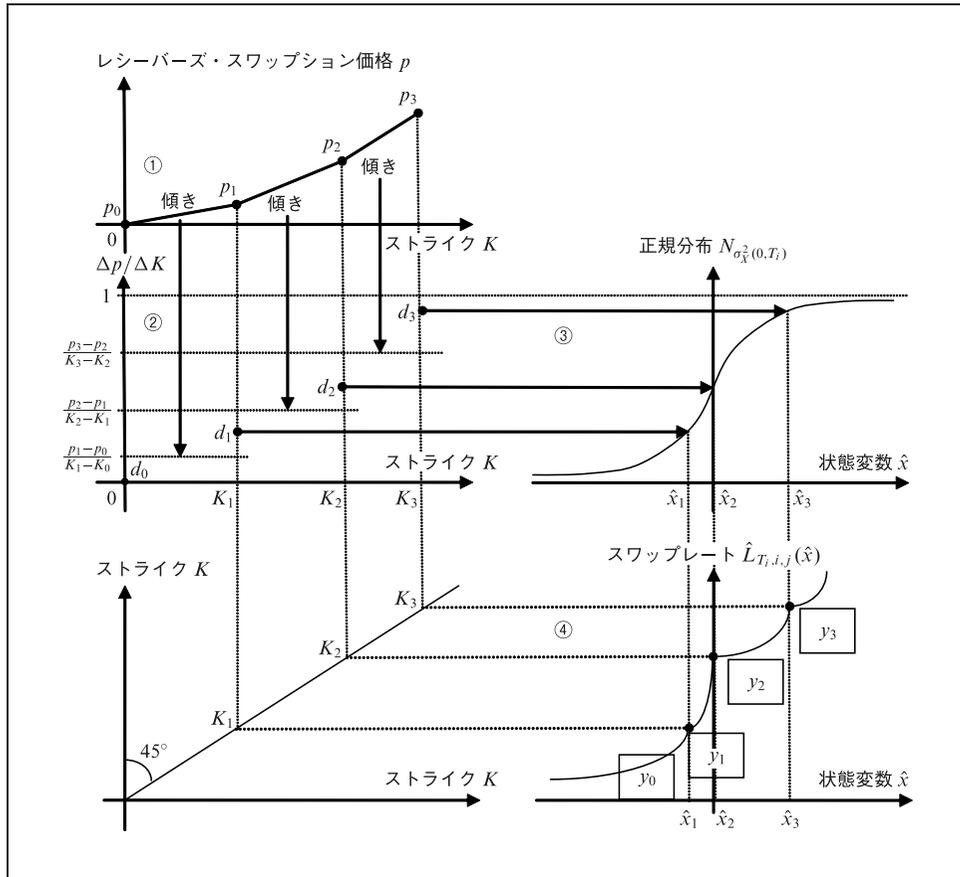
が成立すれば満たされる。

(23)式のように定めた y_q は、無裁定条件である(14)式と $p_Q - K_Q > L_{0, i, j}$ より、 $K_{Q+1} = \infty$ として

$$K_q < \frac{y_q}{N_{\sigma_{\hat{x}}^{-2}(0, T_i)}(\hat{x}_{q+1}) - N_{\sigma_{\hat{x}}^{-2}(0, T_i)}(\hat{x}_q)} < K_{q+1}, \quad (24)$$

を満たす。(18)式より $\hat{L}_{T_i, i, j}(\hat{x})$ は、 $\hat{L}_{T_i, i, j}(\hat{x}_q) = K_q$ 、 $\hat{L}_{T_i, i, j}(\hat{x}_{q+1}) = K_{q+1}$ を満たしており、(24)式の不等号関係から $\hat{x}_q \leq \hat{x} \leq \hat{x}_{q+1}$ では $K_q \leq \hat{L}_{T_i, i, j}(\hat{x}) \leq K_{q+1}$ であるような狭義単調増加な連続関数であると仮定する。このように仮定しても、区間 $[\hat{x}_q, \hat{x}_{q+1}]$ で積分した(22)式の値が(23)式と一致するような関数形 $\hat{L}_{T_i, i, j}(\hat{x})$ は存在する。

図3 p_q 、 d_q 、 \hat{x}_q 、 y_q 、 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ の関係



p_q 、 d_q 、 \hat{x}_q 、 y_q 、 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ の関係とこれまでの導出手順を整理すると、図3のように図示できる。まず、①下に凸となるレシーバーズ・スワップション価格 p_q から、隣接するストライクの傾きを求め ((13) 式)、②その傾きとの無裁定条件を満たすデジタル・スワップション価格 d_q を決定し ((14) 式)、③正規分布の逆関数で状態変数 \hat{x}_q を算出した ((21) 式) 後に、④ p_q 、 d_q から y_q を求め ((23) 式)、積分した値が (23) 式の y_q と等しくなるようスワップレートを導く関数 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ を求める ((22) 式)。

なお、スワップレートの関数 $L_{T_i,i,j}(x)$ は、ここで求めた $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ を用いて、(16) 式より導出することができる。この $L_{T_i,i,j}(x)$ によるペイヤーズ・スワップションの理論価格は、所与の市場価格 $C_{i,j}^{\text{market}}(K_q)$ と等しくなる²⁸。

28 補論4を参照。

この $L_{T_i,i,j}(x)$ には、(6) 式同様、 $H_{T_i,i+1,j}(x)$ が含まれている²⁹。 $H_{T_i,i+1,j}(x)$ は $L_{T_i,i,j}(x)$ とは異なる年限のフォワード・スワップレートの関数に依存するため、2 節 (5) イ. のノンパラメトリックな方法と同様に補論 3 の方法を用いて、他の年限のフォワード・スワップレートの関数に依存しない関数表現に変更する必要がある。

(3) 状態変数の値とスワップレートの関数形の具体例

実際の金利オプション価格の計算には、ここまでに示した性質を満たす状態変数の値 \hat{x}_q ($q = 1, \dots, Q$) と時刻 T_i のスワップレートを導く関数形 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ を特定化する必要がある。これらの性質を満たす \hat{x}_q 、 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ は無数に存在するが、比較的簡潔な一例を図 4 に示す³⁰。

まず、所与のスワップシオン価格の差分から、ストライクが $(K_{q-1} + K_q)/2$ のデジタル・スワップシオン価格を近似的に算出し、補間のために、この価格から $\hat{L}_{T_i,i,j}(\bar{x}_{q-1,q}) = (K_{q-1} + K_q)/2$ となる値 $\bar{x}_{q-1,q}$ を求める。次に、求めた $\bar{x}_{q-1,q}$ とストライク $(K_{q-1} + K_q)/2$ の情報に基づき、補間により $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x}_q) = K_q$ となる \hat{x}_q を求める³¹。したがって、フィッティング対象のスワップシオン価格が無裁定条件を満たしていれば、この \hat{x}_q から算出される d_q は、確実に (14) 式の無裁定条件を満たす。

スワップレートを導く関数形 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ は区分的な指数関数とする。具体的には、各区間 $[\hat{x}_q, \hat{x}_{q+1}]$ をある点 $x'_{q,q+1}$ で分けてそれぞれに 1 パラメータの指数関数を与える³²。これにより、正規分布に従う状態変数では、ペイヤーズ・スワップシオン価格が解析的に求められる。また、1 パラメータの単調な関数であるため、(22)、(23) 式を満たすパラメータは容易に求められる。基本的なケースとして考えられる対数正規分布に従うスワップレートは、すべての区間の指数関数のパラメータが等しい特殊な場合として捉えられる。このような簡潔な方法で導出されたスワップレートの関数でも、4 節の計算例で示すように、フィッティング精度の高いモデルが構築できる。

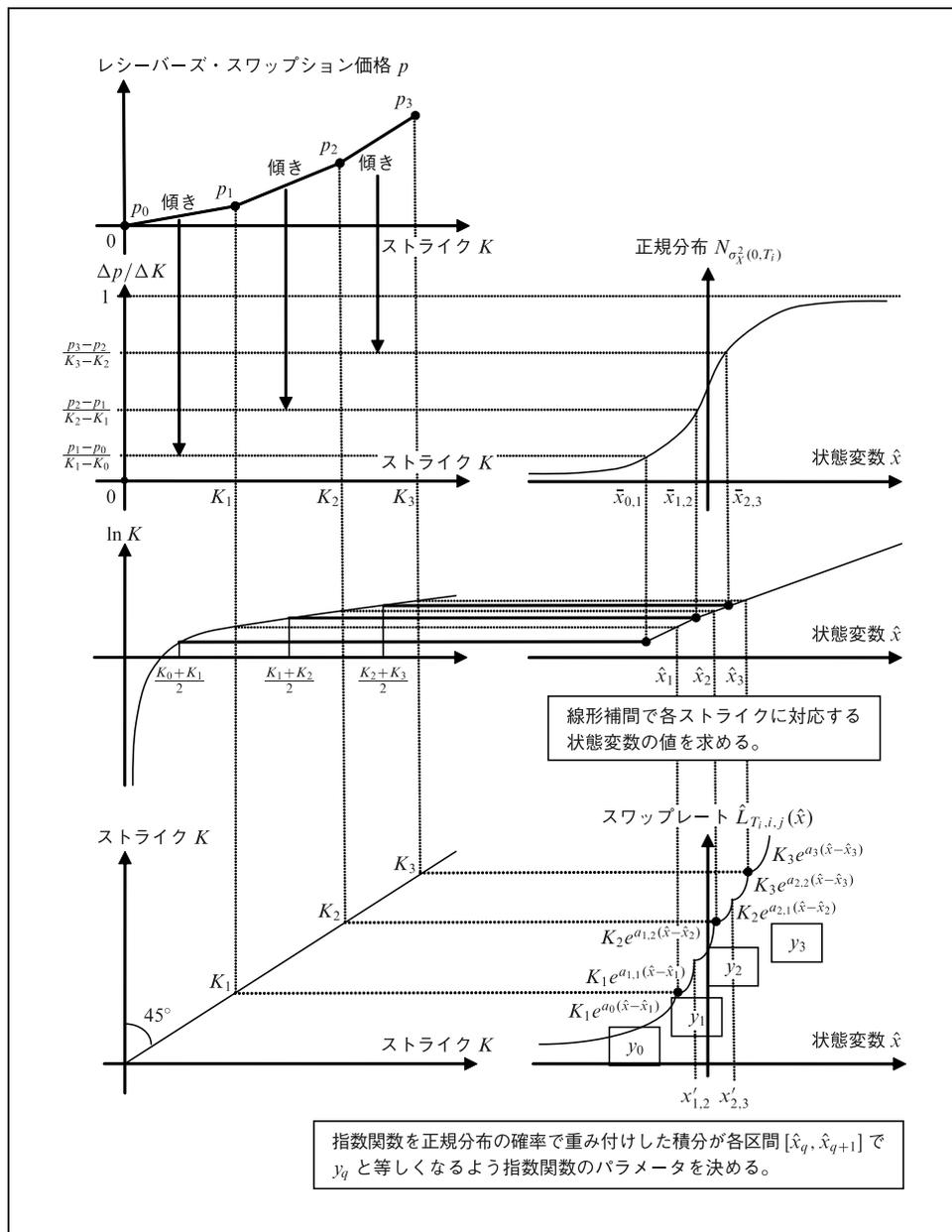
29 (6) 式同様、ここでの $L_{T_i,i,j}(x)$ は、 $L_{T_i,i+1,i+2}(x), L_{T_i,i+2,i+3}(x), \dots, L_{T_i,M-1,M}(x)$ を用いて表されている。

