

金融市場におけるショックの伝播： 理論モデルのサーベイ

ふじわらしげあき
藤原茂章

要 旨

サブプライム問題に端を発した国際金融市場の混乱においては、証券化商品市場全般への拡大波及のみならず、多様な金融資産の同時的な価格下落が世界規模で発生した。本稿では、金融市場におけるショックの伝播（コンテイジョン）現象一般に対して理論的な説明を試みた研究を紹介する。ショックの伝播と増幅メカニズムとして、ポートフォリオのリアロケーション、投資家の運用・借入などの制約、リスク回避度の変動、情報の非対称性・不完全性、金融機関間の債権・債務のつながり、投資家の情報収集や処理能力の限界、投資家の同質化などに注目した理論モデルが考案されている。

キーワード：サブプライム問題、コンテイジョン、ポートフォリオ・リバランス、
リスク回避度、レバレッジ、運用・借入制約、情報の非対称性

本稿を作成するに当たっては、筑波大学大学院牧本直樹教授、日本銀行のスタッフから有益なコメントをいただいた。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

藤原茂章 日本銀行金融研究所企画役補佐
(現 金融機構局企画役補佐、E-mail: shigeaki.fujiwara@boj.or.jp)

1. はじめに

2007年に米国のサブプライム問題に端を発した国際的な金融市場の混乱は、発生当初はサブプライムローン証券化したモーゲージ証券や、これらを参照するCDOなど再証券化商品の一部の問題と捉えられていた。しかし、サブプライム資産とは関係が薄い証券化市場全般に混乱が拡大し、さらには、CDSや社債といったクレジット市場にも余波が及んだうえ、最終的には地方債やGSE債など安全性、流動性が高かった市場も価格下落に見舞われた。これらを担保とするレポ市場の機能低下は、損失が拡大する金融機関やSIVの清算等を通じてバランスシートが拡大した金融機関の資金繰りを一層困難なものにした。また、一連の混乱のなかで、先進国や新興国の株式市場、為替市場、コモディティ市場などにも変調や混乱が生じた（日本銀行金融市場局〔2008a, 2008b〕）。

証券化市場の混乱の背景としては、証券化商品の複雑性に伴うリスクの誤認やミスプライシングといった技術的な問題のほか、格付けに依存した投資運用、組成販売型ビジネスにおけるモラルハザードなど¹が指摘されている。こうした証券化市場の混乱が他市場に波及していく背景には、景気後退に伴うファンダメンタルな資産価値の低下とは別に、さまざまな伝播経路が存在していた。また、その伝播経路上には悪循環を強化する多様なメカニズムが潜在しており、しかも、これらが連鎖的に働いてしまったことが、状況の一段の悪化と波及の拡大につながったと考えられる。

今次の混乱を大局的にみれば、経済成長と低インフレという安定的な経済・金融市場環境下で、リスクプレミアムの低下を伴った投資家の利回り追求、レバレッジの拡大、信用創造の伸長が、急激に逆回転したものとみなせる。その過程において多様な伝播経路が現れたのは、組成販売型ビジネスにおける原資産リスクの世界的な転移や、投資家を含む金融機関のグローバル化など、①同一もしくは同じ属性を持つ金融資産が地理的に離れた複数の市場で保有されていたこと、②同一の金融機関が異なるアセットクラスの市場や地理的に異なる市場に参加していたこと、これらの結果、金融市場間や金融機関の間の相互関連性が非常に強まっていたことによるものと考えられる。特に②に関しては、決済や保険、RMBSの一部などで、サービス・商品提供主体の集中化が進んでいたことがショックの波及範囲を広くしたものと思われる。

おのおのの金融市場の価格変動は同時に複数の金融機関に影響を及ぼし、多くのアセットクラスや金融市場に跨る金融機関の行動はこれら市場に横断的な影響を及ぼしうる。そのさまざまなバリエーションとして、以下のような現象が生じたと指摘されている。

1 Ashcraft and Schuermann [2008] は以下のような事例を指摘している。原資産ローンの組成者は、リスクを投資家に転移するため、ローン実行時や返済期間中において借り手に関する情報生産や債務履行のモニタリングを行うインセンティブが低下した。また、金利リスクや住宅価格リスクを十分認識できない借り手にハイリスクの住宅ローン商品を紹介する略奪的貸出が行われたほか、証券化のアレンジャーは逆選択によって出来上がった質の低い借り手からなる債権プールを証券化技術を用いて販売した。

- 証券化商品に生じた大規模な損失や、オフバランス化したリスク資産の意図せざる再保有²、担保価値の下落、投資資産のボラティリティの上昇などを通じて、金融機関が①資産運用上の制約、②負債調達・資金繰りの制約、③適正自己資本の維持、④リスク管理上の措置・制度³などのために、多様な金融資産の売却や投げ売りを迫られた。特に、レバレッジが高い参加者・金融市場ほど、強い売却圧力に晒された。
- 大規模な損失は金融機関のリスクテイク余地を狭め、金融機関が関与している多数の金融市場で高いリスクプレミアムを求めようになったほか、金融商品によっては（保有が実質的に不可能なほど要求リスクプレミアムが上昇した結果と考えられる）市場参加者の離脱が発生し、市場流動性が著しく低下した。
- 証券化商品は、伝統的なローン等に比べ市場化されている分、損失認識が早く生じた（将来発生するキャッシュフローの毀損の可能性が現在の価格に即時に反映されるため、毀損が生じた時点で損失処理を行うという時間分散効果が効かないうえ、将来キャッシュフローに関する期待の不安定化が価格ボラティリティを高めやすい）。また、一部の証券化商品は、裏付資産の評価に基づく損失の認識が困難であったことも、格付けに対する信任の低下とあいまって過度な市場価格の下落を招いた。
- 商品性が複雑で価値の計測が難しい金融資産ほど、いったん市場流動性が低下すると市場の価格発見機能が大きく損なわれる。こうした状況下での時価評価の適用は、価格下落が売却を加速させる悪循環を一段と強めた。
- 金融機関の信用リスクの高まりは、カウンターパーティ・リスクを強く意識させ、コミットメントラインの縮小など信用創造に逆行転が生じた。特に、大規模金融機関の損失拡大は金融システム不安を惹起させ、さまざまな金融市場で金融仲介機能が低下した。また、これがさらに市場流動性の低下を招く悪循環をもたらした。
- 多様な債券に元利払い保証を提供していたモノラインのデフォルト・リスクの高まりによって、これら債券のデフォルト時回収について市場の期待が悪化し、同時的な価格下落をもたらした。これが、地方債などをレポファンディングに用いていた金融機関の資金繰りを悪化させた。
- 債権債務関係を伴わない伝播経路として、情報の不完全性⁴に伴う最終投資家

2 ABCP コンデュイットや SIV 等の別ビークルを使ってバランスシートから切り離していた債権が、ビークルの救済・連結化に伴って、劣化した状態で資金繰りのミスマッチ状態（長期運用短期調達）を抱えたまま銀行等のバランスシートに戻ってきた。

3 VaR 等のリスク量制約やロスカットルール、担保資産価値下落に伴うマージンコールや掛け目の引上げ、ABS CDO 等で超過担保テスト抵触による早期償還・清算、SIV の時価トリガーヒットに伴う ABCP の償還停止、資産売却による解体など。

4 金融資産売却に伴う価格下落が、ファンダメンタルの悪化を反映したものか、資金繰り難への対応、投資ビークルの解散など別の理由によるものかが不明であるという情報の不完全性が指摘できよう。また、別の理由での一時的な売却であることはわかっているが、これが更なる売りを招き一段の価格下落につながる可能性をどれほど秘めているかが不明であるという情報の不完全性も考えられよう。このほか、証券化商品の評価に際して、トランシングに伴う商品特性の理解や裏付資産の評価などを格付機関や証券化のオリジネー

の期待形成の不安定化が挙げられる。これは、裏付資産が優良な証券化商品やトランシングによって保護されている証券化商品であっても投資が極端に慎重化するといった過剰反応として現れた。

- 上述の期待形成においては、銀行取付けと同様な自己実現的な危機の発生が観察された。例えば、ABCP コンデュイットにおける機関投資家のファンディング提供（ABCP 投資のロールオーバー）の突然停止は、直接金融下での一種の取付けとみなせる。取付けにおいては情報や期待が伝播経路となるため、伝播の範囲や規模は予想が困難なものとなる。

本稿では、上述のような多様なコンテイジョン発生メカニズムの一部を理解するうえで有益と思われる理論モデルを紹介する⁵。これらの理論モデルの特徴を挙げると、一部の市場で生じたショックがポートフォリオ・リアロケーションを通じて他市場の価格変動をもたらすこと、その際、投資家の制約（保有できるリスク量の制約、自己資本比率制約、借入制約など）や、リスク回避度・リスクプレミアムの上昇、情報の非対称性・不完全性が、価格下落幅をより大きなものとし、伝播が及ぶ市場や金融機関の範囲を拡大させること、金融機関間の債権・債務のつながりが伝播経路となりうること、投資家の情報収集・処理能力には限界があるため市場ごとに優先順や強弱を持って対応しており、その再調整が伝播経路になりうること、直接的な伝播経路がなくとも投資家の合理的な同質化が同時的な価格下落を発生させることなどである。

これらの研究は、サブプライム問題が国際金融市場の混乱に発展していく模様を直接分析対象としたものではないが、局所的に生じたショックが異なる金融市場に広がって震度を拡大させつつ伝播していくメカニズムのエッセンスをおのおの捉えたものになっており、文脈を読み替えば、今後の市場の混乱に重ね合わせていくことができよう。本稿では、こうした理論モデルを応用していく際に役立つよう、通常のサーベイ論文よりもモデルの詳細に踏み込んだ解説を行っている。そのため、概要と詳細という二節に分けた説明法をとった。

本稿の構成は次のとおりである。2 節では、本稿で取り上げた価格変動のコンテイジョンモデルについて、おのおのの着目点と主な結果を概観する。3 節では、おのおのの理論モデルの詳細やインプリケーションを順に解説する。最後に 4 節でまとめを行う。

ターなど他組織に依存したこと、また、それらの情報開示も不十分（情報開示への要請も不十分）であったことが情報の不完全性を大きいものにしたと思われる。

5 コンテイジョン現象に関連した研究は、信用リスクを扱った数理ファイナンスモデルから金融システムの安定性を考察した経済モデルまで幅広い。本稿は、これらを網羅的に取り上げたものではなく、サブプライム問題以降の国際金融市場の混乱を考察するうえで参考になる研究の一部を取り上げている。より広義のコンテイジョンに関するサーベイ論文としては、Pericoli and Sbracia [2003] が挙げられる。同論文は、先行研究が想定しているコンテイジョンを 5 つのタイプに分類・定義し、それぞれの定義に沿ったコンテイジョンの計測手法を紹介したうえで、数多くの理論モデルを紹介している。また、De Bandt and Hartmann [2000] は、システミック・リスクの概念整理と理論モデルのサーベイを通じて、コンテイジョン現象が金融システム危機の発生メカニズムの中核にあることを示している。

2. モデルの着目点

コンテイジョンという用語は、金融資産市場間に何らかの伝播メカニズムが働いて価格下落の連鎖が生じるという意味以外にも、銀行制度や決済制度など金融システムについて、その構成要素間で機能不全の連鎖が生じるという広義の文脈で用いられることがある。本稿では、考察対象を金融資産市場に限定し、コンテイジョンを次のように定義する。

ある市場に発生した固有のネガティブ・ショックが、金融資産価値を決定するファンダメンタルズが互いに独立している市場にも伝播し、同時的な価格下落を引き起こすこと。

本稿で紹介するコンテイジョンモデルの着目点を順に紹介すると、①一部の資産価格下落が資産効果を通じて他資産の売却につながり、価格下落が更に資産効果を強めるモデル、②情報の非対称性が価格下落を加速させるモデル、③市場間での注意の再配分がコンテイジョンを引き起こすモデル、④直接的な伝播経路は存在しなくとも投資家の同質性が高まることで同時的な売却が生じるモデルとなる。

(1) 資産効果を通じた連鎖

資産効果とリスク回避度の変化 (Kyle and Xiong [2001])

