

金融危機時における 株式市場の期待変動： インプライド・モーメントと ジャンプ拡散過程を用いた分析

すぎはらよしひこ おだのぶゆき
杉原慶彦／小田信之

要 旨

本稿は、株式オプションの価格に包含（インプライ）された将来の株価の確率分布やそのモーメントを用いて、株式市場の期待変動を分析する。分析手法として、特定のモデルを仮定せずにインプライド・モーメントを導出する *Bakshi, Kapadia, and Madan [2003]* の手法を発展させることで、まず、日独英米の株価指数データを対象に今次金融危機において市場で形成された期待の変化を分析する。次に、そうした市場の期待の背後にある価格変動の確率過程としてジャンプ拡散過程を想定し、金融危機が発生しその後市場のパニック的価格形成が徐々に沈静化していく局面で、市場の期待がどのように推移したかを検証する。その結果、今次金融危機では、いずれの国においても、ブラウン運動によって記述される連続的な株価変動の幅が拡大したと同時に、ジャンプによって記述される不連続な株価変動の可能性がダウンサイドに増大したことなどがわかった。こうした動きは、インプライド確率分布をみた場合に、分散の極端な増大となって現れたほか、歪度のマイナス幅の縮小や尖度の低下といった特徴も観察された。

キーワード：インプライド確率分布、インプライド・モーメント、
ジャンプ拡散過程、ノンパラメトリック法、一般化モーメント法、
特性関数法

本稿は、2009年12月に日本銀行金融研究所で開催された「金融危機後の金融工学の展開」をテーマとするファイナンス・ワークショップへの提出論文に加筆・修正を施したものである。宮崎浩一准教授（電気通信大学）をはじめ、同ワークショップの参加者、ケネス・シングルトン教授（米スタンフォード大学）、ならびに金融研究所スタッフから貴重なコメントを頂戴した。記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

杉原慶彦 日本銀行金融研究所企画役補佐（E-mail: yoshihiko.sugihara@boj.or.jp）
小田信之 日本銀行金融研究所企画役（E-mail: nobuyuki.oda@boj.or.jp）

1. はじめに

2007年夏に金融市場で米国のサブプライム住宅ローン問題が強く認識されるようになって以降、欧米主要国を中心に金融システムに対する不安と景気後退への懸念が広がった。そして、2008年秋の米リーマンブラザーズの経営破綻（リーマン・ショック）を経て、世界の金融経済環境は大幅に悪化した。この間、株式市場では、2009年春に、日米欧の主要株価指数が2005年以降の最高値の半値以下にまで下落したほか、平時に10%から20%程度で推移していた米国のインプライド・ボラティリティ指数（VIX）がリーマン・ショック後に一時80%を超えるなど、波乱の展開となった。

こうした株式市場の混乱の背景には、将来の株価水準およびその実現可能性（不確実性）に関して市場で形成された期待が大きく変化したことがあると考えられる。株価の水準には、将来の経済情勢や企業環境を巡る情報が集約されているが、そうした予想に付随する不確実性までを株価水準から知ることはできない。不確実性に対する市場の認識をみるには、VIXのように、オプション価格から算出された情報を参照するのが有益である。また、金融危機時には、VIXで測ることができる不確実性の大きさだけでなく、その非対称性なども変化した可能性がある。そうした期待の細かな変化を捉えるには、オプション価格に包含（インプライ）される期待収益率分布であるインプライド確率分布の形状自体を分析する必要がある。

こうした視点にたち、本稿は、各国における株価指数オプションから導出されるインプライド確率分布について分析を行う。理論面では、リスク中立確率のもとで株価収益率のべき乗の期待値を計算することにより、インプライド確率分布のモーメントおよび特性関数がプレーンなヨーロッパ型オプション価格によって解析的に表現できることを示す。これにより、株価の確率過程について特定のモデルを仮定することなく、ノンパラメトリックにインプライド確率分布の時間的変化を評価することが可能となる。実証面では、日独英米の株価指数を対象として、今次金融危機を挟む2005年初年から2009年半ばまでの期間について、インプライド・モーメントを日次で推計する。また、インプライド確率分布の背後にある確率過程について、2種類のジャンプ拡散過程を想定し、それぞれのパラメータを推定する。これにより、正規分布からの乖離であるジャンプの方向や大きさが、市場の期待形成においてどのように想定されてきたか、また、拡散過程（ブラウン運動）とジャンプ過程の寄与が金融危機時にどのように変化したかといった点を考察することができる。

本稿では、こうした推計結果を踏まえ、金融危機が発生し、その後市場のパニック的価格形成が徐々に沈静化していく局面で、市場で形成された期待がどのように推移したかを検証した。その結果、今次金融危機時など市場の不安心理が高まる局面では、いずれの国においても、ブラウン運動によって記述される連続的な株価変動の幅が拡大したと同時に、ジャンプ過程によって記述される不連続な株価変動の

可能性もダウンサイドに増大したことなどがわかった。こうした動きは、将来の株価の期待分布をみた場合に、2次モーメントの増大に加え、3次モーメントのマイナス幅の拡大、4次モーメントの増大といった特徴となって現れることなども確認された。また、正規分布からの乖離としてみると、歪度のマイナス幅の縮小、尖度の低下といった特徴が観察された。

オプションの市場価格からインプライド確率分布を導出し分析する研究は、古くは **Breeden and Litzenberger [1978]** によって始められた。インプライド確率分布は、ファイナンス理論において、状態価格密度あるいはアロー＝デブリュー（**Arrow = Debreu**）証券価格と呼ばれるものであり、市場の期待を反映した分布となっている。ただし、インプライド確率分布は、経済主体のリスク回避度に応じて、原資産である株価変動の分布から平均値が乖離しうるほか、その形状も異なりうる。平均値の乖離については、ファイナンス理論に基づき調整が可能である。両者の形状については、ギルサノフ（**Girsanov**）の定理が成立する条件下では一致することが知られているが、現実の市場において同定理が成立しているとは限らない。このため、インプライド確率分布の形状と原資産の価格変動分布の形状は一致しない可能性がある。こうした形状の違いについては、**Ait-Sahalia and Brandt [2008]** 等によって研究が行われているが、本稿では立ち入らない。

本稿の分析のうち、インプライド確率分布に関するノンパラメトリックな分析については、**Bakshi, Kapadia, and Madan [2003]** の手法を応用している。彼らは、プレーンなオプション価格等から、任意のヨーロッパ型ペイオフをもつ金融商品を合成する手法を用いることで、期待株価収益率が従う確率分布のインプライド・モーメントを導出した。本稿においてインプライド・モーメントを求める手法はこれとほぼ同様であるが、後述するように一部改良が加えられている。また、本稿では、これを一般化してインプライド確率分布の特性関数も導出している。他方、本稿の分析のうち、特定の確率過程を仮定してパラメータを推定するタイプの先行研究は、**Broadie, Chernov, and Johannes [2007]** をはじめとして数多い。その多くは、確率過程を所与として導出されるオプションの理論価格式（あるいはインプライド・ボラティリティ）と市場価格を適合させることによりパラメータを推定している。一方、本稿では、前述のノンパラメトリック分析の結果を活用し、確率過程を所与とした場合のインプライド確率分布のモーメントあるいは特性関数の理論値とそれらの推計結果を適合させており、この点が特徴となっている。

なお、わが国の株価を分析の対象として、インプライド確率分布やパラメータを評価した先行研究としては、小田・吉羽 [1998]、白塚・中村 [1998]、久田 [2003]、野村・宮崎 [2005]、小林・宮崎・田中 [2009] などがある。ただし、今次金融危機のデータを対象とした分析は、筆者たちの知る限り、小林・宮崎・田中 [2009] に限られている。

本稿の構成は次のとおりである。はじめに、2節では、インプライド・モーメントおよびインプライド特性関数をノンパラメトリックに推計する理論と具体的な推計手法について解説する。3節では、インプライド確率分布の変化の背後にある確率過

程としてジャンプ拡散過程を取り上げ、インプライド・モーメントあるいは特性関数を適合させることで、ジャンプ拡散過程のパラメータを推定するパラメトリックな分析手法について解説する。そして、4節では、2～3節の手法に基づいて日独英米の株式指数オプション市場のデータから推計したインプライド・モーメントおよびジャンプ拡散過程のパラメータの動きをみる。特に、今次金融危機時にジャンプの動きや寄与が平時とどのように異なったのかなどについて分析する。5節は、本稿のまとめである。

2. ノンパラメトリックな分析法

オプション市場が期待する将来の価格変動の分布について、ノンパラメトリックに分析するために、本節では、特定のモデルを仮定しないでインプライド・モーメントとインプライド特性関数を推計する方法を示す。なお、本稿の以下すべての議論では、資産価格の収益率（リターン）が独立同分布に従う市場を想定する。

(1) インプライド・モーメント

イ. 理論的枠組み

Bakshi, Kapadia, and Madan [2003] は、ヨーロピアン型のプレーンなオプション等から、任意のペイオフをもつ金融商品が合成できることを用いて、インプライド確率分布のモーメントを求める手法を提案した。本稿では、同手法を一部改良した次のような手法を用いて、インプライド・モーメントを推計する。

時刻 t における資産価格（オプションの原資産価格、ここでは株価）を S_t とかき、現時点 0 から時刻 t ($t > 0$) までのリターンを R_t とかくと、 $R_t = \ln(S_t/S_0)$ である。同株式を原資産とし、権利行使価格が K 、満期までの期間が t であるヨーロピアン型のアウトオブザマネー・オプション（OTM オプション）の現時点 0 における価格を $\Theta(0, t, K)$ とし、リスクフリー金利を簡単のため一定値 r とし、リスク中立測度を Q で表す。このとき、リターン R_t の分布（確率密度関数）に関するゼロまわりの n 次モーメント $\kappa_n = E_0^Q[R_t^n]$ ($n = 1, \dots, 4$) は、 $\Theta(0, t, K)$ を用いて次のように表すことができる¹。

1 E_0^Q は時刻 0 における Q 測度下の期待値を示す。

$$\begin{cases} \kappa_1 = e^{rt} - 1 - e^{rt} \int_0^\infty \frac{1}{K^2} \Theta(0, t, K) dK, \\ \kappa_2 = e^{rt} \int_0^\infty \frac{2\{1 + \ln(S_0/K)\}}{K^2} \Theta(0, t, K) dK, \\ \kappa_3 = e^{rt} \int_0^\infty \frac{6 \ln(K/S_0) - 3\{\ln(K/S_0)\}^2}{K^2} \Theta(0, t, K) dK, \\ \kappa_4 = e^{rt} \int_0^\infty \frac{12\{\ln(S_0/K)\}^2 + 4\{\ln(S_0/K)\}^3}{K^2} \Theta(0, t, K) dK. \end{cases} \quad (1)$$

(1) 式の導出は、補論 1 に掲載している。(1) 式を用いると、平均まわりの n 次モーメント m_n ($n = 1, \dots, 4$) は、次のように表すことができる²。

$$\begin{cases} m_1 = \kappa_1, \\ m_2 = \kappa_2 - (\kappa_1)^2, \\ m_3 = \kappa_3 - 3\kappa_1\kappa_2 + 2(\kappa_1)^3, \\ m_4 = \kappa_4 - 4\kappa_1\kappa_3 + 6(\kappa_1)^2\kappa_2 - 3(\kappa_1)^4. \end{cases} \quad (2)$$

本稿では、(2) 式をインプライド・モーメントと総称する。 m_1 は平均、 m_2 は分散に相当する。また、平均まわりの 3 次、4 次モーメントを分散で規格化した $m_3/m_2^{3/2}$ 、 m_4/m_2^2 はそれぞれ歪度、尖度に相当する。

なお、Bakshi, Kapadia, and Madan [2003] による先行研究では、1 次モーメント κ_1 を、

$$\kappa_1 \simeq e^{rt} - 1 - \frac{e^{rt}}{2}\kappa_2 - \frac{e^{rt}}{6}\kappa_3 - \frac{e^{rt}}{24}\kappa_4, \quad (3)$$

と 4 次までのモーメントを用いて近似するように提案している。一方、本稿では、(3) 式の近似は用いず、(1) 式をもとにインプライド・モーメントを厳密に算出する³。

ロ. 推計法

(2) 式で表されるインプライド・モーメントは、ヨーロッパ型のペイオフをもつ OTM オプション価格の加重平均値として表現されるため、同価格とリスクフリー金利から推計することができる。その際、(1) 式に含まれる積分値を離散的な複数のオ

² $m_n = E_0^Q (R_t - E_0^Q[R_t])^n$ を展開し、(1) 式を用いることで、(2) 式が得られる。

³ なお、(1) 式第 1 項の 1 次モーメント κ_1 は、モデルフリー・インプライド・ボラティリティ

$$\sigma_{\text{MFIV}}^2 = \frac{2e^{rt}}{t} \int_0^\infty \frac{\Theta(0, t, K)}{K^2} dK,$$

を用いて、 $\kappa_1 \simeq (r - \sigma_{\text{MFIV}}^2/2)t$ と近似できる。これは、株価変動に幾何ブラウン運動を仮定した場合のリスク中立条件に相当する。モデルフリー・インプライド・ボラティリティについては、杉原 [2010] を参照。

プション価格から数値的に算出する必要がある。それについては、杉原 [2010] で用いられたモデルフリー・インプライド・ボラティリティの推計と同じ計算方法を適用する。すなわち、まず、市場で取引されたすべての OTM オプションについて、その価格をブラック＝ショールズ・インプライド・ボラティリティ (Black＝Scholes implied volatility; BSIV) に変換し、BSIV を権利行使価格方向に 3 次スプライン関数で補間・補外する。次に、(1) 式を、アットザマネーを中心として正負マネネス (K/S_0) 方向に指数離散近似し⁴、それぞれの権利行使価格のグリッドについて、補間・補外を施した BSIV をオプション価格に戻した値を用いて、数値的に積分値を算出する⁵。当該算出法の詳細については、杉原 [2010] の 3 節(1)を参照。

各国の金融商品取引所において取引されるオプションは、市場流動性を高めるために、満期が四半期ごとの決められた日に限られているのが一般的である⁶。本稿では、満期までの期間 t が推計日によらず同一となるインプライド・モーメントの時系列を推計するため、次のアルゴリズムに従って、オプション価格から期間のそろったインプライド・モーメントを日次で推計する。

- 1) 各満期のオプションについて、BSIV を算出する。
- 2) OTM オプションから構成される BSIV のスマイル曲線を、3 次スプライン関数により権利行使価格方向に補間・補外する。
- 3) 前項で補間・補外した関数を用いて、最も満期が短いオプションのすべての権利行使価格をグリッドとして、BSIV を満期までの期間の方向に線形補間し、ちょうど 1～12 カ月の 1 カ月ごとの期間についての BSIV を算出する。
- 4) 前項で算出した期間 1～12 カ月の BSIV を、さらに権利行使価格方向に 3 次スプライン関数で補間・補外する。
- 5) (1) 式を指数離散近似する。
- 6) 4) 項で生成したスプライン関数から算出したオプション価格およびリスクフリー金利を用いて、前項で離散近似したゼロまわりのインプライド・モーメントを推計する。
- 7) (2) 式を用いて、満期までの期間が 1～12 カ月となるインプライド・モーメントを算出する。

なお、本稿では、i) 価格が無裁定区間から外れているオプション⁷、ii) オプション

4 近似関数が、マネネスの指数関数となるような近似法。

5 なお、数値積分を行う K の範囲は、被積分関数が十分に小さくなる K のレベルまでとすればよい。本稿では、 $K \in [S_0 e^{-3}, S_0 e^3]$ (原資産価格の約 1/20 倍から 20 倍) としている。また、積分を離散近似する際の権利行使価格 K_j と K_{j+1} の間隔は、 $\ln(K_{j+1}/K_j) = 10^{-4}$ (杉原 [2010] における表記では、 $\theta = 10^{-4}$ に相当) と設定する。

6 米国などでは、満期が毎月設定されることもある。

7 無裁定区間は、

$$\Theta(0, t, K) \in \begin{cases} [\max(0, S_0 - K e^{-rt}), S_0] & (K < S_0), \\ [\max(0, K e^{-rt} - S_0), K e^{-rt}] & (K > S_0), \end{cases}$$

と設定した。

価格が最低取引価格となっているオプション、iii)最終取引日まで1ヵ月(21営業日)未満のオプションは算出対象から除外する。その理由は、i)については、BSIVを算出できないことによる。ii)については、理論価格が最低取引価格を下回っていても、最低取引価格で取引されることとなるため、オプション価格が市場実勢を表さないことによる。また、iii)については、満期が近いオプションを用いると、高次のモーメントの推計値が不安定になることによる⁸。

(2) インプライド特性関数

イ. 理論的枠組み

特性関数とは、確率変数 X が従う確率密度関数のフーリエ逆変換を定数倍して得られる周波数 ω の関数であり⁹、 i を虚数単位として、 $\Phi_X(\omega) = E[e^{i\omega X}]$ と定義される。特性関数は、確率密度関数と双対の関係にあり、独立な確率変数の和の分布を分析する際や、確率変数を独立な確率変数に分解する際などに有用である¹⁰。