30 図 4 に示す関数形等の詳細は補論 5 を参照。なお、図 3 の $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ と同様、ここで求めた $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ を用いて、(16) 式より、スワップレートの関数 $L_{T_i,i,j}(x)$ を導出することができる。

31 補間の詳細は補論 5 を参照。

32 関数形 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ の具体的な構成方法は補論 5 を参照。

図4 \hat{x}_q 、 $\hat{L}_{T_1,i,j}(\hat{x})$ の具体例



4. 計算例

本節では、3節で提案したマルコフ関数モデルのノンパラメトリックなフィッティング方法を用いた計算例を示す。具体的には、まず、フィッティング対象のキャブレット、ヨーロピアン・スワップションの価格をモデルに基づき計算し、その結果を解析解と比較することでフィッティングの精度を評価する。次に、バミューダン・スワップションの価格を2通りのケースについて算出する。第1のケースはキャブレットにフィッティングする場合であり、スマイルを考慮しないキャブレット価格を用いて計算を行い、その結果をLIBORマーケット・モデルと最小二乗モンテカルロ法の併用により計算した結果と比較する。第2のケースは、スワップションにフィッティングする場合であり、スマイルを考慮する場合としない場合のスワップション価格をそれぞれ用いてバミューダン・スワップションの価格を算出する。

このようにオプション価格を求めるうえでは、2節(6)で説明したように、(11)式の条件付期待値を計算することになる。(11)式の被積分関数は、条件付オプション価格関数を近似的に求めたものであるが、その具体的な近似方法としては、次のような多項式近似を採用する。

- 3次スプライン補間を使用する。
- 補間した3次関数の1階導関数が0となる点が存在する場合は、その領域を連続な1次関数に置き換える。
- 両端点の外側の領域（外挿の領域）は、端点で1階導関数が連続となる1次関数で近似する。ただし、外挿（補外）した1次関数が負になる領域が存在する場合は、連続な定数関数に置き換える。

この方法は、Fries [2007] で提案された3次スプライン補間を独自に拡張させた手法であり、正の狭義単調な関数の近似に限定されるが、有効な近似方法であると考えられる。

本節では、状態変数のボラティリティ σ_t は1（定数）で固定する。グリッドの設定については、オプション満期までの0.5年間隔の各時点で、200個の状態変数の値をそれぞれ考える。具体的には、時点 t での状態変数として、 $7\sqrt{t} \times (-1 + 2k/199)$ という値を考える ($k = 0, 1, \dots, 199$)³³。これらの等間隔に設定した200個の状態変数の値の中から、所与のキャブレット、スワップション価格の各ストライク K_q について、 $L_{T_i, j}(x)$ がストライク K_q に最も近くなる状態変数の値を選び、それを $L_{T_i, j}^{-1}(K_q)$ で置き換える。このように調整することでキャブレット、スワップションのペイオフをより正確な関数で表すことができ、高精度な価格計算が可能となる。

33 この設定のもとでは状態変数のレンジは $[-7\sqrt{t}, 7\sqrt{t}]$ となる。 $\sigma_t = 1$ であるから、このレンジは $[-7\sigma_t\sqrt{t}, 7\sigma_t\sqrt{t}]$ と広めに設定されている。

表3 キャブレット、スワップションのインプライド・ボラティリティ

ストライク	4%	5%	6%
スマイルなし	50%	50%	50%
スマイルあり	54%	50%	48%

(1) キャブレットとヨーロピアン・スワップションでの確認

ここでは、フィッティング対象のオプションがキャブレットの場合とスワップションの場合のおのおのについて、モデルに基づき、そのフィッティング対象のオプションの価格を算出し、その結果を解析解と比較することでフィッティング精度の評価を行う。また、各フィッティング対象のインプライド・ボラティリティについて、スマイルを考慮しない場合と考慮する場合で同様の比較を行う。

本来は、フィッティング対象のオプションについては市場価格と整合的な解析解を直接計算できるため、モデルに基づきその価格を改めて計算する必要はない。ただし、実際に計算するうえでは、 $i < M - 1$ の場合、スワップレートの関数 $L_{T_i, i, j}(x)$ を求める (16) 式の $\hat{H}_{0, T_i, i+1, j}(0, x)$ の算出に数値的な積分計算が必要であり、この計算誤差を評価する目的で以下の価格計算を行う。

対象期間は10年とし、所与の市場データとしてはフォワードLIBORを5%で一定とし、インプライド・ボラティリティについては、スマイルを考慮しない場合と考慮する場合でそれぞれ表3のように設定する。表3のインプライド・ボラティリティは、フィッティング対象のすべてのオプション満期、原資産期間のキャブレットとスワップションについて共通である。

ここでは、0%、4%、5%、6%をストライクとするキャブレットとスワップションの価格について、ブラック・モデルの公式による解析解³⁴とマルコフ関数モデルによる数値解を算出する。ストライク0%のオプション価格の解析解は、所与のイールドカーブの市場データのみから求めることができ、インプライド・ボラティリティには依存しない。この解析解と数値解を比較することで、モデルのイールドカーブとの整合性を確認できる。そのうえで、ストライク4%、5%、6%のオプション価格の解析解と数値解を比較する。この比較により、モデルのインプライド・ボラティリティとの整合性を確認できる。

計算結果は、表4～表7のとおりである。表4、表5は、キャブレットにフィッティングした場合、表6、表7は、スワップションにフィッティングした場合である。フィッティングするキャブレットまたはスワップションのインプライド・ボラティリティについて、表4、表6は、スマイルを考慮しない場合、表5、表7は、スマイルを考慮する場合である。各表中の「積分1回」は時刻0からみた満期でのペイオフの期待値を1回の積分で算出した値である。一方、「積分複数回」は、時刻0から満期までの時間を0.5年間隔で分割した各時刻で、条件付期待値を繰り返し求

34 ブラック・モデルについては、脚注18を参照。

表4 キャプレット価格（スマイルなし）（単位 bp）

満期	解析解				本稿の手法に基づく数値解							
					積分1回				積分複数回			
	ストライク				ストライク				ストライク			
0%	4%	5%	6%	0%	4%	5%	6%	0%	4%	5%	6%	
9.5	152.57	92.67	85.29	79.10	152.57	92.67	85.29	79.10	152.57	92.67	85.29	79.10
9	156.38	93.29	85.50	78.98	156.38	93.26	85.50	78.99	156.38	93.26	85.50	78.99
8.5	160.29	93.80	85.58	78.72	160.29	93.78	85.58	78.73	160.29	93.78	85.58	78.73
8	164.30	94.20	85.52	78.30	164.30	94.19	85.51	78.29	164.30	94.18	85.51	78.29
7.5	168.41	94.46	85.29	77.68	168.39	94.44	85.26	77.66	168.38	94.42	85.25	77.65
7	172.62	94.57	84.87	76.86	172.57	94.52	84.82	76.81	172.55	94.50	84.80	76.79
6.5	176.93	94.51	84.24	75.79	176.86	94.44	84.17	75.72	176.83	94.41*	84.14*	75.69*
6	181.36	94.26	83.37	74.46	181.27	94.17	83.29*	74.38*	181.24	94.14*	83.25*	74.35**
5.5	185.89	93.77	82.22	72.83	185.81	93.69	82.14*	72.74*	185.78	93.66*	82.11*	72.71**
5	190.54	93.03	80.76	70.84	190.47	92.95	80.69	70.77	190.44	92.93*	80.66*	70.75*
4.5	195.30	91.98	78.92	68.45	195.24	91.92	78.87	68.40	195.22	91.91	78.85	68.38
4	200.18	90.57	76.65	65.58	200.14	90.53	76.62	65.55	200.13	90.52	76.61	65.54
3.5	205.19	88.74	73.87	62.16	205.16	88.72	73.85	62.14	205.15	88.71	73.84	62.14
3	210.32	86.40	70.45	58.07	210.29	86.38	70.44	58.06	210.29	86.38	70.44	58.06
2.5	215.57	83.42	66.26	53.15	215.55	83.41	66.25	53.15	215.55	83.41	66.25	53.15
2	220.96	79.64	61.06	47.19	220.94	79.63	61.05	47.19	220.94	79.63	61.05	47.19
1.5	226.49	74.78	54.48	39.82	226.48	74.79	54.47	39.82	226.48	74.79	54.47	39.82
1	232.15	68.40	45.83	30.43	232.15	68.42	45.83	30.43	232.15	68.42	45.83	30.43
0.5	237.95	59.55	33.39	17.64	237.95	59.60	33.39	17.64	237.95	59.60	33.39	17.64

