

低金利下における 企業の投資行動と信用リスク： リアルオプション・モデルによる考察

やま だて つ や
山田哲也

要 旨

低金利の長期継続期待が、企業・家計のファイナンス行動や実物投資行動に強い影響をもたらし、設備投資や住宅投資の積極化、その後のバランスシート問題につながっていく現象が、近年、多くの国で発生してきた。本稿では、低金利環境下において、企業の投資や資金調達が積極化し、信用リスクが高まるメカニズムについて、リアルオプション・モデルの視点から考察を行う。その結果、低金利継続期待が強い場合だけでなく、先行き金利上昇期待が存在している場合においても、将来の金利上昇の可能性を近視眼的に捉えてしまう企業が投資や資金調達を積極化させ、信用リスクの増加につながりうることを示す。

キーワード：低金利、投資行動、信用リスク、リアルオプション、
コーポレート・ファイナンス、時間非整合的割引率、行動経済学

本稿の作成に当たっては、大橋和彦教授（一橋大学）、木島正明教授（首都大学東京）、後藤允准教授（北海道大学）、芝田隆志准教授（首都大学東京）、高嶋隆太助教（千葉工業大学）、本多俊毅准教授（一橋大学）、牧本直樹教授（筑波大学）、八木恭子特任研究員（東京大学）、ファイナンスのための数理ワークショップ（早稲田大学）、経済統計ワークショップ（一橋大学）、日本金融・証券計量・工学会 2009 夏季大会の参加者ならびに金融研究所スタッフから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

山田哲也 日本銀行金融研究所企画役補佐 (E-mail: tetsuya.yamada@boj.or.jp)

1. はじめに

低金利の長期継続期待が、企業・家計のファイナンス行動や実物投資行動に強い影響をもたらし、設備投資や住宅投資の積極化、その後のバランスシート問題につながっていく現象が、近年、多くの国で発生してきた¹。本稿は、低金利環境下において、企業の投資や資金調達が進化し、信用リスクが高まるメカニズムについて、理論的な視点から分析することを目的としている。

具体的には2つの問題を扱う。第1に、低金利²の継続が見込まれる場合、企業の投資を促進させる効果を持つが、これが信用リスクを高める原因とならないかという問題である。第2に、先行き金利の上昇が見込まれる場合、企業は、低金利下で資金調達コストが有利なうちに駆込み的に投資・資金調達を行う場合があるが³、こうした企業の投資・資金調達行動の積極化が、信用リスクを高める原因とならないかという問題である。

本稿では、このような問題にリアルオプションの枠組みを適用して分析を行う。具体的には、投資と信用リスクの関係を考察した Sundaresan and Wang [2007] のモデルを拡張して議論を進める。従来のリアルオプション・モデル、例えば、Dixit and Pindyck [1994] は、「どのタイミングで投資を行うべきか」という問題には明快な答えを与える一方で、「その際、どのくらいの負債を調達すべきか」という問題には答えることができなかった。これに対し、Sundaresan and Wang [2007] は、Leland [1994] に代表されるコーポレート・ファイナンスの理論を取り入れることで、これらの問題を解決し、投資と資本構成、信用リスクの関係を考察することを可能とした⁴。

ただし、Sundaresan and Wang [2007] では、金利が将来にわたり一定であることを仮定しているため、例えば、低金利が継続する場合を考察することは可能であるが、先行き金利の上昇が見込まれる場合の影響は考察できない。そこで、本稿では、Sundaresan and Wang [2007] のモデルを拡張し、金利が変動する場合も分析する。

この際、将来の利上げの可能性を近視眼的に織り込む企業によって駆込み的な投資が発生しうることを示す。具体的には、金利上昇局面において、将来の利上げの可能性を近視眼的に織り込んでしまう企業と、経済合理的に織り込む企業の両者を考察し、投資・資金調達行動にどのような差が出るか分析する。前者の企業は、投資や

1 例えば、日本のバブル期における投資の積極化に関しては、翁・白川・白塚 [2000]、Hoshi [2001] を参照。

2 本稿では、単に「金利」と呼んだ場合、リスクフリー・レートを意味することとする。これに対し、企業が借入れの際に支払う金利（信用リスクが反映された金利）を「支払金利」と呼んで区別する。

また、本稿では「低金利」という言葉を、リスクフリー・レートが経済の成長率や企業収益の成長率と同程度の水準まで低下した状況のこととして用いる。昨今の日本のように成長率が低い場合には、ゼロ近傍まで金利が低下していることを低金利と考え、バブル期の日本のような高成長期には、金利水準が6~8%であっても低金利であると考ええる。

3 本稿における駆込み的な投資の意味は3節(3)で説明する。

4 こうした研究は、その後も、Mauer and Sarkar [2005]、Lyandres and Zhdanov [2006a, b]、Zhdanov [2007]、2008]、Nishihara and Shibata [2009]、Yagi, Takashima, Takamori, and Sawaki [2008]、Egami [2009] など多くの研究に引き継がれている。

資金調達を行うまでの期間についてのみ、利上げの影響が資金調達コストや割引率に及ぼす効果を織り込んで投資判断を行う企業である。一方、後者の企業は、いったん投資や資金調達を行った後の期間についても、利上げの可能性を織り込んで投資を行う企業である。前者の企業は、例えば、将来リファイナンスを行う必要がある場合に、再調達コストが上昇してしまう可能性を投資時点で考慮していないという意味で近視眼的な織り込み方をしている。こうした現象は、例えば、経営者が数年ごとに入れ替わり、在任期間後にコストが上昇することを軽視する場合に起こりうるが、行動経済学の分野で指摘されている⁵。

企業の投資行動を上記のように2通りに整理する場合、両者の本質的な違いは、投資判断に用いる割引率の設定が投資時点の前後で一貫しているか断絶しているかにある。すなわち、後者の企業では、短期金利と長期金利が無裁定になる通常のファイナンス理論の要請が満たされ、将来の金利上昇をすべて現時点で織り込んでいるため、時間の経過により割引率が変化することはない。この場合、現在の経営者の在任期間だけでなくその後も再調達のコストが変わらないよう予め配慮して、企業として一貫した割引率を用いて投資判断を行っている。この意味で「時間整合的 (time consistent)」な投資行動といえる。一方、前者の企業は、投資後の再調達コストの上昇を投資時点では考慮していないため、時間の経過にともない割引率が変化することを容認した一貫性のない設定で投資判断を行っている。この場合、現在の経営者は、自分の在任期間後に再調達コストが上昇し、株価や企業価値が低下することを容認して投資判断を行っている。経営者は、自分の在任期間の業績を重視した投資判断を行っているため、上記の無裁定条件は満たされず、短期を弱めに、長期を強めに割引いた割引率を認識している。こうした設定のもとで最適化された行動は「時間非整合的⁶ (time inconsistent)」な投資行動と呼ばれ⁷、近年、行動経済学における研究対象となっている。

本稿の結果を予め述べると以下のとおりである。まず、低金利が継続する場合、企業は、株価が上昇するなど資金調達環境が有利なことを背景に、収益が低い段階でも投資を実行し、収益対比多くの債務を抱えることを示す。また、低金利環境下で行われた投資ほど、投資を実行してから倒産するまでの期間が短く、信用リスクが高いことを示す。

次に、先行き金利の上昇が見込まれる場合については、その影響の織り込み方により投資行動が異なることを示す。具体的には、企業が将来の利上げの可能性を近視眼的に織り込むと、利上げの意図とは逆に、駆込み的な投資が発生し、信用リスクの拡大につながるが、逆に、企業が将来の利上げを経済合理的に織り込めば、投

5 こうした割引率の問題に関する先行研究としては、Laibson [1997]、Harris and Laibson [2003]、Grenadier and Wang [2007]などを参照。

6 時間不整合とも訳されるが本稿では時間非整合で統一する。

7 この例のように、時間非整合的の意味を、自分の在任期間の業績を重視する経営者の投資判断と解釈し、時間整合的の意味を、自分の在任期間だけでなく将来一貫して企業の価値を最大化する経営者の投資判断と解釈すれば、エージェンシー問題の一種として解釈することも可能である。

資はむしろ抑制されることを示す。

本稿の構成は以下のとおりである。2節では、Sundaresan and Wang [2007] をベースに低金利が続く場合の投資・資金調達問題について考察する。3節では、先行き金利の上昇が見込まれる場合の投資・資金調達問題について考察する。4節は本稿のまとめである。

2. 低金利下における投資・資金調達モデル

本節では、Sundaresan and Wang [2007] によるモデルをベースとして低金利が続く場合の投資・資金調達問題を考察する。

(1) モデルの基本設定

企業がある新規の投資を行う状況を考える。投資を実行するためには初期費用 I が必要であり、実行後には、每期 X_t の投資収益が得られる。ただし X_t は、時間に対して不確定で幾何ブラウン運動⁸

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x, \quad (1)$$

に従っているとする⁹。この投資収益と初期費用を比較して最適な投資時刻を決定するのが従来のリアルオプション・モデルであった（図表 1）。将来の収益が不確定であるため、投資を行った後に収益が低下し、初期費用を回収できなくなるリスクが存在する。このため、投資収益の割引現在価値が初期費用を上回った時点では、まだ投資を実行せず¹⁰、それより収益が十分大きくなってから投資を実行する。

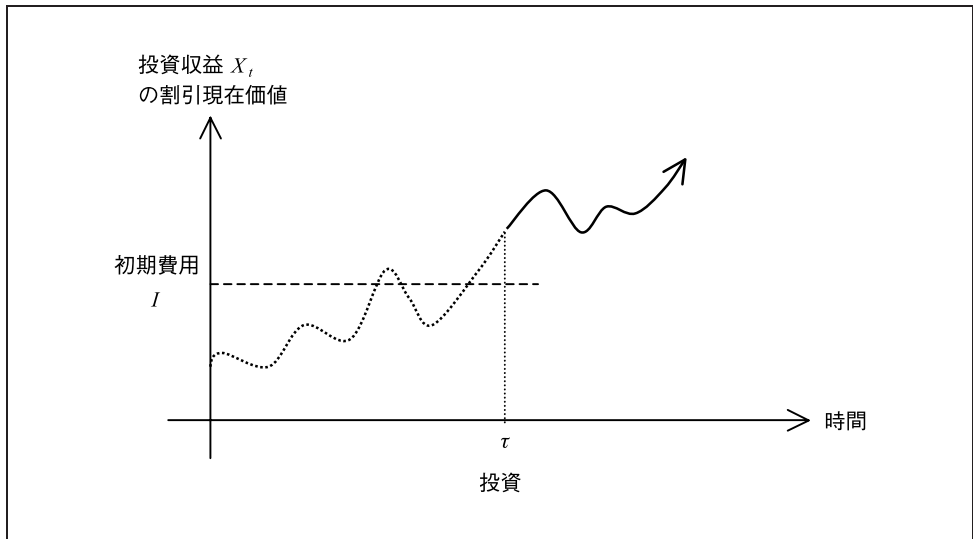
8 リスク中立測度下で記述されているとする。したがって成長率 μ はリスク調整後の成長率であり現実の成長率からリスクプレミアムを控除したものとなっている。このため、 μ はリスクフリー・レート r より小さいことを仮定する必要がある。これは、将来収益の割引現在価値や株式価値が有限な値となるために必要な条件である。すなわち、 $r > \mu$ ならば、積分 $\int_{(0, \infty)} e^{-rt} (X_0 e^{\mu t}) dt$ は、 $X_0 / (r - \mu)$ に収束するが、 $r \leq \mu$ ならば同積分は発散する。

9 本稿では、Sundaresan and Wang [2007] に基づき、税引前収益（EBIT）が幾何ブラウン運動に従うとしている。一方、売上が幾何ブラウン運動に従うとして、営業費用を引いたものを収益と定義する方法もある（Mella-Barral and Perraudin [1997]、芝田・山田 [2008] など）。後者の方が、収益がマイナスになりうるなど、より現実的な設定である一方、営業費用が投資判断にほとんど影響せず、投資収益の水準を変えるだけの役割しか果たさないことが知られている。こうした点を踏まえ、前者では、営業費用を捨象している。前者の場合でも、利払い後の収益はマイナスになりうる。

また、本稿では、 X_t を収益と考えモデルを構築しているが、 X_t を営業キャッシュフローと読み替えても差し支えない。この場合、企業の倒産は、債務超過により発生するのではなく、資金ショートにより発生すると読み替えられる。

10 リアルオプション・モデルが登場する以前の古典的な投資理論、すなわち、正味現在価値（net present value）法では、投資の割引現在価値が初期費用を上回った時点で投資を行うことが最適とされていた。

図表 1 従来のリアルオプション・モデルにおける投資行動（概念図）



従来のリアルオプション・モデルでは、初期費用 I を株式で調達するか負債で調達するかは明確にされていない。これは、税や倒産コストのない世界を想定すれば、株式と負債のどちらで調達してもあるいはどの割合で調達しても資金調達コストは不変であり、投資判断に影響しないことによる (Modigliani and Miller [1958])。