2節(1)イ. で示したインプライド・モーメント導出の手法を拡張することで、リターン R_t のインプライド特性関数 $\Phi_{R_t}(\omega)$ を次のように表すことができる。

$$\Phi_{R_t}(\omega) = 1 + i\omega(e^{rt} - 1) - \omega(\omega + i)e^{rt} \int_0^\infty \frac{\Theta(0, t, K)}{K^2} \left(\frac{K}{S_0}\right)^{i\omega} dK. \quad (4)$$

(4)式の導出については、補論2に掲載している。(4)式の実部と虚部は、 $(K/S_0)^{i\omega} = \cos(\ln(K/S_0)\omega) + i \sin(\ln(K/S_0)\omega)$ であることから、

$$\begin{cases} \text{Re } \Phi_{R_t}(\omega) \\ = 1 - \omega e^{rt} \int_0^\infty \frac{\Theta(0, t, K)}{K^2} \left\{ \omega \cos \left[\omega \ln \left(\frac{K}{S_0} \right) \right] - \sin \left[\omega \ln \left(\frac{K}{S_0} \right) \right] \right\} dK, \\ \text{Im } \Phi_{R_t}(\omega) \\ = \omega(e^{rt} - 1) \\ - \omega e^{rt} \int_0^\infty \frac{\Theta(0, t, K)}{K^2} \left\{ \omega \sin \left[\omega \ln \left(\frac{K}{S_0} \right) \right] + \cos \left[\omega \ln \left(\frac{K}{S_0} \right) \right] \right\} dK, \end{cases}$$

- 8 満期までの期間が短い銘柄において、ディープ・アウトオブザマネーのオプション取引が行われると、高次モーメントの推定値が非常に大きくなることもある。
- 9 フーリエ変換 F には、変換方向と係数に関していくつかの定義があるが、本稿では、 $F[f](\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} f(x) dx = \hat{f}(\omega)$ を関数 f のフーリエ変換、 $F^{-1}[\hat{f}](x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega$ を関数 \hat{f} のフーリエ逆変換とする。
- 10 独立な確率変数の和を考えると、和の確率密度関数はもとの確率密度関数の畳み込み積となる一方、和の特性関数はもとの確率変数の特性関数の積となることから、確率密度関数よりも特性関数の方が数学的に扱いやすい。本稿では、リターンが時間方向に独立同分布に従うと仮定していることから、期間 τ のリターン R_τ の特性関数を Φ_{R_τ} とすると、その任意倍の期間(例えば $s\tau$) のリターンの特性関数 $\Phi_{R_{s\tau}}$ は、 $(\Phi_{R_\tau})^s$ と表すことができる。また、3節で扱うジャンプ拡散過程においても、その特性関数が拡散過程とジャンプ過程の特性関数の積として表現されるため扱いやすい。

となる。

ロ. 推計法

(4) 式は、インプライド・モーメントと同様に、ゼロから無限大までの権利行使価格をもつ OTM オプションの加重平均値として表される。そのため、2 節(1)ロ. に示したインプライド・モーメントと同様の手法によって推計できる。

ただし、インプライド特性関数の推計に固有の留意点として、主に次の 2 点が挙げられる。1 点は、(4) 式の被積分関数が権利行使価格 K の対数周期関数となるため、権利行使価格方向に指数離散化する際のステップを十分に細かく設定する必要があることである¹¹。もう 1 点は、特性関数の変数 ω について設定する値の範囲やステップの選び方である。 ω のステップについては、(4) 式の被積分関数が ω の周期関数にもなるため、 2π 周期と異なるステップで算出する。範囲については、複素共役性から、正の周波数の場合のみ推計すればよいが、推計する ω の設定範囲について明確な基準があるわけではない。本稿では、ジャンプ拡散過程を適当なパラメータの範囲でシミュレーションすることによって算出した特性関数の分析を踏まえ、およそ $\omega \leq 50$ の範囲でみれば、十分に分布の特性を分析できると判断している。

3. パラメトリックな分析法

ファイナンス理論において、正規分布より分布の裾が厚い価格変動を表す価格過程の 1 つにレヴィ過程 (Lévy process) がある。レヴィ過程の中でも、古くから理論が発展してきており、実務で広く利用されている価格過程として、ジャンプ拡散過程 (jump diffusion process; JD) が挙げられる¹²。本節では、同過程を利用して、オプション市場が期待する将来の価格変動過程の特徴をパラメトリックに分析する手法について説明する¹³。

(1) ジャンプ拡散過程

リターン R_t がジャンプ拡散過程に従うモデルは、一般に次のようにかける。

11 本稿では、インプライド・モーメントの導出と同様に 10^{-4} の指数ステップとする。

12 このほか、確率的ボラティリティ変動モデルなども実務では広く利用されているが、当該モデルは高次モーメントが発散することがあり、本稿で扱っているモーメントを用いた分析には適さない。モーメントが発散する数学的根拠については、Andersen and Piterbarg [2007] を参照。

13 ジャンプ拡散過程のサーベイは、久田 [2003] が行っている。なお、本稿で扱うジャンプ拡散過程以外のレヴィ過程の理論についても、幅広い研究が行われ数多くの価格過程が提案されてきている。ファイナンスで利用されるレヴィ価格過程の一部については、補論 3 (2) および (3) で紹介する。

$$R_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{j=1}^{N_t(\lambda)} Y_j. \quad (5)$$

ここで、 μ 、 σ はそれぞれドリフト、ボラティリティを表すパラメータ ($\sigma > 0$)、 W_t は標準ブラウン運動、 $N_t(\lambda)$ は、時刻 t までにジャンプが発生した回数を表し、 W_t と独立な強度 λ (> 0) のポアソン過程 (Poisson process) に従い増大するとする。また、 Y_j は j 回目のジャンプ幅を表す独立な確率変数である。 R_t に含まれるジャンプだけの過程 J_t をジャンプ過程と呼び、(5) 式右辺の第 3 項、すなわち、

$$J_t = \sum_{j=1}^{N_t(\lambda)} Y_j, \quad (6)$$

として定義する。

ジャンプ幅 Y の特性関数を $\tilde{\Phi}_Y(\omega)$ とかくと¹⁴、ジャンプ拡散過程の特性関数 $\tilde{\Phi}_{R_t}^{\text{JD}}(\omega)$ は、

$$\tilde{\Phi}_{R_t}^{\text{JD}}(\omega) = \exp \left[t \left\{ i\mu\omega - \frac{\sigma^2}{2}\omega^2 + \lambda(\tilde{\Phi}_Y(\omega) - 1) \right\} \right], \quad (7)$$

と表すことができる¹⁵。

本稿では、オプション価格にインプライされる分布、すなわち、リスク中立のもとでの確率分布を扱うことから、ジャンプ拡散過程のパラメータのうち、ドリフト μ が一意に定まる。具体的には、本稿で取り扱うジャンプ拡散過程では、リスク中立の条件が $\tilde{\Phi}_{R_t}^{\text{JD}}(-i) = e^{rt}$ となることから¹⁶、

$$\mu = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \{ \tilde{\Phi}_Y(-i) - 1 \}, \quad (10)$$

14 ノンパラメトリックな変数と区別するため、以下、パラメトリックな関数やモーメントにはチルダ ($\tilde{\cdot}$) を付して表記する。

15 ドリフト付きブラウン運動 $\tilde{W}_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ の特性関数 $\tilde{\Phi}_{\tilde{W}_t}^{\text{BM}}(\omega)$ は、

$$\tilde{\Phi}_{\tilde{W}_t}^{\text{BM}}(\omega) = \mathbb{E}^{\text{B}}[e^{i\omega\tilde{W}_t}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i\omega x - \frac{(x - \mu t)^2}{2\sigma^2 t} \right] dx = e^{i(\mu\omega - \sigma^2\omega^2/2)t}, \quad (8)$$

となり、ポアソン頻度ジャンプ過程 J_t の特性関数 $\tilde{\Phi}_{J_t}^{\text{PJ}}(\omega)$ は、

$$\tilde{\Phi}_{J_t}^{\text{PJ}}(\omega) = \mathbb{E}^{\text{P}}[\mathbb{E}^{\text{B}}[e^{i\omega J_t} \mid N_t]] = \mathbb{E}^{\text{P}}[(\tilde{\Phi}_Y(\omega))^{N_t}] = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{\{\lambda t \tilde{\Phi}_Y(\omega)\}^j}{j!} = e^{\lambda t(\tilde{\Phi}_Y(\omega) - 1)}, \quad (9)$$

となる。ただし、 \mathbb{E}^{B} 、 \mathbb{E}^{P} 、 \mathbb{E}^{J} はそれぞれブラウン運動、ポアソン過程、ジャンプ幅についての期待値を表す。ブラウン運動とジャンプが独立である仮定より、ジャンプ拡散過程の特性関数は、(8) 式と (9) 式の積として (7) 式のように表される。ただし、ジャンプ幅 Y の確率密度 f_Y は、 $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \lambda f_Y(dx) < \infty$ を満たしているとする。

16 株価がリスク中立的に推移する条件は、 $\mathbb{E}_0^{\text{Q}} S_t = S_0 e^{rt}$ とかける。これをリターン R_t を用いてかき直すと $\mathbb{E}_0^{\text{Q}} e^{R_t} = e^{rt}$ 、さらに特性関数を用いて記述すると、 $\tilde{\Phi}_{R_t}^{\text{JD}}(-i) = e^{rt}$ となる。

と、 μ をリスクフリー金利および他のパラメータによって表現できる。

ジャンプ幅 Y の表現方法としてはいくつかのモデルが知られているが、本稿では、 Y が正規分布に従うガウシアン・ジャンプ拡散過程と、ラプラス分布に従うラプラシアン・ジャンプ拡散過程を取り上げる。

イ. ガウシアン・ジャンプ拡散過程

ジャンプ幅 Y が正規分布に従うガウシアン・ジャンプ拡散過程 (Gaussian jump diffusion process; GJD) は、Merton [1976] によって提案された。ジャンプ幅 Y が平均 γ 、標準偏差 $\delta (> 0)$ の正規分布に従うとすると、(7) 式および (8) 式から、特性関数 $\tilde{\Phi}_{R_t}^{\text{GJD}}(\omega)$ は、

$$\tilde{\Phi}_{R_t}^{\text{GJD}}(\omega) = \exp\left[t\left\{i\mu\omega - \frac{\sigma^2}{2}\omega^2 + \lambda(e^{i\gamma\omega - \delta^2\omega^2/2} - 1)\right\}\right], \quad (11)$$

となり、(10) 式のリスク中立条件から、 μ については、 $\mu = r - \sigma^2/2 - \lambda(e^{\gamma + \delta^2/2} - 1)$ と決まる。特性関数から、平均まわりの 1~4 次モーメント \tilde{m}_n^{GJD} ($n = 1, \dots, 4$) は、次のように決まる¹⁷。

$$\begin{cases} \tilde{m}_1^{\text{GJD}} = \lambda t \gamma + \mu t, \\ \tilde{m}_2^{\text{GJD}} = \lambda t (\gamma^2 + \delta^2) + \sigma^2 t, \\ \tilde{m}_3^{\text{GJD}} = \lambda t (\gamma^3 + 3\gamma\delta^2), \\ \tilde{m}_4^{\text{GJD}} = \lambda t (\gamma^4 + 6\gamma^2\delta^2 + 3\delta^4) + 3(\tilde{m}_2^{\text{GJD}})^2. \end{cases} \quad (12)$$

GJD では、ジャンプ幅の平均を表すパラメータ γ がゼロから乖離するほど、また、ジャンプ幅の標準偏差を表すパラメータ δ が増加するほど、幅の大きいジャンプが発生する。

ロ. ラプラシアン・ジャンプ拡散過程

次に、ジャンプ幅 Y がラプラス分布に従うラプラシアン・ジャンプ拡散過程 (Laplacian jump diffusion process; LJD) を考える。ラプラス分布の確率密度関数は、2つのパラメータ ξ, ζ ($\zeta > 0$) を用いて $f_Y^{\text{Laplace}}(x) = \exp(-|x - \xi|/\zeta)/(2\zeta)$ と表され、特性関数は $\tilde{\Phi}_Y^{\text{Laplace}}(\omega) = \exp(i\xi\omega)/(1 + \zeta^2\omega^2)$ と表される。ラプラス分布は、平均近傍の確率密度が大きく、その分裾の減衰が正規分布より緩やかとなる分布であり、その平均は ξ 、分散は $2\zeta^2$ である。

LJD の特性関数は、(7) 式から、

¹⁷ 特性関数を n 回微分した関数に $\omega = 0$ を代入し i^n で除した値は、ゼロまわりの n 次モーメント $\tilde{\kappa}_n$ となる。すなわち、 $\tilde{\kappa}_n = i^{-n} \tilde{\Phi}_{R_t}^{(n)}(0)$ 。さらに、(2) 式に従って、 $\tilde{\kappa}_n$ から平均まわりのモーメント \tilde{m}_n を算出できる。

$$\tilde{\Phi}_{R_t}^{\text{LJD}}(\omega) = \exp\left[t\left\{i\mu\omega - \frac{\sigma^2}{2}\omega^2 + \lambda\left(\frac{e^{i\xi\omega}}{1 + \zeta^2\omega^2} - 1\right)\right\}\right], \quad (13)$$

となり、(10)式から、 $\mu = r - \sigma^2/2 - \lambda\{e^\xi/(1 - \zeta^2) - 1\}$ と決まる。また、モーメント \tilde{m}_n^{LJD} は、

$$\begin{cases} \tilde{m}_1^{\text{LJD}} = \lambda t \xi + \mu t, \\ \tilde{m}_2^{\text{LJD}} = \lambda t (\xi^2 + 2\zeta^2) + \sigma^2 t, \\ \tilde{m}_3^{\text{LJD}} = \lambda t (\xi^3 + 6\xi\zeta^2), \\ \tilde{m}_4^{\text{LJD}} = \lambda t (\xi^4 + 12\xi^2\zeta^2 + 24\zeta^4) + 3(\tilde{m}_2^{\text{LJD}})^2, \end{cases} \quad (14)$$

となる。(14)式の導出は、補論4に示している。LJDもGJDと同様に、ジャンプ幅の平均を表すパラメータ ξ がゼロから乖離するほど、またジャンプ幅の標準偏差に比例するパラメータ ζ が大きいほど、幅の大きなジャンプが発生する。また、(14)式と(12)式を比較してわかるように、高次モーメントに対するジャンプ幅分布の広がりを示すパラメータ (δ あるいは ζ)の係数はLJDの方が大きい。これは、LJDに従う確率変数の変動分布の裾の減衰が、GJDに従う確率変数と比べて、それだけ緩やかであることを示している。

類似の価格過程として、Kou [2002]によって提案された非対称両側指数ジャンプ拡散過程 (asymmetric double exponential jump diffusion process; DEJD) が知られている¹⁸。LJDは、DEJDと比べ、ジャンプ幅の分布が左右対称であるという制約があるものの¹⁹、少ないパラメータで表現可能であり、また、モーメントからパラメータを特定しやすいという利点を有する^{20,21}。

(2) ジャンプ拡散過程の推定法

ジャンプ拡散過程のパラメータ推定法については、さまざまな手法が提案されてきているが、効果的な手法が確立されているわけではない。効率的な推計法の1つは最尤法であるが、ジャンプ拡散過程の尤度関数は一般に簡単なかたちで記述できない²²。また、生成される分布がジャンプと拡散の混合分布となることから、パラメー

18 DEJDは、補論3(1)にて解説している。

19 LJDは、ジャンプ幅の分布は左右対称であるが、ジャンプ幅分布の中心が拡散過程の中心と異なることから、ジャンプと拡散の混合分布として奇数次モーメントがゼロとならない左右非対称な分布を造成することが可能である。

20 DEJDは、ジャンプに関するすべてのパラメータがモーメントに3重積として現れるため、後述するGMMによるパラメータ推定においてパラメータの識別が困難である(補論3(1)の(A-8)式参照)。一方、LJDはそういったことがないため、パラメータが推定しやすい。

21 一方、Kou [2002]によると、DEJDは過去の価格パスに依存する金融商品の価格付けを容易に行うことができるという利点を有する。

22 ジャンプ拡散過程の尤度関数は、一般に解析的に解けない積分の和として記述される。

タの水準によっては尤度関数が有限ではなくなるといった問題がある。そうした点を回避する手法として、ジャンプ部分と拡散部分を分離して推定する手法 (Honore [1998])、尤度関数をガウス求積法を用いて数値的に求める手法 (Ramezani and Zeng [2007])、マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いて数値的にパラメータをサンプリングする手法 (Nakajima and Omori [2009]) などが提案されてきた。また、最尤法ほど効率的ではないが、パラメータが特定できる手法として、オプション価格や BSIV のスマイル曲線を最小二乗法によって適合させるカリブレーション (Bakshi, Cao, and Chen [1997]、Carr and Wu [2003a]、Cont and Tankov [2004b]、宮崎 [2009]) のほか、一般化モーメント法 (generalized method of moments; GMM) によってモーメントを適合させる推定法 (Pan [2002]) も用いられている²³。