備考：解析解との相対的な誤差が0.15%以上の値には**を、0.1%以上0.15%未満の値には*を付した。

表5 キャプレット価格（スマイルあり）（単位 bp）

満期	解析解				本稿の手法に基づく数値解							
					積分1回				積分複数回			
	ストライク				ストライク				ストライク			
0%	4%	5%	6%	0%	4%	5%	6%	0%	4%	5%	6%	
9.5	152.57	97.49	85.29	76.03	152.57	97.49	85.29	76.03	152.57	97.49	85.29	76.03
9	156.38	98.18	85.50	75.88	156.36	98.16	85.48	75.88	156.36	98.16	85.48	75.88
8.5	160.29	98.75	85.58	75.58	160.27	98.73	85.56	75.59	160.27	98.73	85.56	75.59
8	164.30	99.20	85.52	75.13	164.31	99.21	85.51	75.14	164.31	99.21	85.51	75.14
7.5	168.41	99.51	85.29	74.49	168.39	99.49	85.28	74.50	168.39	99.49	85.28	74.50
7	172.62	99.65	84.87	73.65	172.62	99.66	84.87	73.67	172.62	99.66	84.87	73.67
6.5	176.93	99.61	84.24	72.58	176.96	99.64	84.25	72.60	176.96	99.64	84.25	72.60
6	181.36	99.36	83.37	71.26	181.39	99.40	83.38	71.28	181.39	99.39	83.38	71.28
5.5	185.89	98.85	82.22	69.64	185.94	98.89	82.24	69.66	185.94	98.89	82.24	69.65
5	190.54	98.07	80.76	67.68	190.71	98.12	80.78	67.70	190.71	98.11	80.78	67.70
4.5	195.30	96.95	78.92	65.33	195.46	97.09*	78.93	65.36	195.46	97.09*	78.93	65.35
4	200.18	95.45	76.65	62.53	200.36	95.60**	76.67	62.56	200.36	95.60**	76.67	62.56
3.5	205.19	93.48	73.87	59.20	205.43*	93.50	73.88	59.22	205.43*	93.50	73.88	59.22
3	210.32	90.95	70.45	55.23	210.44	91.06*	70.48	55.25	210.44	91.06*	70.48	55.25
2.5	215.57	87.73	66.26	50.47	215.72	87.83*	66.29	50.49	215.72	87.83*	66.29	50.49
2	220.96	83.62	61.06	44.70	221.09	83.73*	61.08	44.72	221.09	83.73*	61.08	44.72
1.5	226.49	78.32	54.48	37.61	226.60	78.44*	54.50	37.63	226.60	78.44*	54.50	37.63
1	232.15	71.32	45.83	28.60	232.25	71.37	45.85	28.61	232.25	71.37	45.85	28.61
0.5	237.95	61.51	33.39	16.38	238.07	61.58*	33.40	16.39	238.07	61.58*	33.40	16.39

備考：解析解との相対的な誤差が0.15%以上の値には**を、0.1%以上0.15%未満の値には*を付した。

表6 ペイヤーズ・スワップション価格（スマイルなし）（単位 bp）

満期	解析解				本稿の手法に基づく数値解							
					積分1回				積分複数回			
	ストライク				ストライク				ストライク			
0%	4%	5%	6%	0%	4%	5%	6%	0%	4%	5%	6%	
9.5	152.57	92.67	85.29	79.10	152.57	92.67	85.29	79.10	152.57	92.67	85.29	79.10
9	308.95	184.30	168.92	156.04	308.97	184.30	168.92	156.05	308.97	184.30	168.92	156.05
8.5	469.24	274.60	250.54	230.46	469.27	274.60	250.54	230.47	469.27	274.60	250.54	230.47
8	633.54	363.23	329.76	301.91	633.56	363.22	329.75	301.92	633.55	363.21	329.74	301.91
7.5	801.95	449.83	406.14	369.92	801.93	449.76	406.09	369.88	801.90	449.73	406.06	369.85
7	974.56	533.95	479.16	433.92	974.46	533.78	479.02	433.80	974.39	533.71	478.96	433.73
6.5	1,151.49	615.12	548.25	493.28	1,151.24	614.70	548.00	493.05	1,151.13	614.59	547.89	492.94
6	1,332.85	692.74	612.72	547.26	1,332.53	692.37	612.38	546.94	1,332.39	692.23	612.24	546.80
5.5	1,518.74	766.15	671.78	595.00	1,518.40	765.76	671.42	594.65	1,518.25	765.62	671.28	594.51
5	1,709.27	834.55	724.48	635.48	1,708.96	834.14	724.13	635.17	1,708.82	834.01	724.00	635.04
4.5	1,904.57	896.98	769.67	667.49	1,904.26	896.65	769.36	667.22	1,904.16	896.55	769.26	667.12
4	2,104.76	952.29	805.96	689.55	2,104.55	952.05	805.77	689.37	2,104.49	951.99	805.70	689.31
3.5	2,309.94	999.02	831.59	699.80	2,309.79	998.88	831.47	699.70	2,309.75	998.84	831.43	699.67
3	2,520.26	1,035.31	844.27	695.86	2,520.18	1,035.24	844.21	695.83	2,520.16	1,035.22	844.20	695.82
2.5	2,735.83	1,058.67	840.91	674.57	2,735.72	1,058.65	840.85	674.55	2,735.72	1,058.65	840.85	674.55
2	2,956.80	1,065.66	817.04	631.46	2,956.68	1,065.72	817.02	631.46	2,956.67	1,065.72	817.01	631.45
1.5	3,183.28	1,051.09	765.70	559.73	3,183.32	1,051.25	765.62	559.74	3,183.32	1,051.25	765.62	559.74
1	3,415.43	1,006.29	674.25	447.73	3,415.03	1,006.43	674.25	447.74	3,415.03	1,006.43	674.25	447.74
0.5	3,653.39	914.29	512.63	270.90	3,652.45	914.21	512.56	270.90	3,652.45	914.21	512.56	270.90

備考：解析解との相対的な誤差が0.15%以上の値には**を、0.1%以上0.15%未満の値には*を付した。

表7 ペイヤーズ・スワップション価格（スマイルあり）（単位 bp）

満期	解析解				本稿の手法に基づく数値解							
					積分1回				積分複数回			
	ストライク				ストライク				ストライク			
0%	4%	5%	6%	0%	4%	5%	6%	0%	4%	5%	6%	
9.5	152.57	97.49	85.29	76.03	152.57	97.49	85.29	76.03	152.57	97.49	85.29	76.03
9	308.95	193.96	168.92	149.91	308.82	193.88	168.88	149.91	308.82	193.88	168.88	149.91
8.5	469.24	289.09	250.54	221.27	469.08	289.00	250.48	221.27	469.08	289.00	250.48	221.27
8	633.54	382.52	329.76	289.70	633.34	382.40	329.66	289.70	633.34	382.40	329.66	289.70
7.5	801.95	473.86	406.14	354.73	801.78	473.74	406.04	354.75	801.77	473.74	406.04	354.75
7	974.56	562.62	479.16	415.83	974.43	562.52	479.07	415.86	974.43	562.52	479.06	415.86
6.5	1,151.49	648.28	548.25	472.39	1,151.41	648.20	548.16	472.44	1,151.41	648.20	548.16	472.43
6	1,332.85	730.20	612.72	523.70	1,332.76	730.11	612.59	523.79	1,332.76	730.10	612.59	523.79
5.5	1,518.74	807.65	671.78	568.93	1,518.69	807.60	671.67	569.04	1,518.68	807.60	671.66	569.04
5	1,709.27	879.77	724.48	607.13	1,709.22	879.76	724.38	607.25	1,709.21	879.75	724.38	607.25
4.5	1,904.57	945.51	769.67	637.11	1,905.28	945.47	769.59	637.26	1,905.28	945.46	769.58	637.25
4	2,104.76	1,003.58	805.96	657.48	2,106.21	1,004.91*	806.04	657.59	2,106.20	1,004.91*	806.04	657.58
3.5	2,309.94	1,052.39	831.59	666.46	2,311.73	1,054.03**	831.69	666.57	2,311.72	1,054.03**	831.69	666.57
3	2,520.26	1,089.90	844.27	661.79	2,521.19	1,090.86	844.39	661.91	2,521.18	1,090.86	844.39	661.91
2.5	2,735.83	1,113.35	840.91	640.46	2,736.96	1,114.56*	841.02	640.57	2,736.96	1,114.56*	841.02	640.57
2	2,956.80	1,118.93	817.04	598.21	2,957.80	1,120.15*	817.11	598.32	2,957.80	1,120.15*	817.11	598.32
1.5	3,183.28	1,100.83	765.70	528.62	3,184.42	1,101.88	765.74	528.72	3,184.42	1,101.88	765.74	528.72
1	3,415.43	1,049.26	674.25	420.70	3,416.52	1,050.49*	674.36	420.77	3,416.52	1,050.49*	674.36	420.77
0.5	3,653.39	944.44	512.63	251.54	3,654.68	945.55*	512.73	251.58	3,654.68	945.55*	512.73	251.58

備考：解析解との相対的な誤差が0.15%以上の値には**を、0.1%以上0.15%未満の値には*を付した。

めて算出した値である。

表4～表7の本稿の手法に基づく数値解の中で、解析解との相対的な誤差が0.15%以上の値には**を、0.1%以上0.15%未満の値には*を付した。表4～表7で*や**のついた値の個数は比較的少ないうえ、いずれの値も相対的な誤差は0.2%未満であり、本稿のマルコフ関数モデルのフィッティング精度の高さを示すことができた。特に、「積分複数回」の条件付期待値を繰り返し求める方法は、後述のパミュードン・オプション価格の算出方法と概ね同じであり、「積分複数回」の誤差の大きさは、パミュードン・オプション価格の計算誤差に対する1つの参考値になると考えられる。

