株式利益の希薄化を考慮した転換価格修正条項付き転換社債の価格について

くすおかしげお
楠岡成雄

要　旨

現在、転換価格修正条項付き転換社債（Moving Strike Convertible Bond：以下、MSCB）を第三者割当方式で発行するということが、よく行われている。MSCBは請求すれば発行企業の株式に転換することのできる社債であるが、その際の1株当たりの転換価格が固定されておらず、請求時までの株価の履歴により決まるものである。転換社債の価格に関しては、株価過程を与えられたものとし、転換社債をデリバティブの一種として捉えてデリバティブの価格理論を適用するという形で価格を導いているものが大多数である。転換社債の発行量が株式総数に比較して小さい場合はこの考え方は第1次近似として問題はない。しかし、発行量が大きい場合は、株式価値希薄化による株価への影響を考慮する必要があり、この考え方は不十分である。本稿では、会社価値の増減のメカニズムは与えられたものとして、株価および転換社債の価格は株式保有者と転換社債保有者のゲームの結果として定まるという考え方のもとで転換社債の価格を論じる。

キーワード：転換社債、MSCB、株式価値の希薄化

本稿は、筆者が日本銀行金融研究所客員研究員の期間に行った研究をまとめたものである。本稿の作成に当たっては、同研究所企画役の家田明氏（現 日本銀行金融機構局）、吉羽要直氏、京都大学経済学研究所の原千秋氏並びに同大学経済学研究科の西出勝正氏に有益な助言を頂いた。ここに記して感謝する。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。

楠岡成雄　東京大学大学院数理科学研究科教授（E-mail: kusuoka@ms.u-tokyo.ac.jp）

1. はじめに

転換価格修正条項付き転換社債（Moving Strike Convertible Bond：以下、MSCB）とは、請求すれば発行企業の株式に転換することのできる社債であるが、その際の1株当たりの転換価格が固定されておらず、請求時までの株価の履歴により決まるものである。請求時直前の1週間における株価の平均の9割を転換価格とするというような例が多い。このように一般に株価が下がると転換価格も下がるというものが大部分であり、MSCBの保有者は空売りを仕掛けて株価を下げて転換するという行動をとることが多い。社債の株式への転換により株式価値の希薄化が起こるが、MSCBの場合、株価の下落が株式価値の希薄化をより強めるため、株価の下落を加速し既存の株主に対して大きな不利益を与えるという側面がある。このため、MSCB発行に対する株主による批判が昨今強くなり、日本証券業協会が自主規制ルールを導入して原則として1ヵ月で転換できる株式数を発行済み株式の10％に制限するなど、規制が強化されつつある。実際、平成19年1〜7月のMSCBの発行額は前年同期に比べて95％も減少しているといわれている。このようにMSCBの発行額は急速に減少しているが、MSCBの公正価格がどのように与えられるかをファイナンスの立場より研究することは今なお意義のあることであると考える。

転換社債の価格付けについては、これまで（特にMSCBの場合に）デリバティブの価格の理論を直接的に用いてきた。当初は、単に株価に連動するデリバティブとして捉えられたが、デフォルト・リスクが認識されるようになり、その後は、株価および社債価格に連動するデリバティブと捉えての研究が行われてきた。いずれの場合もまず株価過程あるいは債券価格過程は所与とされ、そのうえで転換社債をある種のアメリカン・デリバティブとみなして価格の計算が行われてきた（例えばTakahashi, Kobayashi, and Nakagawa [2001]、Ayache, Forsyth, and Vetzal [2003]、山田［2006］などの文献がある）。このような取扱いは、転換価格の発行額が会社の資産規模に対してきわめて小さい時は妥当であると考えられる。しかし、近年、会社の資産規模からみて無視できない額の転換社債が発行されるようになり、株式の希薄化が問題とされるようになってきた。このため、株価過程を所与とする従来の手法を変更する必要がある。

転換社債の価格の問題を、経済学の一般均衡理論の枠組みにまでモデルを広げて論ずることは可能であろうが、その場合は価格の具体的な計算を実際に行うことはほぼ不可能のように思える。本稿では、ある種の部分均衡的な考え方に基づき転換社債の価格付けの問題を取り扱う。基本的な考え方としてMerton [1974]を参考にした。すなわち、会社の資産価値の増減を定める確率過程は所与とし、資金は資本と転換社債のみから調達され、ほかの負債は一切ないと考える。そのうえで、株価と転換社債価格が無裁定条件のもとでどのように決まるかについて考察する。