本稿では、2 節(1)、(2)の理論を応用して算出したインプライド・モーメントあるいはインプライド特性関数を、3 節(1)で紹介したジャンプ拡散過程に適合することで、市場が期待するジャンプ拡散過程のパラメータを推定する。適合の手法としては、以下のとおり GMM を用いた推定法と、同手法を特性関数に拡張したスペクトラル GMM を用いる。

イ. GMM

GMM は、広く知られた手法であるので、ここでは概要のみ解説する²⁴。なお、2 節(1)、3 節(1)では、平均まわりのモーメント m_n について主に取り上げてきたが、ジャンプ拡散過程では、キュムラント c_n が、モーメント m_n より簡単なかたちで表現されることから、GMM 推定にはキュムラントを用いる²⁵。

ジャンプ拡散過程のパラメータを列ベクトル表記で θ とかく。(2)式および(15)式に従って時刻 t の市場価格から推定される $1 \sim n$ 次のインプライド・キュムラントを行ベクトル表記で $c(t)$ 、適当なパラメータ θ を与えたときの理論モデルにおける $1 \sim n$ 次キュムラントを同表記で $\tilde{c}(\theta)$ とかき、その差を $g^M(t, \theta) = c(t) - \tilde{c}(\theta)$ とかく。このとき、 $E[g^M(t, \theta)] = 0$ を満たす θ が GMM 推定量である²⁶。

具体的には、 t_0 日のパラメータの推定に必要なサンプルが過去 U 日であるとし、 t_u ($u = -U + 1, -U + 2, \dots, 0$) 日をサンプルとした $g^M(t_u, \theta)$ の平均を $h_{t_0}^M(U, \theta) =$

23 このほか、ジャンプ拡散過程の特性関数の漸近特性を利用して、ボラティリティのみを最初に

$$\hat{\sigma}^2 = -2 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \ln \Phi_{R_t}(\omega) / (\omega^2 t) = - \lim_{\omega \rightarrow \infty} \ln \{ (\operatorname{Re} \Phi_{R_t}(\omega))^2 + (\operatorname{Im} \Phi_{R_t}(\omega))^2 \} / (\omega^2 t),$$

と推定し、残りのパラメータを GMM 等で推定する 2 段階推定法もある (宮原 [2003])。しかし、本稿の分析では、当該手法を用いて推定したボラティリティ推定値は非常に不安定であったことから、ここでは紹介しない。

24 GMM の理論については、例えば Hamilton [1994] の第 13 章などを参照。

25 n 次のキュムラントは、特性関数の対数値を n 回微分し $\omega = 0$ を代入した値を i^n で除した値、すなわち、 $c_n = i^{-n} (\ln \Phi_{R_t})^{(n)}(0)$ と定義される。4 次までのモーメント m_n とキュムラント c_n には、

$$c_1 = m_1, \quad c_2 = m_2, \quad c_3 = m_3, \quad c_4 = m_4 - 3m_2^2, \quad (15)$$

の関係がある。

26 ただし、本節での E はサンプルについての期待値。

$1/U \sum_{u=-U+1}^0 \mathbf{g}^M(t_u, \boldsymbol{\theta})$ とかくと、 t_0 日の GMM 推定量は、

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GMM}}(t_0) = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{h}_{t_0}^M(U, \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{W}_{t_0}^{M-1} \mathbf{h}_{t_0}^M(U, \boldsymbol{\theta}), \quad (16)$$

となる。ここで、重み行列 $\mathbf{W}_{t_0}^M$ は、サンプル平均 $\mathbf{h}_{t_0}^M(U, \boldsymbol{\theta}_{\text{GMM}})$ の漸近共分散とするのが最適であることが知られている。ここでは、過去 U 日のサンプル $\mathbf{g}^M(t_u, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GMM}})$ ($u = -U + 1, -U + 2, \dots, 0$) から算出される共分散の一致推定量とする²⁷。ただし、この場合、数ヶ月の期間のキウムラントを日次で算出した結果を用いることから、Newey and West [1987] が提案した手法により、サンプルの自己相関を調整した重み行列とする²⁸。

GMM 推定量は、パラメータ数に見合った数のモーメント条件を与えること、そして、サンプル数を十分に大きくとることで効率的になる。前者については、3 節(1)で紹介したジャンプ拡散過程において推定を要するパラメータが4つであることから、モーメント条件も1~4次まで ($n = 4$) とする。後者については、サンプル数を増やすと効率的になる一方で、推定値がサンプル期間にわたって均されてしまうため、日次でのパラメータの細かい変化を観察することが困難となる。こうしたトレードオフに留意し、4 節(3)では、推定日を含む過去1ヶ月 ($U = 21$) のキウムラントをサンプルとして用い、日次でローリング推定することで、パラメータの変化を分析する。

ロ. スペクトラル GMM

3 節(2)イ. に示した1~4次のキウムラントを用いた GMM 推定では、5次以降の高次モーメントの情報をすべて捨象してしまっている。しかし、1次から無限次までのすべてのモーメント情報を含んでいる特性関数を用いることで、キウムラントを用いた GMM では捉えきれない高次の変動を踏まえたパラメータを推定できる。

特性関数を用いた GMM の手法は、特性関数法 (characteristic function generalized method of moments)、あるいは、スペクトラル GMM (spectral GMM; SGMM) と呼ばれている。SGMM は、Feuerverger and McDunnough [1981]、Feuerverger [1990] によって提案され、Singleton [2001] によってファイナンスに応用された。それによると、SGMM の推定値は、

$$E|\exp(i\omega R_t) - \tilde{\Phi}_{R_t}(\omega, \boldsymbol{\theta})| = 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

を満たす $\boldsymbol{\theta}$ として推定される。その後、同手法を株価に応用して、ジャンプ拡散過程等のパラメータを推計する研究は、Jiang and Knight [2002]、Chacko and Viceira [2003]、Yu [2004] によって行われている。

27 本稿では、重み行列を初めは単位行列として与え、その結果推定されたパラメータを用いて算出される共分散を一致推定量とする。

28 パートレット・カーネルを用い、自己相関が存在する期間については、Andrews [1991] が提案した手法のうち、 $\mathbf{g}^M(t_u, \boldsymbol{\theta})$ が AR(1) 過程に従うとした場合の最適期間と設定する。

本稿では、2節(2)に示したように、オプション価格からインプライド特性関数 $\Phi_{R_t}(\omega)$ 自体が得られていることを踏まえ、

$$E|\Phi_{R_t}(\omega) - \tilde{\Phi}_{R_t}(\omega, \theta)| = 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

を満たす θ を SGMM 推定することを考える。具体的には、適当な周波数グリッド ω を与え、 t_u 日 ($u = -U + t, -U + 2, \dots, 0$) について、同周波数グリッドで算出したインプライド特性関数と理論特性関数の差について、実部と虚部を行方向にでないベクトルを

$$\mathbf{g}^S(t_u, \theta) = \begin{bmatrix} \text{Re } \Phi_{R_{t_u+t}}(\omega) - \text{Re } \tilde{\Phi}_{R_t}(\omega, \theta) \\ \text{Im } \Phi_{R_{t_u+t}}(\omega) - \text{Im } \tilde{\Phi}_{R_t}(\omega, \theta) \end{bmatrix},$$

とし、過去 U 日の $\mathbf{g}^S(t_u, \theta)$ のサンプル平均を $\mathbf{h}_{t_0}^S(U, \theta) = 1/U \sum_{u=-U}^0 \mathbf{g}_{t_0}^S(t_u, \theta)$ とかくと、 t_0 日の SGMM 推定量は

$$\hat{\theta}_{\text{SGMM}}(t_0) = \arg \min_{\theta} \mathbf{h}_{t_0}^S(U, \theta)^T \mathbf{W}_{t_0}^{S^{-1}} \mathbf{h}_{t_0}^S(U, \theta), \quad (18)$$

となる。重み行列 $\mathbf{W}_{t_0}^S$ は、過去 U 日のサンプル $\mathbf{g}^S(t_u, \hat{\theta}_{\text{SGMM}})$ ($u = -U + 1, -U + 2, \dots, 0$) から算出される共分散の一致推定量とする。ただし、3節(2)イ.と同様に、Newey and West [1987] が提案した手法により自己相関に関する調整を施す。

SGMM 推定量は、通常の GMM と同様に漸近正規性を有する。すなわち、真のパラメータを θ_0 とかくと、

$$\begin{aligned} \sqrt{U}(\hat{\theta}_{\text{SGMM}} - \theta_0) &\xrightarrow{p} N(\mathbf{0}, \mathbf{V}^S), \\ \mathbf{V}^S &= (\mathbf{D}_{t_0}^S \mathbf{W}_{t_0}^{S^{-1}} \mathbf{D}_{t_0}^{S^T})^{-1}, \quad \mathbf{D}_{t_0}^{S^T} = \frac{\partial \mathbf{h}_{t_0}^S(U, \hat{\theta}_{\text{SGMM}})}{\partial \theta^T}, \end{aligned} \quad (19)$$

が成り立つ。また、SGMM 推定量は、 ω を連続的にとり重み行列を適切に選択することで、最尤推定量と一致する²⁹。

なお、周波数条件(周波数グリッド)の設定には注意を要する。SGMM 推定量は、周波数条件を幅広くとり、かつその数を増やすことで効率的となる一方で、周波数条件の数を増やすと、サンプルの一致推定共分散として算出される重み行列 $\mathbf{W}_{t_0}^S$ が特異となり、逆行列の算出が困難となることがある³⁰。SGMM 特有のこうした問題は、Carrasco *et al.* [2003] や Yu [2004] によっても指摘されているが明確な解決策は

29 詳細は Singleton [2001] を参照。

30 異なる周波数に対する特性関数値が非常に近い値となること、あるいは、高周波数領域と低周波数領域でのサンプル分散のスケールが極端に異なることが要因。

示されていない。本稿では、適当なパラメータ範囲でシミュレーションすることによって得られたジャンプ拡散過程の特性関数の分析を踏まえ、大半の期間について ω の範囲を $|\omega| \leq 50$ とし³¹、グリッドは、 $\omega = (2^n)^T$ 、($n = 0, 1, 2, \dots$) と設定することとする³²。このほか、Newey and West [1987] に基づく重み行列の修正やサンプル期間等の設定条件は、2 節(2)イ.と同様とする。

4. 実証分析

(1) データ

本稿では、2005 年初から 2009 年 9 月末までの日独英米の株価指数オプションにインプライされる期待株価分布を分析対象とする。金融危機時の期待株価の変動を分析することに主眼を置いているが、通常時と比較するために、2005 年以降のデータを用いる。当該期間は、i) 市場が比較的平穏であった時期 (2005 年 1 月～2007 年 7 月)、ii) 米国のサブプライム住宅ローン問題に対する懸念が広がり株価が乱高下した時期 (2007 年 8 月～2008 年 9 月)、iii) リーマンブラザーズの破綻をきっかけに、各国株価が急落するとともに、経済指標も著しく悪化した時期 (2008 年 9 月～2009 年 9 月) からなる。

オプション銘柄には、日独英米の各地域で流動性が高いヨーロピアン型オプションとして、日本は日経平均、ドイツは DAX、英国は FT 100、米国は S&P 500 をそれぞれ原資産としたオプションを用いる。オプション価格には、日独英はブルームバーグ社から入手した日次の終値 (該当日に取引が成立した価格のうち最終時点のもの) を利用する。また、米国については、シカゴ・オプション取引所から購入した日次のオプション・サマリーデータを利用する。なお、インプライド・モーメント等の推計に際しては、四半期末月 (3、6、9、12 月) に満期を迎えるオプションを用い³³、ブルームバーグ社から取得可能なすべての権利行使価格のデータを利用する³⁴。

31 ただし、一部銘柄においては、金融危機時に分布が極端に広がるため、特性関数の情報が低周波数領域に広がる特徴がある。そうした局面では、 ω が小さい領域の情報を稠密に活用すると推定が安定する。具体的には、後述の GJD の日次推定において、米国の 2008 年 8 月以降、日本の 2008 年 12 月央以降、および英国の 2009 年 1 月以降について $\omega \leq 15$ 、また、英国の 2008 年 9～12 月について $\omega \leq 10$ としている。LJD の日次推定においては、日本の 2008 年 3 月央～8 月末、2008 年 10 月央～11 月末について $\omega \leq 15$ 、日本の 2008 年 9～10 月央および 2009 年以降、また英国の 2009 年 1 月央以降、米国の 2008 年 8 月央～9 月および 2009 年 1～9 月については $\omega \leq 10$ 、米国の 2009 年 6 月以降について $\omega \leq 20$ としている。

32 ただし、このように設定した ω によって推定された $\mathbf{W}_{i_0}^S$ の行列式が 10^{-15} を下回る場合には、 $\omega = (3^n)^T$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) と設定する。

33 米国では、これら以外の月にも満期を迎えるオプションが取引されているが、各国の算出結果を比較できるように、満期を同一の四半期末月にそろえたデータを用いる。なお、同月内の満期日については、若干、国による差異があり、日本のみ第 2 金曜日が満期、ほかは第 3 金曜日が最終取引日となっている。

34 ただし、日本については、2008 年 9 月より、満期まで 3 ヶ月を超えるオプションの権利行使価格の刻み幅は 500 円であるのに対して、同 3 ヶ月未満のオプションでは 250 円刻みとなるよう制度が変更されて

また、原資産価格には、ブルームバーグ社から入手した各国の株価指数終値を用いる。リスクフリー金利はLIBORを代用する³⁵。

なお、本稿では、分析対象とするリターンの期間を3ヵ月 ($t = 1/4$) と設定する。オプション市場では、満期までの期間が1~3ヵ月となる短期の銘柄に流動性が集まり、それらの価格の信頼性も高い一方で、高次モーメントの推計値は満期が近づく不安定になる。こうした点を踏まえ、本稿では、期間3ヵ月を、市場の期待を分析するのに適当な期間として選択する。

(2) ノンパラメトリック分析の結果

イ. インプライド・モーメントの推計結果

はじめに、2節(1)に示した手法に基づいて推計したインプライド・モーメントをみる。図1には、1~4次のインプライド・モーメントを日次で推計した結果を示している。日独英米の推計値を1つの図にまとめ、モーメントの次数順に上段から掲載している。

時系列の特徴をみると、2007年7月以前は、各モーメントとも安定的に推移した。水準をみると、1次モーメントは、各国の金利とボラティリティ水準の差異を映じて、まちまちの水準となった³⁶。2次モーメントは、日本において、2006年前半にライブドア問題などを受けて株価のボラティリティが上昇した局面があるなど、他国とやや異なる動きもみられたものの、概してみると各国とも似通った水準と方向性をもって推移した。3次モーメントはわずかに負の水準で推移したほか、4次モーメントは、リーマン・ショック以降と比べ極めて低い水準で推移した。

しかし、2007年8月以降、2次モーメントは明確に上昇し、4次モーメントもわずかながら水準を切り上げたほか、1次モーメントは若干下方向に振れる展開となった。また、3次モーメントのマイナス幅は幾分拡大したほか、変動も以前と比べて大きくなった。