これに対し、Sundaresan and Wang [2007] は、税と倒産コストが存在するより現実的な世界を考え、投資時点で初期費用 I を株式と負債により調達することをモデル化した (図表 2)。この場合、投資実行後は、支払金利 b がコストとして発生し、支払金利を払い切れない場合には、企業は倒産する。この際、残存価値は債権者に帰属するが、流動化にともなう損失、すなわち再評価による減価が発生する。これを倒産コストとみなす。

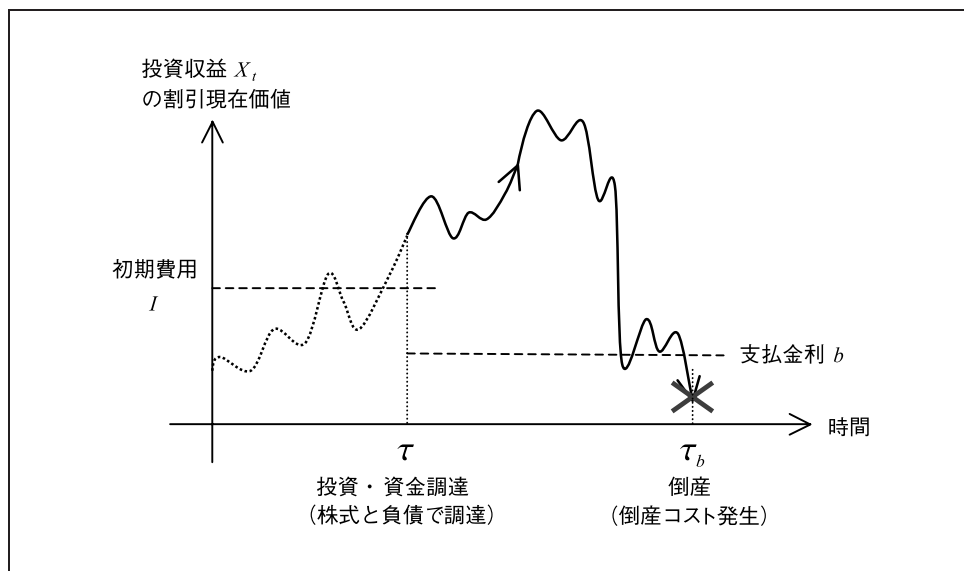
従来のリアルオプション・モデルとは異なり、投資後に倒産する可能性があるため、企業はこれを考慮して、①最適な投資時刻と②最適な資本構成、すなわち最適な負債による資金調達額を同時に決定する¹¹。本稿では、このような投資・資金調達行動が、足元の金利環境や、将来の金利水準により、どのような影響を受けるかを考察する。

2 節 (2) でモデルの詳細を説明するが、その前に最適な投資時刻と負債による資金調達額の決定メカニズムについて概説しておく。

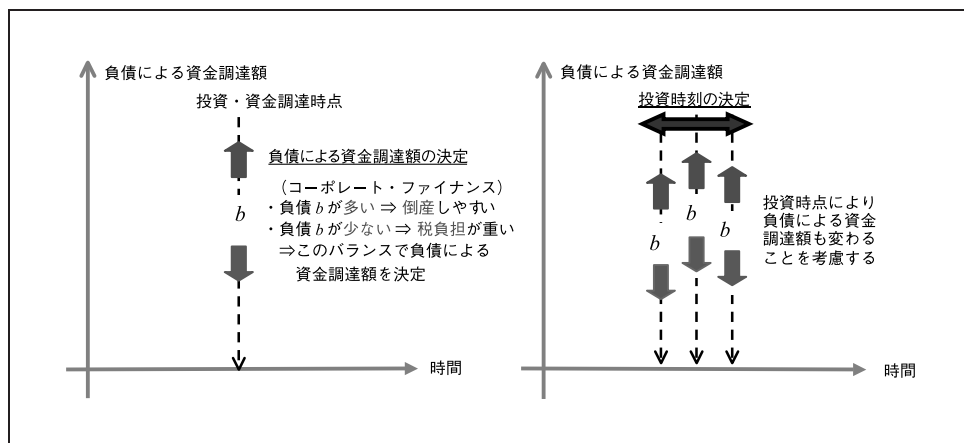
まず、仮の投資時刻を与える (図表 3 ; 左図)。この時点では投資時刻は最適とは限らず、後に最適化を行う。いったん、投資時刻が決定されれば、本モデルは、所

11 倒産時刻は、株式価値が最大になるよう株主が決定する (株主と債権者の交渉で決定する方法もあるが考察の主眼でないため省略している)。ただし、本モデルの意思決定主体は企業であり、こうした文脈からは、株主が倒産を決定しているというより、前述の株主の最適な倒産行動を前提として、企業が投資時刻と負債調達を決定していると考えられる。

図表 2 資金調達を考慮したリアルオプション・モデルにおける投資行動 (概念図)



図表 3 投資時刻・負債による資金調達額の決定



与の案件に対して負債による資金調達額を決定する問題に帰着されるため、標準的なコーポレート・ファイナンスの理論が応用できる。すなわち、①負債が多すぎると負債の倒産コストが高まり、②負債が少なすぎると節税効果が低くなるため、企業はこれらのトレードオフを考慮して、株式価値と負債価値を合計した企業価値が最大になるよう負債による資金調達額を決定する。

この際、注意すべき点は、負債による最適な資金調達額は、仮に置いた投資時刻に依存して変化するという点である (図表 3; 右図)。この点に注意しつつ、企業は、最適な投資時刻を決定する。すなわち、初期費用 I と資本構成が最適化された企業価値を比較して最適な投資時刻を決定する。

以上のプロセスにより、最適な投資時刻と負債による資金調達額が同時に決定される。なお、以上の最適化問題は、企業を主体としたものであるため、このような条件で株式と負債による資金調達が可能かどうかは別問題である。株主や債権者の合理的な反応を前提としたうえで企業が望む投資や資金調達の条件を求めており、これが低金利環境下でどのような特性を示し、債権者（金融機関）や株主は、どのような行動に注意を払うべきかを本稿で示す。

(2) 最適な投資時刻・負債による資金調達額の決定

2節(1)で述べたように、まず、投資時刻を仮に t と置いたもとの、負債による資金調達額を決定する。その際、標準的なコーポレート・ファイナンスの理論¹²に従い、負債が多すぎると負債の倒産コストが高まり、負債が少なすぎると節税効果が低くなるというトレードオフを考える。

まず、企業の毎期の支払金利額を b としてこれの割引現在価値 $B \equiv b/r$ を負債により資金調達したとする。 r はリスクフリー・レートである。支払金利が多いと企業の倒産が早まり倒産コストを増幅させる。ここで倒産時刻 τ_b は、株式価値

$$E(X_t) = \max_{\tau_b \in F_t} E_t \left[\int_t^{\tau_b} e^{-r(s-t)} (1 - \tau_{ax})(X_s - b) ds \right], \quad (2)$$

が最大となるよう決定される。ここで τ_{ax} は税率であり、期待値 E_t はリスク中立測度による。また F_t は X_t に関する情報増大列とする。株主は、毎期、投資収益 X_t から支払金利額 b および税金を引いた収益 $(1 - \tau_{ax})(X_t - b)$ を得るが、これが赤字になり、株式価値の回復可能性がないと判断した時点で倒産を決定する。以降、株価はゼロとなる。

一方、負債価値は、(2)式で最適化された倒産時刻 τ_b^* を用いて

$$D(X_t) = E_t \left[\int_t^{\tau_b^*} e^{-r(s-t)} b ds + e^{-r(\tau_b^* - t)} (1 - \alpha) W_b(X_{\tau_b^*}) \right], \quad (3)$$

と表される。債権者は、倒産以前は、毎期、第1項の支払金利を得るが、倒産時点では、第2項の企業の残余価値を得る。ここで α は倒産コスト率であり、倒産時における再評価の減価率を表す。 $W_b(X_{\tau_b^*})$ は、倒産時点における減価前の企業価値

$$W_b(X_{\tau_b^*}) = E_{\tau_b^*} \left[\int_{\tau_b^*}^{\infty} e^{-r(s-\tau_b^*)} (1 - \tau_{ax}) X_s ds \right], \quad (4)$$

を表す。

.....
12 例えば、Leland [1994] や Goldstein, Ju, and Leland [2001] 等を参照。

以上の株式価値 $E(x)$ と負債価値 $D(x)$ の合計として企業価値 $W(x)$ が定義される。

$$\begin{aligned} W(X_t) &= E(X_t) + D(X_t) \\ &= W_a(X_t) + TB(X_t, b) - BC(X_t, b). \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、

$$W_a(X_t) = E_t \left[\int_t^\infty e^{-r(s-t)} (1 - \tau_{ax}) X_s ds \right], \quad (6)$$

は、投資資金をすべて株式で調達した場合の企業価値である。 $TB(X_t, b)$ は、節税効果 (tax benefit) であり

$$TB(X_t, b) = \tau_{ax} E_t \left[\int_t^{\tau_b^*} e^{-r(s-t)} b ds \right], \quad (7)$$

と表される。 $BC(X_t, b)$ は、倒産コスト (bankruptcy cost) であり、

$$BC(X_t, b) = \alpha E_t \left[e^{-r(\tau_b^* - t)} (1 - \tau_{ax}) W_a(X_{\tau_b^*}) \right], \quad (8)$$

と表される。企業は $W(X_t)$ を最大にするように、負債による資金調達額、すなわち支払金利額 b を決定し、資金調達費用を最小にする。ここで求めた負債による資金調達額は、仮に置いた投資時刻 t に依存していることに注意しよう。

以上で最適な資本構成を実現した企業価値 $W(X_t)$ を求めた。これを用いて投資時刻 τ を決定する。企業は $W(X_\tau)$ から初期費用 I を差し引いた投資オプション価値

$$V(X_t) = \max_{\tau \in F_t} E_t \left[e^{-r(\tau-t)} (W(X_\tau) - I) \right], \quad (9)$$

が最大になる投資時刻を決定する¹³。最適な資本構成も同時に決定される。

(3) モデルの解

以上の最適化問題には解析解が存在する (詳細は補論 1、2)。まず、株式価値は以下のように導出される。

13 本稿では企業価値を最大化する投資時刻を決定しているが、株式価値を最大化する投資時刻と同値である。企業価値から初期費用を引いたものは、 $W(x) - I = E(x) - (I - D(x))$ と変形され、右辺は株式価値から株主が調達する必要のある資金を引いたもの $(I - D(x))$ と解釈できるため、これを最大化していると解釈できる。

$$E(x) = (1 - \tau_{ax}) \left(\left(\frac{x}{r - \mu} - \frac{b}{r} \right) - \left(\frac{x_b}{r - \mu} - \frac{b}{r} \right) \left(\frac{x}{x_b} \right)^\gamma \right), \quad x > x_b. \quad (10)$$

ここで

$$x_b = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{b}{r} (r - \mu), \quad (11)$$

は倒産の閾値を表し、 $x < x_b$ で企業は倒産する。倒産後の株価はゼロである。また、 γ は、最適化問題を解くための特性方程式

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \gamma (\gamma - 1) + \mu \gamma - r = 0, \quad (12)$$

の負根である。

負債価値は、以下のように導出される。

$$D(x) = \begin{cases} \frac{b}{r} - \left(\frac{b}{r} - W_b(x_b) \right) \left(\frac{x}{x_b} \right)^\gamma, & x > x_b, \\ W_b(x_b) \equiv (1 - \alpha) \frac{(1 - \tau_{ax}) x_b}{r - \mu}, & x \leq x_b. \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 $W_b(x_b)$ は倒産時点 x_b における再評価後の企業の残余価値である。第1式に含まれる項 $b/r - W_b(x_b)$ は倒産時損失額 (loss given default; LGD) を表す。 $(x/x_b)^\gamma$ は倒産確率 (probability of default; PD) を意味するため¹⁴、これらの積 $(b/r - W_b(x_b)) \cdot (x/x_b)^\gamma$ は期待損失額 (expected loss; EL) を表す。

企業価値 $W(x)$ は、株式価値、負債価値の合計、すなわち、 $W(x) = E(x) + D(x)$ として解析的に求められる。この $W(x)$ を用いると、投資オプション価値 $V(x)$ も解析的に解くことが可能で、

$$V(x) = \begin{cases} (W(x_I) - I) \left(\frac{x}{x_I} \right)^\beta, & x < x_I, \\ W(x) - I, & x \geq x_I, \end{cases} \quad (14)$$

と表現できる。ここで

$$x_I = \psi \frac{\beta}{\beta - 1} \frac{(r - \mu)}{1 - \tau_{ax}} I, \quad (15)$$