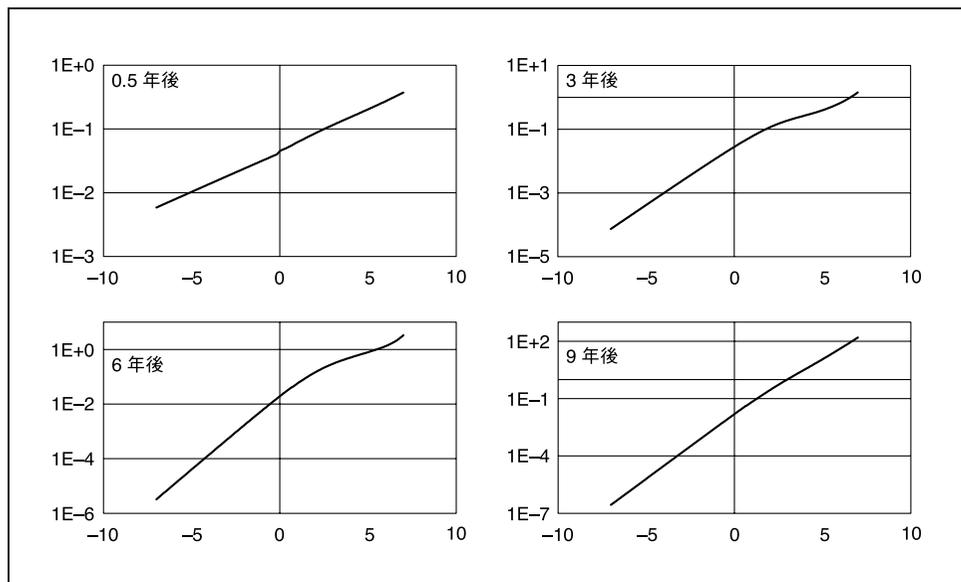
なお、計算誤差の大きさは、フィッティングするオプションのインプライド・ボラティリティと正の相関があることがわかる。ここで用いたインプライド・ボラティリティの約50%という値は、この市場における平均的なインプライド・ボラティリティを大きく上回る値であるから、平均的なインプライド・ボラティリティを用いる場合はさらに高精度の価格計算が期待できる。

また、キャブレットとスワップションの価格算出過程で、時刻 T_{i-1} のLIBORの関数 $L_{T_{i-1},i-1,i}(x)$ とスワップレートの関数 $L_{T_{i-1},i-1,M}(x)$ を算出した。図5から図8は、横軸に状態変数（ただし時間の平方根で除して規格化した値）をとって、それらの金利を表示している。各図は対数目盛を使用しているため、LIBOR、スワップレートが対数正規分布に従う場合にグラフが直線となり、その傾きがインプライド・ボラティリティを表すこととなる。

図5と図7のスマイルを考慮しない場合についても、本稿で提案する手法で求めたLIBOR、スワップレートは対数正規分布に従わず、グラフは直線にはならない。状態変数 x が正規分布に従っていることとスワップレートを求める関数 $\hat{L}(\hat{x})$ が区分的な指数関数であることを勘案すると、LIBOR、スワップレートが対数正規分布に従わない理由として以下の2つを挙げることができる。1つ目は、スワップレートを求める関数 $\hat{L}(\hat{x})$ には変換された状態変数 \hat{x} を用いており、通常 \hat{x} は正規分布には従わないということである。最大満期 T_M の直前のLIBORについては(17)式より $\hat{x} = x$ となり正規分布に従うことになる。実際、図5、図7でも満期に近い9年後のLIBORのグラフは他のグラフよりも直線に近い。2つ目は、スワップレートを求める関数 $\hat{L}(\hat{x})$ は区分的な指数関数であり、1つの指数関数で表現できていない点である。この点は、本稿で提案する手法では、デジタル・スワップション価格をスワップション価格の差分から求めていることにも関係している。本稿で提案する手法を用いても、所与とするスワップション価格のストライクの個数を増やせば、LIBOR、スワップレートを対数正規分布に近づけることは可能である。

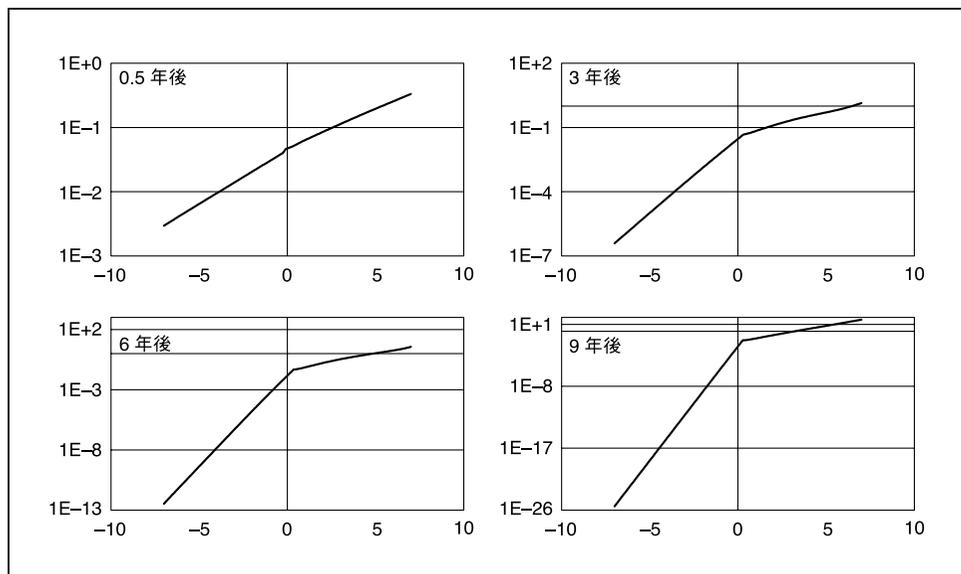
また、図6、図8のスマイルを考慮する場合については、状態変数が負の領域で傾きが大きく、正の領域で傾きが小さい傾向があることがわかり、その傾向はオプション満期 T_{i-1} が遠いほど顕著になることがわかる。こうした傾向が観察される理由は、フィッティングするキャブレットまたはスワップションのインプライド・ボラティリティ（表3）を、低（高）いストライクで相対的に高（低）い値としたた

図5 LIBOR関数 $L_{T_{i-1}, i-1, i}(x)$ (スマイルなし)



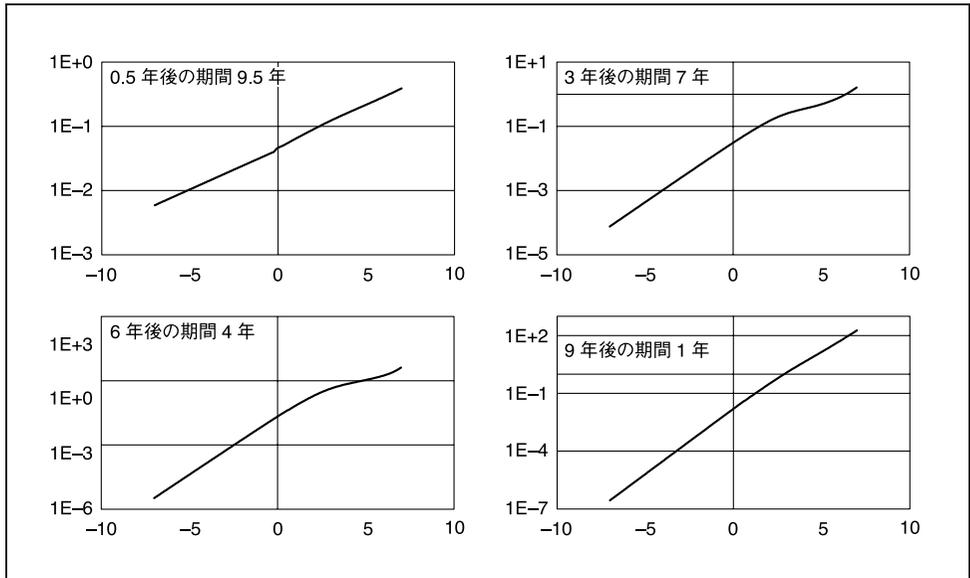
備考：横軸が状態変数を時刻の平方根で割った値、縦軸が6MのLIBOR。

図6 LIBOR関数 $L_{T_{i-1}, i-1, i}(x)$ (スマイルあり)



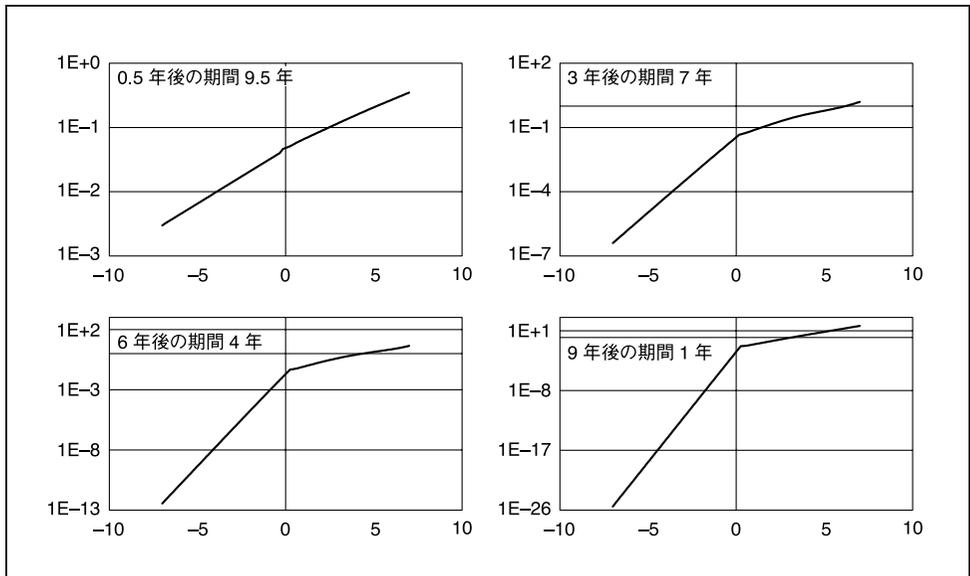
備考：横軸が状態変数を時刻の平方根で割った値、縦軸が6MのLIBOR。

図7 スワップレート関数 $L_{T_{i-1}, i-1, M}(x)$ (スマイルなし)



備考：横軸が状態変数を時刻の平方根で割った値、縦軸がスワップレート。

図8 スワップレート関数 $L_{T_{i-1}, i-1, M}(x)$ (スマイルあり)



備考：横軸が状態変数を時刻の平方根で割った値、縦軸がスワップレート。

めである。また、この傾向が遠いオプション満期ほど顕著になる理由は、4%、5%、6%と1%という一定量の刻みのストライクに対してそれぞれ固定のインプライド・ボラティリティを想定しているためと考えられる。これにより、遠いオプション満期ほど状態変数の標準偏差対比では強い傾きのボラティリティ・スマイルを想定していることになるためである。

(2) バミューダン・スワップション価格の算出

次に、フィッティング対象として、4節(1)と同様にキャプレットまたはスワップションの市場価格を採用し、本稿で提案した手法により、バミューダン型のペイヤーズ・スワップション価格を算出する。