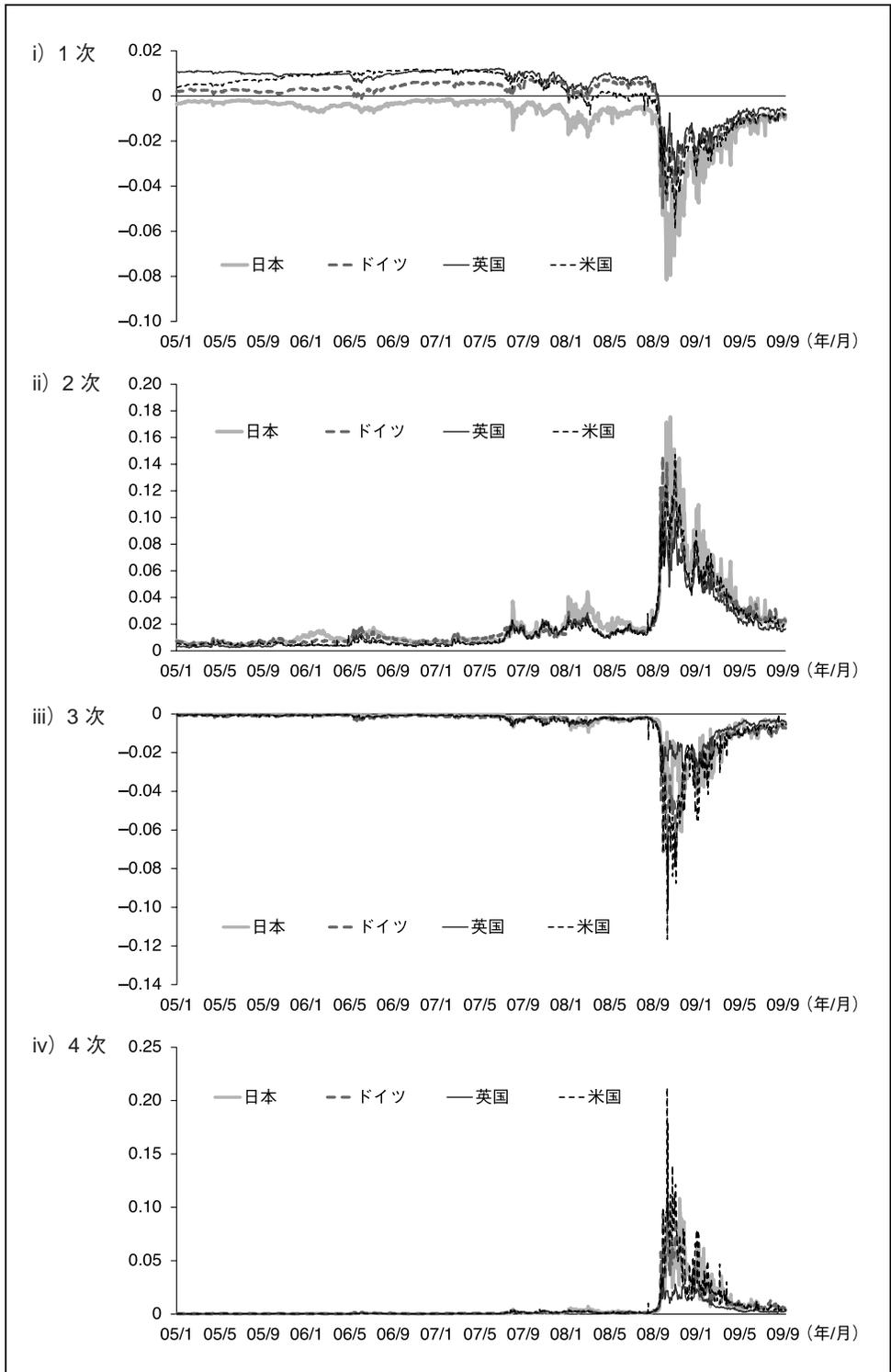
さらに、2008年9月のリーマン・ショックを受けて、各モーメントとも極端な水準にジャンプした。奇数次モーメントはマイナス方向に、偶数次モーメントはプラス方向に極端に大きく動いた。その後は、徐々にモーメントの水準が切り下がり、2009年9月には、およそリーマン・ショック直前のレベルに戻った。

いる。本稿では、期間が3ヵ月未満と3ヵ月超のオプションの権利行使価格数をそろえる必要から、満期まで3ヵ月未満であっても、500円刻みの権利行使価格を用いて算出する。

35 金融危機の間、LIBORと国債金利は大きく乖離した。LIBORには主要銀行のリスクプレミアムが反映され高い水準となった一方、マネーマーケットで余剰となった資金が短期国債市場に流れ込み、国債金利が低下するという現象が各国でみられた。本稿では、オプション市場の主たる参加者である金融機関のヘッジ行動がマネーマーケットにて行われると仮定し、金融機関の信用力が反映されるLIBORをリスクフリー金利に代用する。

36 2節(1)イ.で解説したように、インプライド確率分布の1次モーメントは、リスクフリー金利からモデルフリー・インプライド・ボラティリティの2乗の0.5倍(ボラティリティ・ドラッグ)を差し引いた値となる。この間の日本の金利は、独英米対比著しく低かったため、1次モーメントが負に推定されている。

図1 日独英米のインプライド・モーメントの推計結果（期間3ヵ月）



また、国による差異をみると、各国ともほとんどの時期、どのモーメントにおいても、かなり似通った動きを示している。特に、今次の金融危機時には、どのモーメントも同方向かつ同程度のスケールで変化している点は注目に値する。これは、金融危機時に各国で形成された期待の変化が似通っていたことを示しており、同時期には、株価だけでなく、株価の不確実性に対する市場の認識もグローバルに連動していたものと推察される。

ロ. 歪度・尖度

次に、前述イ.のインプライド・モーメントによる分析で確認された特徴を、ここではインプライド確率分布の正規分布からの乖離という観点から分析する。図2には、3次・4次モーメントを2次モーメントで規格化した歪度・尖度を示した。調査期間全体を通じて、歪度は負に、尖度は3を超える水準あることから、インプライド確率分布は、負方向に裾が厚く、その分中心が正規分布より尖っている急尖的な形状となっている。当該結果は、先行研究（小田・吉羽 [1998]、Bakshi, Kapadia, and Madan [2003]、Carr and Wu [2003b] 等）と整合的である。

歪度・尖度の時間的な変化をみると、日本を除く欧米では、2007年央から歪度のマイナス幅がわずかながら縮小し、尖度が幾分低下した（図2）。リーマン・ショック後は、歪度・尖度とも徐々にリーマン・ショック以前の水準に回帰した。こうした欧米の動きは、リーマン・ショックを受けて2次モーメントが極度に増大したことで、通常時には3次以上の高次のオーダーとして認識される大きな価格変動の可能性が、金融危機時には2次のオーダーとして認識されたことを示している。すなわち、金融危機時にはインプライド確率分布全体が大きく広がったため、結果として、分散が非常に大きい正規分布に近づき、通常時にみられる急尖的（leptokurtic）な特徴が減退したと考えられる。これを、オプション価格の観点から捉えると、権利行使価格が原資産価格から乖離している OTM オプションが、平時に比べて極端に高い価格で取引され、特に、ディープ OTM オプションの価格は2次モーメントとして認識されるほど高くなったことを意味している。

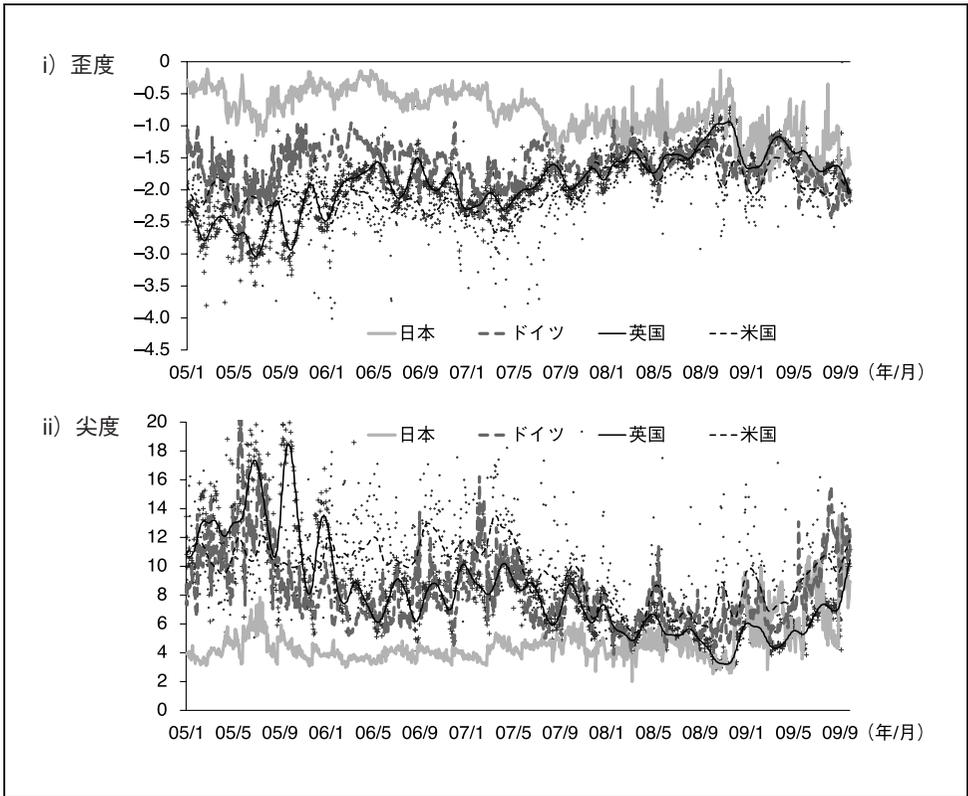
一方、日本では、2007年央から歪度のマイナス幅、尖度ともに拡大し、リーマン・ショック後はさらに拡大した。日本のみ他国と異なる動きとなっているのは、技術的な面が大きいと考えられる³⁷。すなわち、本稿の分析期間においては、入手可能な権利行使価格の数や実際の取引本数が次第に増加してきた経緯がある。このため、よりディープな OTM オプションの価格が徐々に得られるようになってきたという市場環境の変化が、推計された3次・4次モーメントの拡大につながった可能性がある³⁸。

なお、平均や分散（1次・2次モーメント）と比べて、歪度・尖度の推計値のばら

37 このほか、日本の金融機関が被った金融危機の影響の程度が欧米と比べると大きくなかったことが影響した可能性も考えられるが、図1で示した危機時の2次モーメントの上昇が日本でも欧米並みに顕著であることを踏まえると、そうした可能性は小さいと考えられる。

38 日経平均オプション市場で実際に取引された権利行使価格数の推移は、杉原 [2010] の図3に示している。

図2 日独英米の歪度・尖度（期間3ヵ月）



備考：英米は、異常値除去後、Hodrick and Prescott [1997] による平滑化処理を施した系列（平滑化パラメータは 2,430 と設定）。+ は英国の原データ、◆ は米国の原データ。

つきが大きくなっているのは、取引が成立したオプション価格からインプライド・モーメントを推計することに伴う技術的な限界によるものと考えられる。すなわち、権利行使価格が原資産価格から大きく乖離したディープ OTM オプションは、必ずしも毎営業日に取引が成立するわけではない。また、そうしたオプションでは、実勢価格が最低取引価格未満であっても最低取引価格以上の価格で取引されるケースがあり、推計されるインプライド確率分布の裾が大きく膨らむといったノイズが発生しやすい。こうした点が、推計されるモーメントのばらつきが大きくなる背景にあると考えられる。当該問題は、取引される権利行使価格の範囲が広い英米で顕著にみられている。これを踏まえ、図2では、英米のデータについては、異常値を取り除いた後³⁹、Hodrick and Prescott [1997] による平滑化処理を施した系列を参考として示している⁴⁰。

39 ここでは、歪度が -5 を下回る場合、あるいは、尖度が 20 を上回る場合を異常値としている。

40 また、歪度・尖度の系列には、局面によって3ヵ月の周期性がみられるが、これは、満期が3ヵ月ごとに到来するオプション銘柄を合成してちょうど期間3ヵ月のオプション価格をコンポジットに算出していることによる。権利行使価格が原資産価格から大きく乖離したディープなオプション銘柄の価格は、満期が

以上で整理したインプライド・モーメントの特徴については、リターンの計測期間が3ヵ月を超える場合についても観察されている⁴¹。こうした特徴の背景については、4節(3)で、インプライド確率分布の背後にある確率過程を想定することで、さらに踏み込んだ分析を行う。

(3) パラメトリック分析の結果

4節(2)イ.で示した平時および危機時のインプライド・モーメントの変化をより具体的に理解するために、その背後にある確率過程を想定することで、パラメトリックに分析を進める。ここでは、3節(1)で示したガウシアン・ジャンプ拡散過程(GJD)とラプラシアン・ジャンプ拡散過程(LJD)の2つを想定し、そのパラメータの時間的変化や地域による違いを分析する。また、インプライド確率分布の正規分布からの乖離について、4節(2)ロ.では歪度・尖度によって捉えてきたが、ここでは、ブラウン運動からの乖離を示すインプライド・ジャンプとしてみていく。

イ. ジャンプ拡散過程のパラメータ推定結果

表1には、3節(2)で示したGMMとSGMMによってGJDおよびLJDのパラメータを推定した結果を示した。4節(2)で示したように、分析対象とする期間(2005年1月~2009年9月末)には、金融危機という大きなショックを含むため、サンプルを次の3期間に分割して、それぞれパラメータを推定した。

- a) 平時：2005年1月初から2007年8月8日までの、市場が比較的平穏であった期間。
- b) 金融不安の拡大期：米国のサブプライム住宅ローン問題が株式市場で特に強く意識された期間。具体的には、BNPパリバが傘下のファンドからの資金引出しを凍結すると発表し、株価が世界的に急落した2007年8月9日(いわゆるパリバショック)から、その後、各国による利下げや協調的な金融緩和策の打出し、ベアスターンズの救済などが行われつつ、株価が乱高下した2008年9月14日までの期間。
- c) リーマン・ショック後：リーマンブラザーズが破綻した2008年9月15日以降、市場の不安心理が極度に高まるとともに経済指標が急速に悪化し、その後、金融市場が徐々に安定を取り戻した2009年9月30日までの期間。

はじめに、推計法による推定結果の相違をみる。GMMでは、統計的に有意な推定値を得られないパラメータが大半であるのに対して、SGMMでは、99%水準で

近づくにつれて理論上かなり小さくなるが、そうしたオプションでも最小取引単位以上の価格で取引されることから、満期が近づくると高次のインプライド・モーメントが非常に高く推計されることがある。

41 本稿で示した3ヵ月先までの期待リターンの分析のほかに、米国の1ヵ月・6ヵ月・12ヵ月先の期待リターンについても同様の分析を行ったが、定性的な傾向は類似していた。

表1 パラメータ推定結果

i) ガウシアン・ジャンプ拡散過程 (GJD)

	推定手法 パラメータ	GMM				SGMM			
		σ	λ	γ	δ	σ	λ	γ	δ
a) 平時 (05年1月4日～ 07年8月8日)	日本	0.146	1.117	-0.068	0.077	0.148***	0.710***	-0.086***	0.093***
	ドイツ	0.102	0.954	-0.094	0.124	0.109***	1.105***	-0.100***	0.079***
	英国	0.056	1.104	-0.086	0.093	0.053***	1.053***	-0.091***	0.080***
	米国	0.071	0.623	-0.115	0.115	0.071***	0.885***	-0.104***	0.070***
b) 金融不安の 拡大期 (07年8月9日～ 08年9月14日)	日本	0.151	1.371	-0.202	0.019	0.144***	1.027***	-0.218***	0.011
	ドイツ	0.106***	1.897***	-0.108***	0.121***	0.116***	1.796***	-0.123***	0.096***
	英国	0.089	1.113	-0.230	0.029	0.094***	0.856***	-0.239***	0.020***
	米国	0.125	1.103	-0.162	0.121	0.099***	1.098***	-0.197***	0.051***
c) リーマン・ ショック後 (08年9月15日～ 09年9月30日)	日本	0.294	1.099	-0.291	0.185	0.125***	3.990***	-0.086***	0.180***
	ドイツ	0.223	0.725	-0.324	0.202	0.132***	3.200***	-0.100***	0.201***
	英国	0.000	1.697	-0.301	0.000	0.095***	1.066***	-0.273***	0.024***
	米国	0.208*	0.911	-0.277	0.305***	0.081***	3.368***	-0.097***	0.210***

ii) ラプラシアン・ジャンプ拡散過程 (LJD)

	推定手法 パラメータ	GMM				SGMM			
		σ	λ	ξ	ζ	σ	λ	ξ	ζ
a) 平時 (05年1月4日～ 07年8月8日)	日本	0.149	0.690	-0.103	0.044	0.152***	0.227***	-0.200***	0.019
	ドイツ	0.109	0.803	-0.131	0.070	0.108***	0.999***	-0.113***	0.056***
	英国	0.091	1.865	-0.115	0.076	0.047***	1.075***	-0.090***	0.057***
	米国	0.066	0.819	-0.114	0.062	0.069***	0.848***	-0.110***	0.052***
b) 金融不安の 拡大期 (07年8月9日～ 08年9月14日)	日本	0.152	1.330	-0.206	0.008	0.144***	1.028***	-0.218***	0.008
	ドイツ	0.060*	2.924***	-0.104***	0.067	0.115***	1.694***	-0.130***	0.075***
	英国	0.135	1.019	-0.195	0.080	0.094***	0.856***	-0.239***	0.014***
	米国	0.110	1.107	-0.182	0.071	0.100***	1.074***	-0.199***	0.038***
c) リーマン・ ショック後 (08年9月15日～ 09年9月30日)	日本	0.290	0.989	-0.337	0.104	0.166***	1.242**	-0.206***	0.039
	ドイツ	0.192	1.011	-0.288	0.128	0.164***	1.369***	-0.265***	0.007
	英国	0.116	1.756	-0.171	0.065	0.106***	1.038***	-0.206***	0.015
	米国	0.219	0.718	-0.385	0.170***	0.121***	1.276***	-0.270***	0.013

備考：*は90%、**は95%、***は99%有意水準で帰無仮説が棄却される推定値 (γ , ξ については両側検定、その他は片側検定)。

有意にゼロではないパラメータが大半となっており、SGMMが推定法として効率的であるといえる。したがって、以下では、SGMMによる推定値によってモデル・地域・時期による相違を評価する。

次に、モデルによる推定値の違いを比較する。a)の平時では、日本以外についてLJDと比べGJDの方がボラティリティ σ が高めに推定されたが、c)のリーマン・ショック以降は、逆にすべての国でLJDの方がボラティリティが高めに推定された。ジャンプ強度 λ は、a)の平時、b)の金融不安の拡大期にはおよそ同じ水準に推定されたが、c)のリーマン・ショック後には、GJDの方が高めに推定された。