ある資産価格が下落すると、投資家のポートフォリオ・リバランスを通じて他資産が売却される現象が生じうる(資産効果)。この効果は、投資家のリスク回避度が総資産額に依存するとき、リスク回避度・リスクプレミアム⁶の上昇を通じて一段と強まる。資産の売却は、更なる価格下落や総資産額の減少、ポートフォリオのリバランスを低下させ、複数の資産価格が同時に大きく下落する現象をもたらす可能性がある。価格下落幅は最終的に需給がバランスするところで決定されるため、均衡価格を求める際には別の投資原理に従う投資家が価格下落時の買い手として必要となる。Kyle and Xiong [2001]では、ファンダメンタル価値とのギャップに注目して売買を行う長期的投資家や、ランダムに流動性供給・吸収を行うノイズ・トレーダー(流動性ショックの発生源)を含めた市場均衡を考え、コンテイジョンのモデル化を行っている。

資産効果と運用制約 (Cifuentes, Ferrucci, and Shin [2005])

リスク回避度の変化がなくとも、資産運用上の制約によって資産効果の表れ方が大きくなる場合がある。また、金融機関の間に張り巡らされている債権・債務は金融機関のバランスシートを複雑にリンクさせており、これがショックの伝播経路と

6 投資リターンの不確実性に対するリスクプレミアムは、効用関数で定義される絶対的リスク回避度と投資リターンの分散の積で表せる。したがって、リスクプレミアムが高まる要因は、リスク回避度の高まりかボラティリティの上昇である。詳しくは、池田 [2000] を参照。

なりうる⁷。Cifuentes, Ferrucci, and Shin [2005] は、資産運用上の制約として自己資本比率の下限維持を考えた。資産価格の下落を時価評価すると自己資本比率制約が満たせなくなる場合、金融機関はリスク資産を売却して自己資本比率を維持しようとする。こうした資産売却と価格下落は、今度は他の金融機関の自己資本比率低下につながり、その結果、金融機関同士の間でコンテイジョンが生じる。その過程では、資産の時価評価と負債の額面評価のギャップが資産売却を助長する役割を果たしている。こうした循環により資産価格は連鎖的に下落することになる。

レバレッジと2つの資産効果 (Schinasi and Smith [2000])

資本と負債調達によって資産運用がなされている (レバレッジが多少なりとも存在する) 場合、あるリスク資産への価格下落ショックは、ポートフォリオのリバランスにおいてリスク資産全体の圧縮をもたらすことを、3つの代表的なポートフォリオ運用ルール⁸について示した。

レバレッジがない (すべて資本調達) 場合、リスク資産の将来リターン分布に変化がない限り、リスク資産の一時的な価格下落によって総資産額が減っても最適な資産構成比に変化は生じないため、リバランスによってリスク資産は買増しされる。これに対し、レバレッジが存在する (負債による調達がある) 場合、リスク資産の将来リターン分布が不変であっても、リスク資産の最適保有比率が低下する。高レバレッジなポートフォリオほどその低下幅が大きく、多額のリスク資産売却につながりやすい。

また、一部のリスク資産の将来リターンがより不確実性を増すと、リスク資産間に代替効果が働くようになる。所得効果と合算した影響の表れ方は、ポートフォリオ運用ルールによって異なることを3つの運用ルールについて示したほか、リスク資産間の相関がポートフォリオ分散効果の大小に関係するため、代替効果の表れ方には相関が影響することを指摘している。

(2) 情報の不完全性による価格下落の加速

情報劣位にある投資家の価格下落への反応 (Yuan [2005])

市場には、資産のファンダメンタル価値についてのノイズ付き情報を有するトレーダー (情報トレーダー、例えばディーラー) と、需給を反映して決まった価格からファンダメンタル価値を推測するトレーダー (非情報トレーダー、例えば最終投資家) がいると考える。情報トレーダーは借入資金によりレバレッジを効かせて取引

7 モデル自体は単一資産を扱っているため金融資産間のコンテイジョンを表しているわけではないが、時価評価とバランスシート制約 (自己資本比率のほかレバレッジ制約、借入制約、空売り制約等を含む) に着目した点が今次金融市場の混乱と密接に関連していること、多資産への拡張により金融資産間のコンテイジョンを表現することが可能であると思われること、金融機関同士が持つ債権・債務関係を通じた伝播経路に注目した点が特徴的なことから、本稿で取り上げている。

8 平均分散モデル下での効用最大化 (二次近似された期待効用最大化)、要求リターン所与のもとでのリスク最小化、VaR リスク量制約下でのリターン最大化の3つ。

を行うが、一部の情報トレーダーは借入制約に直面しており、ファンダメンタル価値から判断してリスク資産を買い増したくとも、借入制約により買い増しができない場合があるとする。

こうした状況下で、ファンダメンタルに負のショックが生じてリスク資産価格が下落したとしても、非情報トレーダーは、価格低下がファンダメンタルズの悪化に伴うものか、情報トレーダーが借入制約に直面しているためなのかが判別できない。このため、非情報トレーダーは高いリスクプレミアムを要求するようになり、資産価格の下落が一段と大きくなる。

リスク資産を複数にしたモデルでは、資産効果によってファンダメンタル・ショックが生じなかったりリスク資産の価格も下落するようになり、これに上述の情報の非対称性効果が混じる。非情報トレーダーにとっては、どのリスク資産にショックが生じ、それが資産効果を通じて伝播したのか、その過程で情報トレーダーの借入制約がどうかかわったのか、一段と不確実性が高まるため、複数のリスク資産に対してより高いリスクプレミアムを求めるようになる。

その他

情報の非対称性や不完全性に注目したコンテイジョンモデルは多数ある。例えば、Kodres and Pritsker [2002] は、複数の投資家がある国のマクロ経済ファクターに影響を受けるポートフォリオを保有しており、そのファクター変動にあわせてリバランスを行うため、ファクター変動がない資産についても売買が生じる（投資家間のリバランスの同時性も生じる）という伝播経路を考えた。その伝播の程度は、各金融資産価格のファクターに対する反応度のみならず、情報の非対称性（他国のファクターに対する情報劣位）にも依存することを示している。

このほか、Hong and Stein [2003] は、小さいイベントやニュースであっても、非情報トレーダーがこれらから得た新情報がポートフォリオのリアロケーションに重要な影響を及ぼす場合には、大幅な価格変動がもたらされうることを示している。彼らは、伝播の経路としてショートポジション制約を考え、上記の効果でコンテイジョンが増幅されるというモデルを考えている。

(3) 情報処理能力の限界と注意量の再配分

注意量の再配分 (Mondria [2006])

グローバル市場の投資家は、各国の個別株や個別債券をモニターする代わりに市場インデックスを活用したり、バリュエーション・グロース指標で分類を行ったり、何らかのかたちで情報を集約することを行っている。これは、情報収集・処理能力には限界があり、コスト対比でみて合理的に無視できる情報があることを示唆している (Rational inattention)⁹。情報収集や処理を工夫した投資行動には収穫逓増が働くが、情報処理

9 経済活動や物価の動向を実質 GDP や CPI で観察するのも情報集約の一種である。

能力に制約がある場合、どのように情報を集約すべきかを情報理論を用いて考察することができる (Sims [2003] は、金融政策の波及効果に Rational inattention を応用している)。

Mondria [2006] は、Rational inattention モデルを応用し、投資家は各市場に注意を適切に振り分け (Attention allocation¹⁰)、その注意量に応じた精度の資産リターンに関するシグナル (私的情報) を得て、ノイズ付きの市場価格 (公開情報) とあわせて最適なポートフォリオ運用を行うと考えた。ある市場でショックが発生すると、投資家はその市場により多くの注意を振り向けるようになり、新しいシグナルに基づいてポートフォリオのリアロケーションを行う。注意を振り向ける余裕がなくなった市場は、ボラティリティが増す (すべての市場の平均リターンやボラティリティは注意量の条件付確率のもとで決まっている) ため、ショックが生じていない市場のリアロケーションは市場価格 (公開情報) がもたらすリアロケーション効果より大きなものとなる¹¹。

投資家心理、行動ファイナンス

上記は情報処理コストを加味した合理的モデルであったが、金融市場に存在するさまざまなアノマリー (合理的モデルで説明ができない現象) から、合理的モデルが看過している隠れた合理性や投資家行動の特性を探り、これらが資産価格形成に及ぼす影響を検証した分析も数多くある。Hirshleifer [2001] は、こうした研究をサーベイしており、ミスプライスが発見されたときのオーバー・リアクションやさまざまな判断バイアス (過度な単純化、一部事例に重きを置き過ぎた判断など) を紹介している。1 節で指摘したサブプライム問題に端を発するコンテイジョン現象を理解するために有益な考えも多いと思われるが、他の研究群とはアプローチが異なるため本稿では紹介しない。

(4) 投資家行動の同質化に伴うコンテイジョン

グローバル化とインデックス運用 (Calvo and Mendoza [2000])

市場が効率化するに従い、情報収集・分析に基づくアクティブ運用の超過収益率が薄れてきているという指摘がある。また、投資対象がグローバル化し、投資ユニバースが拡大するに従い、アクティブ運用のコストが増大している。Calvo and Mendoza [2000] は、アクティブ運用のコストを固定・変動に分けて考察し、投資ユニバースが拡大するほど、市場の効率化が進むほど、パッシブ運用を行うインセンティブが高まることを示した。金融市場のグローバル化が進展するなか、インデック

10 Attention allocation を認知科学モデルとして考察したものに Gabaix, Laibson, Moloche, and Weiberg [2003] がある。

11 ここでは、情報量の増加はボラティリティの低下につながると想定されているが、実証分析で検証されているわけではなく、その逆を想定したモデル化もありうる。また、情報の内容によって、ボラティリティの増減方向が決定されるようなモデルも考えられよう。

スに依存した運用が増加することで投資家行動の同質性が高まると、ある外生ショックに対して投資家の共通した反応（意図せざる群集行動）を誘発してしまい、コンテイジョンの原因となることを指摘した。

3. 理論モデルの内容

(1) 資産効果を通じた連鎖

イ. 資産効果とリスク回避度の変化 (Kyle and Xiong [2001])

カイルらは、資産効果を通じた投資家のリスク回避度の高まりがショックの内生的な増幅をもたらし、当初のショック以上の価格下落を招くことを示した。複数のタイプの投資家を考え、価格下落幅を均衡モデルにおいて表している。

モデル・セッティング

モデルでは2種類のリスク資産 i ($i = A, B$) と1種類の無リスク資産を想定し、投資家としては、リスク回避的トレーダー、長期投資家、ノイズ・トレーダーの3種類を仮定する。

● リスク回避的トレーダー

リスク回避的トレーダーは各期の消費 C_t の流列に関する対数型効用の期待値の総和を最大化するように行動する。対数型効用は絶対的危険回避度が資産額の低下に反比例して高まるため、この設定により資産効果がリスク回避度の上昇でさらに増幅される現象が表現されている¹²。各リスク資産の需要量、および消費量は、効用最大化から求められる。

● 長期投資家

長期投資家は、理論価格 (P_F^i)¹³と市場価格 (P^i) の差に着目して取引を行う。このとき、長期投資家の需要量¹⁴ X_L^i は、

$$X_L^i = \frac{1}{k^i} (P_F^i - P^i), \quad (1)$$

と表される。ここで、 k^i は需要曲線の傾きを表す。長期投資家は、理論価格が市場価格より小さければ（大きければ）、資産を売却する（買い増す）。長期投資家は市場価格が理論価格から乖離した場合、市場に流動性を供給する役割を果たしている。

12 絶対的リスク回避度が総資産に反比例する（正確には総資産の定数項付き線形関数に反比例する）効用関数を HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion) 型効用関数と呼ぶ。詳細は池田 [2000] を参照。

13 理論価格は、リスク資産の配当額をリスク中立測度下の OU 過程と仮定することで算出される。市場価格は均衡条件から導出されるため、両価格は乖離し、長期投資家の売買行動によって収敛しようとする。

14 ここでの需要量、供給量とは買増し量、売却量のフローのことである。

● ノイズ・トレーダー

リスク資産をランダムに売却する。売却量 θ^i は平均回帰性を持つ確率モデル (OU 過程) で表現される。ノイズ・トレーダーは流動性ショックを市場価格に与える。