なお、転換価格が一定の転換社債に関しては、Ingersoll [1977]、Brennan and Schwartz [1980]が株価の希薄化を考慮した場合の議論を行っている。しかし、このような場

合は結果として、転換社債は満期までは転換せず、満期に転換するかどうかを決めるという戦略が転換社債保有者の最適戦略となり、Merton [1974] と同様な考察が可能となる。しかし、転換価格が変動する場合には最適戦略は一般にこのようなものとは限らず、同様な議論が適用できない。

以下、本稿の構成について述べる。2 節では考えているモデルの設定について述べる。3 節では、このモデルに対して従来の株式利益の希薄化を考慮しない標準的なファイナンスの考え方を適用した場合どのような結論となるかを述べる。4 節では株式利益の希薄化を考慮した場合をどのように取り扱うかの考え方を述べる。5 節では 4 節で述べた考え方を最も単純な例に適用するとどのような議論となるか、本稿の主結果よりどのようなことがわかるかについて述べる。この節は、本稿の主定理がきわめて数学的でわかりにくいので、例を用いて主結果についての説明を行ったものである。6 節では数学的な主結果を述べると同時にその意味するところの解説を行った。7 節では本稿の結果の結論を簡単に述べている。補論では主結果の数学的な証明を与えている。

2. 基本設定

今、ある株式会社があり、転換社債を発行するとする。
まず、次のような仮定をおく。

（A-1）市場は完全である。すなわち、取引費用、税等は一切ない。
（A-2）会社は転換社債発行前には一切の負債がなく、資本金のみで経営されている。また、会社は配当を行わない。

会社の資産価値の推移を記述するために、以下の数学的設定を導入する。$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間、$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqq 0}$ は（d 次元）ブラウニアン・フィルトレーション、$\{B(t)\}_{t\geqq 0}$ は 1 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動であるとする。$\{\sigma_t\}_{t\geqq 0}$、$\{\mu_t\}_{t\geqq 0}$ は適合した確率過程とし、簡単のために有界と仮定する。$X(t)$ は以下の確率微分方程式の解とする。

$$dX(t) = X(t)(\sigma_t\, dB(t) + \mu_t\, dt),$$
$$X(0) = 1.$$

以上の設定のもとで、以下を仮定する。

（A-3）転換社債の発行の有無、発行額にかかわらず、会社の持つ資産全体の価値（以下、単に資産価値と呼ぶ）は時刻 t において $X(t)^{-1}\, dX(t)$ の割合で増加する。

また、次のことを仮定する。

（A-4）市場には多くの証券が存在し、市場は無裁定条件が成立し、完備であるとする。特に、確率過程 X は動的ヘッジにより、複製可能である。

会社の発行する転換社債に関する仮定は以下のとおり。

（A-5）社債の株式への転換可能時刻は $T_1, T_2, \ldots, T_N$ である。ただし、$0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_N$。また、$c_1, c_2, \ldots, c_N \geqq 0$ とし、転換社債を時刻 T_n、$n = 1, \ldots, N$ までに転換せず、時刻 T_n においても転換しない時 1 枚に付き c_n を受け取る。すなわち、c_n、$n = 1, \ldots, N-1$ は時刻 T_n におけるクーポンの額、c_N は満期におけるクーポンの額と満期における返還金の額の和である（$c_N = 0$ であれば強制転換社債と同じこととなることに注意）。

転換価格を記述するため、さらに数学的設定を導入する。
$T_0 = 0$、$T_{N+1} = \infty$ とおく。空間 W を

$$W = \{w\colon [0,\infty) \to [0,\infty); w \text{ は右連続で左極限が存在し、} [T_{k-1}, T_k)\text{、}k = 1, \ldots, N+1 \text{ 上で連続}\},$$