さらに、日独英米の各地域の推計値を比較すると、日本は、欧米に比べボラティリティの水準が高い。その他のパラメータについては、時期によってまちまちの水準となっており地域による明確な差異はみられない。モデルの適合度を仮説検定によ

てみると、日本は a)、b)、c)のいずれの時期でも GJD の方が適合がよいことが窺われる。一方、欧米では、a)の平時および b)の金融不安の拡大期には GJD、LJD とともによく適合しているが、やや細かくみると ξ 、 ζ の t 値がやや小さく LJD の適合が幾分よい。しかし、c)のリーマン・ショック後には、GJD のジャンプ幅偏差 δ が有意に推定される一方で、対応する LJD の ξ は有意ではなく、GJD の方が適合がよいことが示唆される。LJD と比べ GJD の方が分布の裾の減衰が急で尖度が小さい形状となることを踏まえると、当該推定結果は、4 節(2)口. で推計された欧米のインプライド確率分布の尖度が平時に日本より高く、リーマン・ショック時に低下したという結果と整合的である。欧米市場では、平時に分布の裾の減衰が日本市場よりも緩やかであったことが示唆される。

最後に、推計値の時間的変化をみる。b)の金融不安の拡大期と c)のリーマン・ショック後を比較すると、ジャンプ強度 λ および GJD のジャンプ幅偏差 δ は明確に上昇したという特徴が窺えるものの、その他のパラメータについては、変化の方向性に明確な特徴は窺えない。分析期間を 3 つに分割した上記の推定では、リーマン・ショック時のように分布が短期間に大きく変化したデータと、その後そうした影響が緩和していく局面のデータを合わせて 1 セットのパラメータを推定するため、短期的な変化を明確に分析できない面がある。そこで、次の口. では、パラメータをローリング推定することで、その時間的変化を細かくみていく。

口. パラメータの推移

次に、分布形状の時間的変化を仔細に分析するため、過去 1 ヶ月 (21 営業日) のサンプルを用いたローリング推定を行う。

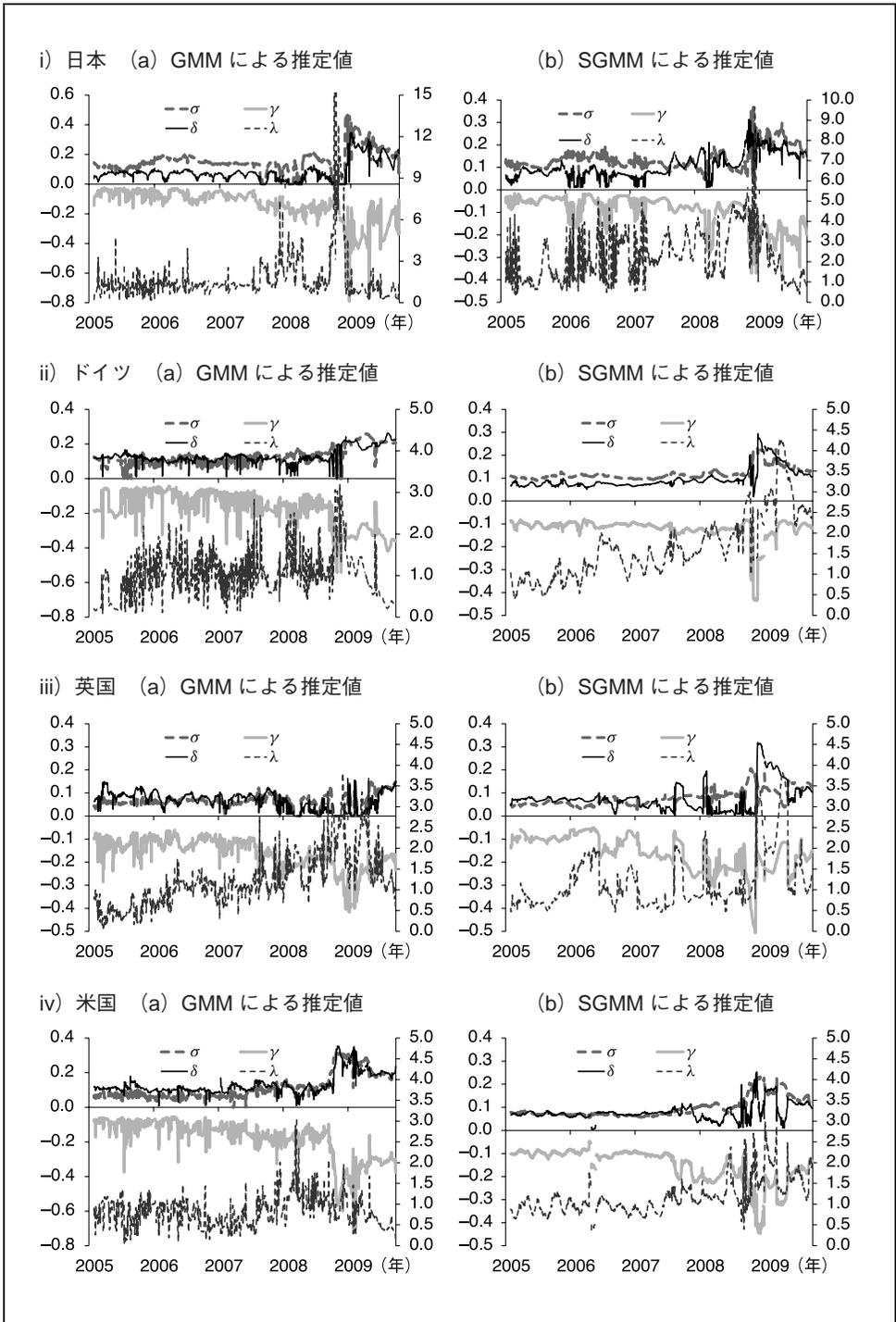
(イ) ガウシアン・ジャンプ拡散過程

図 3 には、GJD を想定した場合の日独英米のパラメータを示している。左列にはインプライド・モーメントから GMM 推定した推定値を、右列にはインプライド特性関数から SGMM 推定した推定値を時系列で示している。GMM による推定値、SGMM による推定値とも、同程度の水準に推定されており、その動きについても、概してみれば似たような方向性を示している。全体としては、SGMM による推定値の方が安定して推定されているほか、異常値が少ないといった特徴がある。パラメータ別にみると、次の 4 つの特徴が挙げられる。

第 1 に、拡散過程のボラティリティ σ は、およそ 0.1 から 0.4 程度に推定されており、杉原 [2010] がモデルフリー・インプライド・ボラティリティとして計測した水準よりやや低めとなった⁴²。リーマン・ショック時には上昇し、その後徐々に水準を切り下げる動きを示した。

42 本稿の σ は純粋に拡散部分のボラティリティ推定値であるのに対して、モデルフリー・インプライド・ボラティリティは、ジャンプも含む 2 次偏分を計算しているため、前者が後者より小さく推定されたという結果は互いに整合的である。

図3 ガウシアン・ジャンプ拡散過程のパラメータ推定結果



備考：λのみ右軸

第2に、ジャンプ幅の平均を表すパラメータ γ は、各国とも常時負に推定された。また、2007年央以降、日英米でそのマイナス幅がじわじわと拡大し、リーマン・ショック時には全地域で急激に拡大した。すなわち、市場では、日頃からマイナス方向の価格の不確実性が強く意識されており、金融危機時にはその傾向が強まったといえる。

第3に、ジャンプ強度を表すパラメータ λ は、振れを伴いながらも、およそ0.5から3程度の範囲で推定された。これは、市場が今後1年間にゼロから数回の頻度でジャンプが発生する可能性を織り込んでいたことを意味する⁴³。平時と金融危機時では、他のパラメータほどの明確な変化はなく、市場は、平時からジャンプの可能性を相応に織り込んでいた。ただし、2007年央以降はその水準が幾分切り上がったように窺われる。

第4に、ジャンプ幅の標準偏差 δ は、レベルが国によってまちまちの水準に推定された。リーマン・ショック時には一時的に低下し、その後上昇するという動きは各国に共通して観察された。

(ロ) ラプラシアン・ジャンプ拡散過程

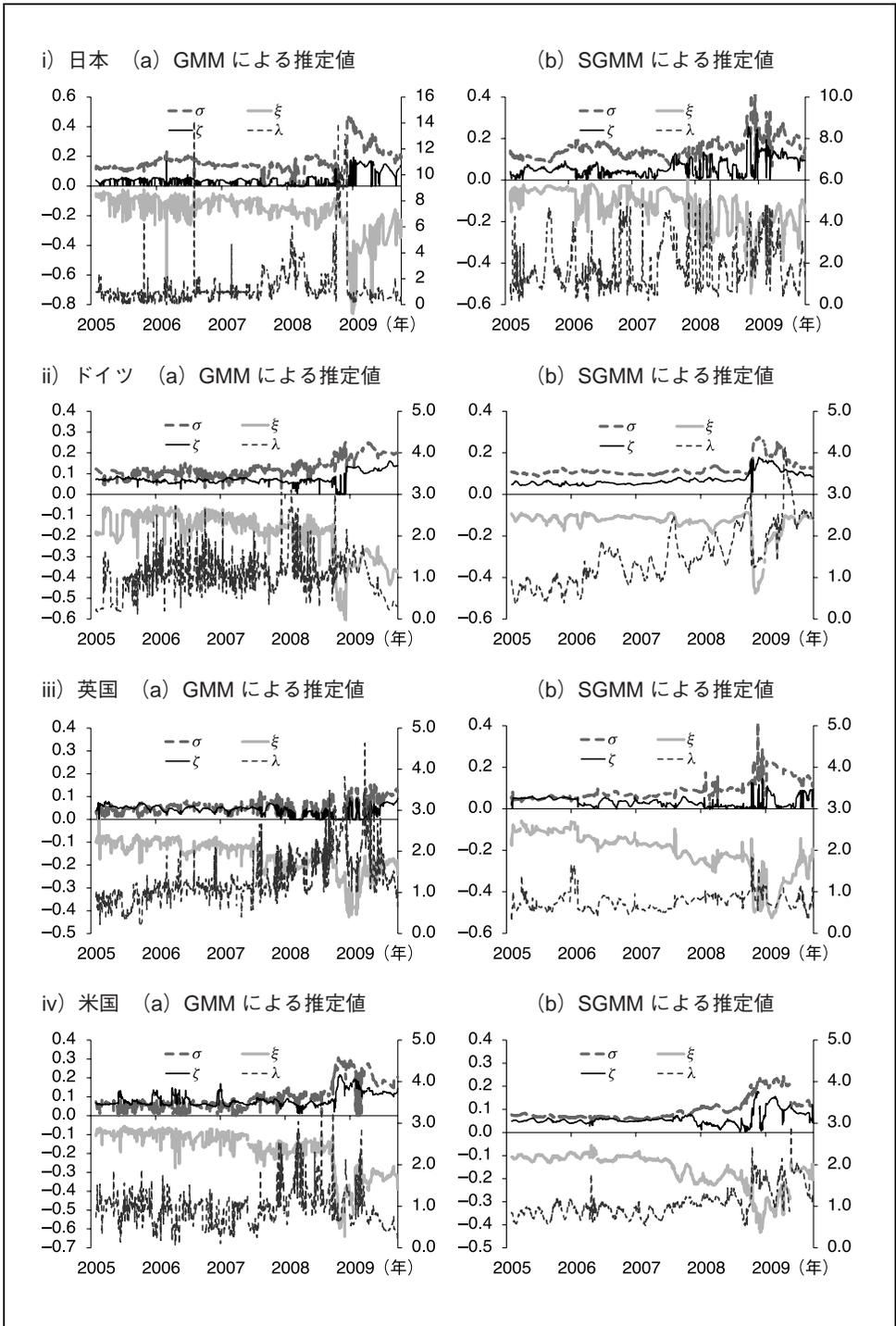
図4には、LJDを想定した場合のパラメータの推定値を時系列で示した。図3と同様に、左列にGMMによる推定値、右列にSGMMによる推定値を時系列で示している。GJDの推定値と比較すると、パラメータの変化の方向は、概して似通っている。やや細かくみると、金融危機時におけるジャンプ幅平均のパラメータの落ち込みはLJDの方が幾分深く、その後の回復もLJDの方が概して遅い。分布の裾の減衰が緩やかなLJDでこうした特徴がみられたことは、リーマン・ショック後、大きな価格変動に対するより慎重な期待形成がなされていたことを示唆している。また、推定値の安定性をみると、日本については、GJDの方が安定的に推定された一方で、独英米では、LJDの方が安定的に推定された。これは、前述の4節(3)イ.の結果と整合的である。

ハ. インプライド・ジャンプ

インプライド確率分布の背後にあるジャンプ拡散過程の中で、ジャンプ過程の部分を本稿ではインプライド・ジャンプと呼ぶ。インプライド・ジャンプを用いることで、ブラウン運動（すなわち正規分布）としては捉えることができない、大きく不連続な価格変化に関する市場の期待を観察できる。インプライド・ジャンプは、3節(1)の(6)式で定義したジャンプ過程 J_t として推定できる。GJD、LJDを前提とした場合の J_t の期待値は、それぞれ $\lambda\gamma t$ 、 $\lambda\zeta t$ 、同分散は、それぞれ $\lambda(\gamma^2 + \delta^2)t$ 、 $\lambda(\zeta^2 + 2\zeta^2)t$ と簡単なかたちで表すことができることから、4節(3)ロ. で推定した各

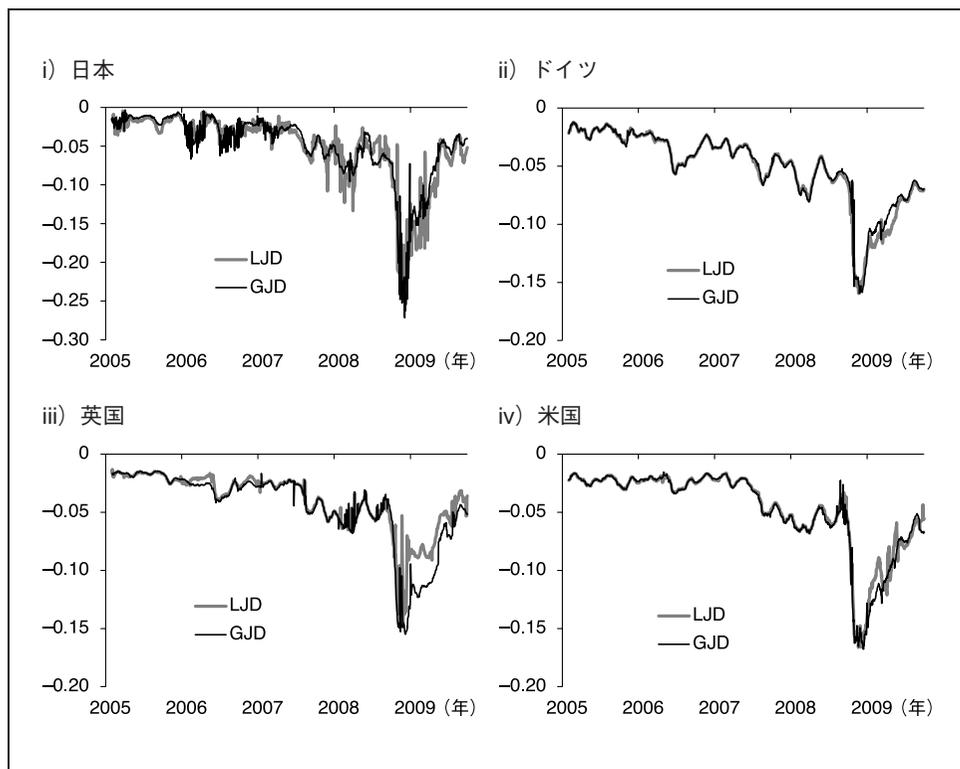
43 本分析のようなポアソン頻度ジャンプ拡散過程では、ジャンプの発生頻度が強度 λ のポアソン過程に従うとしている。ポアソン過程では、発生回数の平均および分散が λt となる。本稿の実証分析では、 $t = 1/4$ である。

図4 ラプラスジャンプ拡散過程のパラメータ推定結果



備考：λのみ右軸

図5 日独英米のインプライド・ジャンプの推移（期間3ヵ月）



時点のパラメータを用いることで、インプライド・ジャンプの時間的変化やその効果を分析できる。なお、4節(3)イ.およびロ.で示したように、GMMによる推定値対比、SGMMによる推定値がより安定的かつ効率的であることから、以下に示すインプライド・ジャンプの分析にもSGMMによる推定値を用いる。

(イ) インプライド・ジャンプの水準

まず、インプライド・ジャンプの期待値 $E_0^0 J_t$ の動きをみる。図5には、GJD、LJDの2つのジャンプ拡散過程を想定した場合のインプライド・ジャンプ期待値を掲載している。このインプライド・ジャンプの期待値は、株価のリターンが今後3ヵ月間に不連続で大きな価格変動によってどの程度増減するかについての市場の期待を示している。これをみることで、次の4点が確認できる。