均衡市場価格

モデル上の不確実性は、リスク資産の理論価格を決定する配当額に生じるショック (ファンダメンタル・ショック) dz^i とノイズ・トレーダーのリスク資産売却量に関するショック dz^i_θ である。また、状態変数はノイズ・トレーダーのリスク資産供給量 θ とリスク回避的トレーダーの資産額の 2 つである。市場価格は、効用最大化問題から得られるリスク回避的トレーダーの需要 (供給) と、長期投資家やノイズ・トレーダーの需要 (供給) に基づき、市場均衡条件によって求められる。

長期投資家の需要関数 (1) 式と市場清算条件から、リスク資産価格は、

$$P^i = P^i_F - k^i (\theta^i - X^i(\theta, W)), \quad (2)$$

と表現される。この式がカイルらのモデルの特徴を端的に表している。 X^i はリスク回避的トレーダーのリスク資産需要量であり、資産額 W の関数となっているがゆえに資産効果が生じる。すなわち、資産 A に生じたファンダメンタル・ショックや流動性ショックは、 P^A の変化、 W の変化を通じて、資産 B の需要 X^B や価格 P^B に影響を及ぼすことになる。両リスク資産は理論価格が無相関 (配当額の確率過程が独立) であるにもかかわらず、一方の価格の下落は他方の下落をもたらすため、コンテイジションが発生する。

ショックの増幅効果

総資産の減少はリスク回避度を高め、リスク回避的トレーダーのリスク資産に対する需要量を減少させる。外生的なショックの発生によるリスク回避的トレーダーの総資産額の変化 (ポートフォリオのリバランス前) を dW' とし、リバランスを行った後の総資産額の変化を dW とする。まず、ショックの発生によって、リスク資産 i のポジションをそれぞれ $\partial X^i / \partial W \cdot dW$ 圧縮させる。長期投資家の需要関数より資産価格の下落幅は圧縮額に比例する (比例係数 k^i)。この下落分により、リスク回避的トレーダーの総資産は、 $(k^A X^A \partial X^A / \partial W + k^B X^B \partial X^B / \partial W) dW$ だけ減少するため、

$$dW = dW' + \left(k^A X^A \frac{\partial X^A}{\partial W} + k^B X^B \frac{\partial X^B}{\partial W} \right) dW, \quad (3)$$

が成立する。(3) 式を書き直すと、

$$dW = \frac{1}{1 - k^A X^A \frac{\partial X^A}{\partial W} - k^B X^B \frac{\partial X^B}{\partial W}} dW' \equiv A dW', \quad (4)$$

となる。(4) 式の乗数 $A (> 1)$ がショックの増幅効果を表している。

均衡価格を求めるプロセスはややテクニカルであるため後掲するが、資産額がゼロと無限大のときの均衡価格を考えると均衡価格の性質の理解に役立つ。 $W = 0$ では、リスク回避的トレーダーはリスク資産を保有しないため、 $X^A(\theta, 0) = X^B(\theta, 0) = 0$ となる。このとき、リスク資産価格は、 $P^A = P_F^A - k^A \theta$ 、 $P^B = P_F^B - k^B \theta$ となる。一方、 $W = \infty$ ではリスク回避度がゼロに近づき、リスク中立の世界と同様となる。このとき、リスク回避的トレーダーはノイズ・トレーダーの売却量すべてを買い入れるため、長期投資家は市場には参入しないことになる。すなわち、 $X^A(\theta, \infty) = \theta^A$ 、 $X^B(\theta, \infty) = \theta^B$ となる。その結果、リスク資産の市場価格は理論価格に一致し、 $P^A = P_F^A$ 、 $P^B = P_F^B$ となる。これは、市場価格と理論価格の乖離がリスク回避度に依存することを意味している。リスク回避度が大きくなる（リスクプレミアムが増大する）と両者の乖離も拡大し、負のショックに対し市場価格はより大きく下落することになる。

論文では、さまざまなパラメータの組合せに対して、ショックの増幅効果（(4)式のA）や他リスク資産への波及効果がどのように変化するかを図示している。例えば、ノイズ・トレーダーが売り持ち・買い持ちいずれかのポジションを大きく持っている（現在の θ が平均回帰水準から大きく乖離している）状況下では、収益機会が高まったリスク回避トレーダーは反対側のポジションを多く抱えており、そのため、ショック発生時のリバランス効果が強く働くこと（ショックの増幅効果Aが高まっていること）を示している。また、ショックの他資産への波及効果は、長期投資家やノイズ・トレーダーのポジションに応じてリスク回避トレーダーがどのようなポジションを持っているかに依存することなどを示している。さらには、このような事例すべてにおいて、リスク資産価格のボラティリティや相関は、均衡状態が変化していく過程で時間可変となる内生変数であることを指摘している。

カイルらは、以上のような理論モデル検証を通じて、市場リスク管理においては、①価格変動を外生的に与えることの危険性の認識、②ショック発生時には流動性供給の担い手となる主体（特に長期投資家）の動向が重要となることの認識、③市場危機に際しては、資産効果を通じて価格変動の相関が平時より増大するメカニズムが存在することの認識が必要であることを訴えている。

BOX 均衡市場価格の導出法

均衡市場価格を求めるプロセスは、以下のとおり。①リスク回避的トレーダーのリスク資産需要関数、消費関数からリスク資産のリターンの過程を導出する、②同過程をもとに、リスク回避的トレーダーの最適投資額、最適消費量を導出する、③非線形偏微分方程式で記述されるシステムの不動点問題を解くことで均衡値を求める。

上記①、②のプロセスから、最適投資額、消費量は、

$$\begin{aligned} X^A &= \frac{W}{1-\phi^2} \left[\frac{\mu^A}{(\sigma^A)^2} - \phi \frac{\mu^B}{\sigma^A \sigma^B} \right], \\ X^B &= \frac{W}{1-\phi^2} \left[\frac{\mu^B}{(\sigma^B)^2} - \phi \frac{\mu^A}{\sigma^A \sigma^B} \right], \\ C &= \rho W, \end{aligned} \tag{5}$$

となる。ここで、 σ^i はリスク資産のリターンのボラティリティ、 ϕ はリターンの相関で、いずれも状態変数 θ 、 W の関数となる。(5) 式から、最適投資量および消費量は資産額に比例していることがわかる。(5) 式は右辺そのものが X^A 、 X^B の関数となっているため、均衡市場価格は (5) 式の不動点となっている。この不動点問題は、 W 、 θ に関する 2 次の偏微分方程式を境界条件のもとで解くことに帰着される。ここでの偏微分方程式は解析的に解くことは困難であるため、カイルらは、数値計算によりコンテイジョンの効果を検証し、内生的なショックの増幅により資産間の相関が大きくなりうることを示した。これは、過去のデータに依存したリスク管理手法の危険性を示唆している。

ロ. 資産効果と自己資本比率制約 (Cifuentes, Ferrucci, and Shin [2005])

シフエンタスらは、銀行の必要自己資本比率などのバランスシート制約とリスク資産の時価評価ルールが資産価格の連鎖的な下落を招くモデルを提示した。シフエンタスらはリスク資産の数を 1 つにして議論を進めているため、リスク資産間のコンテイジョンを直接表現しているわけではないが、モデルの拡張によりコンテイジョンが表現可能と考えられるほか、銀行のバランスシートが債権・債務の関係でつながっていることや、資産の時価評価ルールがもたらす効果に着目した点が特徴的であり、本稿で取り上げている。

モデル・セッティング

市場に参加している銀行数を n とし、銀行は互いに資金の貸借を行っているとする。ここで、銀行 i の銀行 j に対する負債額 (額面) を L_{ij} と表記すると銀行 i の

負債総額 \bar{x}_i は、 $\bar{x}_i = \sum L_{ij}$ となる。銀行間の債権・債務に優先劣後は存在しないとし、銀行 i の支払い可能額が負債総額 \bar{x}_i を下回った場合、各債権者銀行への返済額は額面金額に比例すると仮定すると、債権者銀行 j への返済額は $x_i \pi_{ij}$ で与えられる。ただし、 $\pi_{ij} \equiv L_{ij} / \bar{x}_i$ と定義する。一方、銀行 i の総受取り額は、 $\sum x_j \pi_{ji}$ で与えられる。

銀行 i はリスク資産を e_i 単位、流動資産（無リスク資産）を c_i 単位保有するとする。また、これらの価格はそれぞれ p および 1 とする。債務超過時には、資産がすべて時価ベースで債務返済に充てられ、このとき銀行 i の支払い額 x_i は、

$$x_i = \min \left\{ \bar{x}_i, w_i(p) + \sum x_j \pi_{ji} \right\}, \quad (6)$$

となる。ここで、 $w_i(p)$ は流動資産とリスク資産の時価評価額であり、 $w_i(p) = p e_i + c_i$ と書ける。 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 、 $\mathbf{w}(p) = (w_1(p), w_2(p), \dots, w_n(p))$ 、 $\mathbf{\Pi}^T$ を銀行間の債権・債務比率を表す行列の転置行列とすると、(6) 式は一般的に、

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \wedge (\mathbf{w}(p) + \mathbf{\Pi}^T \mathbf{x}), \quad (7)$$

と書ける。ただし、 \wedge は左右どちらか小さい方の値をとる演算子（minimum 関数）である。

$H(\mathbf{x}) \equiv \bar{\mathbf{x}} \wedge (\mathbf{w}(p) + \mathbf{\Pi}^T \mathbf{x})$ と定義すると、 \mathbf{x} の均衡値を求めることは $H(\mathbf{x})$ の不動点を求めることに帰着される。 $H(\cdot)$ は増加関数であり、 $H(0) \geq 0$ かつ $H(\bar{\mathbf{x}}) \leq \bar{\mathbf{x}}$ であることから、不動点定理より $H(\cdot)$ には少なくとも 1 つの不動点が存在することになる。また、Eisenberg and Noe [2001] の結果から、①銀行間の資金貸借ネットワークが分割されていない、②リスク資産価格が p のもとで少なくとも 1 つの銀行は資産超過状態にあるという仮定のもとで、(7) 式は唯一の不動点を持つことになる。

次に、 \mathbf{x} に影響を与えるリスク資産価格 p の決定について考える。まず、銀行は自己資本比率を一定値 r^* 以上に維持しなければならないとする。この比率を維持できなくなった場合には、流動資産またはリスク資産を売却して自己資本比率を維持する。その際の流動資産、リスク資産の売却量をそれぞれ、 $\Delta c_i (\geq 0)$ 、 $\Delta e_i (\geq 0)$ とすると自己資本比率制約は、

$$\frac{p e_i + c_i + \sum x_j \pi_{ji} - x_i}{p(e_i - \Delta e_i) + c_i - \Delta c_i + \sum x_j \pi_{ji}} \geq r^*, \quad (8)$$

と書き表せる。流動資産、リスク資産を売却した際には、キャッシュをそのまま保有するとし、キャッシュは自己資本比率算定上の資産（分母）には計上しない。この仮定により、銀行は資産を売却することで、(8) 式の分母を縮小できるので（分子の資本は変化しない）、自己資本比率を向上させることができる。

均衡での $(x, \Delta e, p)$ を次のように定める。

- ① すべての銀行に対して、 $x_i = \min\{\bar{x}_i, w_i(p) + \sum x_j \pi_{ji}\}$ が成立する。
- ② 各銀行は自己資本比率を満たせなくなると、まず流動資産を売却する。それでも最低自己資本比率を満たさない場合にはリスク資産を売却するが、売却量は最低自己資本を満たす最小量とする。すべてのリスク資産を売却してもなお最低自己資本を満たさない場合は、 $\Delta e_i = e_i$ とする。
- ③ リスク資産の需要量が価格の減少関数となるような需要逆関数 $p = d^{-1}(\cdot)$ が存在し、 p は需要量と供給量が一致するところで決定される。

リスク資産価格と均衡

以下、リスク資産の価格が均衡に至るまでの調整プロセスを考えていく。ショックの発生により、流動資産の売却のみでは自己資本比率制約を満たせない場合のリスク資産の売却量は均衡条件の設定により、

$$\Delta e_i = \min\left\{e_i, \frac{x_i - (1 - r^*)(\sum x_j \pi_{ji} + p e_i) - c_i}{r^* p}\right\}, \quad (9)$$