は投資の閾値であり、投資収益が x_I を超えると投資が実行される。 β は、最適化問題を解くための特性方程式

14 詳細は、芝田・山田 [2008] を参照。

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta - 1) + \mu\beta - r = 0, \quad (16)$$

の正根であり、 ψ 、 h は定数

$$\psi \equiv \left(1 + h^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{\tau_{ax}}{1 - \tau_{ax}}\right)\right)^{-1} \leq 1, \quad (17)$$

$$h \equiv 1 - \gamma \left(1 - \alpha + \frac{\alpha}{\tau_{ax}}\right) \geq 1, \quad (18)$$

である。 x_I のうち ψ 以外の部分がすべて株式で調達した場合の投資閾値を表す。 ψ が 1 より小さいことは、資本構成の最適化により資金調達コストが削減され投資が早まることを表している。 h は投資時点における倒産確率 $(x_I/x_b)^\gamma$ の逆数に等しく、 ψ はこれと節税効果で決定されている。

最適な負債による資金調達額 b^* も、 h 、 τ_{ax} 、 ψ 等を用いて

$$b^* = h^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\beta}{\beta - 1} \frac{r\psi}{1 - \tau_{ax}} I, \quad (19)$$

と導出される。

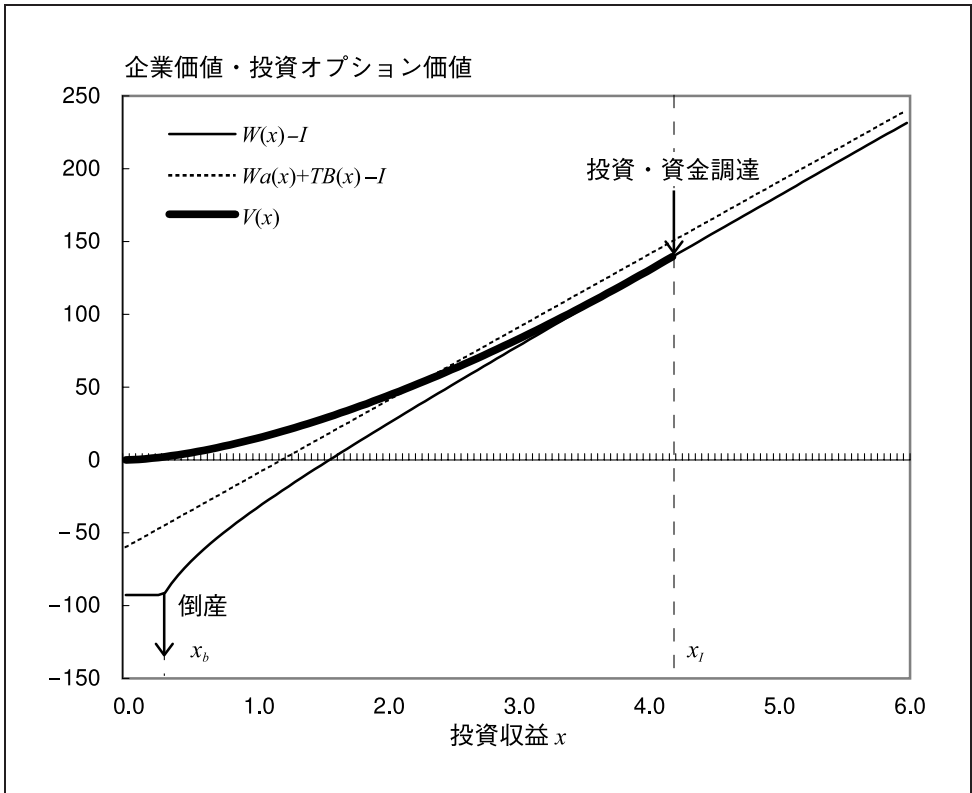
以上で導出された倒産閾値 x_b と企業価値 $W(x)$ 、投資閾値 x_I と投資オプション価値 $V(x)$ をグラフに表現したものが図表 4 である¹⁵。

まず、細実線は、企業価値 $W(x)$ から初期費用 I を控除した投資の正味現在価値 (net present value) を表している。この価値は、投資収益が大きくなるにつれて ($x \rightarrow \infty$) 点線で表された価値 $W_a(x) + TB(x) - I$ に漸近する。これは、倒産の可能性がなく節税効果のみを享受できる理想的な状況を表した直線である。実際の正味現在価値 $W(x) - I$ は、この点線より倒産コストの分だけ下回る。 x が小さくなるほど点線との乖離、すなわち倒産コストは大きくなり $x < x_b$ で倒産する。

一方、太実線は投資オプション価値 $V(x)$ を表す。 $x \geq x_I$ は投資が実行された後の領域であり、 $V(x)$ は細実線 $W(x) - I$ に等しくなる。一方、 $x < x_I$ は投資を実行していない領域であり、将来投資を実行した際に、正味現在価値 $W(x) - I$ を得られる価値が $V(x)$ である。ここで、企業は、投資の正味現在価値 $W(x) - I$ が正になった段階では、投資を実行していないことに注意しよう。投資後に収益が低下し、初期費用を回収できなくなるリスクが存在するためである。企業は、こうしたリスクを織り込み、より高い収益 x_I になってから投資を実行している。 $V(x)$ は、この x_I において $W(x) - I$ に滑らかに接続する。

15 パラメータは $\mu = 0\%$ 、 $\sigma = 15\%$ 、 $I = 100$ 、 $\alpha = 50\%$ 、 $\tau_{ax} = 50\%$ 、 $r = 1\%$ とした。

図表 4 倒産の可能性を考慮した投資の判断



(4) 比較静学とインプリケーション

モデルの解に対し、リスクフリー・レートを低下させることで、倒産閾値や投資閾値がどのように変化するか考察する。また、企業の倒産確率（PD）や負債の期待損失率（EL）等の信用リスクを表す指標がどのように変化するか考察する。

図表 5 では、リスクフリー・レートが 1% および 2% の場合を比較したものである¹⁶。

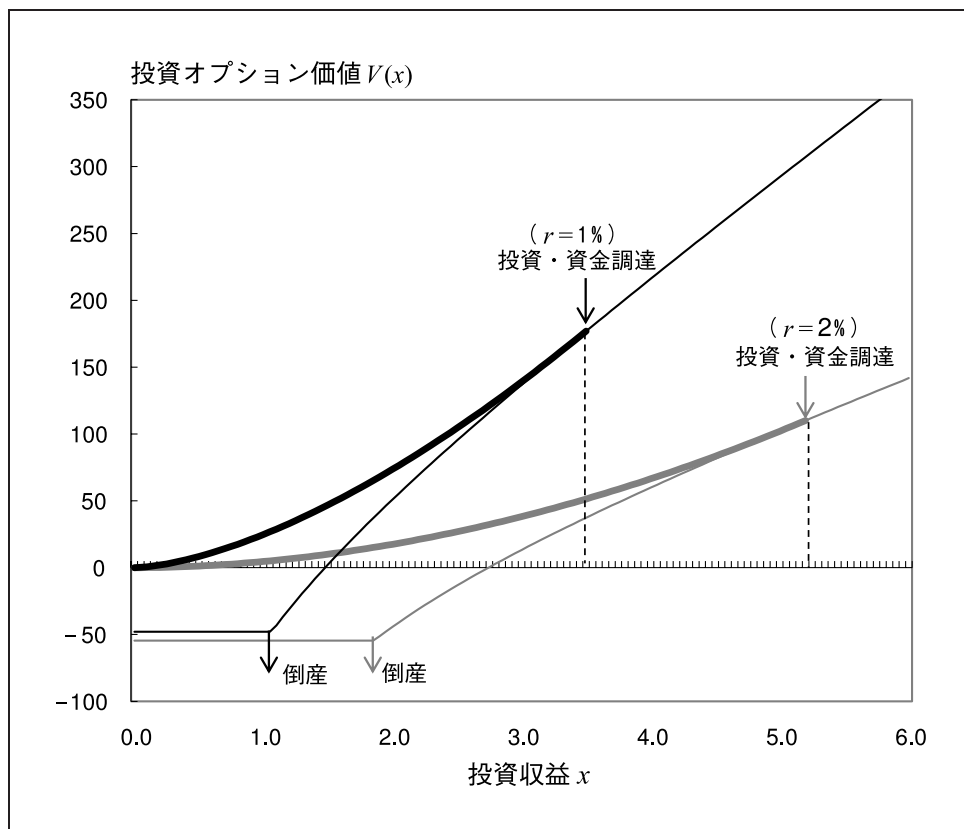
図表 5 をみると、低金利の場合の方が投資を実行するうえで必要な収益の水準が

16 パラメータは $\mu = 0\%$ 、 $\sigma = 15\%$ 、 $I = 100$ 、 $\alpha = 30\%$ 、 $\tau_{ax} = 30\%$ 、 $r = 1\%$ とした。以降これらにより比較静学を行う。

このように企業収益の成長率 μ （リスクプレミアム控除後の成長率）が 0% であるような経済を想定する場合、脚注 2 で説明したようにリスクフリー・レートが μ と同じ水準、すなわち、0% 近傍まで低下したことを「低金利」とであるとする。このため比較静学においてもリスクフリー・レートを 0% 近傍まで近づける。

なお、 μ が高成長な場合においても、リスクフリー・レートを μ の水準まで低下させると、本稿のパラメータ設定においてリスクフリー・レートを 0% 近傍まで低下させた場合と同様の結果が得られる。すなわち、投資や資金調達が進められ信用リスクが高まるという結果が得られる。こうした結果は、投資閾値（(15) 式）や倒産閾値（(11) 式）の導出結果からも確認できる。すなわち、これらの式をみると、企業の投資・資金調達行動は、リスクフリー・レート r に依存して決定されるのではなく、むしろ、 μ と r の差、 μ と r の比が重要な決定要因になっていることがわかる。

図表 5 低金利下における投資と倒産の判断



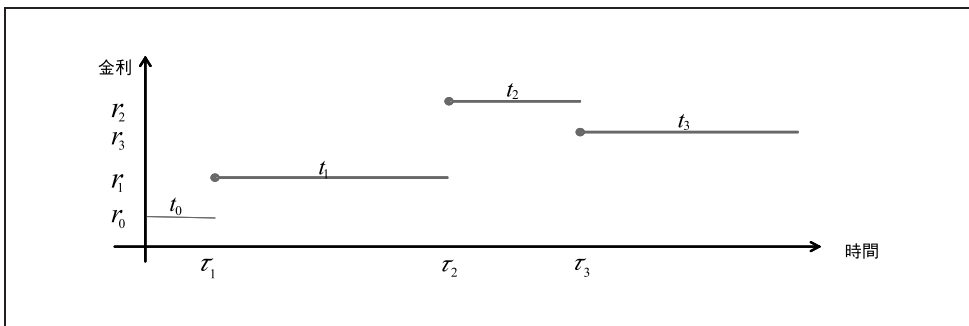
低く、投資のタイミングは早い。また、投資時点と倒産時点の収益差は小さい。すなわち、低金利下で行った投資ほど、バッファーが相対的に小さく、投資を実行してから倒産するまでの期間が短いことを示している。これは、低金利の継続が、投資時刻を相応に早めるのに対し、倒産時刻にはそれほど影響しないことによる。すなわち、金利の低下により、投資収益の割引現在価値は上昇するが、この上昇効果は、収益水準の高い投資時点では大きいのに対し、収益水準の低い倒産時点では小さいためである。

以上の結果を、投資の倒産確率 (PD)、期待損失率 (EL) からみたものが図表 6 である。まず、企業は、低金利であるほど投資を早め、低収益でも投資を行うことが確認できる。また、低金利であるほど収益対比で多めの債務を抱えようとし、支払金利額は収益対比多くなることがわかる。極端な場合 ($r = 0.1\%, 0.5\%$)、投資時点の収益では支払えないほどの債務を抱える ($x_I < b$)。これは、低金利下では、投資収益が少し増加しただけでも企業価値は大きく増加し、キャピタル・ゲインが望めるため、投機的な投資が行われやすくなることに起因する。このため、倒産確率 (PD) や期待損失率 (EL) は急激に上昇している。低金利下では信用リスク指標 (PD、EL) の高い投資が選択されやすくなることわかる。

図表 6 低金利下で行われた投資の倒産確率、期待損失率

リスクフリー・レート r	投資タイミング (投資時の収益 x)	負債調達 (支払金利額 b)		PD	EL
	①	②	②/①		
5%	9.6	6.9	0.71	26%	18%
2%	5.2	3.9	0.75	39%	30%
1%	3.5	2.9	0.84	51%	42%
0.5%	2.6	2.7	1.04	64%	56%
0.1%	1.7	4.6	2.68	88%	84%