価格付けの対象とするバミューダン型スワップションの年限は、表8の第1列のような形式で表すこととする。例えば、「3NC1」は、オプション行使が当初の1年間はできないが(non-call)、その後は半年間隔(すなわち1年後、1.5年後、2年後、2.5年後)で行使が可能であり、行使した場合に開始される金利スワップの期間は初期時点から3年後までである(すなわち t 年後にオプション行使した場合 $(3-t)$ 年の期間のスワップ)ということを示している。

評価期間は、バミューダン型のスワップションの年限に応じて設定し(例えば「3NC1」の場合は3年)、市場データとしては任意の年限のゼロレートが5%で一定であると設定した。

表8 バミューダン型のペイヤーズ・スワップション価格(単位 bp)

	マルコフ関数モデル	LIBOR マーケット・モデル + LSMC
2NC1	29.52	29.40
3NC1	64.19	63.89
4NC1	102.30	101.80
4NC3	44.24	43.92
5NC1	142.90	142.31
5NC3	90.24	89.55
6NC1	185.24	184.52
6NC3	137.28	136.29
6NC5	51.16	51.22
7NC1	228.87	227.50
7NC3	184.99	183.26
7NC5	102.64	102.66
8NC1	273.33	271.93
8NC3	233.00	230.86
8NC5	154.11	154.13
8NC7	54.49	54.20

イ. キャブレットにフィッティングした場合

まず、フィッティング対象のキャブレットのインプライド・ボラティリティがすべての年限について 15% で一定であるとして、バミューダン型のペイヤーズ・スワップション（ストライクは 5.06978%³⁵）の価格を算出した。結果は、表 8 の「マルコフ関数モデル」の欄に示した。同表には、LIBOR マーケット・モデルに最小二乗モンテカルロ法を適用して同じスワップション価格を算出した結果（LSMC）も示した³⁶。

一般には、対数正規型の LIBOR マーケット・モデルをシングルファクターのマルコフ関数モデルで表すことはできないうえ³⁷、これら 2 つのモデルのフィッティングを同じ市場データに基づき行っても、バミューダン・スワップションの算出価格は、必ずしも等しくならない。ただし、表 8 をみると、両モデルの間の評価の差異は、実務上許容可能な程度に小さいことがわかる。こうした点は、Bennett and Kennedy [2005] 等の先行研究でも指摘されていたが、本稿で新たに提案したマルコフ関数モデルについても同様であることが表 8 によって確認された。現在比較的普及している LIBOR マーケット・モデルによる評価との類似性は、マルコフ関数モデルを LIBOR マーケット・モデルと併用していくうえで、両者の整合性が保持される可能性が高いことを意味し、マルコフ関数モデルの利点の 1 つであると考えられる。

ロ. スワップションにフィッティングした場合

次に、スワップションにフィッティングした場合のバミューダン・スワップション価格を算出する。ここで、スワップションのインプライド・ボラティリティはすべての年限について等しいとし、表 9 のような 4 通りの設定を考える。表 9 の各設定のうち、A はスマイルを考慮するケースであり、B、C、D はスマイルを考慮しないケースである。各ケースについて、4NC1 および 8NC5 のバミューダン・スワップション価格の算出結果を表 10 と表 11 に示した。

表 10、表 11 をみると、スマイルを考慮した A の場合の価格は、ストライク 4%、5.06978%、6% で、それぞれ D、C、B の同じストライクの価格と類似した値となっていることがわかる。この結果は、表 9 の A のスマイル構造がストライク 4%、5.06978%、6% でそれぞれ D、C、B のインプライド・ボラティリティと同じに設定されていたことと整合的である。

35 ここでの市場価格のパラメータは Pietersz, Pelsser, and Regenmortel [2004] を参考にした。ただし、表 8 のバミューダン・スワップション価格は、筆者が自ら再計算した値であり、Pietersz, Pelsser, and Regenmortel [2004] の値とは若干異なっている。

36 ここでのモンテカルロ法では、金利の確率の変動を 0.5 年の時間間隔で離散化し、50,000 回のシミュレーションを行った。各早期行使可能時刻においてオプションを行使しない場合の価値は、最小二乗モンテカルロ法により 2 次多項式を用いて推定し、その結果に基づき早期行使の成否について判定を行った。

37 Hunt, Kennedy, and Pelsser [2000] を参照。

表9 スワップションのインプライド・ボラティリティ

ストライク	4%	5.06978%	6%
A	20%	15%	12.5%
B	12.5%	12.5%	12.5%
C	15%	15%	15%
D	20%	20%	20%

表10 バミューダン・スワップション算出価格 (4NC1) (単位 bp)

ストライク	4%	5.06978%	6%
A	310.42	105.78	20.43
B	292.12	86.23	21.51
C	297.29	103.15	33.96
D	311.37	136.82	62.77

表11 バミューダン・スワップション算出価格 (8NC5) (単位 bp)

ストライク	4%	5.06978%	6%
A	321.47	153.80	61.71
B	266.13	128.42	63.11
C	283.09	154.12	87.55
D	319.68	204.98	138.40

ケース A のようにスマイルがある場合のバミューダン・スワップションについては、算出価格の水準の正確性を厳密に評価するのは容易ではない³⁸。ただ、本稿で採用したマルコフ関数モデルは、市場価格との整合性が高く、広い範囲の金利オプションに適用可能なモデルであるため、特定のオプションに関して恣意的な価格付けを行いにくいという利点もあり、本節のような数値検証を行いながらモデルの実装を進めれば、実務的に利用可能なツールとなると考えられる。

5. おわりに

本稿では、まず、マルコフ関数モデルを用いた金利オプションの価格付けに関する先行研究のサーベイを行い、各手法の特徴等を整理した。具体的には、状態変数を低次元のマルコフ過程として定義する一方で、状態変数の関数形を柔軟に与えることにより、市場で観察されるボラティリティ・スマイルに適合可能なマルコフ関数モデルを構築できることを示した。また、シングルファクターのブラウン運動に

38 マルコフ関数モデルによる価格付けの結果を評価するには、他の信頼度の高いモデルによる価格付けの結果と比較を行うことが考えられる。その一例としては、スマイルがある場合にも対応可能なように LIBOR マーケット・モデルを拡張し（例えば、確率的ボラティリティ変動モデルへの拡張）、そのモデルに表9の市場データを適用して価格付けを行うことが有益であろう。ただし、こうした拡張は本研究の範囲を超えるため、本稿では扱わない。

従う状態変数を利用すれば、オプション価格の評価に必要な条件付期待値の計算が容易になり、早期行使権のあるオプション価格に対しても効率的な計算が可能になることを示した。

そのうえで、**Hunt, Kennedy, and Pelsser [2000]**等の先行研究がノンパラメトリックに関数形をフィッティングさせる際に置いていた仮定、すなわちデジタル・スワップション価格の関数がストライクにつき連続的で1階微分可能であるとの前提を緩和し、実際に市場で観察される離散的なストライクのスワップション価格と無裁定条件だけを前提としてボラティリティ・スマイルに対応可能な簡潔なフィッティング手法を提案した。

また、提案した方法に基づく計算例を示したうえで、条件付期待値の計算等に伴う数値誤差は小さいことを確認した。さらに、早期行使権のあるバミューダン型のスワップション価格の算出例を示し、**LIBOR** マーケット・モデルと最小二乗モンテカルロ法を組み合わせることで評価した結果との比較等を行うことで、本手法の妥当性を確かめた。

今後さらに実用化を進めていくうえでの課題としては、①評価対象の金利オプション価格について原資産の金利やボラティリティに関する感応度（デルタ、ベガ等の Greeks）を算出すること、②スプレッド・オプションや金利・為替等のハイブリッド商品の価格付けにも対応可能なマルチファクター・モデルへ拡張すること、③複数のフィッティング対象の金利オプションが存在する際に、状態変数に対してより柔軟な確率過程を想定することで同時フィッティングを可能にすること等が挙げられる。

参考文献

- 岡野豊明、「アメリカン・オプション最小二乗モンテカルロ法の精度評価」、『ユニシス技報』第24巻第4号、2005年、487～505頁
- 木島正明・田中敬一、『資産の価格付けと測度変換』、朝倉書店、2007年
- 村上秀記、「Markov Functional Interest Rate Model の解明」、一橋大学大学院修士論文、2007年
- Bennett, Michael, and Joanne Kennedy, “A Comparison of Markov-Functional and Market Models: The One-Dimensional Case,” *The Journal of Derivatives*, 13 (2), 2005, pp. 22–43.
- Black, Fischer, “The Pricing of Commodity Contracts,” *Journal of Financial Economics*, 3 (1–2), 1976, pp. 167–179.
- Brace, Alan, Dariusz Gatarek, and Marek Musiela, “The Market Model of Interest Rate Dynamics,” *Mathematical Finance*, 7 (2), 1997, pp. 127–155.
- Cox, John, Jonathan Ingersoll, and Stephen Ross, “A Theory of the Term Structure of Interest Rates,” *Econometrica*, 53 (2), 1985, pp. 385–407.
- Fries, Christian, *Mathematical Finance: Theory, Modeling, Implementation*, Wiley, 2007.
- , and Fabian Eckstaedt, “A Hybrid Markov-Functional Model with Simultaneous Calibration to Interest Rate and FX Smile,” Working Paper, 2006.
- , and Marius Rott, “Cross-Currency and Hybrid Markov-Functional Models,” Working Paper, 2004.
- Hagan, Patrick, “Evaluating and Hedging Exotic Swap Instruments via LGM,” Bloomberg Technical Report, 2009.
- Hull, John, and Alan White, “Pricing Interest Rate Derivative Securities,” *The Review of Financial Studies*, 3 (4), 1990, pp. 573–592.
- Hunt, Phil, and Joanne Kennedy, *Financial Derivatives in Theory and Practice*, Wiley, 2000.
- , and ———, “Longstaff-Schwartz, Effective Model Dimensionality and Reducible Markov-Functional Models,” Working Paper, 2005.
- , ———, and Antoon Pelsser, “Markov-Functional Interest Rate Models,” *Finance and Stochastics*, 4 (4), 2000, pp. 391–408.
- Jamshidian, Farshid, “LIBOR and Swap Market Models and Measures,” *Finance and Stochastics*, 1 (4), 1997, pp. 293–330.
- Johnson, Simon, “Numerical Methods for the Markov Functional Model,” *Wilmott Magazine*, January, 2006, pp. 68–75.
- Kaisajuntti, Linus, and Joanne Kennedy, “An n -Dimensional Markov-Functional Interest Rate Model,” Working Paper, 2008.