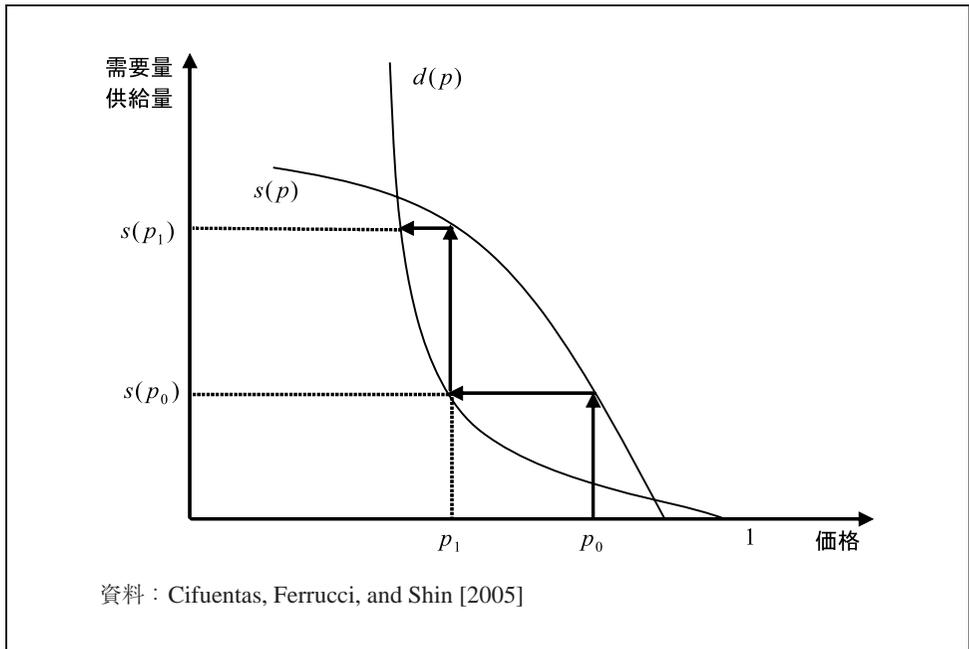
と表せる。ここで、銀行全体のリスク資産の総売却量（供給量）を $s(p) = \sum \Delta e_i$ と定義すると、 Δe_i が価格の減少関数となるため、 $s(p)$ も価格の減少関数となる。

需要逆関数を $p = \exp(-\alpha \sum \Delta e_i)$ と仮定する（ α は正の定数）と、リスク資産の売却量がゼロ、すなわち $\Delta e_i = 0$ のとき、 p は最大値 1 をとる。さらに $p = 1$ のとき、いずれの銀行もリスク資産の売却の必要がないという条件を加えると、 $s(1) = 0$ となる。また、需要逆関数の定義により $d(1) = 0$ となる。均衡では $s(p) = d(p)$ が成立するため、少なくとも $s(1) = d(1) = 0$ は均衡条件を満たし、これは金融市場にショックが発生していない安定的な状態を示している。しかし、図表 1 のように供給量 $s(p)$ が需要量 $d(p)$ を上回る領域があると、 $p < 1$ での均衡が起こりうる。

価格ショックが発生した場合の調整は $s(p)$ が $d(p)$ を上回る領域で起こる。今、価格ショックが発生し、リスク資産の価格が 1 から p_0 まで下落したとする。この時点での売却量 $s(p_0)$ は需要量を上回るため、更に $p_1 = d^{-1}(s(p_0))$ まで価格が下落する。こうした過程の連続により、価格は最終的に需要曲線と供給曲線が交差するところまで下落する。 $\Phi(p) = d^{-1}(s(p))$ と定義すると均衡点は $\Phi(p)$ の不動点となり、 $\Phi(p) < p$ の領域で連鎖的な価格の下落が起こることになる。以上をまとめると次のようになる。

- ① あらゆる p に対して $\Phi(p) \geq p$ すなわち、需要量が常に供給量を上回っているならば、 $p = 1$ が唯一の均衡となる。外生的なショックに対しても連鎖的な価格下落は起こらない。
- ② $\Phi(p) < p$ 、すなわち供給量が需要量を上回る p が存在すれば、 $p < 1$ での均衡値が存在する。外生的なショックに対して、リスク資産の処分による連鎖的な価格下落が発生する。

図表 1 外生ショックと均衡価格



金融システムの頑健性テスト

シフエンタスらは、金融システムの頑健性についてシミュレーションによる検証を行った。結果は、各種パラメータ（初期時点の流動性バッファ、最低所要自己資本、リスク資産の需要関数の形状、外生ショックの大きさ等）に大きく依存するものの、①金融システムの安定性の面から十分な流動性バッファが必要であること、②何らかのショックにより、リスク資産需要の価格弾力性が極端に低下したとき（価格が大きく下落しても買い手が現れてこないとき）は、自己資本比率規制だけでは金融システムの安定は保たれないこと、③最低所要自己資本などの規制がかえって金融システムを不安定にする可能性があることなどを示した。

共著者のシンは、Adrian and Shin [2007]でもバランスシートを通じたショックの伝播を考察し、VaR 制約やレバレッジ制約に直面する投資家が外生ショックに対して資産処分によりバランスシートを圧縮させ、これがコンテイジョンの規模を拡大させる可能性を指摘している。

ハ. レバレッジと2つの資産効果 (Schinasi and Smith [2000])

シナシらは、標準的なポートフォリオ理論を用いてコンテイジョンの発生を説明した。3つのポートフォリオ運用ルールを考え、いずれにおいてもポートフォリオの分散化とファンディングにおけるレバレッジの存在がコンテイジョン発生 of 十分条件になることを示した。また、コンテイジョンの経路となる資産効果は、代替効果と所得効果の2つの効果の合成であり、ショックのタイプによってコンテイジ

ンの表れ方が異なることを2資産の事例で紹介している。

市場のボラティリティが高まる理由としてしばしば、VaRによるリスク管理手法（リスク量をVaR値以下に収めるためリスク資産を売却）が指摘されることがあるが、シナシらは、ショック発生時の売却行動は他のルールに従う投資家行動と大きく異なるわけではなく、いずれの運用ルールにおいてもレバレッジの大きさが売却量に強く影響することを強調している。ただし、資産効果によるコンテイジョンを説明しやすいのはVaRルールであることも示している。

モデル・セッティング

投資家は、時刻 t でポートフォリオ運用ルールに則り安全資産と複数のリスク資産のリバランスを行うとする。資産 i の時刻 t から $t+1$ までのグロスリターンを $R_{i,t+1}$ 、リターンの平均、分散をそれぞれ $\mu_{i,t+1}$ 、 $\sigma_{i,t+1}^2$ とする。投資家のポートフォリオ運用ルールは次の3通りとする。

① リターン・ベンチマーク・ルール

ポートフォリオのリターンを一定水準以上に確保したうえで、分散を最小化する（添字 p はポートフォリオの平均や分散を指す）。

$$\min \sigma_{p,t+1}, \quad \text{制約条件: } \mu_{p,t+1} \geq k. \quad (10)$$

② トレードオフ・ルール

リターンの平均値回りで二次近似して求めた期待効用を最大化させる（ τ は絶対的リスク回避度を表すパラメータ）。期待効用最大化問題を平均分散モデルで表現する最も標準的なポートフォリオ理論であるが、リターンとリスクのトレードオフを考慮した運用ルールともみなせるので、トレードオフ・ルールと呼ぶ。

$$\max \mu_{p,t+1} - \frac{1}{2} \tau \sigma_{p,t+1}^2. \quad (11)$$

③ VaRルール

時刻 t での資本のグロスリターン $R_{p,t+1}$ が一定値 \hat{R} を下回る確率を m 以下に抑えたもとで資産のリターンを最大化する¹⁵。

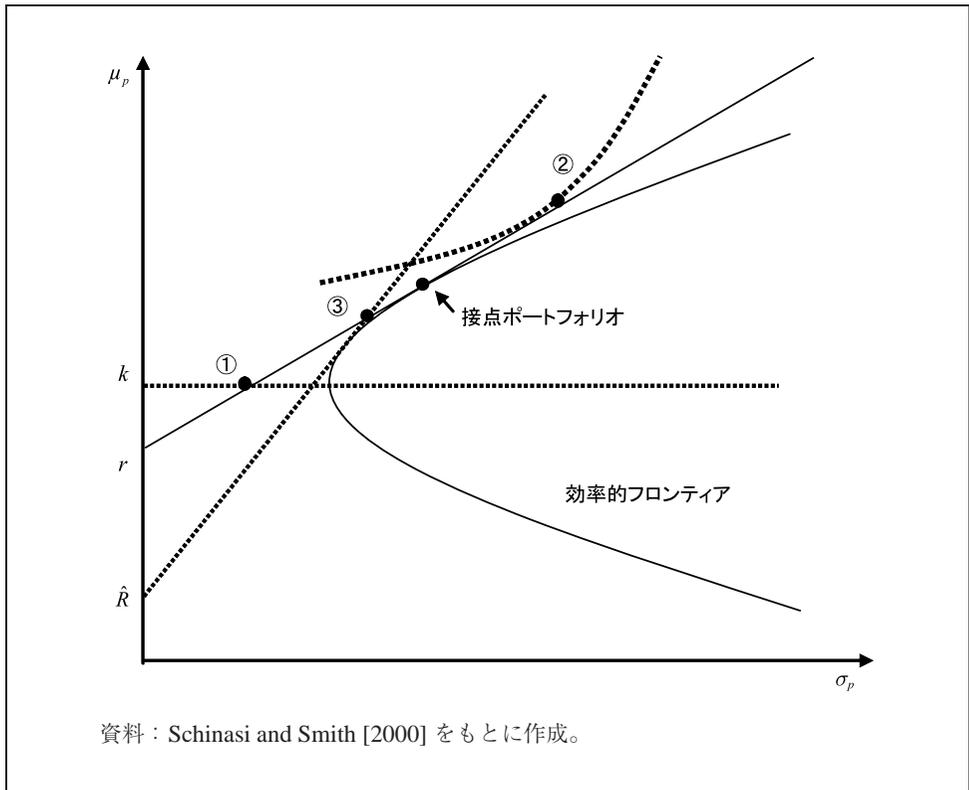
$$\max \mu_{p,t+1}, \quad \text{制約条件: } \Pr[R_{p,t+1} < \hat{R}] \leq m. \quad (12)$$

なお、(12)式の制約条件は $\mu_{p,t+1} \geq \hat{R} + n\sigma_{p,t+1}$ というかたち書き換えられる。

これらの運用ルールを図示すると図表2のようになる。

15 VaRはポートフォリオ価値の分布の分位点で表現されるが、ここではポートフォリオのリターン分布の分位点で定義していることになる。

図表 2 最適ポートフォリオ



まず、①～③の運用ルールに関係なく、無リスク資産（グロスリターン r ）が存在する場合の最適ポートフォリオは、接点ポートフォリオ（切片 r から効率的フロンティアに引いた接線の接点）と無リスク資産の組合せからなる。①の運用ルールでは直線 $\mu_p = k$ と接線との交点、②では効用関数と接線が接する点、③では切片 \hat{R} から引いた傾き n の直線と接線との交点がそれぞれ最適ポートフォリオとなる。

シナシらはリスク資産が2つの場合 ($i=1, 2$) を用いて、2つのタイプのショックについて考察した。1つは、リスク資産2にボラティリティの上昇が生じるショック（ボラティリティ・ショック）であり、もう1つは、リスク資産価格の下落によって一時的に資産が減少するショック（キャピタル・ショック）である。ショックの前後で最適ポートフォリオが変化するためリバランス効果が生じるが、以下にみるように、運用スタイルや資産相関の正負によってリバランス内容が相違している。この点について、ボラティリティ・ショックを事例に考察している。また、レバレッジの効果を見るために、資産効果の表れ方が単純なキャピタル・ショックを用いている。

ボラティリティ・ショックと代替効果・所得効果

最適ポートフォリオにおいて、2つのリスク資産がロング（買い持ち）の状態にあり、リターンの相関が正であるとする。このとき、資産2に発生したボラティリ

ティ・ショックにより、リターン・ベンチマーク・ルール、トレードオフ・ルールに従っている投資家は、資産2の投資額を減らし、資産1の投資額を増加させる。一方、リターンの相関が負であるときは、リターン・ベンチマーク・ルールの場合は上記と同様の結果となり、トレードオフ・ルールの場合は、どちらの資産への投資額も減少する。