図表 7 ポアソン過程に従う金利の変化（概念図）



3. 金利上昇局面における投資・資金調達モデル

本節では、2 節で展開した Sundaresan and Wang [2007] のモデルを拡張し、将来の金利が変動するタイプのモデルを構築する。

(1) モデルの設定

2 節で定数としていたリスクフリー・レート r を、本節ではポアソン過程に従って変動させる（図表 7）。すなわち、リスクフリー・レートは、時刻 τ_i において r_{i-1} から r_i へジャンプすると仮定し、その頻度は、

$$P(\tau_{i+1} \in (t, t + dt) | \tau_i < t < \tau_{i+1}) = \lambda_i dt, \quad (20)$$

により与えられているとする。すなわち、 i 回目のジャンプが発生した後の時刻 t ($\tau_i < t < \tau_{i+1}$) において次のジャンプが発生する瞬間的な確率は λ_i で表される¹⁷。

¹⁷ 本稿では、金利の変化に対する企業の投資・調達行動を考察することを主眼としているため、金利の変化のみを考慮し、投資収益の成長率 (μ) は一定としている。一方、収益の成長率が変化した場合に、金利をどの程度変化させることが望ましいか、という問題を考察する場合には、成長率と金利を同時に変化させるもしくは相関させたモデルを構築する必要がある。本稿では、後者の問題は考察対象外としている。

(2) 最適投資問題

単純化のためまず負債による資金調達を行わないケースを考える。先行き金利が上昇する場合、将来の利上げの可能性をどのように織り込むかにより企業の投資行動は異なってくる。本稿では、①将来の利上げの可能性を近視眼的に織り込んでしまう企業と、②経済合理的に織り込む企業の両者を考察する。前者の企業は、投資や資金調達が行われるまでに利上げが行われるかどうかを織り込んで投資判断を行う。一方、後者の企業は、いったん投資や資金調達が行われた後の金利変化の可能性も予め投資時点で織り込んで資金調達を行う。前者の企業は、将来リファイナンスを行う必要がある場合に再調達コストが上昇してしまう可能性を現段階で考慮していないという点で、近視眼的な織り込み方となっている。

イ. 近視眼的に織り込んだ場合：時間非整合的な割引率

金利が r_0 から r_1 へ上昇する期待が存在する状況を考え、利上げ時刻を τ_1 で表す¹⁸。 τ_1 は、3節(1)で定義したポアソン過程によって与えられる確率変数である。先行き金利が上昇する場合の最適投資問題は、①金利が上昇する前と、②金利が上昇した後に場合分けをして、どちらの環境で投資を行うべきかを判断する形で定式化される。前者の企業のように、近視眼的に織り込む場合は、以下のような最適化問題となる。

$$V(X_t) = \max_{\tau \in F_t} E_t \left[e^{-r_1(\tau-t)-r_0(\tau_1-t)} \left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-r_1(s-\tau)} X_s ds - I \right) 1_{\{\tau > \tau_1\}} + e^{-r_0(\tau-t)} \left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-r_0(s-\tau)} X_s ds - I \right) 1_{\{\tau \leq \tau_1\}} \right], \quad (21)$$

第1項は金利が上昇した後に投資を行う場合の価値であり、第2項は金利が上昇する前に投資を行う場合の価値である。第1項の場合は、投資時点で既に利上げが行われているため、利上げ後の金利 r_1 が割引率に用いられている。一方、第2項の場合は、投資時点ではまだ利上げがされていないため割引率に r_0 が用いられている。(21)式では、右辺で最適投資時刻 τ が決定されるが、その時刻が利上げ時刻 τ_1 より後か前かに応じて第1項ないし第2項が残り、他方の項は消える形となっている。

18 本稿では説明を簡略化するために金利が1回のみジャンプする場合を考察する。複数回ジャンプする場合も本質的には1回の場合の繰り返しで考察可能である (Grenadier and Wang [2007] 参照)。また、金利が下方にジャンプする場合も考察可能であるが、本稿では金利が上昇する場合のみを考察する。

口. 経済合理的に織り込んだ場合：時間整合的な割引率

一方、将来の利上げを経済合理的に織り込んだ場合は、投資時点までに利上げされる可能性を織り込むだけでなく、いったん投資が行われた後のことも投資時点で織り込む。この考え方に基づいて投資問題を定式化すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 V(X_t) = \max_{\tau \in F_t} E_t \left[e^{-r_1(\tau-t) - r_0(\tau_1-t)} \left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-r_1(s-\tau)} X_s ds - I \right) 1_{\{\tau > \tau_1\}} \right. \\
 \left. + e^{-r_0(\tau-t)} \left(\int_{\tau}^{\tau_1} e^{-r_0(s-\tau)} X_s ds \right. \right. \\
 \left. \left. + \int_{\tau_1}^{\infty} e^{-r_1(s-\tau)} X_s ds - I \right) 1_{\{\tau \leq \tau_1\}} \right].
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

異なるのは第2項であり、投資が実行された後に金利が上昇することを考慮して、利上げ時刻 τ_1 以降は、 r_1 を割引金利として用いている。一方、第1項は、投資後に金利が上昇する可能性がゼロであるため、(21)式と同じ形になっている。

これらの最適化問題のうち正しい投資判断を導くのは、後者である。この場合、通常のファイナンス理論で要請される、短期金利と長期金利の間の無裁定条件が満たされている。このような割引率は、時間整合的 (time consistent) な割引率と呼ばれ、時間に関して指数関数の形をとる。これに対し、前者の最適化問題で使われている割引率は、近年行動経済学の分野で導入された時間非整合的 (time inconsistent) な割引率に対応している。その特徴は、短期を弱めに、長期を強めに割引くことである。こうした割引率は、関数の形が双曲関数に似ていることから、準双曲型の割引率と呼ばれており、短期の割引現在価値が相対的に大きく見積られるという意味で、近視眼的な行動を表現することが知られている¹⁹。

このように将来の金利パスは同じであっても、企業が割引率をどう認識するかにより、投資判断は異なってくる。現実にはどちらも起こりうるため²⁰、以下では、これら2つを考察しそれぞれ結果を比較する。本稿では以後、前者を時間非整合的 (time inconsistent) な企業、後者を時間整合的 (time consistent) な企業と呼ぶことにする。

19 近視眼的な行動を表現する割引率の代表例としては双曲型 (hyperbolic) 割引率がある。双曲型割引率は、割引率に従来の指数関数ではなく双曲関数を用いることで、時間の経過にともない割引率が上昇すること、すなわち、短期を弱めに、長期を強めに割引くことを表現するものである。この際、割引率の変化は時間に対して連続に変化するため、異時点間の最適化問題を考察する際に問題が複雑になる。これに対応するため、割引率が離散的に変化するものとして準双曲型 (quasi-hyperbolic) 割引率が Laibson [1997] などにより考案され、異時点間の最適化問題に多用されている (Harris and Laibson [2003] など)。本稿では、準双曲型割引率をリアルオプションの分野に導入した Grenadier and Wang [2007] の方法に従っている。

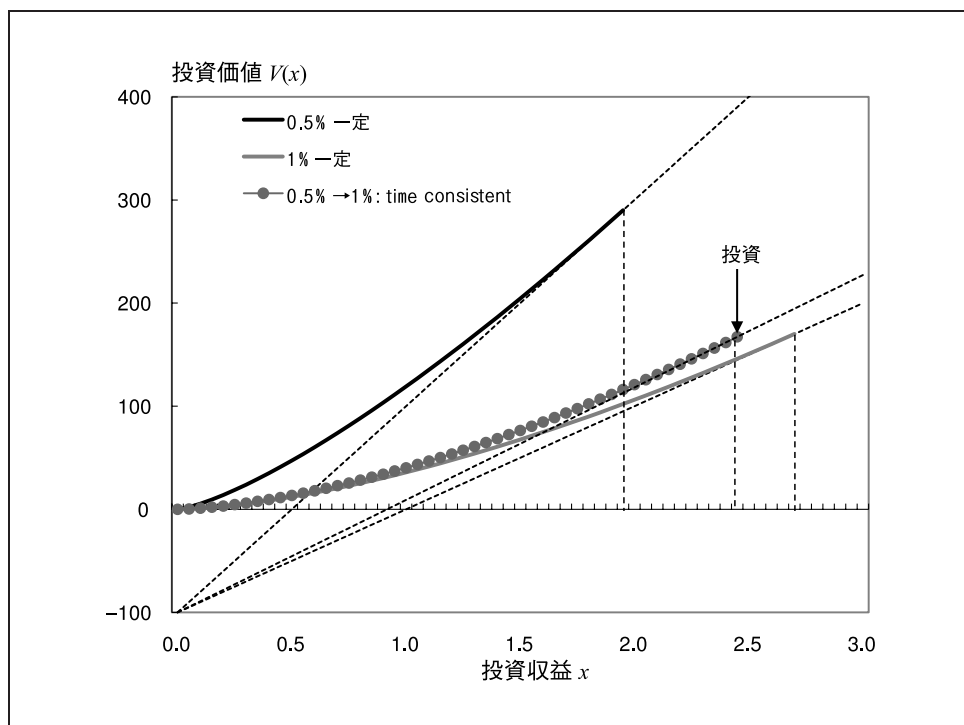
20 一般に時間非整合的な割引率は次のような場合に発生しやすいといわれている。①投資判断を行う経営者が数年ごとに入れ替わり足元の業績を重視しやすい場合、②長期投資の場合、③投資の参入に先行者メリットがある場合などである。

(3) モデルの解と含意

まず、時間整合的な場合の投資判断を考える。この場合の投資閾値と投資オプション価値をグラフに表したのが図表 8 である²¹。比較のため、利上げ期待 (0.5% → 1%) がある場合だけでなく、金利が 0.5% および 1% で継続する場合の解も表示している。時間整合的な企業の場合、利上げ期待が存在すると、金利が上昇する可能性を投資時点ですべて織り込むため、その割引率は金利が 0.5% で継続する場合より大きくなる。このため、点線で表した投資実行後の価値は、金利が 0.5% で継続する場合より低くなる。このため、投資収益 x が十分高くなるのを待ってから投資を実行することがわかる (詳細は補論 4 を参照)。

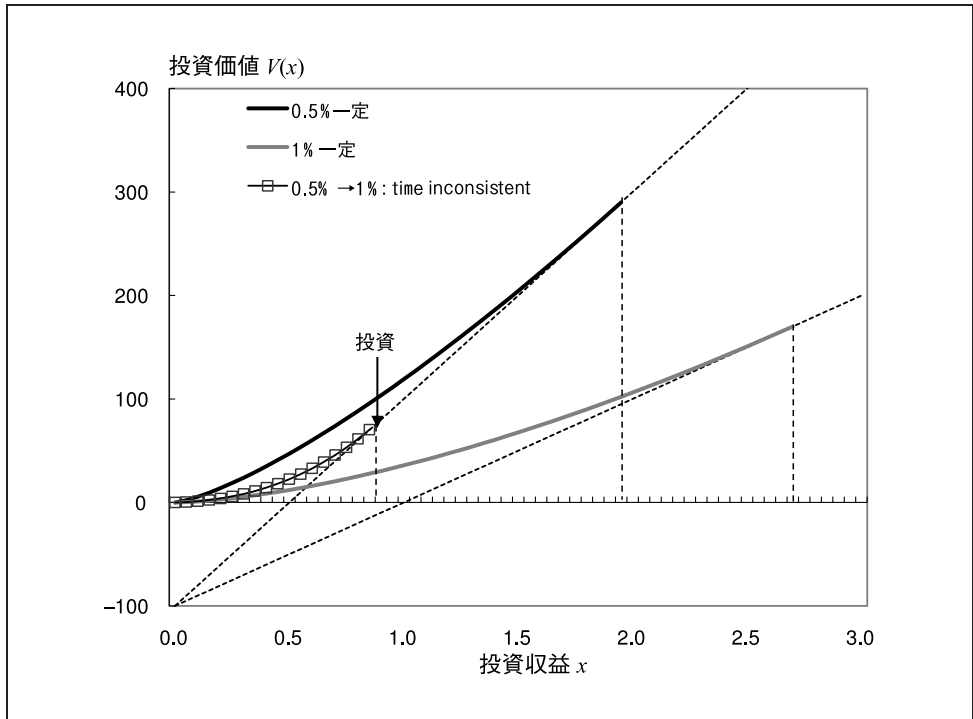
一方、時間非整合的な場合は、これとは逆に、投資時刻はむしろ早くなり、低金利 (0.5%) が継続される場合よりも収益が低い段階で投資を実行することがわかる (図表 9)。将来の利上げを近視眼的に織り込んだ場合、投資を実行するまでに利上げが行われるかどうかのみを投資判断に織り込むため、利上げが行われる前に投資を実行した方が、資金調達コストは低く、投資オプション価値は高く評価される。逆に、利上げが行われた後に投資を実行すると、資金調達コストが上昇するため、投資オプ