で定める。また、W 上の σ 加法族 $\mathcal{B}_n$、$n = 1, \ldots, N$ を $\mathcal{B}_n = \sigma\{w(t); t \in [0, T_n)\}$ で定める。さらに、$g_n\colon W \times \Omega \to (0,\infty)$、$n = 1, \ldots, N$ は $\mathcal{B}_n \times \mathcal{F}_{T_n}$ 可測関数とする。

（A-6）この会社の株価過程が $\{S(t)\}_{t \geqq 0}$ である時、時刻 T_n、$n = 1, \ldots, N$ における転換価格は $g_n(S(\cdot, \omega), \omega)$ である。

仮定（A-4）には若干の説明が必要であろう。会社全体の株と転換社債をすべて買えば、資産価値を手に入れることができるので、$V_0 X(t)$ それ自体が市場で取引されている証券とみなせる（これは Merton [1974] における考え方と基本的に同じである）。あるいはまた、この会社と全く同じ技術と経営方針を持つ別の会社が存在して株式を発行しているならば、その会社の株を用いて複製可能となる。

仮定（A-4）より、X をニュメレールにとることができ、対応する同値マルチンゲール測度 Q がただ 1 つ存在する。簡単のために本稿では $Q = P$ と仮定する。

さて、転換社債発行前の資産価値は V_{00}、株数は L_0 であるとする。また、転換社債の発行枚数は M_0 枚、額面は q であり、1 枚当たりの現在価格を v とする（多くの場合、$v = q$ とされることが多いが、ここでは分けて考える）。よって調達する資金は $M_0 v$ であり、転換社債発行後の現在時刻 0 における資産価値は $V_0 = V_{00} + M_0 v$ となる。

$R_n\colon W \times \Omega \to (0,\infty)$、$n = 1, \ldots, N$ を

$$R_n(w,\omega) = \frac{q}{g_n(w,\omega)}, \quad w \in W, \omega \in \Omega,$$

で定める。会社の株価過程が $\{S(t)\}_{t\geqq 0}$ である時、時刻 T_n、$n=1,\ldots,N$ において転換社債を 1 枚転換すると $R_n(S(\cdot,\omega),\omega)$ 枚の株を得ることになる。

3. 従来の考え方

これまでの多くの文献では、株式の希薄化という問題を考慮せず、株価過程が転換社債発行前と同じ確率過程

$$S(t)=\frac{V_{00}}{L_0}X(t),\quad t\geq 0,$$

であるとして、以下のように考えていた。

$$\mathcal{A}=\left\{\{a_n\}_{n=1}^N; a_n \text{は非負値 } \mathcal{F}_{T_n} \text{ 可測確率変数で} \sum_{n=1}^N a_n \leqq 1\right\},$$

とおく。$\mathcal{A}$ は転換社債の転換権行使戦略の集合である。すなわち、$\{a_n\}_{n=1}^N\in\mathcal{A}$ とは転換社債 1 枚に対し、時刻 T_n において a_n 枚の転換社債を転換するという戦略である。この戦略のもとでは、時刻 T_n において

$$R_n(S(\cdot))S(T_n)a_n+c_n\left(1-\sum_{k=1}^n a_k\right),$$

を受け取る。

したがって、今の設定では、転換社債の価格は

$$\sup_{\{a_n\}_{n=1}^N\in\mathcal{A}} E\left[\sum_{n=1}^N X(T_n)^{-1}R_n(S(\cdot))S(T_n)a_n+c_n\left(1-\sum_{k=1}^n a_k\right)\right],$$

で与えられる。これが従来の考え方であった。

この場合、時刻 T_N 以後では資産価値と株式総額が一般には一致せず、ファイナンスの立場からいっても矛盾を含むが、転換社債の発行数が小さい時には良い近似となっていると考えられる。しかしながら、近年多額の転換社債を発行する事例が増え、株式の希薄化を考慮した理論が必要となっている。

4. 基本的考え方

本稿では以下のような仮定に基づいて議論を行う。

（B-1）株価は、転換社債の満期時刻 T_N 直後には 1 株当たりの資産価値と一致する。すなわち、「T_N 直後における資産価値」を「T_N 直後における株式総数」で割ったものとなる。