資産2に発生したショックが資産1に与える影響は、「代替効果」と「所得効果」のどちらが強く作用するかに依存する。代替効果とは、資産2のボラティリティ上昇により資産2が割高となるため、資産1の構成比を引き上げる効果を指す。また、所得効果とは、資産2のボラティリティ上昇により、ポートフォリオ全体のリスクが上昇するため、資産1のポジションも圧縮される効果を指す。

トレードオフ・ルールの結果は、相関の正負で代替効果の効き方が異なってくることを示している。正相関の場合、代替効果が所得効果を上回るため、資産1を増加させる。一方、負の相関の場合には、分散効果が強く効くため代替効果が弱まる。その結果、資産効果が強く表れ、資産1も減少することになる（その分、資産2の減少幅は正相関の場合に比べて少なくなる）。

リターン・ベンチマーク・ルールでは、リターン制約によって最初からリスクが抑制されているので所得効果は弱く、正負相関いずれの場合でも代替効果が強く表れる。

VaRルールの場合には、リスク量の上限制約によって所得効果が強く働きやすくなる。資産2への投資額は減少し、資産1への投資額も減少するが、リスク量の上限制約が緩いと所得効果が弱まるため資産1への投資額は増加することもある。

グローバルな株式市場を考えると、各国の株価は正相関を持つ傾向にある。このとき、ボラティリティ・ショックにより他のリスク資産の圧縮（コンテイジョン）を説明できる可能性が高いのは VaR ルールである¹⁶。

キャピタル・ショックとレバレッジ効果

キャピタル・ショック（リスク資産の一時的な価格下落）の前後でリスク資産のリターンの分布は変わらない（平均分散パラメータは不変）と仮定する。このとき、レバレッジの効果に関してすべての運用ルールで次の結果が得られる。

- レバレッジを効かせていない場合は、ショック発生後のポートフォリオ・リバランスにより、無リスク資産のポジションを落とし、リスク資産全体のポジションを増加させる（リスク資産の買増し）。
- レバレッジを効かせている場合は、ショック発生後のポートフォリオ・リバランスにより、借入を減らし、リスク資産全体のポジションを減少させる（リスク資産の売却）。

16 原論文では、2リスク資産のケーススタディにおける上述の結果の頑健性を論考している。所得効果と代替効果の大小関係は、相関正負で決まるものではなく（閾値がゼロというわけではなく）、ここでの結果は強い普遍性を持つものではない。

レバレッジを効かせていない場合、ショックの発生によるリスク資産の価格下落が資本を減少させる。しかし、ショック発生後もリスク資産のリターンの分布は変化しないため、ショック発生後のポートフォリオに対して再び運用ルールに則りポートフォリオのリバランスを行った場合のリスク資産と無リスク資産の投資比率に変化はない。ショック発生後はリスク資産の投資比率が低下しているため、むしろ無リスク資産を売却し、リスク資産を買い増すことになる。

レバレッジ効果の試算

シナシらは、最後にレバレッジの影響を数値計算により検証した。具体的には、運用ルールの各種パラメータを調整することで、レバレッジの値が異なるショック発生前の最適化ポートフォリオを作成する。次に、最適化ポートフォリオにボラティリティ・ショック、キャピタル・ショックを与え、その前後でのポートフォリオ・リバランスの様子を観察する（リスク資産の相関は正を仮定）。主な結果は次のとおりである。

- 運用ルールの違いは、ポートフォリオ・リバランスには大きく表れない。したがって、市場がボラタイルになる原因として VaR ルールのみに着目するのは、必ずしも妥当ではない。運用ルールの違いよりも、ショック発生前のレバレッジの有無がより重要である。
- 高レバレッジであるほど、ショック発生時のリスク資産の圧縮（レバレッジの巻戻し）はより顕著となる。

(2) 情報の不完全性による価格下落の加速 (Yuan [2005])

ユアンは、情報の非対称性（情報トレーダーと非情報トレーダーの存在）と投資家の借入制約を想定すると、小さなファンダメンタル・ショックが大規模なコンテイジョンを引き起こしうることを示した。資産価格が下落するほど情報トレーダー（例えば、セルサイドのディーラー）の借入れ・レバレッジの引き上げが厳しくなる場合、非情報トレーダー（例えば、バイサイドの投資家）は、資産価格下落がファンダメンタルズの悪さゆえなのか、情報トレーダーが借入制約に抵触しているからなのか正確に判断できなくなる。このため、資産価格下落時には非情報トレーダーも買い注文を入れ難くなり、コンテイジョンが生じやすくなる。

モデル・セッティング

モデルは、情報の非対称性と合理的期待均衡を扱った Grossman and Stiglitz [1980] のモデルに投資家の借入制約を取り込んだものとなっている。2 時点 $t = 0, 1$ を考え、 $t = 0$ で各自の持つ情報をもとに取引を行い、 $t = 1$ で資産から発生するキャッシュフローを消費する。資産は、安全資産と 1 種類のリスク資産（後に、多資産に拡張される）を考え、リスク資産の供給量を \tilde{m} （確率変数）とする。投資家 k の $t = 1$

での資産額は、 $\tilde{W}_{1,k} = (W_{0,k} - D_k \tilde{P})R + D_k \tilde{v}$ で与えられる。ただし、 $W_{0,k}$ は $t = 0$ での資産額、 R は安全資産の $t = 1$ でのリターン、 D_k はリスク資産の保有量、 \tilde{v} はリスク資産の $t = 1$ でのリターン、 \tilde{P} はリスク資産の価格である。

投資家は、リスク資産の価格に対するシグナル \tilde{s} を受け取る情報トレーダーと、同シグナルを受け取れない非情報トレーダーに分けられ、その存在比率を $1 - w_{ui} : w_{ui}$ とする。情報トレーダーには借入制約があるトレーダー（比率 w_i^c ）と借入制約がないトレーダー（比率 w_i^{uc} ）が存在するとする（ $w_{ui} + w_i^c + w_i^{uc} = 1$ ）。借入制約のあるトレーダーのリスク資産需要量には価格に依存した上限値 $a\tilde{P} + b$ を仮定する。

情報トレーダーの受け取るシグナルを $\tilde{s} = \tilde{v} + \tilde{\varepsilon}_s$ とし、リスク資産のリターンにノイズが加わったものを考える。ここで、 \tilde{v} 、 \tilde{m} 、 $\tilde{\varepsilon}_s$ は互いに独立な正規分布に従い、その平均は $(0, \tilde{m}, 0)$ 、分散は $(\sigma_v^2, \sigma_m^2, \sigma_s^2)$ とする。

次に均衡条件について記述していく。各投資家は指数型の期待効用 $E_0[-\exp(-\tilde{W}_{1,k}/\rho)]$ を最大化させるようリスク資産の需要量を決める¹⁷。これら需要の総和が確率的なりリスク資産供給量 \tilde{m} に一致するという市場均衡条件により、均衡価格が決定される。

市場均衡の導出

市場の均衡条件は、

$$w_i^{uc} \tilde{D}_i(\tilde{s}, \tilde{P}) + w_i^c \tilde{D}_i^c(\tilde{s}, \tilde{P}) + w_{ui} \tilde{D}_{ui}(\tilde{P}) = \tilde{m}, \quad (13)$$

となる。ここで、 $\tilde{D}_i(\tilde{s}, \tilde{P})$ 、 $\tilde{D}_i^c(\tilde{s}, \tilde{P})$ 、 $\tilde{D}_{ui}(\tilde{P})$ はそれぞれ借入制約のない情報トレーダー、借入制約のある情報トレーダー、非情報トレーダーのリスク資産需要量である。

今、情報トレーダーのみが存在する仮想的な経済を考え、仮想的な資産供給量を $\tilde{m}^{fic} = \tilde{m} - w_{ui} \tilde{D}_{ui}(\tilde{P})$ 、価格を \tilde{P}^{fic} とすると、(13) 式は、

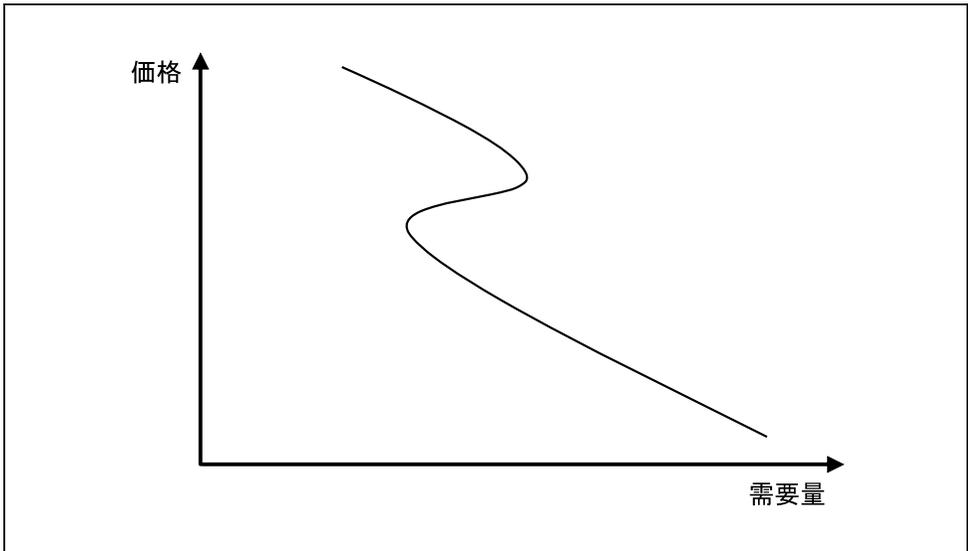
$$w_i^{uc} \tilde{D}_i(\tilde{s}, \tilde{P}^{fic}) + w_i^c \tilde{D}_i^c(\tilde{s}, \tilde{P}^{fic}) = \tilde{m}^{fic}, \quad (14)$$

と書き換えられる。均衡では $\tilde{P}^{fic} = \tilde{P}$ となることが知られている。仮想的な経済を想定することで、情報トレーダーはあたかも非情報トレーダーが存在しない世界で行動をとっているものとして考えることができる。

仮想経済での価格 \tilde{P}^{fic} は情報トレーダーの最適化問題を解くことで求められた需要関数を (14) 式に代入することで求められ、 $\tilde{P}^{fic} = 1_{\{uc\}} \tilde{P}^{uc} + 1_{\{bc\}} \tilde{P}^{bc}$ と書ける。 $1_{\{uc\}}$ は、情報トレーダーが借入制約に抵触しないとき 1、それ以外ではゼロをとる変数であり、 $1_{\{bc\}}$ は、借入制約に抵触するとき 1、それ以外ではゼロをとる変数で

17 絶対的リスク回避度は定数となる、すなわち CARA (Constant Absolute Risk Aversion) 型効用関数であるため、資産効果がリスク回避度を引き上げる増幅効果は働かなくなる。ただし、ボラティリティの増大は、同定数に比例してリスクプレミアムを押し上げる。

図表 3 非情報トレーダーの需要関数



ある。また、 \tilde{P}^{uc} 、 \tilde{P}^{bc} はともに、状態変数である価格シグナル \tilde{s} 、仮想経済でのリスク資産の供給量 \tilde{m}^{fc} の線形関数となる。

次に、非情報トレーダーの行動について考える。非情報トレーダーは、 \tilde{P}^{fc} (均衡では \tilde{P}) をもとに、 \tilde{v} を推測することになる。 \tilde{v} の条件付期待値、分散は $E[\tilde{v} | \tilde{P}, \tilde{D}_{ui}] = \text{Pr}^{uc} \tilde{E}^{uc} + (1 - \text{Pr}^{uc}) \tilde{E}^{bc}$ 、 $\text{Var}[\tilde{v} | \tilde{P}, \tilde{D}_{ui}] = \text{Pr}^{uc} \tilde{V}^{uc} + (1 - \text{Pr}^{uc}) \tilde{V}^{bc}$ となる。ここで、 Pr^{uc} は情報トレーダーが借入制約に抵触しない確率である。また、 \tilde{E}^{uc} 、 \tilde{E}^{bc} 、 \tilde{V}^{uc} 、 \tilde{V}^{bc} は \tilde{P} 、 \tilde{D}_{ui} 、 \tilde{s} 、 \tilde{m}^{fc} の関数として表される。非情報トレーダーの需要関数は、CARA 型効用関数 $E[\tilde{v} | \tilde{P}, \tilde{D}_{ui}] \tilde{D}_{ui} - \text{Var}[\tilde{v} | \tilde{P}, \tilde{D}_{ui}] \tilde{D}_{ui}^2 / 2\rho$ を \tilde{D}_{ui} に関して最大化させることで、