図表 8 時間整合的な場合の投資判断



21 図表 8～図表 11 では、前掲図表 5 で利用したパラメータ (脚注 16 参照) に加え、利上げ確率を $\lambda = 5\%$ とした。

図表 9 時間非整合的な場合の投資判断



ション価値はその分だけ低くなる。このため、先行き利上げ期待がある場合は、低金利が継続する場合と比較して、投資を早めに実行するインセンティブが働き、この分だけ投資を待つオプション価値が低減される。このように待ちのオプション価値が減価することで投資が早まることを「駆込み的な投資」と考える。

この様子は、図表 9 において、2つの投資オプション価値のグラフを比較するとより直感的に理解できる。黒太線が、低金利が継続する場合の待ちのオプション価値であり、四角のプロット線が、先行き利上げ期待がある場合の待ちのオプション価値である。後者の場合、投資を実行する前に利上げが行われてしまうと、グレーの線で示される利上げ後の投資オプション価値まで価値が減価するため、その分を考慮して待ちのオプション価値が低減している様子がみとれる（詳細は補論 3）。

(4) 負債による資金調達を考慮した場合

上記のようなモデルに対して、負債による資金調達、企業の倒産を考慮した場合にどのような結果が導かれるか考察する。

まず、時間非整合的な企業を考察する。この場合の最適投資問題は、

$$V(X_t) = \max_{\tau \in F_t} E_t \left[e^{-r_1(\tau-t) - r_0(\tau_1-t)} (W^{[1]}(X_\tau) - I) 1_{\{\tau > \tau_1\}} + e^{-r_0(\tau-t)} (W^{[0]}(X_\tau) - I) 1_{\{\tau \leq \tau_1\}} \right], \quad (23)$$

と表される。ここで、第1項は金利が上昇した後に投資・資金調達を行った場合、第2項は金利が上昇する前に投資・資金調達を行った場合の価値であり、 $W^{[i]}(X_t)$ ($i = 0, 1$) は、それぞれリスクフリー・レートが r_0 、 r_1 の場合の企業価値

$$W^{[i]}(X_t) = E^{[i]}(X_t) + D^{[i]}(X_t), \quad (24)$$

を表す。ここで $E^{[i]}(X_t)$ と $D^{[i]}(X_t)$ は、リスクフリー・レートが r_1 、 r_2 の場合の株式価値と負債価値

$$E^{[i]}(X_t) = \max_{\tau_b^{[i]} \in F_t} E_t \left[\int_t^{\tau_b^{[i]}} e^{-r_i(s-t)} (1 - \tau_{ax})(X_s - b^{[i]}) ds \right], \quad (25)$$

$$D^{[i]}(X_t) = E_t \left[\int_t^{\tau_b^{[i]}} e^{-r_i(s-t)} b^{[i]} ds + e^{-r_i(\tau_b^{[i]}-t)} (1 - \alpha) W_b^{[i]}(X_{\tau_b^{[i]}}) \right], \quad (26)$$

を表す。時間非整合的な場合、金利上昇前に投資と資金調達を行えば、リスクフリー・レートが r_0 のまま継続すると考え、負債による資金調達額、企業の倒産、投資時刻を決定する。

一方、時間整合的な企業の最適投資問題は、

$$V(X_t) = \max_{\tau \in F_t} E_t \left[e^{-r_1(\tau-t) - r_0(\tau_1-t)} (W^{[1]}(X_\tau) - I) 1_{\{\tau > \tau_1\}} + e^{-r_0(\tau-t)} (W^{[0 \rightarrow 1]}(X_\tau) - I) 1_{\{\tau \leq \tau_1\}} \right], \quad (27)$$

と表される。ここで $W^{[0 \rightarrow 1]}(X_t)$ は、金利上昇 ($r_0 \rightarrow r_1$) を織り込んだ企業価値

$$W^{[0 \rightarrow 1]}(X_t) = E^{[0 \rightarrow 1]}(X_t) + D^{[0 \rightarrow 1]}(X_t), \quad (28)$$

を表し、 $E^{[0 \rightarrow 1]}(X_t)$ は、金利上昇 ($r_0 \rightarrow r_1$) を織り込んだ株式価値

$$\begin{aligned}
 & E^{[0 \rightarrow 1]}(X_t) \\
 &= \max_{\tau_b^{[\lambda]} \in F_t} E_t \left[\left(\int_t^{\tau_1} e^{-r_0(s-t)} (1 - \tau_{ax}) (X_s - b^{[\lambda]}) ds \right) 1_{\{\tau_b^{[\lambda]} \leq \tau_1\}} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_t^{\tau_1} e^{-r_0(s-t)} (1 - \tau_{ax}) (X_s - b^{[\lambda]}) ds \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + e^{-r_0(\tau_1-t)} \int_{\tau_1}^{\tau_b^{[\lambda]}} e^{-r_1(s-t)} (1 - \tau_{ax}) (X_s - b^{[\lambda]}) ds \right) 1_{\{\tau_b^{[\lambda]} > \tau_1\}} \right], \tag{29}
 \end{aligned}$$

である。第 1 項は金利上昇前に倒産する場合、第 2 項は金利上昇後に倒産する場合を意味する。同様に $D^{[0 \rightarrow 1]}(X_t)$ は、金利上昇 ($r_0 \rightarrow r_1$) を織り込んだ負債価値

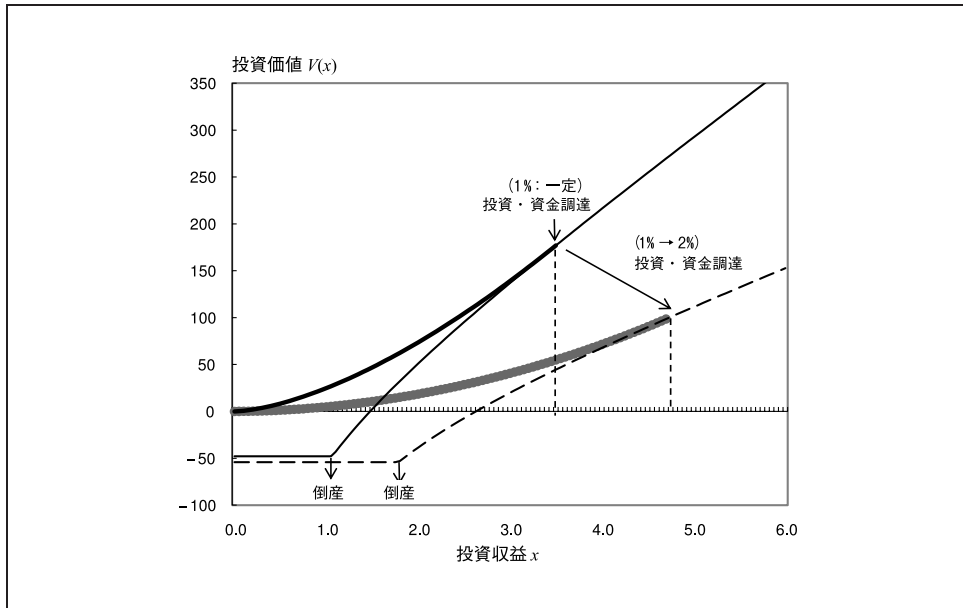
$$\begin{aligned}
 & D^{[0 \rightarrow 1]}(X_t) \\
 &= E_t \left[\left(\int_t^{\tau_b^{[\lambda]}} e^{-r_0(s-t)} b^{[\lambda]} ds + e^{-r_0(\tau_b^{[\lambda]}-t)} (1 - \alpha) W_a^{[0]}(X_{\tau_b^{[\lambda]}}) \right) 1_{\{\tau_b^{[\lambda]} \leq \tau_1\}} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_t^{\tau_1} e^{-r_0(s-t)} b^{[\lambda]} ds \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + e^{-r_0(\tau_1-t)} \int_{\tau_1}^{\tau_b^{[\lambda]}} e^{-r_1(s-t)} b^{[\lambda]} ds \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + e^{-r_1(\tau_b^{[\lambda]}-\tau_1)} (1 - \alpha) W_a^{[1]}(X_{\tau_b^{[\lambda]}}) \right) 1_{\{\tau_b^{[\lambda]} > \tau_1\}} \right], \tag{30}
 \end{aligned}$$

であり、第 1 項は金利上昇前に倒産する場合、第 2 項は金利上昇後に倒産する場合を意味する。このように時間整合的な場合は、将来の金利上昇を完全に織り込んで企業の倒産、負債による資金調達額等を決定していることがわかる。

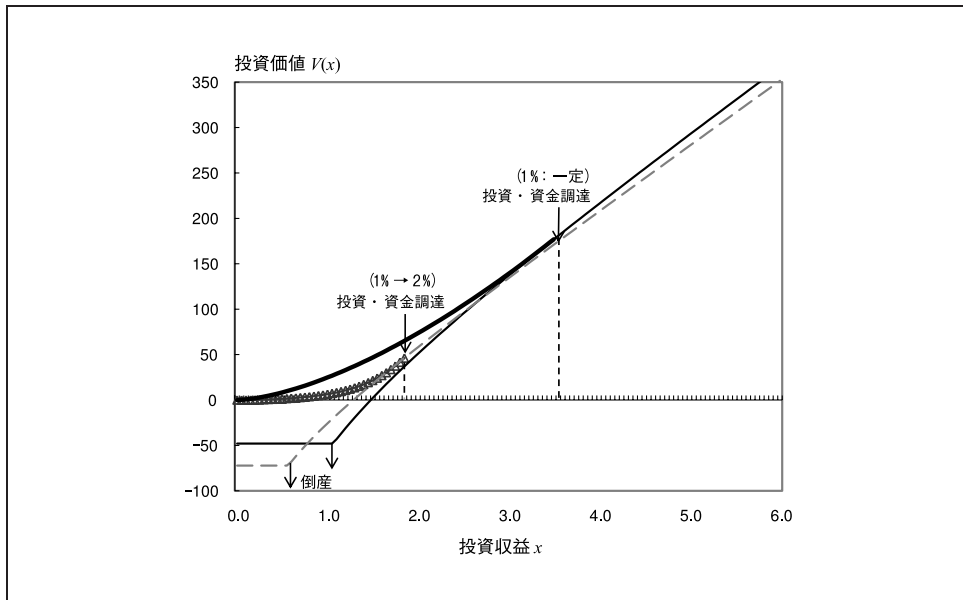
以上の最適化問題の解をグラフに表示したものが図表 10 である。この図からもわかるように、時間整合的な企業は、投資後の金利上昇も投資時点で織り込んでから投資を行うため、投資のタイミングは遅くなり、投資から倒産までの幅は長くなる。したがって、投資の信用リスクは比較的低いものになることがわかる（詳細は補論 6）。

一方、時間非整合的な企業（図表 11）は、2 節で考察したように駆込み的な投資を行うため、投資のタイミングは相当早くなり、投資から倒産までの幅も短くなる。すなわち、信用リスクの高い駆込み投資が選択されやすいことがわかる（詳細は補論 5）。

図表 10 投資と倒産：時間整合的な場合



図表 11 投資と倒産：時間非整合的な場合



4. おわりに

本稿では、リアルオプション・モデルを用いて、低金利環境下における企業の投資行動の積極化、信用リスクの拡大について、理論的な視点から分析を行った。その結果、低金利継続期待が強い場合のみならず、先行き金利上昇期待が存在している場合にも、企業の投資・資金調達に積極化し、信用リスクの拡大につながりうることがわかった。具体的な分析結果とその含意は、以下のとおりである。

まず、低金利が継続する場合、企業は、株価が上昇するなど資金調達環境が有利に働くことを背景に、収益が低い段階でも投資を実行し、収益対比多くの債務を抱えることがわかった。また、低金利環境下で行われた投資ほど、倒産するまでの期間が短く、信用リスクが高いことがわかった。このため、低金利環境下ほど、慎重なリスク管理が必要となる。

次に、先行き金利の上昇が見込まれる場合は、その可能性をどのように織り込むかにより投資判断が異なるが、これを近視眼的に、すなわち時間非整合的に織り込む企業では、駆込み的な投資が発生することがわかった。逆に、将来の利上げを経済合理的に、すなわち時間整合的に織り込めば、企業の投資はむしろ抑制されることがわかった。こうした結果を踏まえると、金利上昇の経済効果を考察するうえで、企業の投資行動がどのような基準に従っているかを的確に評価することが重要である。

最後に、今後の課題について述べる。まず、本稿では、金利環境の変化に対する企業の投資・資金調達行動の反応を考察することが主眼であったため、金利の変動のみを考慮し、投資収益の成長率は一定としていた。しかし、収益の成長率が変化した場合に、金利をどの程度変化させることが望ましいか、という問題を考察する場合には、成長率と金利を同時に変化させる、もしくは、両者の間の相関を考慮するモデルが必要であろう。こうしたモデルへの拡張は、今後の課題である。