- Longstaff, Francis, and Eduardo Schwartz, “Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach,” *Review of Financial Studies*, 14 (1), 2001, pp. 113–147.
- Pelsser, Antoon, *Efficient Methods for Valuing Interest Rate Derivatives*, Springer, 2000.
- Pietersz, Raoul, and Antoon Pelsser, “A Comparison of Single Factor Markov-Functional and Multi Factor Market Models,” Working Paper, 2005.
- , ———, and Marcel van Regenmortel, “Fast Drift-Approximated Pricing in the BGM Model,” *Journal of Computational Finance*, 8 (1), 2004, pp. 93–124.
- Rebonato, Riccardo, Kenneth McKay, and Richard White, *The SABR/LIBOR Market Model*, Wiley, 2009.

補論 1. デジタル・スワップションの理論価格

本論の(6)式から、ストライク K のデジタル・スワップションの理論価格 $D_{i,j}^{\text{model}}(K)$ を求める。

まず、ターミナル測度での期待値を用いて、

$$\begin{aligned} D_{i,j}^{\text{model}}(K) &= B_{0,M} E \left[\frac{\sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{T_i,k}(x) 1_{\{L_{T_i,i,j}(x) > K\}}}{B_{T_i,M}(x)} \right] \\ &= B_{0,M} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{T_i,k}(x)}{B_{T_i,M}(x)} 1_{\{L_{T_i,i,j}(x) > K\}} n_{\sigma_X^2(0,T_i)}(x) dx, \end{aligned}$$

となる。本論の(6)式を代入し、本論の(15)式に示した $\hat{x} = \hat{H}_{0,T_i,i+1,j}(0,x)$ の変数変換をすれば、

$$\begin{aligned} D_{i,j}^{\text{model}}(K) &= \sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k} \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\{D_{i,j}^{\text{market}^{-1}}(\sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k} N_{\sigma_X^2(0,T_i)}(-\hat{x})) > K\}} n_{\sigma_X^2(0,T_i)}(\hat{x}) d\hat{x}, \end{aligned}$$

となる。ここで、デジタル・スワップションの市場価格の関数 $D_{i,j}^{\text{market}}(K)$ は、無裁定条件を満たすとすれば、 $\sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k}$ 未満の正值で狭義単調減少な連続関数となる³⁹。したがって、 $D_{i,j}^{\text{market}^{-1}}(\cdot)$ についても、狭義単調減少関数となり、

$$\begin{aligned} D_{i,j}^{\text{model}}(K) &= \sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k} \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\left\{ N_{\sigma_X^2(0,T_i)}(-\hat{x}) < \frac{D_{i,j}^{\text{market}}(K)}{\sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k}} \right\}} n_{\sigma_X^2(0,T_i)}(\hat{x}) d\hat{x} \\ &= D_{i,j}^{\text{market}}(K), \end{aligned}$$

が成立する。したがって、本論の(6)式の $L_{T_i,i,j}(x)$ は、デジタル・スワップションの理論価格 $D_{i,j}^{\text{model}}(K)$ と市場価格 $D_{i,j}^{\text{market}}(K)$ を一致させる性質を持つことが確認された。

³⁹ $D_{i,j}^{\text{market}}(K)$ に不連続な点が存在すれば、その点で、 $D_{i,j}^{\text{market}}(K)$ の1階微分から導出されるスワップレート
の確率密度関数の絶対値が無限大となる。 $D_{i,j}^{\text{market}}(K)$ の1階微分が非負となる領域では、スワップレ
ートの確率密度関数が正にはならない。これらの場合、複数のストライクのデジタル・スワップションを組
み合わせれば、裁定取引が可能となる。

補論 2. ボラティリティ・スマイルがない場合のノンパラメトリックなフィッティング方法

ボラティリティにスマイルがない場合のスワップション市場価格に、2節(5)イ.の Hunt, Kennedy, and Pelsser [2000] 等のノンパラメトリックなフィッティングを適用する方法について概説する。

スマイルがない場合は、ブラック・モデルを用いて、デジタル・スワップション価格 $D_{i,j}^{\text{market}}(K)$ を表せるため、まず、本論の(6)式からスワップレートの関数 $L_{T_i,i,j}(x)$ を求める。次に、この方法で求めた $L_{T_i,i,j}(x)$ を用いてペイヤーズ・スワップションの理論価格を算出し、市場価格と等しくなることを確認する。また、この $L_{T_i,i,j}(x)$ からフォワード・キャブレット価格を算出すると、対数正規分布に従うフォワード LIBOR からの算出価格と異なることから、ここでのマルコフ関数モデルによるフォワード LIBOR の確率過程は対数正規型の LIBOR マーケット・モデルのフォワード LIBOR の確率過程と異なることを示す。

以下、表記の簡略化のために、状態変数の標準偏差 σ_t を 1 として説明する。1 とは異なる σ_t を適用する場合も、本節と同様の導出が可能である。

(1) 関数 $L_{T_i,i,j}(x)$ の導出

原資産がフォワード・スワップレート $L_{t,i,j}$ であるスワップションについてインプライド・ボラティリティが一定値 $\sigma_{i,j}$ である場合に時刻 T_i での関数 $L_{T_i,i,j}(x)$ を導出する。ストライクに依存しない一定のインプライド・ボラティリティが所与であれば、任意のストライクのデジタル・スワップション価格を算出できるため、先行研究のノンパラメトリックな方法を適用して具体的な関数 $L_{T_i,i,j}(x)$ を求めることができる。

インプライド・ボラティリティが一定の場合、ブラック・モデルを用いて、ストライク K のデジタル・スワップション価格 $D_{i,j}^{\text{market}}(K)$ を求めると

$$\begin{aligned} D_{i,j}^{\text{market}}(K) &= \sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k} N_1 \left(\frac{\ln \frac{L_{0,i,j}}{K} - \frac{1}{2} \sigma_{i,j}^2 T_i}{\sigma_{i,j} \sqrt{T_i}} \right) \\ &= N_{T_i} \left(\frac{\ln \frac{L_{0,i,j}}{K} - \frac{1}{2} \sigma_{i,j}^2 T_i}{\sigma_{i,j}} \right) \sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k}, \end{aligned}$$

となる。この $D_{i,j}^{\text{market}}(K)$ の逆関数は、

$$D_{i,j}^{\text{market}^{-1}}(u) = L_{0,i,j} \exp \left\{ -\sigma_{i,j} N_{T_i}^{-1} \left(\frac{u}{\sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k}} \right) - \frac{1}{2} \sigma_{i,j}^2 T_i \right\},$$

となり、本論の (6) 式に適用すると

$$L_{T_i,i,j}(x) = L_{0,i,j} \exp \left\{ -\sigma_{i,j} N_{T_i}^{-1} \left(\int_x^{+\infty} H_{T_i,i+1,j}(u) n_{T_i}(u) du \right) - \frac{1}{2} \sigma_{i,j}^2 T_i \right\}, \quad (\text{A-1})$$

となる。平均 0、分散 t の正規分布に従う確率変数 x を平均 $L_{0,i,j}$ 、分散パラメータ $\sigma_{i,j}^2 t$ の対数正規分布に従う確率変数に変換する関数を

$$\bar{L}_{t,i,j}(x) = L_{0,i,j} e^{\sigma_{i,j} x - \frac{1}{2} \sigma_{i,j}^2 t},$$

とすれば、本論の (17) 式の $\hat{H}_{t,s,i,j}(x', x)$ を用いて、 $H_{0,i,j}(0) = 1$ より、

$$L_{T_i,i,j}(x) = \bar{L}_{T_i,i,j}(\hat{H}_{0,T_i,i+1,j}(0, x)), \quad (\text{A-2})$$

となる。

(2) ペイヤーズ・スワップションのモデルによる理論価格

(A-2) 式から、ストライク K のペイヤーズ・スワップションのモデルによる理論価格 $C_{i,j}^{\text{model}}(K)$ を求める。本論の (2) 式から、 $C_{i,j}^{\text{model}}(K)$ は

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{\text{model}}(K) &= B_{0,M} E \left[\frac{\max(0, \sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{T_i,k}(X_{T_i})(L_{T_i,i,j}(X_{T_i}) - K)}{B_{T_i,M}(X_{T_i})} \right] \\ &= \sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(0, L_{T_i,i,j}(x) - K) H_{T_i,i+1,j}(x) n_{T_i}(x) dx, \end{aligned}$$

となり、 $\hat{x} = \hat{H}_{0,T_i,i+1,j}(0, x)$ で変数変換すれば、 $H_{0,i,j}(0) = 1$ と (A-2) 式より、

$$C_{i,j}^{\text{model}}(K) = \sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(0, \bar{L}_{T_i,i,j}(\hat{x}) - K) n_{T_i}(\hat{x}) d\hat{x},$$

となる。算出された理論価格は、任意のストライクでインプライド・ボラティリティが $\sigma_{i,j}$ のペイヤーズ・スワップション価格と等しい。

特に、ストライク 0% のペイヤーズ・スワップション価格は、

$$C_{i,j}^{\text{model}}(0) = \sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k} L_{0,i,j} = B_{0,i} - B_{0,j},$$

であり、(A-1) 式は初期時点のイールドカーブ $L_{0,i,j}$ と整合的な関数である。

(3) フォワード・キャブレット価格による比較

ストライクを K とし、時刻 T_i のペイオフが $\max(0, L_{t,i-1,i} - K)$ となるオプションをフォワード・キャブレットと呼ぶこととする。ここで、時刻 t は、時刻 T_{i-1} 以前の時刻である。(A-2) 式の関数 $L_{T_i,i-1,i}(x)$ を用いて算出されたオプション満期を t とするフォワード・キャブレット価格は、割引債 $B_{t,i}$ を基準財とする確率測度で平均 $L_{0,i-1,i}$ 、分散パラメータ $\sigma_{i-1,i}^2$ t の対数正規分布に従う $L_{t,i-1,i}$ から算出された価格とは、必ずしも等しくならないことを示す。