（B-2）転換社債の価格は転換社債の保有者と株式の保有者の間のゲームとして決まる。

（i）転換社債の保有者は各時点 T_n、$n = 1, \ldots, N$ において共通の情報 $\mathcal{F}_{T_n}$、期間 $[0, T_n)$ の株価の履歴、および時刻 T_{n-1} までの転換の量の履歴に基づき、転換枚数を決定できる。

（ii）株式の保有者は各時点 T_n、$n = 0, \ldots, N-1$ において共通の情報 $\mathcal{F}_{T_n}$、期間 $[0, T_n)$ の株価の履歴、および時刻 T_n までの転換の量の履歴に基づき、期間 $[T_n, T_{n+1})$ における株価を決定することができる。ただし、株式市場均衡のために無裁定条件が成立していなくてはならず、そのため、期間 $[T_n, T_{n+1})$ における株価過程は「マルチンゲール条件」を満たさねばならない。特に、ブラウニアン・フィルトレーションの仮定より、その期間の株価過程は連続となる。

（B-3）転換社債の保有者はただ 1 人である。

（B-4）転換社債の保有者が最適行動をとる限り、株価は転換時刻 T_n、$n = 1, \ldots, N$ においても連続となる。

それぞれの仮定について説明する。

仮定（B-1）はファイナンスにおける通常の仮定である。

仮定（B-2）では、株価が期間 $[T_n, T_{n+1})$ において無裁定条件が成立するとしているが、これは株価が市場価格として均衡するための必要条件である。ここでは、株式が独占され株価が恣意的に決められることはないということが前提とされている。

仮定（B-3）は議論の余地があるであろう。もし、転換社債の所有者が複数である場合、相手が転換を行った時、自分はその次の時点で転換を行ったほうが有利といった事態が発生し得る。このため、「囚人のジレンマ」のような状況が発生する可能性があり、完全に協力した場合の最適戦略が実現されなくなることがあり得る。（B-3）はこのような状況を排除するための仮定である。

なお、このような場合は結果として転換社債の価格が、所有者が 1 人の場合の時に比べ低くなるが、すべての転換社債を買い集めれば、転換社債の価格は上がるので、無裁定の条件からは（B-3）の仮定は正当化することも可能である。

（B-4）の仮定も、無裁定条件が成立するために必要な条件となる。

以上の前提のもとでさらに以下のように考える。

仮定（A-4）で市場が無裁定で完備であることを仮定したので、転換社債の保有者は、その株を市場で売らず持ちつづけ、さらに受け取ったクーポンも別の証券で運用すると仮定しても（ニュメレールと同値マルチンゲール測度に基づく）割引現在価値は、ほかのポートフォリオ戦略をとる時と変わらない。この場合、株式の保有者の持ち株総数は L_0 で一定である。また、「転換社債すべての割引現在価値」と「株式保有者の持つ株全体の割引現在価値」の和は現在の資産価値 V_0 と一致し一定である。よって、これはゼロ和ゲームの一種と考えられるので、以下を仮定する。

（B-5）転換社債の保有者は時刻 T_N 以後の株価の割引現在価値を最小化しようと行動する。

株式保有者側に対しては以下を仮定する。

（B-6）株式保有者は時刻 T_N 以後の株価の割引現在価値を最大化しようと行動する。

株式を空売りしている投資家は、株価を最大化することに同意しないかもしれないが、総体では最大化が利益となるので、このように仮定する。

以上で、ゲームのルールとプレイヤーの利得関数が確定した。

5. 簡単な場合における結果の説明

一般の結果を述べる前に、$N = 1$ の特別な場合に結果を述べる。

$a, b > 0$、$0 < T' < T_1$ とし、時刻 $[0, T_1)$ における株価が、$\{S(t)\}_{t\in[0,T_1)}$ である時、時刻 T_1 での転換価格が

$$g(S(\cdot)) = \max\left\{a, b\left(\int_{T'}^{T_1} S(t)\,dt\right)\right\}, \tag{1}$$

で与えられるとする。この時、転換社債の保有者は株価を最小にしようとするので、時刻 T_1 直後の株価は

$$\begin{aligned}
&\min_{y\in[0,M_0]} \max\left\{\frac{V_0X(T_1) - (M_0 - y)c_1}{L_0 + yq/g(S(\cdot))}, 0\right\} \\
&= \min\left\{\frac{V_0X(T_1)}{L_0 + M_0q/g(S(\cdot))}, \max\left\{\frac{V_0X(T_1) - M_0c_1}{L_0}, 0\right\}\right\},
\end{aligned}$$