また、本稿では、企業の新規投資に対する投資・資金調達問題に絞って考察しているため、投資実行以前に企業がどのような債務状況にあるか、それが企業の投資にどのような影響を与えるかなどは考察の対象としていない。しかし、過剰債務を抱えた企業とそうでない企業では投資の判断も異なるであろうし、金利環境の変化に対する反応も異なるであろう。こうした分析を可能とするモデルへの拡張も今後の課題である。

参考文献

- 翁 邦雄・白川方明・白塚重典、「資産価格バブルと金融政策：1980年代後半の日本の経験とその教訓」、『金融研究』第19巻第4号、日本銀行金融研究所、2000年、261～322頁
- 芝田隆志・山田哲也、「メイン寄せリスクと貸出債権価値の評価：ゲーム論的リアルオプションによるアプローチ」、『金融研究』第27巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2008年、1～46頁
- Dixit, Avinash, and Robert Pindyck, *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.
- Egami, Masahiko, “A Game Options Approach to the Investment Problem with Convertible Debt Financing,” Working Paper, Kyoto University, 2009.
- Goldstein, Robert, Nengjiu Ju, and Hayne Leland, “An Ebit-Based Model of Dynamic Capital Structure,” *Journal of Business*, 74 (4), 2001, pp. 483–512.
- Grenadier, Steven, and Neng Wang, “Investment under Uncertainty and Time-Inconsistent Preferences,” *Journal of Financial Economics*, 84 (1), 2007, pp. 2–39.
- Harris, Christopher, and David Laibson, “Hyperbolic Discounting and Consumption,” in Mathias Dewatripont, Lars Peter Hansen, and Stephen J. Turnovsky, eds. *Advances in Economics and Econometrics, Theory and Applications 8th World Congress Volume 1*, Econometric Society, 2003, pp. 258–298.
- Hoshi, Takeo, “What Happened to Japanese Banks?” *Monetary and Economic Studies*, 19 (1), Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2001, pp. 1–30.
- Laibson, David, “Golden Eggs and Hyperbolic Discounting,” *Quarterly Journal of Economics*, 112 (2), 1997, pp. 443–477.
- Leland, Hayne, “Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure,” *Journal of Finance*, 49 (4), 1994, pp. 1213–1252.
- Lyandres, Evgeny, and Alexei Zhdanov, “Accelerated Financing and Investment in the Presence of Risky Debt,” Simon School Working Paper No. FR03-28, University of Rochester, 2006a.
- , and ———, “Convertible Debt and Investment Timing,” Working Paper, Rice University, 2006b.
- Mauer, David C., and Sudipto Sarkar, “Real Option, Agency Conflicts and Optimal Capital Structure,” *Journal of Banking and Finance*, 29 (6), 2005, pp. 1405–1428.
- Mella-Barral, Pierre, and William Perraudin, “Strategic Debt Services,” *Journal of Finance*, 52 (2), 1997, pp. 531–556.
- Modigliani, Franco, and Merton Miller, “The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment,” *American Economic Review*, 48 (3), 1958, pp. 261–297.

- Nishihara, Michi, and Takashi Shibata, “Investment Game with Debt Financing,” *Recent Advances in Financial Engineering, Proceedings of the 2008 Daiwa International Workshop on Financial Engineering*, World Scientific, 2009, pp. 161–187.
- Sundaresan, Suresh, and Neng Wang, “Investment under Uncertainty with Strategic Debt Service,” *American Economic Review*, 97 (2), 2007, pp. 256–261.
- Yagi, Kyoko, Ryuta Takashima, Hiroshi Takamori, and Katsushige Sawaki, “Timing of Convertible Debt Financing and Investment,” CARF Working Paper No. CARF-F-131, The University of Tokyo, 2008.
- Zhdanov, Alexei, “Competitive Equilibrium with Debt,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 42 (3), 2007, pp. 709–734.
- , “Optimal Capital Structure in a Duopoly,” Working Paper, University of Lausanne, 2008.

補論 1. 企業の最適な資金調達問題

補論 1 と補論 2 では、Sundaresan and Wang [2007] に従い、金利が変動しない場合の投資・資金調達問題を説明する。まず、補論 1 では、株式価値 $E(X_t)$ 、負債価値 $D(X_t)$ 、企業価値 $W(X_t)$ を導出し、最適な負債による資金調達額を求める。補論 2 では、補論 1 の結果をもとに最適な投資時刻、投資価値 $V(X_t)$ を導出する。

まず、株式価値の最大化問題 (2) 式は、各時刻 t ごとに倒産を判断する問題

$$E(X_t) = \max \left\{ \max_{\tau_b \in F_{t+dt}} E_t \left[\int_t^{\tau_b} e^{-r(s-t)} (1 - \tau_{ax})(X_t - b) ds \right], 0 \right\}, \quad (\text{A-1})$$

に帰着できる。右辺第 1 項は、時刻 t で倒産しない場合 ($\tau_b \in F_{t+dt}$)、第 2 項は、倒産した場合の価値 0 を意味する。倒産しない場合の価値を、今期の投資収益 $(1 - \tau_{ax})(X_t - b)$ と来期の株価 $E(X_{t+dt})$ に分割することで、 $E(X_t)$ と $E(X_{t+dt})$ の関係式 (ベルマン方程式)

$$E(X_t) = e^{-r dt} \max \{ (1 - \tau_{ax})(X_t - b) dt + E_t[E(X_{t+dt})], 0 \}, \quad (\text{A-2})$$

を導出することができる。倒産しない場合の方程式

$$E(X_t) = e^{-r dt} \{ (1 - \tau_{ax})(X_t - b) dt + E_t[E(X_{t+dt})] \}, \quad (\text{A-3})$$

は、以下の確率微分方程式に変形される。

$$rE(X_t) dt = (1 - \tau_{ax})(X_t - b) dt + E_t[dE(X_t)]. \quad (\text{A-4})$$

ここで $dE(X_t)$ の項に伊藤の公式を適用すると、 $E(X_t)$ の満たす微分方程式

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 E''(x) + \mu x E'(x) - rE(x) + (1 - \tau_{ax})(x - b) = 0, \quad (\text{A-5})$$

を得る。この方程式の境界条件は、

$$\begin{cases} E(x_b) = 0, \\ E'(x_b) = 0, \\ E(x \rightarrow \infty) \rightarrow (1 - \tau_{ax})(x/(r - \mu) - b/r), \end{cases} \quad (\text{A-6})$$

で与えられる。1 番目と 2 番目の式は、最適な倒産閾値 x_b を決定するための条件式であり、 x_b において株価は 0 になるだけでなく、滑らかに 0 に接続することを要求している。このため、それぞれ「バリュース・マッチング条件」、「スムーズ・ペイス

ディング条件」と呼ばれる。3番目の式は、投資収益が大きくなったとき、株価は「投資収益の割引現在価値」に近づくことを意味し、「バブル解」を排除するための条件である。(A-5)式はオイラー型の微分方程式として知られており、一般に、

$$E(x) = (1 - \tau_{ax}) \left(\frac{x}{r - \mu} - \frac{b}{r} \right) + Bx^\beta + Cx^\gamma, \quad (\text{A-7})$$

という形の解を持つ。ここで β は (16) 式で定義された正の定数であり、 γ は (12) 式で定義された負の定数である。(A-7) 式を境界条件 (A-6) 式へ代入すると、 B 、 C 、 x_b を未知変数とした3つの方程式が得られ、これらにより、

$$\begin{cases} B = 0, \\ C = -(1 - \tau_{ax}) \left(\frac{x_b}{r - \mu} - \frac{b}{r} \right) \left(\frac{1}{x_b} \right)^\gamma, \\ x_b = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{b}{r} (r - \mu), \end{cases} \quad (\text{A-8})$$

が求められる。これらを (A-7) 式へ代入することで、株式価値は、

$$E(x) = (1 - \tau_{ax}) \left(\left(\frac{x}{r - \mu} - \frac{b}{r} \right) - \left(\frac{x_b}{r - \mu} - \frac{b}{r} \right) \left(\frac{x}{x_b} \right)^\gamma \right), \quad x > x_b, \quad (\text{A-9})$$

と導出される。

同様に、負債価値 (3) 式は、以下のようなベルマン方程式に変形可能であり、これにより $D(X_t)$ と $D(X_{t+dt})$ の関係が明らかになる。

$$D(X_t) = e^{-r dt} (b dt + E_t[D(X_{t+dt})]), \quad t < \tau_b. \quad (\text{A-10})$$

(A-10) 式に伊藤の公式を適用することで、 $D(X_t)$ の満たす微分方程式

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 D''(x) + \mu x D'(x) - r D(x) + b = 0, \quad (\text{A-11})$$

$$\text{境界条件: } \begin{cases} D(x \rightarrow \infty) \rightarrow b/r, \\ D(x_b) = W_b(x_b), \end{cases} \quad (\text{A-12})$$

を得る。この方程式には解析解

$$D(x) = \begin{cases} \frac{b}{r} - \left(\frac{b}{r} - W_b(x_b) \right) \left(\frac{x}{x_b} \right)^\gamma, & x > x_b, \\ W_b(x_b) \equiv (1 - \alpha) \frac{(1 - \tau_{ax}) x_b}{r - \mu}, & x \leq x_b, \end{cases} \quad (\text{A-13})$$

が存在する。これら $E(x)$ と $D(x)$ の合計として $W(x)$ が

$$W(x) = \begin{cases} (1 - \tau_{ax}) \frac{x}{r - \mu} + \tau_{ax} \left(1 - \left(\frac{x}{x_b}\right)^\gamma\right) \frac{b}{r} \\ - \alpha \left((1 - \tau_{ax}) \frac{x_b}{r - \mu} \right) \left(\frac{x}{x_b}\right)^\gamma, & x > x_b, \\ W_b(x_b) \equiv (1 - \alpha)(1 - \tau_{ax}) \frac{x_b}{r - \mu}, & x \leq x_b, \end{cases} \quad (\text{A-14})$$

と導出される。この企業価値を b で微分することにより、企業価値が最大になるような負債による資金調達額

$$b = h^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma - 1}{\gamma} x, \quad (\text{A-15})$$

が求められる。ここで h は (18) 式で定義した定数である。この時点では、負債による資金調達額が投資時点の収益 x に依存していることに注意しよう。(A-15) 式を (A-14) 式へ代入することで資本構成が最適化された企業価値

$$W(x) = \psi^{-1} \frac{(1 - \tau_{ax})x}{r - \mu}, \quad x > x_b, \quad (\text{A-16})$$

が導出される。ここで ψ は (17) 式で定義された 1 より大きい定数である。 $W(x)$ のうち、 ψ を除いた部分がすべて株式で調達した場合の企業価値である。 ψ が 1 より大きいことは、資本構成を最適化したことで企業価値が高くなっていることを意味する。

補論 2. 負債による資金調達を考慮した最適投資問題

補論 2 では、補論 1 で求められた負債による資金調達額 (A-15) 式とその際の企業価値 $W(x)$ (A-16) 式を用いて、最適な投資時刻と投資オプション価値 $V(X_t)$ を求める。

最適投資問題 (9) 式は、各時刻 t ごとに投資を判断する問題

$$V(X_t) = \max \left\{ W(X_t) - I, \max_{\tau \in F_{t+dt}} E_t [e^{-r dt} (W(X_\tau) - I)] \right\}, \quad (\text{A-17})$$

に帰着する。右辺第 1 項は時刻 t で投資した場合の価値、第 2 項は投資しない場合 ($\tau \in F_{t+dt}$) の価値を意味する。投資しない場合の価値は、来期の投資オプション価値 $e^{-r dt} V(X_{t+dt})$ に等しいため、 $V(X_t)$ と $V(X_{t+dt})$ の関係式 (ベルマン方程式)

$$V(X_t) = \max \{ W(X_t) - I, e^{-r dt} E_t [V(X_{t+dt})] \}, \quad (\text{A-18})$$

を導出できる。投資しない場合の方程式

$$V(X_t) = e^{-r dt} E_t [V(X_{t+dt})], \quad (\text{A-19})$$

は、以下の確率微分方程式に変形される。

$$rV(X_t) dt = E_t [dV(X_{t+dt})]. \quad (\text{A-20})$$

ここで、 $dV(X_t)$ の項に伊藤の公式を適用することで $V(X_t)$ が満たす微分方程式

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 V''(x) + \mu x V'(x) - rV(x) = 0, \quad (\text{A-21})$$

を得る。この方程式の境界条件は、

$$\begin{cases} V(x_I) = W(x_I) - I, \\ V'(x_I) = W'(x_I), \end{cases} \quad (\text{A-22})$$