まず、(A-2) 式から関数 $L_{t,i-1,i}(x)$ を求める。 $H_{t,i-1,i-1}(x)$ 、 $H_{t,i,i}(x)$ 、 $L_{t,i-1,i}(x)$ には

$$B_{0,i-1} H_{t,i-1,i-1}(x) = (1 + \delta_i L_{t,i-1,i}(x)) B_{0,i} H_{t,i,i}(x), \quad (\text{A-3})$$

の関係が成り立つ。本論の (7) 式より、 $H_{t,i,j}(x)$ は、割引債価格の線形和を基準財価格で除した値であることから、 $t < s$ として、本論の (2) 式を $H_{t,i,j}(x)$ に適用すると、

$$H_{t,i,j}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{s,i,j}(u) n_{\sigma_X^2(t,s)}(u-x) du, \quad (\text{A-4})$$

となる。これらの式を用いて、 $L_{t,i-1,i}(x)$ は

$$\begin{aligned} L_{t,i-1,i}(x) &= \frac{1}{\delta_i} \left(\frac{B_{0,i-1} H_{t,i-1,i-1}(x)}{B_{0,i} H_{t,i,i}(x)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\delta_i} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \delta_i L_{T_{i-1},i-1,i}(u)) \frac{H_{T_{i-1},i,i}(u)}{H_{t,i,i}(x)} n_{T_{i-1}-t}(u-x) du - 1 \right), \end{aligned}$$

となり、(A-2) 式および $\int_{-\infty}^{+\infty} H_{T_{i-1},i,i}(u) n_{T_{i-1}-t}(u-x) du = H_{t,i,i}(x)$ より、

$$L_{t,i-1,i}(x) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{L}_{T_{i-1},i-1,i}(\hat{H}_{0,T_{i-1},i,i}(0,u)) H_{T_{i-1},i,i}(u) n_{T_{i-1}-t}(u-x) du}{H_{t,i,i}(x)}, \quad (\text{A-5})$$

となる。

一方、(A-5) 式とは異なる

$$\begin{aligned} L'_{t,i-1,i}(x) &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{L}_{T_{i-1},i-1,i}(\hat{H}_{t,T_{i-1},i,i}(\hat{H}_{0,t,i,i}(0,x),u)) H_{T_{i-1},i,i}(u) n_{T_{i-1}-t}(u-\hat{H}_{0,t,i,i}(0,x)) du}{H_{t,i,i}(\hat{H}_{0,t,i,i}(0,x))}, \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

から、フォワード・キャブレット価格を計算すると

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \max(0, L'_{t,i-1,i}(x) - K) H_{t,i,i}(x) n_t(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \max\left(0, \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{L}_{T_{i-1},i-1,i}(\hat{H}_{t,T_{i-1},i,i}(\hat{x}, u)) H_{T_{i-1},i,i}(u) n_{T_{i-1}-t}(u - \hat{x}) du}{H_{t,i,i}(\hat{x})} - K\right) \\
 & \quad \times n_t(\hat{x}) d\hat{x} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \max\left(0, \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{L}_{T_{i-1},i-1,i}(\hat{u}) n_{T_{i-1}-t}(\hat{u} - \hat{x}) d\hat{u} - K\right) n_t(\hat{x}) d\hat{x} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \max(0, \bar{L}_{t,i-1,i}(\hat{x}) - K) n_t(\hat{x}) d\hat{x},
 \end{aligned}$$

となる。したがって、関数 $L'_{t,i-1,i}(x)$ を用いて算出されたフォワード・キャブレット価格は、任意のストライクで、割引債 $B_{t,i}$ を基準財とする確率測度で、平均 $L_{0,i-1,i}$ 、分散パラメータ $\sigma_{i-1,i}^2 t$ の対数正規分布に従うフォワード LIBOR $L_{t,i-1,i}(x)$ から算出された価格となる。

(A-5) 式と (A-6) 式は異なることから、(A-5) 式の $L_{t,i-1,i}(x)$ から算出されるフォワード・キャブレット価格は、任意のストライクで、関数 $L'_{t,i-1,i}(x)$ を用いて算出された価格とは、必ずしも等しくはならない。

ボラティリティが定数の LIBOR マーケット・モデルによるフォワード・キャブレット価格は、任意のオプション満期で、適切な確率測度で対数正規分布に従うフォワード LIBOR から算出された価格と等しくなる。よって、スマイルのないキャブレット価格にフィッティングした関数 $L_{t,i-1,i}(x)$ で示されるマルコフ関数モデルは、オプション満期 t ($< T_{i-1}$) のフォワード・キャブレット価格という観点において、LIBOR マーケット・モデルとは異なるモデルであると考えられる。

補論 3. 関数 $L_{T_i,i,j}(x)$ の算出手順

本論の (6) 式や (16) 式のような形式で導出された時刻 T_i のスワップレートの関数 $L_{T_i,i,j}(x)$ は、 $i = M - 1$ 、 $j = M$ の場合を除いて、異なる年限のフォワード・スワップレートの関数に依存する。異なる年限のフォワード・スワップレートの関数に依存しない関数に変形するためには、バックワードにスワップレートの関数を算出し、条件付期待値の計算を繰り返す必要がある。ここでは、キャブレットへのフィッティングの場合とスワップションへのフィッティングの場合の 2 通りについて、それぞれ、計算手順を説明する。

キャブレットへのフィッティングについては、オプション満期が T_0, T_1, \dots, T_{M-1} 、原資産が $L_{t,0,1}, L_{t,1,2}, \dots, L_{t,M-1,M}$ のキャブレットの市場価格を所与として説明する。これらの市場価格から、本論の (6) 式や (16) 式のような形式で関数 $L_{T_0,0,1}(x)$ 、 $L_{T_1,1,2}(x), \dots, L_{T_{M-1},M-1,M}(x)$ を求めることができる。ここでの $L_{T_i,i,i+1}(x)$ には、 $H_{T_i,i+1,i+1}(x)$ が含まれる。(A-4) 式を用いると $H_{T_{i+1},i+1,i+1}(x)$ から $H_{T_i,i+1,i+1}(x)$ を求めることができる。(A-3) 式を用いると $H_{T_{i+1},i+2,i+2}(x)$ と $L_{T_{i+1},i+1,i+2}(x)$ から $H_{T_{i+1},i+1,i+1}(x)$ を求めることができる。よって、 $H_{T_{M-1},M,M} = 1$ よりバックワードに計算すると、

$$\begin{aligned} H_{T_{M-1},M,M} = 1 &\rightarrow (6) \text{ または } (16) \rightarrow L_{T_{M-1},M-1,M} \\ &\rightarrow (A-3) \rightarrow H_{T_{M-1},M-1,M-1} \rightarrow (A-4) \rightarrow \\ H_{T_{M-2},M-1,M-1} &\rightarrow (6) \text{ または } (16) \rightarrow L_{T_{M-2},M-2,M-1} \\ &\rightarrow (A-3) \rightarrow H_{T_{M-2},M-2,M-2} \rightarrow (A-4) \rightarrow \\ H_{T_{M-3},M-2,M-2} &\rightarrow (6) \text{ または } (16) \rightarrow L_{T_{M-3},M-3,M-2} \\ &\rightarrow (A-3) \rightarrow H_{T_{M-3},M-3,M-3} \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

の順に、異なる年限のフォワード・スワップレートの関数に依存しない $L_{T_0,0,1}(x)$ 、 $L_{T_1,1,2}(x), \dots, L_{T_{M-1},M-1,M}(x)$ を導出することができる。(6)、(16)、(A-3)、(A-4) は、計算に使用する式の番号である。

一方、スワップションへのフィッティングについては、オプション満期が T_0, T_1, \dots, T_{M-1} 、原資産が $L_{t,0,M}, L_{t,1,M}, \dots, L_{t,M-1,M}$ のスワップションの市場価格を所与として説明する。これらの市場価格から、本論の (6) 式や (16) 式のような形式で関数 $L_{T_0,0,M}(x), L_{T_1,1,M}(x), \dots, L_{T_{M-1},M-1,M}(x)$ を求めることができる。ここでの $L_{T_i,i,M}(x)$ には、 $H_{T_i,i+1,M}(x)$ が含まれる。(A-4) 式を用いると $H_{T_{i+1},i+1,M}(x)$ から $H_{T_i,i+1,M}(x)$ を求めることができる。また、 $H_{t,i+1,M}(x)$ 、 $L_{t,i,M}(x)$ 、 $H_{t,i,M}(x)$ の関係式の

$$H_{t,i,M}(x) = \frac{\delta_i B_{0,M} + (1 + \delta_i L_{t,i,M}(x)) H_{t,i+1,M}(x) \sum_{k=i+1}^M \delta_k B_{0,k}}{\sum_{k=i}^M \delta_k B_{0,k}}, \quad (\text{A-7})$$

により、 $H_{T_{i+1},i+2,M}(x)$ と $L_{T_{i+1},i+1,M}(x)$ から $H_{T_{i+1},i+1,M}(x)$ を求めることができる。よって、 $H_{T_{M-1},M,M} = 1$ よりバックワードに計算すると、

$$\begin{aligned} H_{T_{M-1},M,M} = 1 &\rightarrow (6) \text{ または } (16) \rightarrow L_{T_{M-1},M-1,M} \\ &\rightarrow (\text{A-7}) \rightarrow H_{T_{M-1},M-1,M} \rightarrow (\text{A-4}) \rightarrow \\ H_{T_{M-2},M-1,M} &\rightarrow (6) \text{ または } (16) \rightarrow L_{T_{M-2},M-2,M} \\ &\rightarrow (\text{A-7}) \rightarrow H_{T_{M-2},M-2,M} \rightarrow (\text{A-4}) \rightarrow \\ H_{T_{M-3},M-2,M} &\rightarrow (6) \text{ または } (16) \rightarrow L_{T_{M-3},M-3,M} \\ &\rightarrow (\text{A-7}) \rightarrow H_{T_{M-3},M-3,M} \rightarrow \cdots, \end{aligned}$$

の順に、異なる年限のフォワード・スワップレートの関数に依存しない $L_{T_0,0,M}(x)$, $L_{T_1,1,M}(x), \dots, L_{T_{M-1},M-1,M}(x)$ を導出することができる。(6)、(16)、(A-4)、(A-7) は、計算に使用する式の番号である。