で与えられる。一方、無裁定条件より、$X(t)^{-1}S(t)$、$t \in [0, T_1)$ は（有界）マルチンゲール。よって、$\mathcal{F}_{T_1}$ 可測な（有界）確率変数 ξ が存在して

$$S(t) = \pi(\xi)(t) = X(t)E[X(T_1)^{-1}\xi \mid \mathcal{F}_t], \quad t \in [0, T_1),$$

となる。仮定（B-4）より ξ に対する方程式

$$\xi = \min\left\{\frac{V_0 X(T_1)}{L_0 + M_0 q/g(\pi(\xi)(\cdot))}, \max\left\{\frac{V_0 X(T_1) - M_0 c_1}{L_0}, 0\right\}\right\}, \tag{2}$$

が得られる。

転換価格が一定である場合は、$g(\pi(\xi)(\cdot))$ が定数であるので、確率変数 ξ の値が (2) 式の右辺より与えられることとなる。しかし、転換価格が株価の履歴により変化する場合は (2) 式は ξ に対する非線形な方程式となる。株式保有者側は仮定（B-6）より (2) 式を満たす最大の ξ を選ぶこととなる。

(2) 式の最大解 ξ の存在を、次節の主結果が保証する。この最大解を用いて、時刻 0 における株価 $S(0)$ が $S(0) = E[X(T_1)^{-1}\xi]$ で与えられる。

この転換社債の発行が株式保有者にも転換社債保有者に対しても公正であるためには、

$$\frac{V_{00}}{L_0} = E[X(T_1)^{-1}\xi], \tag{3}$$

となる必要がある。V_{00}、L_0、V_0 を所与として、額面の調整により、(3) 式を満たせるかについては、明確な答えを得ていないが、次節の最後でこれについての部分的な解答を与える。

6. 主結果

W_k^n、$0 \leqq k < n \leqq N+1$ を

$$W_k^n = \{w\colon [T_k, T_n) \to [0,\infty);\, w \text{ は右連続で左極限が存在し、}$$
$$[T_{i-1}, T_i)\text{、} i = k+1, \ldots, n\text{、上で連続}\},$$

で定める。また形式的に $W_0^0 = \{0\}$ とおく。$w, w' \in W_k^n$ に対して $w(t) \leqq w'(t)$ がすべての $t \in [T_k, T_n)$ に対して成立する時 $w \leqq w'$ と表すことにする。

$0 \leqq k < n \leqq N$ の時に W_k^n 上の距離を

$$d(w, w') = \sup_{t\in[T_k,T_n)} |w(t) - w'(t)|, \quad w, w' \in W_k^n,$$

で定めると、W_k^n は 可分完備な距離空間となる。$\tilde{\mathcal{B}}_k^n$ は W_k^n のボレル加法族とする。

$w, w_m \in W_k^n$、$m = 1, 2, \ldots$ に対して $w_m \geqq w_{m+1}$、$m = 1, 2, \ldots$ であり、$w_m \to w$、$m \to \infty$ である時、$w_m \downarrow w$、$m \to \infty$ と表すことにする。

$W_0^{N+1} = W$ であることに注意されたい。

各 $n = 1, 2, \ldots, N$ において以下の条件をさらに仮定する。

（C-1）$w_1, w_2 \in W$ かつ $w_1 \leqq w_2$ であれば

$$g_n(w_1, \omega) \leqq g_n(w_2, \omega), \quad \omega \in \Omega.$$

（C-2）$w, w_m \in W$、$m = 1, 2, \ldots$ であり、かつ $w_m \downarrow w$、$m \to \infty$ であるならば

$$g_n(w_m, \omega) \to g_n(w, \omega), \quad m \to \infty, \omega \in \Omega.$$

（C-3）$\alpha_0 > 0$ が存在して

$$g_n(w, \omega) \geqq \alpha_0, \quad w \in W, \omega \in \Omega, n = 1, 2, \ldots, N.$$