第1に、ジャンプの期待値は、分析期間を通して常に負であった。すなわち、市場は、不連続な価格変動が生じるとすれば、期待リターンを低下させる方向であるとみていた。これは、4節(2)イ.で示した3次モーメントが分析期間を通して負であったことと整合的である。

第2に、2007年央以前の平時には、各国のインプライド・ジャンプはおおよそ-1%から-5%の範囲で推移した。すなわち、オプション市場は、平時においても、価格

ジャンプの寄与によって、株価のリターンが今後3ヵ月間にマイナス数%程度は低下すると見込んでいた。

第3に、2007年央以降、インプライド・ジャンプのマイナス幅は各国で拡大した。さらに、リーマン・ショック時には、同マイナス幅が顕著に拡大した。同時期には、市場は、3ヵ月後までに、価格が-15%超まで大幅にジャンプする可能性を織り込んでいた。国別にみると、リーマン・ショック時のインプライド・ジャンプは、日本において約-25%と、欧米の-15%程度と比較して大きかった。

第4に、リーマン・ショック以降は、インプライド・ジャンプのマイナス幅は徐々に縮小し、2009年9月末には、およそリーマン・ショック直前の水準まで戻った。

(ロ) インプライド・ジャンプの寄与

次に、インプライド・ジャンプの分散の動きをみる。ここでは、ブラウン運動のボラティリティと比較することで、2次のインプライド・モーメント、すなわちインプライド分散に占めるジャンプの寄与として分析する⁴⁴。図6、図7には、それぞれGJD、LJDを想定した場合のジャンプの成分(左列)とその寄与度(右列)の時系列を示した⁴⁵。モデルや国による違いはあるものの、概ね次の2点が確認できる。

第1の特徴として、平時からジャンプの寄与は相応に存在していた。具体的には、日本では、2次モーメントの約4割、ドイツでは約6割、英国では約8割、米国では約7割がジャンプに起因すると推計された。なお、これらの割合がやや大きめに推計されている可能性として、本稿のようにジャンプ拡散過程を想定すると、ボラティリティのスマイル構造を生成する要因がジャンプのみであると認識される点がある⁴⁶。また、各国のジャンプ寄与の相違については、オプション市場の成熟度の違いが影響している可能性もある。すなわち、原資産価格から大きく乖離した権利行使価格をもつオプションまで取引が行われることがある英米では、インプライド確率分布の裾がその分厚く推計されることがあり、平時からジャンプが多いと評価されうる。

第2の特徴として、金融危機時にはジャンプの寄与が増大した。その増大の程度は各国まちまちではあるが、平時のジャンプ寄与が比較的小さい日独で、ジャンプ寄与の拡大がより大きかった。

44 GJD、LJDともに、2次モーメントに対するブラウン運動の寄与は $\sigma^2 t$ 、ジャンプの寄与は J_t の分散となる。

45 過去21営業日のインプライド特性関数から推計したパラメータを用いてジャンプ成分と拡散成分を推計しているため、両者の合算値は、図1で示した2次モーメントの推計値を後方に均した水準となる。

46 例えばボラティリティを可変とし、さらにジャンプを加えた確率的ボラティリティ変動ジャンプ拡散過程などによって推計すると、ジャンプのほかにボラティリティと原資産価格の相関といった要素もスマイル構造を作り出すため、ジャンプの寄与度は本稿の推計より低下する可能性がある。

図6 インプライド分散に占めるジャンプの寄与（ガウシアン・ジャンプ拡散過程）

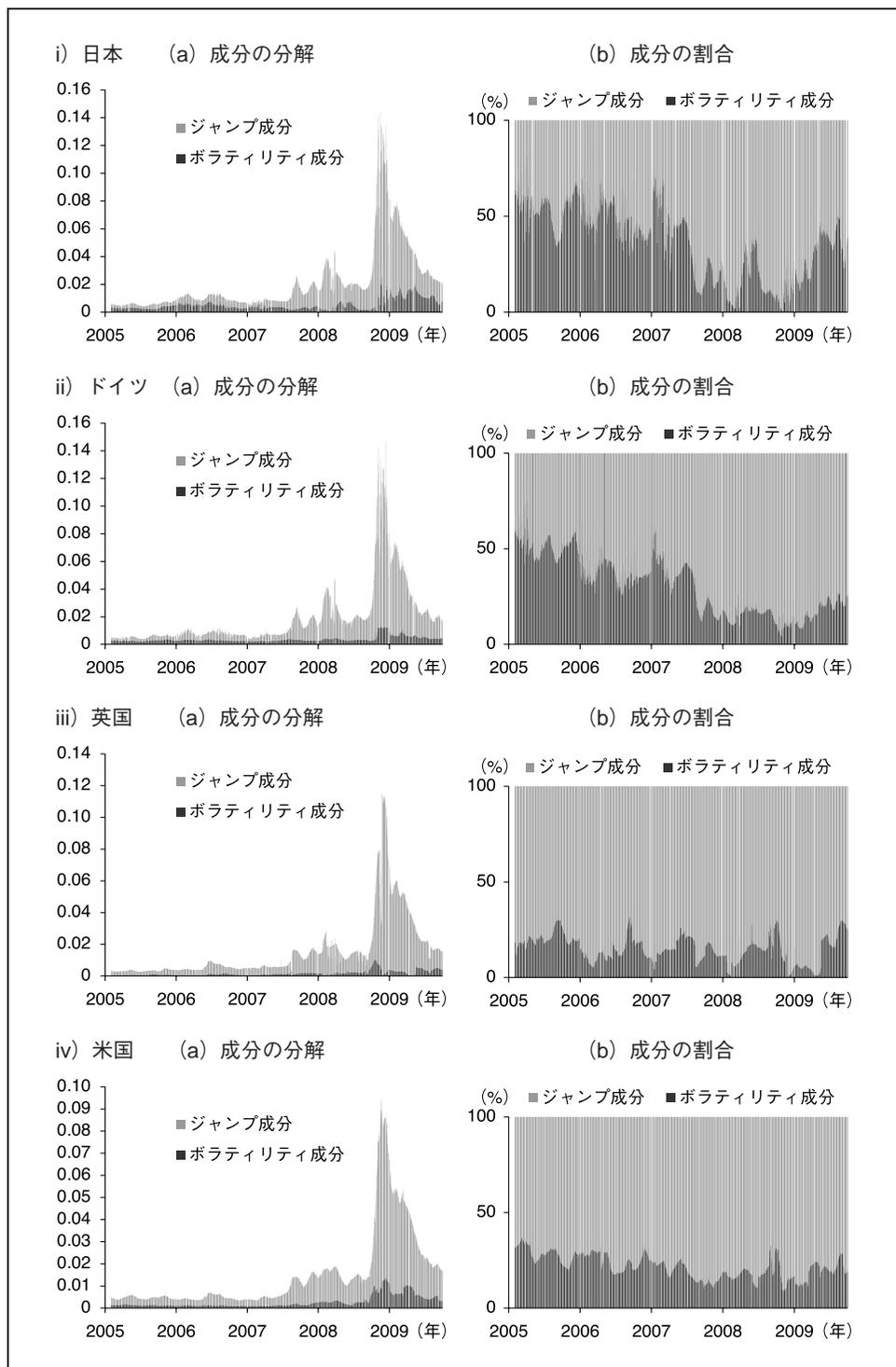
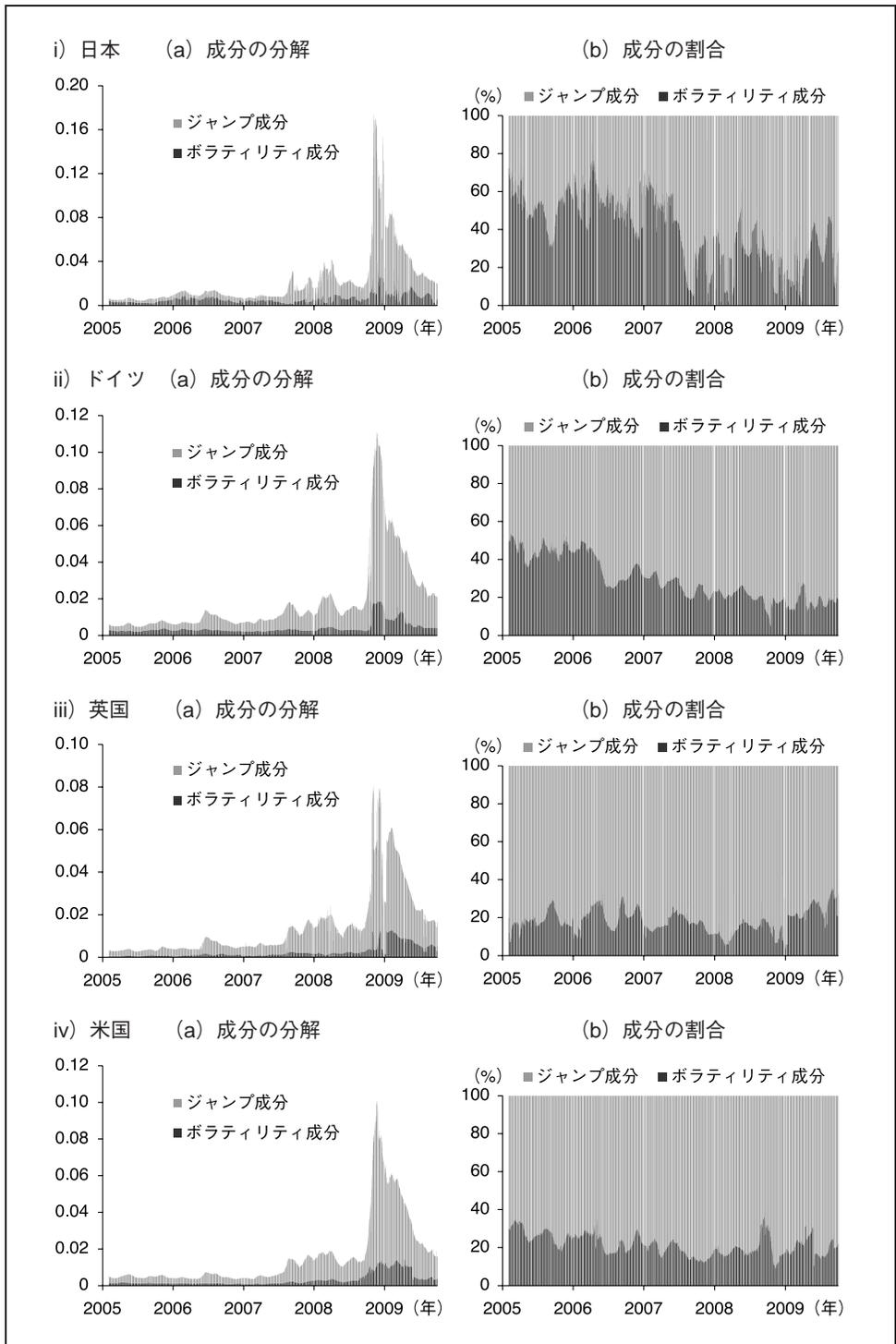


図7 インプライド分散に占めるジャンプの寄与（ラプラスジャンプ拡散過程）



5. おわりに

本稿では、インプライド・モーメントおよびインプライド特性関数を推計するノンパラメトリック分析と、ジャンプ拡散過程を用いたパラメトリック分析により、金融危機時に株式市場の期待がどのように推移したかを検証した。具体的には、まず Bakshi, Kapadia, and Madan [2003] が提案した手法を改良し、リスク中立確率のもとで株価収益率のべき乗の期待値を計算することにより、インプライド確率分布のモーメントおよび特性関数が、プレーンなオプションの価格によって解析的に表現できることを示した。当該手法を日独英米の株価指数に応用して、今次金融危機を挟む 2005 年初から 2009 年半ばまでの期間について、特定のモデルを仮定することなくインプライド確率分布の時間的変化を分析した。また、インプライド確率分布の背後にある確率過程について、2 種類のジャンプ拡散過程を想定し、それぞれのパラメータを、上記で推計したインプライド・モーメントおよび特性関数から推定した。こうした結果を踏まえて、インプライド確率分布を正規分布から乖離させるジャンプ過程の方向や大きさが、金融危機時に市場でどのように想定されてきたか、また、ブラウン運動とジャンプ過程の寄与がどのように変化したかといった点を考察した。

結果として、今次金融危機で市場の不安心理が高まった局面では、いずれの国においても、ブラウン運動によって記述される連続的な株価変動の幅が拡大したと同時に、ジャンプ過程によって記述される不連続な株価変動の可能性がダウンサイドに増大したことがわかった。こうした動きは、インプライド確率分布をみた場合に、2 次モーメントの増大に加え、3 次モーメントのマイナス幅の拡大、4 次モーメントの増大といった特徴となって現れることも確認された。また、分布の変化を歪度や尖度で見ると、金融危機時には、分散が極端に増大した一方で、歪度のマイナス幅は縮小したほか、尖度も低下し、平時にみられる分布の急尖性は危機時にはむしろ弱まってみえたことも判明した。

本研究に残された課題としては、まず分析期間の延長が挙げられる。日本のバブル崩壊時や、LTCM 危機、IT バブル崩壊時など、さまざまな市場ストレス時の動きを分析し、今次金融危機との共通点と相違点を考察することは興味深いと思われる。また、株価変動について、他のジャンプ拡散過程や確率的ボラティリティ変動ジャンプ拡散過程により検証することも考えられる。局面に応じてモデルの適合度がどう変化するかについても興味深い。このほか、高次モーメントの変動を踏まえ、リスク中立測度と現実測度の関係や両者の変換について研究することも有益であると思われる。さらに、本稿の分析手法は、株式以外の金融資産価格を分析するうえでも有効であると考えられ、為替レートや金利の期待形成などを含め、汎用性のある市場分析手法の 1 つとして発展していくことが期待される。

参考文献

- 小田信之・吉羽要直、「デリバティブ商品価格から導出可能な市場情報を利用したマーケット分析方法」、『金融研究』第17巻第2号、日本銀行金融研究所、1998年、1～34頁
- 小林寛司・宮崎浩一・田中健太郎、「拡散モデルとジャンプ拡散モデルを用いた日経225オプション市場の価格形成に関する検証」、『情報処理学会論文誌』第50巻第12号、2009年、1～11頁
- 清水良一、『中心極限定理』、教育出版、シリーズ新しい応用の数学14、1976年
- 白塚重典・中村 恒、「金融市場における期待形成の変化—オプション取引価格の情報変数としての有用性に関する一考察—」、『金融研究』第17巻第4号、日本銀行金融研究所、1998年、129～172頁
- 杉原慶彦、「わが国株式市場のモデルフリー・インプライド・ボラティリティ」、『金融研究』第29巻第2号、日本銀行金融研究所、2010年、73～120頁
- 野村哲史・宮崎浩一、「日経225オプションの織り込む株価過程の連続成分とジャンプ成分」、『現代ファイナンス』第18巻、2005年、47～67頁
- 久田祥文、「ジャンプ拡散過程を用いたオプション価格付けモデルについて」、『金融研究』第22巻別冊第1号、日本銀行金融研究所、2003年、51～86頁
- 宮崎浩一、『オプション市場分析への招待』、朝倉書店、応用ファイナンス講座5、2009年
- 宮原孝夫、『株価モデルとレヴィ過程』、朝倉書店、金融工学の基礎シリーズ1、2003年
- Ait-Sahalia, Yacine, and Michael W. Brandt, “Consumption and Portfolio Choice with Option-Implied State Prices,” NBER Working Paper No. 13854, 2008.
- Andersen, Leif B. G., and Vladimir V. Piterbarg, “Moment Explosions in Stochastic Volatility Models,” *Finance and Stochastics*, 11 (1), 2007, pp. 29–50.
- Andrews, Donald W. K., “Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation,” *Econometrica*, 59 (3), 1991, pp. 817–858.
- Bakshi, Gurdip, Charles Cao, and Zhiwu Chen, “Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models,” *The Journal of Finance*, 52 (5), 1997, pp. 2003–2049.
- , Kikunj Kapadia, and Dilip B. Madan, “Stock Return Characteristics, Skew Laws, and the Differential Pricing of Individual Options,” *The Review of Financial Studies*, 16, 2003, pp. 101–143.
- Barndorff-Nielsen, Ole E., “Normal Inverse Gaussian Distribution and the Modelling of Stock Returns,” Research Report No. 300, Department of Theoretical Statistics, Aarhus University, 1995.
- Boyarchenko, Svetlana I., and Sergei Z. Levendorskiĭ, “Option Pricing for Truncated Lévy Processes,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3 (3), 2000, pp. 549–552.