なお、実際の (A-4) 式の条件付期待値の計算では、2 節(6)の近似多項式に関する解析的な積分方法を用いている。(A-4) 式は、無裁定価格付け理論の基本的な関係式である本論の (2) 式に基づいており、割引債価格についての無裁定条件は成り立っている。

補論 4. ペイヤーズ・スワップションの理論価格

本論の (16) 式を用いてペイヤーズ・スワップションの理論価格 $C_{i,j}^{\text{model}}(K)$ を算出する。本論の (15) 式で定義した $\hat{x} = \hat{H}_{0,T_i,i+1,j}(0, x)$ の変数変換をすることで

$$C_{i,j}^{\text{model}}(K_q) = \sum_{m=i+1}^j \delta_m B_{0,m} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(0, \hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x}) - K_q) n_{\sigma_{\hat{x}}^2(0,T_i)}(\hat{x}) d\hat{x},$$

となる。ここで、 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ が満たす等式 (本論の (22) 式) を用いれば

$$C_{i,j}^{\text{model}}(K_q) = \sum_{m=i+1}^j \delta_m B_{0,m} \left\{ \sum_{k=q}^Q y_k - K_q N_{\sigma_{\hat{x}}^2(0,T_i)}(-\hat{x}_q) \right\},$$

となる。さらに、 y_q の定義式 (本論の (23) 式) と \hat{x}_q と d_q の関係式 (本論の (21) 式) を用いれば、

$$C_{i,j}^{\text{model}}(K_q) = \sum_{m=i+1}^j \delta_m B_{0,m} \{L_{0,i,j} + p_q - K_q\},$$

となり、本論の (12) 式のプット・コール・パリテイより、

$$C_{i,j}^{\text{model}}(K_q) = C_{i,j}^{\text{market}}(K_q),$$

となる。したがって、市場価格と理論価格が一致することが確認された。

補論 5. \hat{x}_q 、 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ の具体例

本論の 3 節で示した性質を満たす \hat{x}_q 、 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ はいくつも存在するが、実際の金利デリバティブ価格の計算には、 \hat{x}_q 、 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ を特定化する必要がある。ここでは、その一例を示す。ここで提案する \hat{x}_q 、 $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ であれば、ペイヤーズ・スワップション価格が解析的に求まり、その計算に多変量の同時最適化は不要となるため、比較的安定した計算が期待できる。

$q = 1, 2, \dots, Q$ について、各区間での平均的なストライク $\bar{K}_{q-1,q}$ を

$$\bar{K}_{q-1,q} = \frac{K_{q-1} + K_q}{2},$$

と定義し、 $\bar{K}_{q-1,q}$ をストライクとするデジタル・スワップション価格を p_q と p_{q-1} の傾き

$$\bar{d}_{q-1,q} = \frac{p_q - p_{q-1}}{K_q - K_{q-1}},$$

で近似する。このデジタル・スワップション価格 $\bar{d}_{q-1,q}$ から求めた状態変数 $\bar{x}_{q-1,q}$ を

$$\bar{x}_{q-1,q} = N_{\sigma_{\hat{x}}^2(0, T_i)}^{-1} \left(1 + \frac{C_{i,j}^{\text{market}}(K_q) - C_{i,j}^{\text{market}}(K_{q-1})}{\sum_{k=i+1}^j \delta_k B_{0,k}(K_q - K_{q-1})} \right) = N_{\sigma_{\hat{x}}^2(0, T_i)}^{-1}(\bar{d}_{q-1,q}),$$

と定義する。このように定義された $\bar{K}_{q-1,q}$ 、 $\bar{x}_{q-1,q}$ を用いて、ストライクの対数と状態変数の空間での線形補間から、ストライク K_q のデジタル・スワップション価格 $\bar{d}_{q-1,q}$ に対応する状態変数 \hat{x}_q を

$$\hat{x}_q = \begin{cases} \frac{\bar{x}_{q-1,q}(\ln \bar{K}_{q,q+1} - \ln K_q) + \bar{x}_{q,q+1}(\ln K_q - \ln \bar{K}_{q-1,q})}{(\ln \bar{K}_{q,q+1} - \ln \bar{K}_{q-1,q})}, & q = 1, \dots, Q-1, \\ \frac{\bar{x}_{Q-2,Q-1}(\ln \bar{K}_{Q-1,Q} - \ln K_Q) + \bar{x}_{Q-1,Q}(\ln K_Q - \ln \bar{K}_{Q-2,Q-1})}{(\ln \bar{K}_{Q-1,Q} - \ln \bar{K}_{Q-2,Q-1})}, & q = Q, \end{cases}$$

で算出する。 K_q が狭義単調増加数列であることから、 p_q が本論の (13) 式を満たせば、

$$\bar{x}_{q-1,q} < \hat{x}_q < \bar{x}_{q,q+1}, \quad q = 1, 2, \dots, Q-1,$$

$$\bar{x}_{Q-1,Q} < \hat{x}_Q,$$

となり、この \hat{x}_q から本論の (21) 式で算出された d_q については、本論の (14) 式のような単調性が常に成り立つ。本稿で提案する \hat{x}_q の構成方法は以上のとおりである。

$\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ については、区間列 I_q 、閉区間列 J_q を

$$I_q = \begin{cases} (\hat{x}_q, \hat{x}_{q+1}], & q = 0, 1, \dots, Q-1, \\ (\hat{x}_Q, +\infty), & q = Q, \end{cases}$$

$$J_q = \begin{cases} (-\infty, \hat{x}_1] = I_0, & q = 0, \\ [\hat{x}_q, \hat{x}_{q+1}] = \hat{x}_q \cup I_q, & q = 1, 2, \dots, Q-1, \\ [\hat{x}_Q, +\infty) = \hat{x}_Q \cup I_Q, & q = Q, \end{cases}$$

で定義し、各 I_q で定義した関数 $\hat{L}_{T_i,i,j}^q(\hat{x})$ を用いて $\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x})$ が

$$\hat{L}_{T_i,i,j}(\hat{x}) = \sum_{q=0}^Q 1_{\{\hat{x} \in I_q\}} \hat{L}_{T_i,i,j}^q(\hat{x}),$$

のように表せるとして、各 q で独立に $\hat{L}_{T_i,i,j}^q(\hat{x})$ を求める。

$\hat{L}_{T_i,i,j}^q(\hat{x})$ の具体例として、(1) $q = 0$ の場合、(2) $q = Q$ の場合、(3) $q = 1, 2, \dots, Q-1$ の場合に分けて以下のような形になる区分的な指数関数を提案する。

(1) $q = 0$ の場合

$$\hat{L}_{T_i,i,j}^0(\hat{x}) = K_1 e^{a_0(\hat{x}-\hat{x}_1)},$$

として、本論の (22) 式、(23) 式を満たすよう a_0 を求める。

(2) $q = Q$ の場合

$$\hat{L}_{T_i,i,j}^Q(\hat{x}) = K_Q e^{a_Q(\hat{x}-\hat{x}_Q)},$$

として、本論の (22) 式、(23) 式を満たすよう a_Q を求める。

(3) $q = 1, 2, \dots, Q-1$ の場合

図 A-1 のように、 $x'_{q,q+1} \in (\hat{x}_q, \hat{x}_{q+1})$ について、 $\hat{L}_{T_i,i,j}^q(x'_{q,q+1})$ を

$$\hat{L}_{T_i,i,j}^q(x'_{q,q+1}) = \exp\left\{\frac{(x'_{q,q+1} - \hat{x}_q) \ln K_q + (\hat{x}_{q+1} - x'_{q,q+1}) \ln K_{q+1}}{\hat{x}_{q+1} - \hat{x}_q}\right\},$$

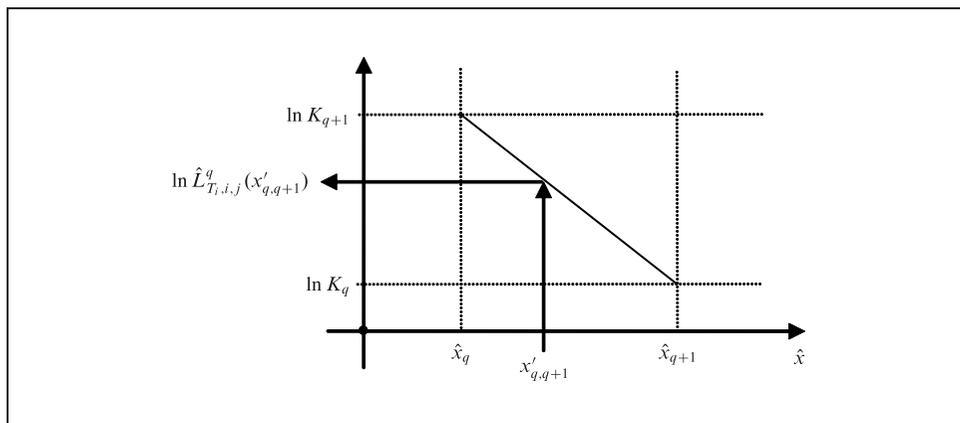
とし、 J_q で連続、かつ、本論の (22) 式、(23) 式を満たすよう

$$\hat{L}_{T_i,i,j}^q(\hat{x}_q) = K_q,$$

$$\hat{L}_{T_i,i,j}^q(\hat{x}_{q+1}) = K_{q+1},$$

$$\int_{\hat{x}_q}^{\hat{x}_{q+1}} \hat{L}_{T_i,i,j}^q(u) n_{\sigma_{\hat{x}}^2}(0, T_i)(u) du = K_{q+1} d_{q+1} - K_q d_q - p_{q+1} + p_q,$$

図 A-1 $\hat{L}_{T_i,i,j}^q(x'_{q,q+1})$ の算出方法



という3つの条件から、

$$\hat{L}_{T_i,i,j}^q(\hat{x}) = 1_{\{\hat{x} \in [\hat{x}_q, x'_{q,q+1}]\}} K_q e^{a_{q,1}(\hat{x} - \hat{x}_q)} + 1_{\{\hat{x} \in (x'_{q,q+1}, \hat{x}_{q+1}]\}} K_{q+1} e^{a_{q,2}(\hat{x} - \hat{x}_{q+1})},$$

の $x'_{q,q+1}$ 、 $a_{q,1}$ 、 $a_{q,2}$ を求める。