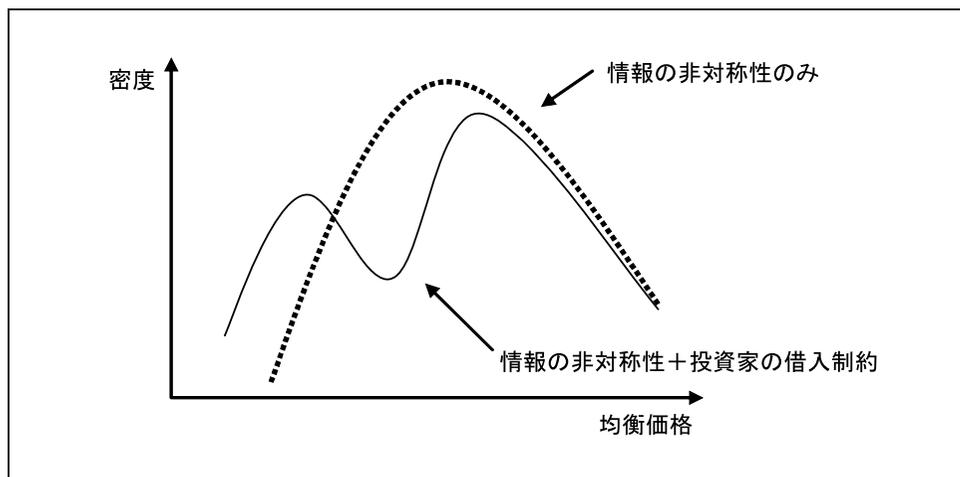
$$\tilde{D}_{ui} = \frac{\rho(\text{Pr}^{uc} \tilde{E}^{uc} + (1 - \text{Pr}^{uc}) \tilde{E}^{bc} - \tilde{P})}{\text{Pr}^{uc} \tilde{V}^{uc} + (1 - \text{Pr}^{uc}) \tilde{V}^{bc}}, \quad (15)$$

となる¹⁸。(15) 式の右辺にも \tilde{D}_{ui} が現れるため、 \tilde{D}_{ui} は (15) 式の不動点問題を解くことで求められる。ここで、情報トレーダーが制約に抵触しているかどうかの状態を表す確率 Pr^{uc} が価格 \tilde{P} について非線形であることが非情報トレーダーの需要関数に歪みを発生させる。

Yuan [2005] に示されている非情報トレーダーの需要関数の例を図表 3 に示す。情報トレーダーの借入制約が存在する場合には、価格が中間的な領域で非情報トレーダーの需要が価格の減少関数とならないケースがあり、歪みが生じるのが特徴となっ

18 (15) 式分子に \tilde{P} が表れているのは、最適化問題のリスクリターン分布が切断正規分布になっているためである。

図表 4 均衡価格の密度関数



ている（情報トレーダーの借入制約が存在しなければ、非情報トレーダーの需要関数は線形となる）。

このような結果が得られる理由について直感的な説明を示す。借入制約がある場合の需要関数の形状は、情報効果（非情報トレーダーからみた価格シグナルの不確実性の度合い）に影響され、情報効果は価格水準によりその大きさが異なる。価格が十分に高い領域では、価格シグナルの不確実性は低く（非情報トレーダーは価格が高いと情報トレーダーが借入制約に抵触していないと推測できる）、情報効果は小さいため、借入制約がない場合とほぼ同じ需要関数となる。一方、価格が中間的な領域では非情報トレーダーは、情報トレーダーが借入制約に抵触しているのか判断が難しく情報効果が大きくなる。この結果、価格が低下しても需要量が減少するケースが生じうる。

情報トレーダーの需要関数は線形であるため、情報トレーダーと非情報トレーダーを合算した市場全体の需要関数は、非情報トレーダーの需要関数と似た形状となる。価格が中間的な領域では需要の価格弾力性が小さくなるため、小規模な外生ショック（流動性ショック、価格シグナルショック）に対しても大幅な価格下落を招くことになる。均衡価格は、情報トレーダーと非情報トレーダーの需要関数と市場清算条件から求めることができる（明示的には求まらず、不動点問題を解くことになる）。

以上の議論を踏まえて比較静学を行った結果、ユアンは次のような結論を得ている。

- ① 市場全体の需要関数の歪みは、情報の非対称性と投資家の借入制約が同時に存在する場合のみ生じる。どちらか一方では、需要関数の歪みは生じない。また、情報の非対称性が大きく投資家の借入制約が厳しいほど、需要関数の歪みは大きくなる。
- ② 価格の急激な変動は、非情報トレーダーからみて情報トレーダーが借入制約に抵触しているかどうか判断し難い中間的な価格領域で生じる。

- ③ 均衡価格の分布をシミュレーションにより検証すると（図表 4）、情報の非対称性のみを扱い投資家の借入制約がなかった Grossman and Stiglitz [1980] のモデルよりも負の方向に歪みが生じている。また、非情報トレーダーの需要関数が非線形であることを反映して密度分布に 2 つの山がみられる点もユアンのモデルの特徴となっている。

コンテイジョンへの拡張

以上は、リスク資産が 1 つの場合の議論であった。ユアンは、リスク資産を 2 つにしてコンテイジョンを説明するモデルに拡張しており、以下では拡張モデルを解説する。

まず、リスク資産（資産 1、資産 2）のファンダメンタルズは無相関とし、 $t = 1$ の価格、および供給量につき、 $\text{cov}(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = 0$ 、 $\text{cov}(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) = 0$ を仮定する。情報トレーダーの借入制約については、各リスク資産の需要量の上限が $a_1 \tilde{P}_1 + a_2 \tilde{P}_2 + b$ で与えられるとする。このように各資産の借入制約が両資産の価格の関数となっていることがコンテイジョンを発生させる原因となる。仮に外生的なショックが発生し、資産 1 の価格が下がったとする。このとき情報トレーダーが借入制約に抵触すると、資産 2 の市場にも影響が及ぶため、何も変化していない資産 2 のファンダメンタルズ（価格シグナル）に見合った需要を提示できなくなる可能性がある。このため、非情報トレーダーは、リスク資産が 1 つのとき以上に複雑な不確実性に直面し、価格からファンダメンタルズのシグナルを読み取ることがより困難となる。その結果、資産 1、2 のいずれに対してもより多くのプレミアムを要求するようになる。この結果、資産 1 に発生したショックが資産 2 にも波及することになる。

リスク資産が複数の場合にも、各トレーダーの需要関数、均衡価格はリスク資産が 1 つの場合と同様の手続きにより求められる。まず、借入制約のない情報トレーダーの需要関数は効用最大化により、当該リスク資産の価格、シグナルの関数で表される（もう一方のリスク資産の価格やシグナルには無関係）。借入制約のある投資家の需要関数も効用最大化により求められるが、借入制約のない情報トレーダーの需要関数とは異なり、もう一方のリスク資産の価格にも影響を受ける。非情報トレーダーの需要関数も最適化問題から導出され、リスク資産が 1 つの場合と同様に最終的には不動点問題に帰着される。以上 3 つの需要関数から市場均衡価格が求められる。

ユアンはコンテイジョンに関して次のような結論を得ている。

- ① ファンダメンタルズに相関のない資産であっても、情報トレーダーの借入制約を通じてコンテイジョンは発生しうる。
- ② コンテイジョンは、市場の下落局面においてより発生しやすい。これは市場の下落局面ほど情報トレーダーが借入制約に抵触する可能性が高いからである。
- ③ コンテイジョンは、リスク資産が 1 つの場合の価格下落（ユアンの前半の議論）に比べると発生し難い。これは、多資産の場合、非情報トレーダーが多くの価格情報を観察できるようになるためである。非情報トレーダーはそれぞれの市

場での情報トレーダーの行動を観察することで情報トレーダーが制約に抵触しているかどうかの推測がつきやすくなる。

(3) 情報処理能力の限界と注意量の再配分 (Mondria [2006])

モンドリアは、Attention allocation と呼ばれるチャンネルを通じたコンテイジョンを考案した。投資に際しての情報収集・処理には多大なコストが掛かり、また情報処理能力にも限界がある。このため、投資家は限られた attention (注意量) を各市場に適切に振り分け、その注意量に応じた精度の資産リターンに関するシグナル (私的情報) を得て、ノイズ付きの市場価格 (公開情報) とあわせて最適なポートフォリオ運用を行うと考えた。

ある市場でショックが発生すると、投資家はその市場により多くの注意を振り向けるようになり、新しいシグナルに基づいてポートフォリオのリアロケーションを行う。リアロケーションの結果、ショックの起きていない市場に関するシグナルが減少し、シグナルの条件付確率として得られていたリターンの分布において不確実性が増大する (たとえ無条件付確率に変化がなくても)。その結果、投資家は多くのリスクプレミアムを求めるようになり (もしくは、その市場から撤退し)、ショックの発生していない資産市場においても価格下落を招くことになる。

モデル・セッティング

2 種類のリスク資産 (リスク資産 1、2 と呼ぶ) と 1 種類の安全資産を考える。投資家は支払った注意量に相当する価格シグナルを得るが、注意量には上限が存在する。この上限は注意量を支払うことにより得られる情報量の制限として設定する。情報量の制約にはシャノンの情報理論 (Information theory) を用いる。このアイデアは、すべての情報をコストレスに即時に活用できるという合理的期待形成に対して Rational inattention という概念を提唱した Sims [1998, 2003] によって示されたものであり、モンドリアはこれを情報量制約のモデルに応用している。具体的には、エントロピーの概念を用い、価格シグナルを得る前後でのエントロピーの差に制約を課す¹⁹。

今、リスク資産価格 \tilde{P} 、価格シグナル \tilde{Y} 、リスク資産のリターン \tilde{R} (後述) が正規分布に従うと仮定すると、 $\tilde{R} | \tilde{P}$ 、 $\tilde{R} | \tilde{P}, \tilde{Y}_i$ も正規分布となる。 $\tilde{R} | \tilde{P}$ 、 $\tilde{R} | \tilde{P}, \tilde{Y}_i$ の分散・共分散行列をそれぞれ Ψ 、 \mathbf{V}_i とすると、情報制約は $\log|\Psi| - \log|\mathbf{V}_i| \leq 2\kappa$ と定義される。

19 一般的に確率変数 X の密度関数を $p(x)$ とすると、エントロピー (不確実性の度合い) は、 $H(X) = -\int p(x) \log p(x) dx$ で与えられる。また Y (ここでは価格シグナル) による条件付エントロピーは、 $H(X | Y) = -\int p(x, y) \log p(x | y) dx dy$ となる。ここで、 $p(x, y)$ 、 $p(x | y)$ は同時密度関数、条件付密度関数である。モンドリアは情報量制約として価格シグナルによる情報量の変化に制約 κ を課し、 $H(X) - H(X | Y) \leq \kappa$ と置いている。

すべての投資家には注意量の制約 κ が存在し、この制約のもとで注意量を各リスク資産に振り分ける。4 期間のタイミングにおいて、期間 1 で初期資産を得て、期間 2 で注意量を各リスク資産に振り分ける。期間 3 では、ノイズが混じって観察された市場価格と注意量に応じて得られた価格シグナルをもとに最適ポートフォリオを決定する。期間 4 でポートフォリオから得られたキャッシュフローを消費する。

次に、投資家が得る価格シグナルの設定を説明する。投資家 i が得る価格シグナル \tilde{Y}_i ($k \times 1$ 行列) は、

$$\tilde{Y}_i = \mathbf{C}_i \tilde{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{e}}_i, \quad \tilde{\mathbf{e}}_i \sim N(0, \boldsymbol{\Sigma}_i), \quad (16)$$

と書けるとする。ここで、 \mathbf{C}_i は $k \times 2$ 行列であり、 k は投資家が得るシグナルの個数である。これは必ずしもリスク資産の個数に一致する必要はない。例えば、株式市場に投資する際、個別企業の株式に関する情報を個々に収集するために注意量を薄く広く配分するよりも、情報シグナルを集約して収集した方が効率的かもしれない。