- Breedon, Douglas T., and Robert H. Litzenberger, "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices," *Journal of Business*, 51 (4), 1978, pp. 621–651.
- Broadie, Mark, Mikhail Chernov, and Michael Johannes, "Model Specification and Risk Premia: Evidence from Futures Options," *The Journal of Finance*, 62 (3), 2007, pp. 1453–1490.
- Carr, Peter, and Liuren Wu, "The Finite Moment Log Stable Process and Option Pricing," *The Journal of Finance*, 58 (2), 2003a, pp. 753–777.
- , and ———, "What Type of Process Underlying Options? A Simple Robust Test," *The Journal of Finance*, 58 (6), 2003b, pp. 2581–2610.
- , Hélyette Geman, Dilip B. Madan, and Marc Yor, "The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation," *Journal of Business*, 75 (2), 2002, pp. 305–332.
- Carrasco, Marine, Mikhail Chernov, Jean-Pierre Florens, and Eric Ghysels, "Efficient Estimation of Jump Diffusions and General Dynamic Models with a Continuum of Moment Conditions," CIRANO Working Papers 2003s-02, CIRANO, 2003.
- Chacko, George, and Luis M. Viceira, "Spectral GMM Estimation of Continuous-Time Processes," *Journal of Econometrics*, 116, 2003, pp. 259–292.
- Cont, Rama, and Peter Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC, Financial Mathematics Series, 2004a.
- , and ———, "Non-parametric Calibration of Jump Diffusion Option Pricing Models," *Journal of Computational Finance*, 7, 2004b, pp. 1–49.
- Feuerverger, Andrey, "An Efficiency Result for the Empirical Characteristic Function in Stationary Time-Series Models," *The Canadian Journal of Statistics*, 18 (2), 1990, pp. 155–161.
- , and Philip McDunnough, "On the Efficiency of Empirical Characteristic Function Procedures," *Journal of Royal Statistical Society, B*, 43 (1), 1981, pp. 20–27.
- Hamilton, James D., *Time Series Analysis*, Princeton University Press, 1994.
- Hodrick, Robert J., and Edward C. Prescott, "Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation," *Journal of Money, Credit, and Banking*, 29 (1), 1997, pp. 1–16.
- Honoré, Peter, "Pitfalls in Estimating Jump-Diffusion Models," Working Paper No. 18, University of Aarhus, School of Business, 1998.
- Jiang, George J., and John L. Knight, "Estimation of Continuous-Time Processes via the Empirical Characteristic Function," *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 2002, pp. 198–212.
- Koponen, Ismo, "Analytic Approach to the Problem of Convergence of Truncated Lévy Flights towards the Gaussian Stochastic Process," *Physical Review E*, 52, 1995, pp. 1197–1199.
- Kou, Steven G., "A Jump-Diffusion Model for Option Pricing," *Management Science*, 48, 2002, pp. 1086–1101.

- Madan, Dilip B., Peter Carr, and Eric C. Chang, "The Variance Gamma Process and Option Pricing," *European Finance Review*, 2 (1), 1998, pp. 79–105.
- Merton, Robert C., "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 3, 1976, pp. 125–144.
- Nakajima, Jochi, and Yasuhiro Omori, "Leverage, Heavy-Tails and Correlated Jumps in Stochastic Volatility Models," *Computational Statistics and Data Analysis*, 53, 2009, pp. 2335–2353.
- Newey, Whitney K., and Kenneth D. West, "A Simple Positive Semi-definite Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix," *Econometrica*, 55 (3), 1987, pp. 703–708.
- Pan, Jun, "The Jump-Risk Premia Implicit in Options: Evidence from an Integrated Time-Series Study," *Journal of Financial Economics*, 63 (1), 2002, pp. 3–50.
- Ramezani, Cyrus A., and Yong Zeng, "Maximum Likelihood Estimation of the Double Exponential Jump-Diffusion Process," *Annals of Finance*, 3 (4), 2007, pp. 487–507.
- Samorodnitsky, Gennady, and Murad S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall/CRC, 1994.
- Schoutens, Wim, *Lévy Process in Finance, Pricing Financial Derivatives*, Wiley Series in Probability and Statistics, 2003.
- Singleton, Kenneth J., "Estimation of Affine Asset Pricing Models Using the Empirical Characteristic Function," *Journal of Econometrics*, 102 (1), 2001, pp. 111–141.
- Yu, Jun, "Empirical Characteristic Function Estimation and Its Applications," *Econometric Reviews*, 23 (2), 2004, pp. 93–123.

補論 1. インプライド・モーメントの導出

補論 1 では、(1) 式に示したゼロまわりのインプライド・モーメントの導出を示す。
2 階微分可能なペイオフ関数 $f(x)$ について、

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \int_x^\infty (y-v)^+ f''(v) dv + \int_0^x (v-y)^+ f''(v) dv,$$

が成り立つ⁴⁷。ここで、 x^+ は x の正部分 ($x > 0$ のときは x 、 $x \leq 0$ のときは 0) を表す。 $x = S_0$ 、 $y = S_t$ 、 $v = K$ のとき、上式についてリスク中立測度下で期待値をとると、 $E_0^Q S_t = S_0 e^{rt}$ であることから、

$$\begin{aligned} E_0^Q[f(S_t)] &= f(S_0) + f'(S_0)(E_0^Q S_t - S_0) \\ &\quad + e^{rt} E_0^Q \int_0^{S_0} f''(K) e^{-rt} (K - S_t)^+ dK \\ &\quad + e^{rt} E_0^Q \int_{S_0}^\infty f''(K) e^{-rt} (S_t - K)^+ dK \\ &= f(S_0) + S_0 e^{rt} f'(S_0) - S_0 f'(S_0) \\ &\quad + e^{rt} \int_0^\infty f''(K) \Theta(0, t, K) dK. \end{aligned} \tag{A-1}$$

$f(S_t) = R_t^n = [\ln(S_t/S_0)]^n$ ($n = 1, 2, \dots$) とすると、

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dS_t^2} \left[\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \right]^n \\ &= \begin{cases} \frac{1}{S_t^2} \left\{ n(n-1) \left[\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \right]^{n-2} - n \left[\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \right]^{n-1} \right\} & (n \geq 2), \\ -\frac{1}{S_t^2} & (n = 1), \end{cases} \end{aligned} \tag{A-2}$$

である。 $n \leq 2$ のとき、 $f(S_0) = 0$ 、 $f'(S_0) = 0$ であることから、(A-2) 式を (A-1) 式に適用することで、

$$\begin{aligned} &E_0^Q[R_t^n] \\ &= e^{rt} \int_0^\infty \frac{\Theta(0, t, K)}{K^2} \left\{ n(n-1) \left[\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) \right]^{n-2} - n \left[\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) \right]^{n-1} \right\} dK \quad (n \geq 2), \end{aligned} \tag{A-3}$$

47 証明は杉原 [2010] の補論 1. (2) を参照。

となる。 $n = 1$ のとき、 $f(S_0) = 0$ 、 $f'(S_0) = 1/S_0$ であることから、(A-2) 式を (A-1) 式に適用することで、

$$E_0^Q[R_t] = e^{rt} - 1 - e^{rt} \int_0^\infty \frac{\Theta(0, t, K)}{K^2} dK, \quad (\text{A-4})$$

となる。 ■

補論 2. インプライド特性関数の導出

補論 2 では、(4) 式に示したインプライド特性関数の導出を示す。

リターン分布の特性関数 $\Phi_{R_t}(\omega) = E_0^Q e^{i\omega R_t}$ を R_t についてマクローリン展開し、(A-3)、(A-4) 式を適用すると、

$$\begin{aligned}
 \Phi_{R_t}(\omega) &= E_0^Q e^{i\omega R_t} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\omega)^n E_0^Q R_t^n \\
 &= 1 + i\omega(e^{rt} - 1) - i\omega e^{rt} \int_0^{\infty} \frac{\Theta(0, t, K)}{K^2} dK \\
 &\quad + e^{rt} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} \int_0^{\infty} \frac{\Theta(0, t, K)}{K^2} \\
 &\quad \quad \quad \times \left\{ n(n-1) \left[\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) \right]^{n-2} - n \left[\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) \right]^{n-1} \right\} dK \\
 &= 1 + i\omega(e^{rt} - 1) - \omega(\omega + i)e^{rt} \int_0^{\infty} \frac{\Theta(0, t, K)}{K^2} \left(\frac{K}{S_0}\right)^{i\omega} dK, \quad (\text{A-5})
 \end{aligned}$$

が得られる。 ■

(A-5) 式は、Breedon and Litzenberger [1978] が導入したインプライド確率密度関数からも導出できる。Breedon and Litzenberger [1978] によると、時刻 0 における期待株価 S_t のインプライド確率密度関数 $f_{S_t}(x)$ ($x > 0$) は、時刻 0 における満期 t 、権利行使価格 K のコールオプション価格 $C(0, t, K)$ を用いて、

$$f_{S_t}(x) = e^{rt} \frac{\partial^2 C(0, t, K)}{\partial K^2} \Big|_{K=x}, \quad (\text{A-6})$$

と表すことができる⁴⁸。これをリターンの確率密度関数 $f_{R_t}(\bar{x})$ に変換すると、

48 デイラックのデルタ関数を $\delta(x)$ 、ヘビサイドのステップ関数を $\theta(x)$ とかくと、 $\theta'(x) = \delta(x)$ である。また、コールオプション価格は、

$$C(0, t, K) = e^{-rt} E_0^Q (S_t - K)^+ = e^{-rt} \int_0^{\infty} (x - K)\theta(x - K) f_{S_t}(x) dx,$$

であるから、 K で偏微分すると、

$$C_K(0, t, K) = e^{-rt} \int_0^{\infty} [-\theta(x - K) - (x - K)\delta(x - K)] f_{S_t}(x) dx = -e^{-rt} \int_0^{\infty} \theta(x - K) f_{S_t}(x) dx.$$

再度 K で偏微分すると、

$$f_{R_i}(\bar{x}) = x e^{rt} \frac{\partial^2 C(0, t, K)}{\partial K^2} \Big|_{K=\bar{x}}, \quad (\text{A-7})$$

となる⁴⁹。リターンの特性関数 $\Phi_{R_i}(\omega)$ は、上記に従って確率測度を変換し部分積分を適用することで、

$$\begin{aligned} \Phi_{R_i}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\bar{x}} f_{R_i}(\bar{x}) d\bar{x} \\ &= e^{rt} \int_0^{\infty} e^{i\omega \ln(K/S_0)} \frac{\partial^2 C(0, t, K)}{\partial K^2} dK \\ &= i\omega(i\omega - 1)e^{rt} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega \ln(K/S_0)}}{K^2} C(0, t, K) dK. \end{aligned}$$

ここで、コールオプション価格が⁵、漸近的に $C_K(0, t, 0) = -e^{-rt}$, $C_K(0, t, \infty) = C(0, t, \infty) = 0$ となることを利用している。プット・コール・パリティを用いて OTM オプション価格 $\Theta(0, t, K)$ によって表現すると、

$$\begin{aligned} \Phi_{R_i}(\omega) &= i\omega(i\omega - 1)e^{rt} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega \ln(K/S_0)}}{K^2} \Theta(0, t, K) \\ &\quad + i\omega(i\omega - 1)e^{rt} \int_0^{S_0} \frac{e^{i\omega \ln(K/S_0)}}{K^2} (S_0 - Ke^{-rt}) dK \\ &= 1 + i\omega(e^{rt} - 1) - \omega(\omega + i)e^{rt} \int_0^{\infty} \frac{\Theta(0, t, K)}{K^2} \left(\frac{K}{S_0}\right)^{i\omega} dK, \end{aligned}$$

となり、(A-5) 式と一致する。

$$C_{KK}(0, t, K) = e^{-rt} \int_0^{\infty} \delta(x - K) f_{S_t}(x) dx = e^{-rt} f_{S_t}(K),$$

から (A-6) 式が得られる。

49 逆関数が存在する微分可能な関数 g について、確率変数 X から確率変数 $\bar{X} = g(X)$ への測度変換を考えると、確率密度関数は、その定義域において、

$$f_{\bar{X}}(\bar{x}) = \left| \frac{dx}{d\bar{x}} \right| f_X(x) = \frac{f_X(g^{-1}(\bar{x}))}{|g'(g^{-1}(\bar{x}))|},$$

と変換される。 $\bar{x} = g(x) = \ln x$ のとき、 $g'(g^{-1}(\bar{x})) = e^{-\bar{x}} = 1/x$ となるため、(A-7) 式が得られる。

補論 3. レヴィ過程の紹介

補論 3 では、本文中では扱っていないものの、ファイナンスでしばしば用いられるレヴィ過程のうち、モーメントが簡単なかたちで記述できるものの一部を紹介する。なお、レヴィ過程に関する書籍には Schoutens [2003]、宮原 [2003]、Cont and Tankov [2004a] などがある。詳しくはそれらを参照。

(1) ジャンプ拡散過程：両側指数ジャンプ拡散過程 (Kou モデル)

はじめに、ジャンプ拡散過程を紹介する。本稿では GJD、LJD を取り上げたが、それ以外にも、ファイナンスでは、非対称両側指数ジャンプ拡散過程 (asymmetric double exponential jump diffusion process; DEJD) がしばしば利用される。DEJD は、中心がゼロで両側が減衰度の異なる指数分布でジャンプ幅の分布を表現した過程であり、Kou [2002] によって提案された。それによると、 η_+ 、 η_- をそれぞれ正負方向のジャンプ幅分布の裾の減衰を特徴付ける正のパラメータ、 p を正のジャンプが発生する確率を表すパラメータ ($0 \leq p \leq 1$) とすると、ジャンプ幅 Y が従う確率密度関数 f_Y^{DE} は、

$$\tilde{f}_Y^{\text{DE}}(x) = p\eta_+e^{-\eta_+x}\mathbf{1}\{x > 0\} + (1-p)\eta_-e^{\eta_-x}\mathbf{1}\{x < 0\},$$

と表される。これより、ジャンプ幅 Y の特性関数は $\tilde{\Phi}_Y^{\text{DE}}(\omega) = -(p\eta_+)/(\omega - \eta_+) + ((1-p)\eta_-)/(\omega + \eta_-)$ となる⁵⁰。また、ジャンプ拡散過程の特性関数は、

$$\tilde{\Phi}_{R_t}^{\text{DEJD}}(\omega) = \exp\left[t\left\{i\mu\omega - \frac{\sigma^2}{2}\omega^2 - i\lambda\omega\left(\frac{p}{i\omega - \eta_+} + \frac{1-p}{i\omega + \eta_-}\right)\right\}\right],$$

となる。リスク中立測度下での価格過程を表現する場合、リスク中立条件から、 $\mu = r - \sigma^2/2 + \lambda\{p/(1-\eta_+) + (1-p)/(1+\eta_-)\}$ と決まる。また、モーメントは、

$$\begin{cases} \tilde{m}_1^{\text{DEJD}} = \lambda t(p/\eta_+ - (1-p)/\eta_-) + \mu t, \\ \tilde{m}_2^{\text{DEJD}} = \lambda t(p/\eta_+^2 + (1-p)/\eta_-^2) + \sigma^2 t, \\ \tilde{m}_3^{\text{DEJD}} = \lambda t(p/\eta_+^3 - (1-p)/\eta_-^3), \\ \tilde{m}_4^{\text{DEJD}} = \lambda t(p/\eta_+^4 + (1-p)/\eta_-^4) + 3(\tilde{m}_2^{\text{DEJD}})^2. \end{cases} \quad (\text{A-8})$$

50 $|e^{i\omega x}| = 1$ より、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{i(\omega \mp \eta_{\pm})x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\mp \eta_{\pm}x} = 0$ (複合同順) であることを利用。

(2) ブラウン運動の時間を変更した過程

次に、ブラウン運動の時間を変更することで構築されるレヴィ過程の一部を紹介する。ある計数過程 G_t に基づいた時間変更を考え、ドリフト付きブラウン運動 $\mu t + \sigma W_t$ に適用した過程を X_t とすると、

$$X_t = \mu G_t + \sigma W_{G_t}, \quad (\text{A-9})$$

とかける。こうした過程は、時間変更ブラウン運動 (time-changed Brownian motion; TCBM) と呼ばれている。 X_t の特性関数は、 G_t の G_0 条件付き確率密度関数 \tilde{f}_{G_t} を用いて、

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{X_t}^{\text{TCBM}}(\omega) &= E_0^G[E_0^B[e^{i\omega X_t}] | G_t] \\ &= \int_0^\infty \exp\left(i\mu x \omega - \frac{x\sigma^2 \omega^2}{2}\right) \tilde{f}_{G_t}(x) dx, \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

と計算できる⁵¹。TCBM は、ブラウン運動の時間がランダムに伸縮することにより、正規分布より裾が厚い分布を生成する過程である。同過程は、一部パラメータの意味付けがジャンプ拡散過程のようにわかりやすいものではない一方で、少ないパラメータ (もとのブラウン運動のドリフト μ 、ボラティリティ σ と、時間変更の分散の主に3つ) で変化に富んだ分布が表現可能である。

イ. バリانس・ガンマ過程 (variance Gamma process)

Madan, Carr, and Chang [1998] は、 G_t が平均が1であるガンマ過程に従うとしたTCBMであるバリانس・ガンマ過程 (variance Gamma process; VG 過程) を考え、それに基づいたオプション評価法を示した⁵²。ガンマ過程の分散を ν とすると、平均1のガンマ過程の確率密度は $\tilde{f}_{G_t}^{\text{Gamma}}(x) = (\nu^{-t/\nu} / \Gamma(t/\nu)) x^{t/\nu-1} e^{-x/\nu}$ であるから⁵³、(A-10) 式より、VG 過程の特性関数は、

$$\tilde{\Phi}_{X_t}^{\text{VG}}(\omega) = \left(1 - i\mu\nu\omega + \frac{\sigma^2}{2}\nu\omega^2\right)^{-t/\nu},$$