（C-4）$a > 1$、$w \in W$、$\omega \in \Omega$ に対して

$$g_n(aw, \omega) \leqq a g_n(w, \omega).$$

例えば (1) 式で与えられる g は（C-1）〜（C-4）の仮定を満たしている。（C-1）〜（C-4）は一般に転換社債の転換価格では満たされている自然な仮定である。

転換が行われない場合に受け取る割り引かれた「クーポン」の価値は時刻 T_n においては

$$\tilde{c}_n = X(T_n)^{-1} c_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

となる。

$\varphi_n\colon W_0^{n-1} \times W_{n-1}^n \to W$、$n = 1, 2, \ldots, N$ を

$$\varphi_n(w, w')(t) = \begin{cases} w(t), & t \in [0, T_{n-1}), \\ w'(t), & t \in [T_{n-1}, T_n), \\ 0, & t \in [T_n, \infty), \end{cases}$$

により定義する。また、$\tilde{R}_n\colon W_{n-1}^n \times W_0^{n-1} \times \Omega \to (0, \infty)$ を

$$\tilde{R}_n(w', w, \omega) = R_n(X(\,\cdot\,, \omega)\varphi_n(w, w'), \omega) = \frac{q}{g_n(X(\,\cdot\,, \omega)\varphi_n(w, w'), \omega)},$$

により定義する。

$\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P)$ に対して

$$M^{\xi}(t) = E[\xi \vee 0 \mid \mathcal{F}_t], \quad t \in [T_{n-1}, T_n],$$

は連続マルチンゲールとなるので、確率 1 で $M^{\xi}(\,\cdot\,) \in W^n_{n-1}$ となる。よって、π_n: $L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P) \times \Omega \to W^n_{n-1}$ を

$$\pi_n(\xi)(\omega)(t) = M^{\xi}(t, \omega), \quad t \in [T_{n-1}, T_n),$$

により定める。

本稿の主結果は以下のものである（証明は補論を参照）。

定理 1 以下の条件を満たす関数 $\tilde{S}^{(0)}_n$: $(0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times W_0^{n-1}\times\Omega \to [0,\infty)$、$n = 1, 2, \ldots, N+1$ および $\tilde{S}^{(1)}_n$: $(0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times W_0^{n-1}\times\Omega \to [0,\infty)$、$n = 1, 2, \ldots, N$ が存在する。

（1）$\tilde{S}^{(1)}_n$、$n = 1, \ldots, N$ は $\mathcal{B}((0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty))\times\tilde{\mathcal{B}}_0^{n-1}\times\mathcal{F}_{T_n}$ 可測であり、$\tilde{S}^{(0)}_n$、$n = 1, \ldots, N$ は $\mathcal{B}((0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty))\times\tilde{\mathcal{B}}_0^{n-1}\times\mathcal{F}_{T_{n-1}}$ 可測である。

（2）$\tilde{S}^{(0)}_{N+1}(L, M, V, w, \omega) = V/L$ および

$$\tilde{S}^{(1)}_n(L, M, V, w, \omega) \leqq \frac{V}{L}, \quad n = 1, \ldots, N,$$

が すべての $L > 0$、$M, V \geqq 0$、$w \in W_0^{n-1}$、$\omega \in \Omega$ に対して成立する。

（3）$n = 1, \ldots, N$、および $L > 0$、$M, V \geqq 0$、$w \in W_0^{n-1}$ に対して

$$E[\tilde{S}^{(1)}_n(L, M, V, w) \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}}] = \tilde{S}^{(0)}_n(L, M, V, w) \quad \text{a.s.},$$

である。

（4）$n = 1, \ldots, N$、$i = 0, 1$、$0 < L \leqq L'$、$0 \leqq M \leqq M'$、$0 \leqq V' \leqq V$、$w, w' \in W_0^{n-1}$、$w' \leqq w$、$\omega \in \Omega$ に対して

$$\tilde{S}^{(i)}_n(L, M, V, w) \geqq \tilde{S}^{(i)}_n(L', M', V', w', \omega),$$