\mathbf{C}_i の成分は、個々の資産へ振り分ける注意の配分量を表し、投資家を選択する。 $\tilde{\mathbf{R}}$ はリスク資産のリターンを表す 2×1 縦ベクトル、 $\tilde{\mathbf{e}}_i$ は価格シグナルの不確実性を表す $k \times 1$ 縦ベクトル、 $\boldsymbol{\Sigma}_i$ は $\tilde{\mathbf{e}}_i$ の分散・共分散行列 ($k \times k$) である。投資家は、 $\boldsymbol{\Sigma}_i$ をコントロールすることができる。このとき、 $k = 2$ として $\boldsymbol{\Sigma}_i$ をゼロ行列にできれば個々の資産の完全な将来価格を知ることができる。しかし、情報制約 $\log|\Psi| - \log|\mathbf{V}_i| \leq 2\kappa$ の左辺が \mathbf{C}_i 、 $\boldsymbol{\Sigma}_i$ を含むため、 $k = 2$ かつ $\boldsymbol{\Sigma}_i$ をゼロ行列にすることはできない。言い換えれば、情報制約の範囲内で投資家は、最適な \mathbf{C}_i 、 $\boldsymbol{\Sigma}_i$ を選択することになる²⁰。

投資家 i は、効用関数 $U_i = E[W_i | \tilde{Y}_i, \tilde{\mathbf{P}}] - \text{Var}[W_i | \tilde{Y}_i, \tilde{\mathbf{P}}]/2\rho_i$ を最適化させるようにリスク資産の保有量を決定する。 W_i 、 ρ_i はそれぞれ、投資家 i の資産額、絶対的リスク回避度を表す。また、リスク資産の供給量 $\tilde{\mathbf{Z}}$ は正規分布 (期待値ベクトル $\bar{\mathbf{Z}}$ 、分散・共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_Z$) に従い、均衡ではリスク資産の需給が一致する。リスク資産はノイズ・トレーダーによって供給 (負の場合は需要) されていると考える。

市場均衡の導出

均衡状態では、各投資家は価格シグナルと市場価格をもとに効用を最大化するようリスク資産の需要量を決定する。リスク資産価格は市場均衡条件により決定される。均衡状態を求めるには、注意量の配分を所与として、最適な資産配分の関数形を求め、この関数形をもとに注意量の配分を決定するというバックワードな 2 つのステップを踏む。

20 k の値により価格シグナルは個々のリスク資産のリターンに関する場合や、リターンの組合せに関する場合がある。 k を大きくすれば、シグナルを数多く受け取れる一方、シグナルの不確実性の数が増え、情報制約に抵触しやすくなる。このため k と $\boldsymbol{\Sigma}_i$ はトレードオフの関係にある。

まず、注意量の配分を所与とすると、均衡でのリスク資産価格 \tilde{P} 、投資家 i のリスク資産のリターンの条件付期待値 $E[\tilde{R} | \tilde{Y}_i, \tilde{P}]$ 、分散・共分散行列 \mathbf{V}_i 、リスク資産需要 X_i は、

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= A_0 + A_1 \tilde{R} - A_2 \tilde{Z}, \\ E[\tilde{R} | \tilde{Y}_i, \tilde{P}] &= B_{0i} + B_{1i} \tilde{Y}_i + B_{2i} \tilde{P}, \\ \mathbf{V}_i &= (\Sigma_R^{-1} + \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi + \mathbf{C}_i^T \Sigma_i^{-1} \mathbf{C}_i)^{-1}, \\ X_i &= G_{0i} + G_{1i} \tilde{Y}_i - G_{2i} \tilde{P},\end{aligned}\tag{17}$$

のかたちで書き表される (Admati [1985])。ただし、 $\Pi = \int \rho_i \mathbf{C}_i^T \Sigma_i^{-1} \mathbf{C}_i di$ である。

次に、(17) 式の結果をもとに、最適な注意量の配分を決定する。ここでは、情報制約 $\log|\Psi| - \log|\mathbf{V}_i| \leq 2\kappa$ のもとで、効用を最大化させる \mathbf{C}_i 、 Σ_i を決定することになる²¹。ただし、 $\Psi = (\Sigma_R^{-1} + \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi)^{-1}$ である。

最適化の結果、モンドリアは次の結論を得ている。

- 情報制約 κ の水準にかかわらず、 \mathbf{C}_i は 1×2 型の行列となる ($k = 1$)。これは、リスク資産が2つであっても、受け取る価格シグナルは1つ (2つのリスク資産のペイオフに関する情報を線形で組み合わせたもの) が最適であることを意味している²²。
- パラメータが一定の条件を満たすもとは、最適な \mathbf{C}_i (各リスク資産のシグナルのウェイト) は一値に定まる。また、 Σ_i (スカラー量) は2つの状態 Σ_i^H 、 Σ_i^L ($\Sigma_i^H > \Sigma_i^L$) が存在する。
- リスク資産1のペイオフのボラティリティ $\sigma_{r,1}^2$ 、および供給量のボラティリティ $\sigma_{z,1}^2$ が大きいほど (リスク資産2のペイオフのボラティリティ $\sigma_{r,2}^2$ 、および供給量のボラティリティ $\sigma_{z,2}^2$ が小さいほど)、投資家はリスク資産1に多くの注意量を配分することがわかる²³。

21 この最適化問題では、情報制約に抵触しない限り、注意量を各資産に細かく振り分けることでリスク資産の不確実性 $|\mathbf{V}_i|$ をいくらでも小さくすることができ、現実の世界に合致するとは言い難い。このため、モンドリアはリスク資産の不確実性に下限を設定し、すなわち $\log|\mathbf{V}_i| > \phi$ としたときの均衡についても検証を行っている。

22 直感的には、複数資産に分散投資する場合には、個々の資産の価格シグナルを受け取る必要はなく、集約されたシグナルを受け取れば十分であることを意味している。効用関数が同じであれば効率ポートフォリオは1つとなり、このポートフォリオに関する情報シグナルに集約された個別株のシグナルをみればよいことになる。

23 $\mathbf{C} = (c_1, c_2)$ とするとリスク資産1への相対的な「注意」の配分量は、 $c_1^2 \sigma_{r,1}^2 / c_2^2 \sigma_{r,2}^2$ で与えられる。

コンテイジョンとの関連

モンドリアは、以上の議論をコンテイジョンの説明に応用し、ある市場で発生した金融危機は、**Attention allocation** を通じて他の市場のボラティリティを増大させることを指摘している²⁴。ある市場で危機が発生すると、より多くの注意量をその市場に振り向けることになり、他の市場のシグナルが劣化する結果、危機が発生していない市場の条件付ボラティリティが上昇する。このため、リターンの無条件分布が独立な市場間においても価格の同時下落が生じうる。

資産価格には、直接効果、代替効果、**Attention allocation** 効果が作用することになる。今、リスク資産1の不確実性が増大したとする。直接効果は資産1のボラティリティを高めるため価格を下落させる。また、代替効果は資産1の価格を下落、資産2の価格を上昇させ、逆に、**Attention allocation** 効果は、資産1の価格を上昇、資産2の価格を下落させる。一般的に、資産1については、直接効果と代替効果が**Attention allocation** 効果を上回るため、価格は低下すると考えられる。資産2において、代替効果、**Attention allocation** 効果のどちらが上回るかは、資産間の相対的な不確実性の度合いに依存する。資産1の不確実性が資産2対比で十分小さく、投資家がリスク回避的であれば、代替効果が**Attention allocation** 効果を上回り、資産2の価格は上昇する。一方、資産1の不確実性が資産2対比で大きいか同等のとき、**Attention allocation** 効果が代替効果を上回り、資産2の価格は下落する。

以上より、無条件リターン分布の分散に大きな差がない市場間では、独立な市場であってもコンテイジョンが発生しやすくなり、安全資産に近いような市場（例えば国債市場）のボラティリティが高まっても、リスク資産にコンテイジョンは生じ難いと考えられる。

モンドリアは、実証分析として地理的距離のあるエマージング市場の株価（いずれもボラティリティが高い市場と想定）を使用してモデルの有効性を検証している。注意量を表す代理変数としてフィナンシャル・タイムズ誌の記事の数を扱い、あるエマージング国の記事の数が増えると、他のエマージング市場の株価がボラタイルになることを回帰分析により示している。

(4) 投資家行動の同質化 (Calvo and Mendoza [2000])

カルボらは、①金融市場のグローバル化が進展し、投資対象ユニバースが大きくなるにつれ、②市場の効率化が進み、投資調査の限界的なリターンが低下してくるにつれ、市場参加者がコストをかけて情報収集するインセンティブが低下することを理論モデルによって示した。これを踏まえて、世界規模で市場ポートフォリオを保有するパッシブ運用が増加した場合、直接的な伝播経路がなくとも同時的な価格下落が発生しやすくなる危険性を指摘している。

24 数学的には、 $\partial \text{Var}(\tilde{r}_2 | \tilde{Y}_1, \tilde{P}) / \partial \sigma_{r_1}^2 > 0$ となる。

モデル・セッティング

世界の証券市場が J カ国 ($2 \leq J \leq \infty$) で構成されているとする。また、投資家は同質であるとし、代表的な投資家を想定する。代表的投資家の投資先 J カ国のうち、アクティブ投資の対象候補国 i を除く ($J - 1$) カ国は同質（期待収益率は平均 ρ 、分散 σ_J^2 の正規分布）とし、これを世界市場と呼ぶ。国 i については、期待収益率は平均 r^* 、分散 σ_i^2 の正規分布とし、世界市場との相関は η とする。投資家の世界市場への投資比率を θ とし、投資家の期待効用を、

$$EU(\theta) = \mu(\theta) - \frac{\gamma}{2}\sigma(\theta)^2 - \kappa - \lambda(\mu(\Theta) - \mu(\theta)), \quad (18)$$

と表す。 γ (> 0) は絶対的リスク回避度を表すパラメータ、 $\mu(\theta)$ 、 $\sigma(\theta)^2$ はポートフォリオ全体の収益率の平均、分散、 κ は i 国固有の情報を得るための固定コスト、 Θ は全 J カ国の証券市場全体の市場ポートフォリオ、 $\lambda(\mu(\Theta) - \mu(\theta))$ は投資家のポートフォリオが市場ポートフォリオを下回ったとき（上回ったとき）のパフォーマンスコスト（収益）である。固定コストをかけて i 国資産への投資リターンに関する情報を得ても効用関数に改善がみられない場合や、変動コスト（パフォーマンスコスト）を考えるとアクティブ運用を行うメリットがない場合には、投資家は $\theta = \Theta$ すなわち、パッシブ運用により全 J カ国の市場ポートフォリオを保有することが最適な投資行動となる。カルボらは、 i 国固有の情報を得るための固定コスト、パフォーマンスコストのおおのがパッシブ運用化への誘引をもたらすことを考察している。

情報収集（固定）コスト

まず、初期状態で i 国は他の ($J - 1$) カ国と同質であり、相関はゼロと仮定する ($r^* = \rho$ 、 $\sigma_i = \sigma_J = \sigma$ 、 $\eta = 0$)。このとき、投資家は各国に $1/J$ ずつの資金を配分し、ポートフォリオ全体の収益は平均 ρ 、分散 σ^2/J となる。

投資家が i 国の期待リターン r について $r \leq r^*$ であるという噂を聞いたとする（分散は σ^2 のまま不変）。投資家が i 国固有の情報を得るために固定コスト κ を支払わない場合には、この噂を信用して投資を行う。一方、情報を得るためのコスト κ を支払うと i 国の真のリターン r^1 （分散はゼロ）を知ることができる（本来、 r^1 は確率変数である）。この場合、投資家はコスト κ を支払った場合の期待効用 EU^1 が支払わない場合の期待効用 EU^U を上回る場合のみ固定コストを支払うことになる。

θ^U 、 θ^1 をそれぞれ、投資家が情報コストを支払わない場合の世界市場への投資比率、情報コストを支払った場合の世界市場への投資比率とする。まず、運用制約がない場合の θ^U は、

$$EU^U = \theta^U \rho + (1 - \theta^U)r - \frac{\gamma}{2} \left[\frac{(\theta^U)^2}{J-1} + (1 - \theta^U)^2 \right] \sigma^2, \quad (19)$$