と計算できる⁵⁴。

Madan, Carr, and Chang [1998] では、リスク中立測度下のリターンのモデルとして、 X_t にドリフトを加えた

51 E^G は、 G_t についての期待値を表す。

52 ガンマ過程とは、時間増分が独立なガンマ分布に従うとしたレヴィ過程の一種。

53 Γ はガンマ関数: $\Gamma(z) = \int_{\mathbb{R}^+} x^{z-1} e^{-x} dx$ 。

54 (A-10) 式で $x \rightarrow x(1/\nu - i\mu\omega + (\sigma^2/2)\omega^2)$ の変数変換を行い、 $\Gamma(t/\nu) = \int_{\mathbb{R}^+} x^{t/\nu-1} e^{-x} dx$ であることを用いる。

$$R_t = (r + l)t + X_t,$$

を提案している⁵⁵。ただし、 l はリスク中立条件から、 $l = (1/\nu) \ln(1 - \mu\nu - \sigma^2\nu/2)$ である。また、特性関数は、 $\tilde{\Phi}_{R_t}^{\text{VG}}(\omega) = S_0 e^{(r+l)t} \tilde{\Phi}_{X_t}^{\text{VG}}(\omega)$ となる。ここから、VG 過程のモーメントは、

$$\begin{cases} \tilde{m}_1^{\text{VG}} = t(\mu + r + l), \\ \tilde{m}_2^{\text{VG}} = t(\sigma^2 + \mu^2\nu), \\ \tilde{m}_3^{\text{VG}} = t(3\sigma^2\mu\nu + 2\mu^3\nu^2), \\ \tilde{m}_4^{\text{VG}} = t(3\sigma^4\nu + 6\mu^4\nu^3 + 12\mu^2\sigma^2\nu^2) + 3(\tilde{m}_2^{\text{VG}})^2, \end{cases}$$

となる。

□. 正規逆ガウス過程 (normal inverse Gaussian process)

ドリフト β 、ボラティリティ 1 のブラウン運動が³、ゼロからスタートし、ある一定レベル αt ($\alpha > 0$) に最初に到達する時刻列を逆ガウス過程 (inverse Gaussian process) : ϑ_t と呼ぶ。すなわち、 $\vartheta_t(\alpha, \beta) = \inf\{x > 0; \beta x + W_x = \alpha t\}$ であり、その確率密度関数は、

$$\tilde{f}_{\vartheta_t}^{\text{IG}}(x; t, \alpha, \beta) = \frac{\alpha t e^{\alpha\beta t}}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha^2 t^2 x^{-1} + \beta^2 x)\right], \quad (\text{A-11})$$

となる⁵⁶。

55 ドリフトなしの VG 過程は、ジャンプのみの不連続な過程となることから、いつの時点においてもリスク中立的な時間変化を記述できるようにドリフト項を加えている。

56 標準ブラウン運動 W_t の停止時刻を $\tau_m = \inf\{s > 0; W_s = m\}$ とかくと、ブラウン運動の鏡像原理 : $\Pr[\tau_m < t, W_t < w] = \Pr[W_t > 2m - w]$ において $w = m$ とすると、 $\Pr[\tau_m < t, W_t < m] = \Pr[W_t > m] = \Pr[\tau_m < t, W_t > m]$ であるから、

$$\begin{aligned} \Pr[\tau_m < t] &= \Pr[\tau_m < t, W_t > m] + \Pr[\tau_m < t, W_t < m] \\ &= 2\Pr[W_t > m] = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_m^\infty \exp\left[-\frac{y^2}{2t}\right] dy, \end{aligned}$$

である。これを t で微分することで、

$$\Pr(\tau_m = t) = \frac{|m|}{\sqrt{2\pi}} t^{-3/2} \exp\left[-\frac{m^2}{2t}\right],$$

となる。これをドリフト付きブラウン運動 $\beta t + W_t$ へ測度変換すると、ギルサノフの定理より、 $Z_t = e^{\beta W_t - \beta^2 t/2}$ がマルチンゲールであるから、

$$\begin{aligned} \Pr\{\vartheta_t(\alpha, \beta) < x\} &= \mathbb{E}[\mathbf{1}\{\vartheta_t < x\} Z_t] = \int_0^x \Pr[\tau_{\alpha t} = s] \exp\left(\beta\alpha t - \frac{1}{2}\beta^2 s\right) ds \\ &= \frac{\alpha t e^{\alpha\beta t}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x s^{-3/2} \exp\left[-\frac{(\alpha t)^2}{2s} - \frac{1}{2}\beta^2 s\right] ds, \end{aligned}$$

となり、これを x で微分することで (A-11) 式が得られる。

$G_t \equiv \vartheta_t(1, \beta)$ と設定した TCBM は、正規逆ガウス過程 (normal inverse Gaussian process; NIG 過程) と呼ばれ、Barndorff-Nielsen [1995] によって導入された。その特性関数は、(A-11) 式を (A-10) 式に適応することで、

$$\tilde{\Phi}_{X_t}^{\text{NIG}}(\omega) = \exp[\beta t \{1 - \sqrt{1 - 2i\mu\beta^{-2}\omega + \sigma^2\beta^{-2}\omega^2}\}],$$

と計算できる⁵⁷。これから、モーメントは、

$$\begin{cases} \tilde{m}_1^{\text{NIG}} = t\mu/\beta, \\ \tilde{m}_2^{\text{NIG}} = t(\sigma^2/\beta + \mu^2/\beta^3), \\ \tilde{m}_3^{\text{NIG}} = t(3\sigma^2\mu/\beta^3 + 3\mu^3/\beta^5), \\ \tilde{m}_4^{\text{NIG}} = t(3\sigma^4/\beta^3 + 18\mu^2\sigma^2/\beta^5 + 15\mu^4/\beta^7) + 3(\tilde{m}_2^{\text{NIG}})^2, \end{cases}$$

となる。NIG 過程も、VG 過程と同様に、ドリフトを追加的に加えることで、リスク中立となる過程を構成できる。

(3) レヴィ測度を外生的に与えた過程： 緩和安定過程 (tempered stable process)

最後に、ブラウン運動で表示される連続部分 (拡散) がないジャンプだけの価格過程を 1 つ紹介する。こうした過程は、 $\tilde{\nu}(x) = \lambda \tilde{f}_Y(x)$ ($\forall x$) を満たす関数であるレヴィ測度 $\tilde{\nu}$ と、位置変数 (ドリフト) の 2 つによって決定付けられる。特性関数は、(9) 式から、 $\tilde{\Phi}^{\text{PJ}}(\omega) = \exp[t \int_{\mathbb{R}} (e^{i\omega x} - 1) \tilde{\nu}(dx)]$ となる。

緩和安定過程 (tempered stable process; TS 過程) は、安定過程を高次のモーメントが存在するように修正した過程であり⁵⁸、Koponen [1995] によって提案され、

57 第 2 種修正ベッセル関数 $K_\nu(z)$ の積分表示が、 b をパラメータとした変数変換により

$$\begin{aligned} K_\nu(z) &= \int_0^\infty e^{-z \cosh u} \cosh(\nu u) du = \frac{1}{2} \int_0^\infty s^{\nu-1} e^{-\frac{1}{2}z(s+s^{-1})} ds \\ &= \frac{z^\nu}{2b^{2\nu}} \int_0^\infty \frac{\exp[-\frac{1}{2}(b^2x + \frac{z^2}{b^2x})]}{x^{\nu+1}} dx, \end{aligned}$$

となることから、パラメータ a を用いて、

$$K_\nu(ab) = \frac{a^\nu}{2b^\nu} \int_0^\infty x^{-\nu-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2x^{-1} + b^2x)\right] dx,$$

とかける。 $\nu = 1/2$ のとき、 $K_{1/2}(z) = \sqrt{\pi/(2z)}e^{-z}$ であることから、

$$\int_0^\infty x^{-3/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2x^{-1} + b^2x)\right] dx = 2\sqrt{b/a} K_{1/2}(ab) = \sqrt{2\pi} a^{-1} e^{-ab},$$

となることを用いる。

58 ある分布に従う確率変数の有限個の和が、もとの確率変数の 1 次式で表されるような確率分布を安定分布と呼び、時間増分が安定分布に従うレヴィ過程を安定過程 (stable process) と呼ぶ。安定分布は、足し上

Boyarchenko and Levendorskiĭ [2000] によってオプション価格付けに応用され、さらに Cont and Tankov [2004a] によって拡張された。TS 過程のレヴィ測度は、

$$\tilde{\nu}^{\text{TS}}(x) = c_+ x^{-1-\alpha_+} e^{-\lambda_+ x} \mathbf{1}\{x > 0\} + c_- (-x)^{-1-\alpha_-} e^{\lambda_- x} \mathbf{1}\{x < 0\}, \quad (\text{A-12})$$

と設定される。ただし、 c_{\pm} , λ_{\pm} , α_{\pm} は、 $c_{\pm} > 0$, $\lambda_{\pm} > 0$, $\alpha_{\pm} < 2$ となるパラメータである。ここから、特性関数は、

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^{\text{TS}}(\omega) = \exp[& t\{c_+ \Gamma(-\alpha_+) \{(\lambda_+ - i\omega)^{\alpha_+} - \lambda_+^{\alpha_+}\} \\ & + c_- \Gamma(-\alpha_-) \{(\lambda_- - i\omega)^{\alpha_-} - \lambda_-^{\alpha_-}\}\}]. \end{aligned}$$

また、モーメントは、

$$\begin{cases} \tilde{m}_1^{\text{TS}} = t\Gamma(1 - \alpha_+)c_+\lambda_+^{\alpha_+-1} - t\Gamma(1 - \alpha_-)c_-\lambda_-^{\alpha_- -1}, \\ \tilde{m}_2^{\text{TS}} = t\Gamma(2 - \alpha_+)c_+\lambda_+^{\alpha_+-2} + t\Gamma(2 - \alpha_-)c_-\lambda_-^{\alpha_- -2}, \\ \tilde{m}_3^{\text{TS}} = t\Gamma(3 - \alpha_+)c_+\lambda_+^{\alpha_+-3} - t\Gamma(3 - \alpha_-)c_-\lambda_-^{\alpha_- -3}, \\ \tilde{m}_4^{\text{TS}} = t\Gamma(4 - \alpha_+)c_+\lambda_+^{\alpha_+-4} + t\Gamma(4 - \alpha_-)c_-\lambda_-^{\alpha_- -4} + 3(\tilde{m}_2^{\text{TS}})^2, \end{cases}$$

となる⁵⁹。 $c_+ = c_-$, $\alpha_+ = \alpha_-$ の場合、特に CGMY 過程 (Carr *et al.* [2002]) と呼ばれる。また、CGMY 過程の $\alpha = 0$ のケースは、VG 過程に相当する。

げても同じ分布に従うという意味で自己相似性を有し、分散が有限との条件を外した一般化した中心極限定理の漸近分布として知られている (清水 [1976])。安定過程のレヴィ測度 $\tilde{\nu}^{\text{Stable}}$ は、 $c_{S\pm}$ を正の定数、 α_S を 0 から 2 の値をとる安定指数として、

$$\tilde{\nu}^{\text{Stable}}(x) = c_{S+} x^{-1-\alpha_S} \mathbf{1}\{x > 0\} + c_{S-} (-x)^{-1-\alpha_S} \mathbf{1}\{x < 0\} \quad (0 < \alpha_S < 2),$$

と表される (なお、安定過程は $\alpha_S = 2$ でも定義され、その場合ブラウン運動となる)。上式からわかるように、安定過程ではべき分布に従う幅のジャンプが発生するため、 $\alpha_S < 2$ の安定過程では 2 次以上のモーメントが発散する。しかし、TS 過程のレヴィ測度 ((A-12) 式) は、安定過程のレヴィ測度に指数関数を乗じたかたちとなるため、ジャンプの幅が安定過程と比べ小さく、2 次以上のモーメントが有限となる。なお、安定過程については、Samorodnitsky and Taqqu [1994] に詳しい。

59 ここに示した 1 次モーメントは、ドリフトが^s

$$c_+ \int_0^1 e^{-\lambda_+ x} x^{-\alpha_+} dx - c_- \int_{-1}^0 e^{\lambda_- x} (-x)^{-\alpha_-} dx,$$

と与えられる場合。

補論 4. ラプラスアン・ジャンプ拡散過程のモーメントの導出

補論 4 では、3 節(1)口. において新しく導入したラプラスアン・ジャンプ拡散過程 (LJD) のモーメントが、(14) 式のように導出されることを示す。

ラプラス分布の特性関数 $\tilde{\Phi}^{\text{Laplace}}(\omega) = e^{i\xi\omega}/(1 + \zeta^2\omega^2)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \tilde{\Phi}^{\text{Laplace}}(\omega) &= \frac{i(\xi + 2i\zeta^2\omega + \xi\zeta^2\omega^2)e^{i\xi\omega}}{(1 + \zeta^2\omega^2)^2}, \\ \frac{d^2}{d\omega^2} \tilde{\Phi}^{\text{Laplace}}(\omega) &= \frac{8\zeta^4\omega^2 e^{i\xi\omega}}{(1 + \zeta^2\omega^2)^3} - \frac{2\zeta^2(1 + 2i\xi\omega)e^{i\xi\omega}}{(1 + \zeta^2\omega^2)^2} - \frac{\xi^2 e^{i\xi\omega}}{1 + \zeta^2\omega^2}, \\ \frac{d^3}{d\omega^3} \tilde{\Phi}^{\text{Laplace}}(\omega) &= -\frac{48\zeta^6\omega^3 e^{i\xi\omega}}{(1 + \zeta^2\omega^2)^4} + \frac{24\zeta^4\omega(1 + i\xi\omega)e^{i\xi\omega}}{(1 + \zeta^2\omega^2)^3} \\ &\quad - \frac{6i\xi\zeta^2(1 + i\xi\omega)e^{i\xi\omega}}{(1 + \zeta^2\omega^2)^2} - \frac{i\xi^3 e^{i\xi\omega}}{1 + \zeta^2\omega^2}, \\ \frac{d^4}{d\omega^4} \tilde{\Phi}^{\text{Laplace}}(\omega) &= \frac{384\zeta^8\omega^4 e^{i\xi\omega}}{(1 + \zeta^2\omega^2)^5} - \frac{96\zeta^6\omega^2(3 + 2i\xi\omega)e^{i\xi\omega}}{(1 + \zeta^2\omega^2)^4} \\ &\quad + \frac{24\zeta^4(1 + 4i\xi\omega - 2\xi^2\omega^2)e^{i\xi\omega}}{(1 + \zeta^2\omega^2)^3} \\ &\quad + \frac{4\xi^2\zeta^2(3 + 2i\xi\omega)e^{i\xi\omega}}{(1 + \zeta^2\omega^2)^2} + \frac{\xi^4 e^{i\xi\omega}}{1 + \zeta^2\omega^2}, \end{aligned}$$

となる。これより、

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \tilde{\Phi}^{\text{Laplace}}(0) &= i\xi, \\ \frac{d^2}{d\omega^2} \tilde{\Phi}^{\text{Laplace}}(0) &= -(2\zeta^2 + \xi^2), \\ \frac{d^3}{d\omega^3} \tilde{\Phi}^{\text{Laplace}}(0) &= -i(\xi^3 + 6\xi\zeta^2), \\ \frac{d^4}{d\omega^4} \tilde{\Phi}^{\text{Laplace}}(0) &= \xi^4 + 12\xi^2\zeta^2 + 24\zeta^4. \end{aligned} \right. \quad (\text{A-13})$$

LJD の特性関数 ((13) 式) から、 n 次のキュムラント \tilde{c}_n^{LJD} ($n = 1, \dots, 4$) は、(A-13) 式を適用することで、

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_n^{\text{LJD}} &= \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{d\omega^n} \ln \tilde{\Phi}_{R_t}^{\text{LJD}}(0) \\
&= \begin{cases} \mu t - i\lambda t \frac{d}{d\omega} \tilde{\Phi}_Y^{\text{Laplace}}(0) & (n = 1), \\ \sigma^2 t - \lambda t \frac{d^2}{d\omega^2} \tilde{\Phi}_Y^{\text{Laplace}}(0) & (n = 2), \\ \lambda t \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{d\omega^n} \tilde{\Phi}_Y^{\text{Laplace}}(0) & (n \geq 3), \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lambda t \xi + \mu t & (n = 1), \\ \lambda t (\xi^2 + 2\xi^2) + \sigma^2 t & (n = 2), \\ \lambda t (\xi^3 + 6\xi\xi^2) & (n = 3), \\ \lambda t (\xi^4 + 12\xi^2\xi^2 + 24\xi^4) & (n = 4), \end{cases}
\end{aligned}$$

となる。4次までのキュムラントと平均まわりのモーメントの関係 ((15) 式) より、LJD のモーメント : (14) 式が得られる。 ■