で与えられる。これらは、最適な投資閾値 x_I を決定するための条件式であり、 x_I において、 $V(X_t)$ が $W(x_I) - I$ に滑らかに接続することを要求する「バリュエーション・マッピング条件」と「スムーズ・ペイスティング条件」である。方程式 (A-21) 式もオイラー型の微分方程式であり、一般に、

$$V(x) = Bx^\beta + Cx^\gamma, \quad (\text{A-23})$$

という形の解を持つ。ここで β は (16) 式で定義された正の定数であり、 γ は (12) 式で定義された負の定数である。(A-23) 式を境界条件 (A-22) 式へ代入し、 $V(x) < \infty$ という条件を与えると、 B 、 C 、 x_I を未知変数とした 3 つの方程式が得られる。これらより、

$$\begin{cases} B = (W(x_I) - I) \left(\frac{1}{x_I} \right)^\beta, \\ C = 0, \\ x_I = \psi \frac{\beta}{\beta - 1} \frac{(r - \mu)}{1 - \tau_{ax}} I, \end{cases} \quad (\text{A-24})$$

と求められる。ここで ψ は (17) 式で定義される定数であり、 x_I は最適な投資閾値を表す。これらを (A-23) 式へ代入することで、投資オプション価値は、

$$V(x) = \begin{cases} (W(x_I) - I) \left(\frac{x}{x_I} \right)^\beta, & x < x_I, \\ W(x) - I, & x \geq x_I, \end{cases} \quad (\text{A-25})$$

と導出できる。

(A-15) 式の x に投資閾値 x_I を代入することで、最適な投資時刻における、負債による資金調達額が

$$b^* = h^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\beta}{\beta - 1} \frac{r \psi}{1 - \tau_{ax}} I, \quad (\text{A-26})$$

と求められる。

補論 3. 時間非整合的な企業の最適投資問題

最適投資問題 (21) 式は以下のようなベルマン方程式に変形可能であり、これにより $V(X_t)$ と $V(X_{t+dt})$ の関係が明らかになる。

$$\begin{aligned} V(X_t) &= \max \left\{ X_t / (r_0 - \mu) - I, e^{-r_0 dt} \mathbf{E}_t [V(X_{t+dt}) + \lambda [V_1(X_{t+dt}) - V(X_{t+dt})]] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A-27})$$

ここで $V_1(X_t)$ は、利上げ ($r_0 \rightarrow r_1$) 後の投資オプション価値

$$V_1(X_t) = \max_{\tau \in F_t} \mathbf{E}_t \left[\int_{\tau}^{\infty} e^{-r_1(s-\tau)} X_s ds - I \right], \quad (\text{A-28})$$

を表す。以下では、まず利上げ後の最適投資問題 (A-28) 式を解き、その解を用いて利上げの可能性がある場合の最適投資問題 (A-27) 式を解く。(A-28) 式に伊藤の公式を適用することで、 $V_1(X_t)$ の満たす微分方程式

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 V_1''(x) + \mu x V_1'(x) - r_1 V_1(x) = 0, \quad (\text{A-29})$$

$$\text{境界条件: } \begin{cases} V_1(x_I^{(1)}) = x_I^{(1)} / (r_1 - \mu) - I, \\ V_1'(x_I^{(1)}) = 1 / (r_1 - \mu), \end{cases} \quad (\text{A-30})$$

が得られる。ここで境界条件 (A-30) 式は、最適な投資閾値 $x_I^{(1)}$ を決定するための条件式であり、 $V_1(x)$ が $x_I^{(1)}$ において、投資実行後の価値 $x_I^{(1)} / (r_1 - \mu) - I$ に滑らかに接続することを要求する「バリュエー・マッチング条件」と「スムーズ・ペイスティング条件」である。

この方程式には解析解

$$V_1(x) = \begin{cases} \left(\frac{x_I^{(1)}}{r_1 - \mu} - I \right) \left(\frac{x}{x_I^{(1)}} \right)^{\beta_1}, & x < x_I^{(1)}, \\ \frac{x_I^{(1)}}{r_1 - \mu} - I, & x \geq x_I^{(1)}, \end{cases} \quad (\text{A-31})$$

が存在する。最適な投資閾値 $x_I^{(1)}$ も方程式の境界条件 (A-30) 式から以下のように求められる。

$$x_I^{(1)} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} (r_1 - \mu) I. \quad (\text{A-32})$$

また、 β_1 は、最適化問題を解くための特性方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta_1(\beta_1 - 1) + \mu\beta_1 - r_1 = 0, \quad (\text{A-33})$$

の正の根である。

以上の解を用いて (A-27) 式を解く。(A-27) 式に伊藤の公式を適用することで、 $V(X_t)$ の満たす微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2V''(x) + \mu xV'(x) - r_0V(x) + \lambda[V_1(x) - V(x)] = 0, \quad (\text{A-34})$$

$$\text{境界条件: } \begin{cases} V(x_I^{(\lambda)}) = x_I^{(\lambda)}/(r_0 - \mu) - I, \\ V'(x_I^{(\lambda)}) = 1/(r_0 - \mu), \end{cases} \quad (\text{A-35})$$

が得られる。

この方程式には解析解

$$V(x) = \begin{cases} \delta \cdot V_1(x) - \left(\delta \cdot V_1(x_I^{(\lambda)}) - \left(\frac{x_I^{(\lambda)}}{r_0 - \mu} - I \right) \right) \left(\frac{x}{x_I^{(\lambda)}} \right)^{\beta_\lambda}, & x < x_I^{(\lambda)}, \\ \frac{x_I^{(\lambda)}}{r_0 - \mu} - I, & x \geq x_I^{(\lambda)}, \end{cases} \quad (\text{A-36})$$

が存在する。ここで δ は、利上げ ($r_0 \rightarrow r_1$) による追加的な割引率

$$\delta = 1/(1 - (r_1 - r_0)T), \quad T = 1/\lambda, \quad (\text{A-37})$$

を表す。最適な投資閾値 $x_I^{(\lambda)}$ も、以下の方程式

$$(\beta_\lambda - \beta_1)\delta \left(\frac{x_I^{(1)}}{r_1 - \mu} - I \right) \left(\frac{x_I^{(\lambda)}}{x_I^{(1)}} \right)^{\beta_1} = (\beta_\lambda - 1) \frac{x_I^{(\lambda)}}{r_0 - \mu} - \beta_\lambda I, \quad (\text{A-38})$$

の根として数値的に求められる。ここで β_λ は、最適化問題を解くための特性方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta_\lambda(\beta_\lambda - 1) + \mu\beta_\lambda - (r_0 + \lambda) = 0, \quad (\text{A-39})$$

の解である。

補論 4. 時間整合的な企業の最適投資問題

最適投資問題 (22) 式は以下のようなベルマン方程式に変形可能であり、これにより $V(X_t)$ と $V(X_{t+dt})$ の関係が明らかになる。

$$V(X_t) = \max \left\{ W_\lambda(X_t) - I, e^{-r_0 dt} \mathbf{E}_t [V(X_{t+dt}) + \lambda[V_1(X_{t+dt}) - V(X_{t+dt})]] \right\}. \quad (\text{A-40})$$

ここで $V_1(X_t)$ は、(A-28) 式で定義した利上げ ($r_0 \rightarrow r_1$) 後の投資オプション価値である。 $W_\lambda(X_t)$ は、将来の利上げを織り込んで割引現在価値を評価したものであり、

$$W_\lambda(X_t) = \mathbf{E}_t \left[\int_t^{\tau_1} e^{-r_0(s-t)} X_s ds + \int_{\tau_1}^{\infty} e^{-r_1(s-t)} X_s ds \right], \quad (\text{A-41})$$

と表される。以下では、まず $W_\lambda(X_t)$ を導出し、これと $V_1(X_t)$ を用いることで、時間整合的な企業の最適投資問題 (A-40) 式を解く。

(A-41) 式に伊藤の公式を適用することで、 $W_\lambda(X_t)$ の満たす微分方程式

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 W_\lambda''(x) + \mu x W_\lambda'(x) - r_0 W_\lambda(x) + \lambda[W_\lambda^1(x) - W_\lambda(x)] = 0, \quad (\text{A-42})$$

が得られる。ここで

$$W_\lambda^1(x) = \mathbf{E}_t \left[\int_t^{\infty} e^{-r_1(s-t)} X_s ds \right] = \frac{x}{r_1 - \mu}, \quad (\text{A-43})$$

は、利上げ後の割引現在価値を評価したものである。この方程式には解析解

$$W_\lambda(x) = \frac{x}{r_\lambda - \mu}, \quad (\text{A-44})$$

が存在する。ここで r_λ は、利上げを考慮した金利水準（長期金利）であり、

$$r_\lambda = \mu + \frac{(r_0 + \lambda) - \mu}{(r_1 + \lambda) - \mu} (r_1 - \mu), \quad (\text{A-45})$$

と表される。利上げ確率 λ について自然な結果

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} r_\lambda = r_0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} r_\lambda = r_1, \quad (\text{A-46})$$

が成立することに注意しよう。

以上の解を用いて (A-40) 式を解く。(A-40) 式に伊藤の公式を適用することで、 $V(X_I)$ の満たす微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2V''(x) + \mu xV'(x) - r_0V(x) + \lambda[V_1(x) - V(x)] = 0, \quad (\text{A-47})$$

$$\text{境界条件：} \begin{cases} V(X_I^{(\lambda)}) = W_\lambda(x_I^{(\lambda)}) - I, \\ V'(x_I^{(\lambda)}) = W'_\lambda(x_I^{(\lambda)}), \end{cases} \quad (\text{A-48})$$

が得られる。

この方程式には解析解

$$V(x) = \begin{cases} \delta \cdot V_1(x) - \left(\delta \cdot V_1(x_I^{(\lambda)}) - (W_\lambda(x_I^{(\lambda)}) - I) \right) \left(\frac{x}{x_I^{(0)}} \right)^{\beta_\lambda}, & x < x_I^{(\lambda)}, \\ W_\lambda(x) - I, & x \geq x_I^{(\lambda)}, \end{cases} \quad (\text{A-49})$$

が存在する。ここで δ は利上げ ($r_0 \rightarrow r_1$) による追加的な割引率 (A-37) 式である。最適な投資閾値 $x_I^{(\lambda)}$ も、以下の方程式

$$(\beta_\lambda - \beta_1)\delta \left(\frac{x_I^{(1)}}{r_1 - \mu} - I \right) \left(\frac{x_I^{(\lambda)}}{x_I^{(1)}} \right)^{\beta_1} = (\beta_\lambda - 1)W_\lambda(x_I^{(\lambda)}) - \beta_\lambda I, \quad (\text{A-50})$$

の根として数値的に求められる。ここで β_λ は、(A-39) 式で定義された定数である。

補論 5. 時間非整合的な企業の投資・資金調達問題

投資・資金調達問題 (23) 式は以下のようなベルマン方程式に変形可能であり、これにより $V(X_t)$ と $V(X_{t+dt})$ の関係が明らかになる。

$$\begin{aligned} & V(X_t) \\ &= \max \left\{ W^{[0]}(X_t) - I, e^{-r_0 dt} E_t \left[V(X_{t+dt}) + \lambda [V^{[1]}(X_{t+dt}) - V(X_{t+dt})] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A-51})$$

ここで $V^{[1]}(X_t)$ は、利上げ ($r_0 \rightarrow r_1$) 後の投資オプション価値

$$V^{[1]}(X_t) = \max_{\tau \in F_t} E_t \left[e^{-r_1(\tau-t)} (W^{[1]}(X_\tau) - I) \right], \quad (\text{A-52})$$

を表す。以下では、まず利上げ後の投資・資金調達問題 (A-52) 式を解き、その解を用いて利上げの可能性がある場合の投資・資金調達問題 (A-51) 式を解く。

(A-52) 式は、金利が一定 (r_1) の場合の投資・資金調達問題であるため、2 節の議論 (補論 1) から解析解を導くことができる。まず、企業価値 $W^{[1]}(x)$ を構成する株式価値 $E^{[1]}(x)$ と負債価値 $D^{[1]}(x)$ は以下のように解析的に導出される。

$$E^{[1]}(x) = (1 - \tau_{ax}) \left(\left(\frac{x}{r_1 - \mu} - \frac{b^{[1]}}{r_1} \right) - \left(\frac{x_b^{[1]}}{r_1 - \mu} - \frac{b^{[1]}}{r_1} \right) \left(\frac{x}{x_b^{[1]}} \right)^{\gamma_1} \right), \quad x > x_b^{[1]}. \quad (\text{A-53})$$

ここで

$$x_b^{[1]} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \frac{b^{[1]}}{r_1} (r_1 - \mu), \quad (\text{A-54})$$

は倒産の閾値を表し、 $x < x_b^{[1]}$ で企業は倒産する。倒産後の株価はゼロである。また、 γ_1 は、最適化問題を解くための特性方程式

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \gamma_1 (\gamma_1 - 1) + \mu \gamma_1 - r_1 = 0, \quad (\text{A-55})$$