を最大にするように決定される。1 階の条件から、最適な投資比率 θ^U は、

$$\theta^U = \left(\frac{J-1}{J} \right) \left[1 + \frac{\rho-r}{\gamma\sigma^2} \right], \quad (20)$$

となる。

ここで、投資家には運用制約があり投資比率に $-a \leq \theta^U \leq b$ という制約が課されているとする ($0 \leq a < \infty$ 、 $1 \leq b < \infty$)。このとき、最適な θ^U は、

$$\theta^U = \begin{cases} b & (r \leq r^{\min}), \\ \left(\frac{J-1}{J} \right) \left[1 + \frac{\rho-r}{\gamma\sigma^2} \right] & (r^{\min} < r < r^{\max}), \\ -a & (r \geq r^{\max}), \end{cases}$$

$$r^{\min} = \rho - \frac{\gamma\sigma^2[J(b-1)+1]}{J-1},$$

$$r^{\max} = \rho + \frac{\gamma\sigma^2[J(a+1)-1]}{J-1},$$
(21)

となる。(21) 式から投資ユニバースが拡大すると (J が大きくなると)、運用制約に抵触しない領域 ($r^{\min} < r < r^{\max}$) は小さくなり、 $J \rightarrow \infty$ のとき、 $r^{\max} - r^{\min} = \gamma\sigma^2(a+b)$ に収束する。運用制約に抵触しないケースにおいては、(20) 式を (19) 式に代入すると、

$$EU^U = \left(r - \frac{\gamma\sigma^2}{2J} + \frac{(\rho-r)(J-1)}{2J} \left[2 + \frac{\rho-r}{\gamma\sigma^2} \right] \right), \quad (22)$$

が得られる。

次に、情報コストを支払った場合の効用を考えると、

$$U^I = \theta^I \rho + (1 - \theta^I) r^I - \frac{\gamma}{2} \left[\frac{(\theta^I)^2}{J-1} \right] \sigma^2 - \kappa, \quad (23)$$

となる。

以上より、運用制約がない場合の最適なポートフォリオ (投資比率) は、

$$\theta^I(r^I) = (J-1) \left(\frac{\rho-r^I}{\gamma\sigma^2} \right), \quad (24)$$

となり、運用制約がある場合には、

$$\theta^1(r^1) = \begin{cases} b & (r^1 \leq r_1^{\min}), \\ (J-1)\left(\frac{\rho - r^1}{\gamma\sigma^2}\right) & (r_1^{\min} < r^1 < r_1^{\max}), \\ -a & (r^1 \geq r_1^{\max}), \end{cases}$$

$$r_1^{\min} = \rho - \frac{b\gamma\sigma^2}{J-1},$$

$$r_1^{\max} = \rho + \frac{a\gamma\sigma^2}{J-1},$$

(25)

となる。

r^1 の密度関数、分布関数をそれぞれ $f(r^1)$ 、 $F(r^1)$ とすると、情報コストを支払った場合の期待効用 EU^1 は、

$$EU^1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\theta^1 \rho + (1 - \theta^1)r^1 - \frac{\gamma}{2} \left[\frac{(\theta^1)^2}{J-1} \right] \sigma^2 - \kappa \right] f(r^1) dr^1, \quad (26)$$

と表される。(25) 式の場合分けにより (26) 式を計算し、コストを支払った場合とそうでない場合の効用の差 $S \equiv EU^1 - EU^U$ を評価することにより、次の結論が得られる。

情報コストを支払わない場合の最適投資戦略が運用制約に抵触せず ($r^{\min} < r < r^{\max}$)、また、 i 国のリターンは世界市場のそれ以下であるという悲観的な噂 ($r \leq r^* = \rho$) があるとすると。さらに、コストを支払ったときに知りうるリターンの分布 $f(r^1)$ は連続かつ微分可能であるとする。このとき、少なくとも $J > 1/\{1 - \sqrt{F(\rho)(b^2 - a^2) + a^2}\}$ を満たす市場規模 J につき、効用の差 S は J の減少関数となる。したがって、 J が大きくなると、市場ポートフォリオを保有するインセンティブが働きやすくなり、パッシブ運用化が進む。

上記の結果を直感的に解釈すると次のようになる。まず、投資家に運用制約がない場合、市場規模 J が増加することによる分散投資の効果は、情報コストを支払う場合、支払わない場合の双方に影響を及ぼす。一方、情報コストを支払うと、 i 国のリターンの不確実性がなくなることから、コストが固定費の場合、効用の差 S は J の増加関数となる。もっとも、投資家に運用制約がある場合、情報コストを支払い、 i 国のリターンの不確実性がなくなっても、運用制約によりこのメリットを享受できなくなるため、 S は J の減少関数となる。

運用のパフォーマンスコスト

次に、パフォーマンスコストがパッシブ運用化に及ぼす影響を考察する。まず、パフォーマンスコストを表す関数 $\lambda(\cdot)$ について次の性質を仮定する。

- $x > 0$ のとき $\lambda(x) > 0$ 、 $x < 0$ のとき $\lambda(x) < 0$ 、 $\lambda(0) = 0$
- $d\lambda/dx \geq 0$ かつ $x > 0$ のとき $d\lambda(x)/dx > d\lambda(-x)/dx$

1つ目の条件は、投資家の期待リターンが、市場ポートフォリオのそれを下回る（上回る）とき、コスト（収益）となることを意味している。2つ目の条件は、 $\lambda(x)$ は非対称で限界コストが限界収益を上回ることを意味している。

投資家は、市場ポートフォリオ Θ を所与として以下の期待効用を最大化するような θ を選択することになる（固定の情報コストは捨象している）。

$$EU(\theta) = \theta\rho + (1-\theta)r - \kappa - \lambda(\mu(\Theta) - \mu(\theta)) - \frac{\gamma}{2} \left[\frac{(\theta\sigma_J)^2}{J-1} + (1-\theta)^2\sigma_i^2 + 2\sigma_J\sigma_i\theta(1-\theta)\eta \right]. \quad (27)$$

$\mu(\theta) = \theta\rho + (1-\theta)r$ 、 $\mu(\Theta) = \Theta\rho + (1-\Theta)r$ であることから、(27) 式右辺につき $\lambda(\mu(\Theta) - \mu(\theta)) = \lambda((\Theta - \theta)(\rho - r))$ となる。このとき、次の結論が得られる。

パフォーマンスコスト $\lambda(x)$ について、その限界コスト（収益）が十分に大きいとき（小さいとき）、効用関数の1階微分を考えると、 $\theta > \Theta$ で $EU'(\theta) < 0$ 、 $\theta < \Theta$ で $EU'(\theta) > 0$ となり、投資家は市場ポートフォリオ Θ を選択することが最適となる。世界的な市場の効率化は、アクティブ運用の固定コストのみならず、運用パフォーマンスの優位性の減退につながっており、その結果、パッシブ運用化の進展をもたらしている。

4. おわりに

本稿では、サブプライム問題を契機とした世界金融市場の混乱において、いたるところでさまざまなかたちで発生した資産価格下落の伝播に対して、理論的な解釈のフレームワークを与えると思われる理論モデルのサーベイを行った。

これらの先行研究では、資産効果を通じたコンテイジョンやこれを強化するメカニズムとして、リスク回避度の高まり、資産運用制約、借入制約、情報の非対称性などに注目してモデル化を試みており、その着目点やモデル化の手法について紹介した。また、Attention allocation という比較的新しいアイデアによるコンテイジョンの説明や、パッシブ運用化が進展していることの理論的な解釈事例などを紹介した。これら理論モデルは、①ファンダメンタルズが独立であっても、ショックの伝播が起りうること、②ショックが内生的に増幅し、ファンダメンタルズに生じたショックでは説明できないような大幅な価格下落が起きることなどを説明している。

1 節では、今次の市場混乱に際して指摘されているさまざまな伝播現象を挙げた。理論モデルを参照することにより、こうした現象を紐解いていく際に有益な視点が得られるだけでなく、抽象化された理論モデルは、将来、様相を変えて現れるであろう金融危機に対し、どのような伝播・増幅経路が金融市場の発展過程で新たに内包されていくかを事前に考察する手がかりとなろう。

実際、コンテイジョンの研究では、1990 年代後半に派生したアジア危機や LTCM 危機などを意識したものが少なくない。にもかかわらず、今次世界金融市場の混乱では、当時とは違った形態で、しかし抽象化してみると類似性が高いメカニズムによって混乱の伝播が生じている。サブプライム問題以降を直接分析対象とした研究は既に現れ始めているし、今後、一段の蓄積が進むであろうが、金融市場のグローバル化やリスク仲介機能の発展、新たな金融商品・市場の登場は今後も続き、市場はその姿を休むことなく変えていくと思われる。理論研究の成果を参照しつつも、想像力を高く持ち、金融市場が発展するなかでどのような潜在的なリスクが金融システム内に入り込んできているかを追いつけていかねばならない。

参考文献

- 池田昌幸、『金融経済学の基礎』、朝倉書店、2000年
- 日本銀行金融市場局、『金融市場レポート—2007年後半の動き—』、日本銀行、2008年a
- 、『金融市場レポート—金融経済環境を巡る不確実性の高まりと国際金融市場の混乱、2008年前半の本邦金融市場の動向：「国際金融市場との連動性」と「相対的安定性」』、日本銀行、2008年b
- Admati, A., “A Noisy Rational Expectations Equilibrium for Multi-Asset Securities Market,” *Econometrica*, 53, 1985, pp. 629–657.
- Adrian, T., and H. S. Shin, “Liquidity and Leverage,” Working Paper, 2007.
- Ashcraft, A. B., and T. Schuermann, “Understanding the Securitization of Subprime Mortgage Credit,” *Staff Reports*, No. 318, Federal Reserve Bank of New York, 2008.
- Calvo, A. G., and E. G. Mendoza, “Rational Contagion and the Globalization of Securities Markets,” *Journal of International Economics*, 51, 2000, pp. 79–113.
- Cifuentes, R., G. Ferrucci, and H. S. Shin, “Liquidity Risk and Contagion,” *Journal of European Economic Association*, 3, 2005, pp. 556–566.
- De Bandt, O., and P. Hartmann, “Systemic Risk: A Survey,” European Central Bank Working Paper Series, No. 35, 2000.
- Eisenberg, L., and T. N. Noe, “Systemic Risk in Financial Systems,” *Management Science*, 47 (2), 2001, pp. 236–249.
- Gabaix, X., D. Laibson, G. Moloche, and S. Weiberg, “The Allocation of Attention: Theory and Evidence,” MIT working paper 03-31, Massachusetts Institute of Technology, 2003.
- Grossman, S. J., and J. E. Stiglitz, “On the Impossibility of Informationally Efficient Markets,” *American Economic Review*, 70, 1980, pp. 393–408.
- Hirshleifer, D., “Investor Psychology and Asset Pricing,” *Journal of Finance*, 56 (4), 2001, pp. 1533–1597.
- Hong, H., and J. C. Stein, “Differences of Opinion, Short-Sales Constraints, and Market Crashes,” *Review of Financial Studies*, 16 (2), 2003, pp. 487–525.
- Kodres, L. E., and M. Pritsker, “A Rational Expectations Model of Financial Contagion,” *Journal of Finance*, 57, 2002, pp. 769–799.
- Kyle A. S., and W. Xiong, “Contagion as a Wealth Effect,” *Journal of Finance*, 56, 2001, pp. 1401–1440.
- Mondria, J., “Financial Contagion and Attention Allocation,” mimo, Princeton University, 2006.
- Pericoli, M., and M. Sbracia, “A Primer on Financial Contagion,” *Journal of Economic Survey*, 17 (4), 2003, pp. 571–608.

- Schinasi, G. J., and R. T. Smith, "Portfolio Diversification, Leverage, and Financial Contagion," *IMF Staff Papers*, 47, International Monetary Fund, 2000, pp. 159–176.
- Sims, C. A., "Stickiness," *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 49 (1), 1998, pp. 317–356.
- , "Implications of Rational Inattention," *Journal of Monetary Economics*, 50 (3), 2003, pp. 655–690.
- Yuan, K., "Asymmetric Price Movements and Borrowing Constraints: A Rational Expectations Equilibrium Model of Crises, Contagion, and Confusion," *Journal of Finance*, 2005, pp. 379–412.