の負根である。

負債価値は、以下のように導出される。

$$D^{[1]}(x) = \begin{cases} \frac{b^{[1]}}{r_1} - \left(\frac{b^{[1]}}{r_1} - W_b^{[1]}(x_b^{[1]}) \right) \left(\frac{x}{x_b^{[1]}} \right)^{\gamma_1}, & x > x_b^{[1]}, \\ W_b^{[1]}(x_b^{[1]}) \equiv (1 - \alpha) \frac{(1 - \tau_{ax}) x_b^{[1]}}{r_1 - \mu}, & x \leq x_b^{[1]}. \end{cases} \quad (\text{A-56})$$

ここで、 $W_b^{[1]}(x_b^{[1]})$ は倒産時点 $x_b^{[1]}$ における企業の残余価値（再評価後）である。これら $E^{[1]}(x)$ と $D^{[1]}(x)$ の合計として $W^{[1]}(x)$ が

$$W^{[1]}(x) = \begin{cases} \frac{(1 - \tau_{ax})x}{r_1 - \mu} + \left(1 - \left(\frac{x}{x_b^{[1]}}\right)^{\gamma_1}\right) \frac{\tau_{ax} b^{[1]}}{r_1} \\ - \left(1 - \tau_{ax}\right) \frac{\alpha x_b^{[1]}}{r_1 - \mu} \left(\frac{x}{x_b^{[1]}}\right)^{\gamma_1}, & x > x_b^{[1]}, \\ W_b^{[1]}(x_b^{[1]}) \equiv (1 - \alpha) \frac{(1 - \tau_{ax})x_b^{[1]}}{r_1 - \mu}, & x \leq x_b^{[1]}, \end{cases} \quad (\text{A-57})$$

と導出される。この企業価値を $b^{[1]}$ で微分することにより、最適な負債による資金調達額

$$b^{[1]} = h^{[1]\frac{1}{\gamma_1}} \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1} x, \quad (\text{A-58})$$

が求められる。ここで $h^{[1]}$ は定数

$$h^{[1]} \equiv 1 - \gamma_1 \left(1 - \alpha + \frac{\alpha}{\tau_{ax}}\right) \geq 1, \quad (\text{A-59})$$

である。この時点では、最適な負債による資金調達額が投資時点の収益 x に依存していることに注意しよう。(A-58) 式を (A-57) 式へ代入することで資本構成が最適化された企業価値

$$W^{[1]}(x) = \psi^{[1]-1} \frac{(1 - \tau_{ax})x}{r_1 - \mu}, \quad x > x_b^{[1]}, \quad (\text{A-60})$$

が導出される。ここで $\psi^{[1]}$ は定数

$$\psi^{[1]} \equiv \left(1 + h^{[1]\frac{1}{\gamma_1}} \left(\frac{\tau_{ax}}{1 - \tau_{ax}}\right)\right)^{-1} \leq 1, \quad (\text{A-61})$$

である。この $W^{[1]}(x)$ を用いると、投資オプション価値 $V^{[1]}(x)$ を解析的に解くことが可能で、

$$V^{[1]}(x) = \begin{cases} (W^{[1]}(x_I^{[1]}) - I) \left(\frac{x}{x_I^{[1]}}\right)^{\beta_1}, & x < x_I^{[1]}, \\ W^{[1]}(x) - I, & x \geq x_I^{[1]}, \end{cases} \quad (\text{A-62})$$

と表現できる。ここで

$$x_I^{[1]} = \psi^{[1]} \frac{\beta_1}{\beta_1 - I} \frac{(r_1 - \mu)}{1 - \tau_{ax}} I, \quad (\text{A-63})$$

は投資閾値である。 β_1 は (A-33) 式で定義された定数である。最適な投資時刻における負債による資金調達額も、(A-58) 式の x に投資閾値 $x_I^{[1]}$ を代入することで、

$$b^{[1]} = h^{[1]\frac{1}{\alpha}} \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1} \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{r_1 \psi^{[1]}}{1 - \tau_{ax}} I, \quad (\text{A-64})$$

と求められる。

以上の解を用いて (A-51) 式を解く。(A-51) 式に伊藤の公式を適用することで、 $V(X_t)$ の満たす微分方程式

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 V''(x) + \mu x V'(x) - r_0 V(x) + \lambda [V^{[1]}(x) - V(x)] = 0, \quad (\text{A-65})$$

$$\text{境界条件: } \begin{cases} V(x_I^{[\lambda]}) = W^{[0]}(x_I^{[\lambda]}) - I, \\ V'(x_I^{[\lambda]}) = W'^{[0]}(x_I^{[\lambda]}), \end{cases} \quad (\text{A-66})$$

が得られる。ここで $W^{[0]}(x)$ は、金利が r_0 で一定の場合の企業価値であり、 $W^{[1]}(x)$ と全く同様に解かれる ((A-60) 式の添え字 1 を 0 に置き換えたものに等しい)。

この方程式には解析解

$$V(x) = \begin{cases} \delta \cdot V^{[1]}(x) - \left(\delta \cdot V^{[1]}(x_I^{[\lambda]}) - (W^{[0]}(x_I^{[\lambda]}) - I) \right) \left(\frac{x}{x_I^{[\lambda]}} \right)^{\beta_\lambda}, & x < x_I^{[\lambda]}, \\ W^{[0]}(x) - I, & x \geq x_I^{[\lambda]}, \end{cases} \quad (\text{A-67})$$

が存在する。ここで δ は、利上げ ($r_0 \rightarrow r_1$) による追加的な割引率 (A-37) 式である。最適な投資閾値 $x_I^{[\lambda]}$ も、以下の方程式

$$(\beta_\lambda - \beta_1) \delta (W^{[1]}(x_I^{[1]}) - I) \left(\frac{x_I^{[\lambda]}}{x_I^{[1]}} \right)^{\beta_1} = (\beta_\lambda - 1) W^{[0]}(x_I^{[\lambda]}) - \beta_\lambda I, \quad (\text{A-68})$$

の根として数値的に求められる。ここで β_λ は、(A-39) 式で定義された定数である。

補論 6. 時間整合的な企業の投資・資金調達問題

投資・資金調達問題 (27) 式は以下のようなベルマン方程式に変形可能であり、これにより $V(X_t)$ と $V(X_{t+dt})$ の関係が明らかになる。

$$\begin{aligned} V(X_t) \\ = \max \left\{ W^{[0 \rightarrow 1]}(X_t) - I, e^{-r_0 dt} E_t \left[V(X_{t+dt}) + \lambda [V^{[1]}(X_{t+dt}) - V(X_{t+dt})] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A-69})$$

ここで $V^{[1]}(X_t)$ は、(A-52) 式で定義した利上げ ($r_0 \rightarrow r_1$) 後の投資オプション価値である。 $W^{[0 \rightarrow 1]}(X_t)$ は、金利上昇 ($r_0 \rightarrow r_1$) を織り込んだ企業価値であり (28)、(29)、(30) 式により定義される。以下では、まず、 $W^{[0 \rightarrow 1]}(X_t)$ を導出し、これと $V^{[1]}(X_t)$ を用いることで、時間整合的な企業の投資・資金調達問題 (A-69) 式を解く。

$W^{[0 \rightarrow 1]}(X_t)$ は、 $E^{[0 \rightarrow 1]}(X_t)$ と $D^{[0 \rightarrow 1]}(X_t)$ の和として定義されるため、まず、これらを解く。(29) 式に伊藤の公式を適用することで、 $E^{[0 \rightarrow 1]}(X_t)$ の満たす微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 E^{[0 \rightarrow 1]''}(x) + \mu x E^{[0 \rightarrow 1]'}(x) + (1 - \tau_{ax})(x_t - b) \\ - r_0 E^{[0 \rightarrow 1]}(x) + \lambda [E^{[1]}(x) - E^{[0 \rightarrow 1]}(x)] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A-70})$$

が得られる。ここで $E^{[1]}(X_t)$ は、利上げ後の株式価値であり (A-53) 式で表される。この方程式には解析解、

$$E^{[0 \rightarrow 1]}(x) = (1 - \tau_{ax}) \left(\left(\frac{x}{r_\lambda - \mu} - \frac{b^{[\lambda]}}{r_\lambda} \right) - \left(\frac{x_b^{[\lambda]}}{r_\lambda - \mu} - \frac{b^{[\lambda]}}{r_\lambda} \right) \left(\frac{x}{x_b^{[\lambda]}} \right)^{\gamma_1} \right), \quad x > x_b^{[\lambda]}, \quad (\text{A-71})$$

が存在する。ここで

$$x_b^{[\lambda]} = \frac{\gamma_\lambda}{\gamma_\lambda - 1} \frac{b^{[\lambda]}}{r_\lambda} (r_\lambda - \mu), \quad (\text{A-72})$$

は倒産の閾値を表し、 $x < x_b^{[\lambda]}$ で企業は倒産する。倒産後の株価はゼロである。また、 γ_λ は、最適化問題を解くための特性方程式

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \gamma_\lambda (\gamma_\lambda - 1) + \mu \gamma_\lambda - r_\lambda = 0, \quad (\text{A-73})$$

の負根である。 r_λ は (A-45) 式で定義された長期金利の水準を表す。

負債価値 $D^{[0 \rightarrow 1]}(X_t)$ に関しても同様の議論から、

$$D^{[0 \rightarrow 1]}(x) = \begin{cases} \frac{b^{[\lambda]}}{r_\lambda} - \left(\frac{b^{[\lambda]}}{r_\lambda} - W_b^{[\lambda]}(x_b^{[\lambda]}) \right) \left(\frac{x}{x_b^{[\lambda]}} \right)^{\gamma_\lambda}, & x > x_b^{[\lambda]}, \\ W_b^{[\lambda]}(x_b^{[\lambda]}) \equiv (1 - \alpha) \frac{(1 - \tau_{ax})x_b^{[\lambda]}}{r_\lambda - \mu}, & x \leq x_b^{[\lambda]}, \end{cases} \quad (\text{A-74})$$

と解くことができる。ここで $W_b^{[\lambda]}(x_b^{[\lambda]})$ は、倒産時点 $x_b^{[\lambda]}$ における企業の残余価値（再評価後）である。これら $E^{[0 \rightarrow 1]}(X_t)$ と $D^{[0 \rightarrow 1]}(X_t)$ の和として $W^{[0 \rightarrow 1]}(X_t)$ が導出される。最適な負債による資金調達額も、

$$b^{[\lambda]} = h^{[\lambda] \frac{1}{\gamma_\lambda}} \frac{\gamma_\lambda - 1}{\gamma_\lambda} x, \quad (\text{A-75})$$

と導出される。ただしこの時点では、最適な負債による資金調達額が投資時点の収益 x に依存していることに注意しよう。

以上の解 $W^{[0 \rightarrow 1]}(X_t)$ を用いて (A-69) 式を解く。(A-69) 式に伊藤の公式を適用することで、 $V(X_t)$ の満たす微分方程式

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 V''(x) + \mu x V'(x) - r_0 V(x) + \lambda [V^{[1]}(x) - V(x)] = 0, \quad (\text{A-76})$$

$$\text{境界条件：} \begin{cases} V(x_I^{[\lambda]}) = W^{[0 \rightarrow 1]}(x_I^{[\lambda]}) - I, \\ V'(x_I^{[\lambda]}) = W'^{[0 \rightarrow 1]}(x_I^{[\lambda]}), \end{cases} \quad (\text{A-77})$$

が得られる。この方程式には解析解

$$V(x) = \begin{cases} \delta \cdot V^{[1]}(x) - \left(\delta \cdot V^{[1]}(x_I^{[\lambda]}) - (W^{[0 \rightarrow 1]}(x_I^{[\lambda]}) - I) \right) \left(\frac{x}{x_I^{[\lambda]}} \right)^{\beta_\lambda}, & x < x_I^{[\lambda]}, \\ W^{[0 \rightarrow 1]}(x) - I, & x \geq x_I^{[\lambda]}, \end{cases} \quad (\text{A-78})$$

が存在する。ここで $V^{[1]}(X_t)$ は、(A-62) 式で導出した利上げ ($r_0 \rightarrow r_1$) 後の投資オプション価値である。また δ は、利上げ ($r_0 \rightarrow r_1$) による追加的な割引率 (A-37) 式である。最適な投資閾値 $x_I^{[\lambda]}$ は、以下の方程式

$$(\beta_\lambda - \beta_1) \delta \left(W^{[1]}(x_I^{[1]}) - I \right) \left(\frac{x_I^{[\lambda]}}{x_I^{[1]}} \right)^{\beta_1} = (\beta_\lambda - 1) W^{[0 \rightarrow 1]}(x_I^{[\lambda]}) - \beta_\lambda I, \quad (\text{A-79})$$

の根として数値的に求められる。ここで β_λ は、(A-39) 式で定義された定数である。