が成立する。

（5）$n = 1, \ldots, N$、$i = 0, 1$、$L > 0$、$M, V \geqq 0$、$w \in W_0^{n-1}$、$\omega \in \Omega$ に対して $L_m \uparrow L$、$M_m \uparrow M$、$V_m \downarrow V$、$w_m \downarrow w$、$m \to \infty$ ならば

$$\tilde{S}^{(i)}_n(L_m, M_m, V_m, w_m, \omega) \to \tilde{S}^{(i)}_n(L, M, V, w, \omega), \quad m \to \infty,$$

が成立する。

（6）$n = 1, \ldots, N$、$i = 0, 1$、$L > 0$、$M \geqq 0$、$V \geqq 0$、$w \in W_0^{n-1}$、$\omega \in \Omega$、$a > 1$ に対して

$$a\tilde{S}_n^{(0)}(aL, M, V, a^{-1}w) \geqq \tilde{S}_n^{(0)}(L, M, V, w),$$

が成立する。

(7) $n = 1, \dots, N$、$i = 0, 1$、$L > 0$、$M \geqq 0$、$V \geqq 0$、$w \in W_0^{n-1}$、$\omega \in \Omega$、$a > 0$ に対して

$$\tilde{S}_n^{(0)}(aL, aM, aV, w) = \tilde{S}_n^{(0)}(L, M, V, w),$$

が成立する。

(8) $n = 1, \dots, N$、$L > 0$、$M, V \geqq 0$、$w \in W_0^{n-1}$ に対して、確率 1 で

$$\begin{aligned}
&\tilde{S}_n^{(1)}(L, M, V, w)\\
&= \inf_{y \in [0,M]} \tilde{S}_{n+1}^{(0)}(L + y\tilde{R}_n(\pi_n(\tilde{S}_n^{(1)}(L, M, V, w)), w), M - y,\\
&\qquad\qquad (V - (M - y)\tilde{c}_n) \vee 0, \varphi(w, \pi_n(\tilde{S}_n^{(1)}(L, M, V, w)))),
\end{aligned}$$

が成立する。

(9) $n = 1, \dots, N$、$L > 0$、$M, V \geqq 0$、$w \in W_0^{n-1}$ および $\mathcal{F}_{T_n}$ 可測な非負値確率変数 ξ に対して

$$\begin{aligned}
\xi \leqq \inf_{y \in [0,M]} &\tilde{S}_{n+1}^{(0)}(L + y\tilde{R}_n(\pi_n(\xi), w), M - y,\\
&\qquad (V - (M - y)\tilde{c}_n) \vee 0, \varphi(w, \pi_n(\xi))),
\end{aligned}$$

が確率 1 で成立するならば、

$$\xi \leqq \tilde{S}_n^{(1)}(L, M, V, w) \quad \text{a.s.},$$

が成立する。

以下、定理の意味について説明する。

$X(T_n)\tilde{S}_n^{(1)}(L, M, V, w)$、$n = 1, 2, \dots, N$ は株式総数が L、残存転換社債枚数が M、資産価値が $X(T_n)V$、期間 $[0, T_{n-1})$ における株価の履歴が w である時に株式の保有者が提示する「時刻 T_n 直前における株価」を表す。この時、期間 $[T_{n-1}, T_n)$ における株価は仮定 (B-2) (ii) の「マルチンゲール条件」より $X(\cdot)\pi_n(\tilde{S}_n^{(1)}(L, M, V, w))$ で与えられる。

$X(T_{n-1})\tilde{S}_n^{(0)}(L, M, V, w)$、$n = 1, 2, \dots, N$ は株式総数が L、残存転換社債枚数が M、資産価値が $X(T_{n-1})V$、期間 $[0, T_{n-1})$ における株価の履歴が w である時に株式の保有者が提示する「時刻 T_{n-1} 直後における株価」を表す。

（2）の前半の条件は仮定（B-1）に対応している。(3）は仮定（B-2）(ii）の「マルチンゲール条件」の帰結を表す。

（2）の後半、(4)～(7）は関数の性質を表す技術的条件である。

（8）は仮定（B-4)、(B-5）に対応する条件である。すなわち、時刻 T_n 直後の株価を転換社債保有者が最小にしようとした結果と T_n 直前の株価が一致することを示している。

（9）は仮定（B-6）に対応する条件である。すなわち、(8）の条件を満たすものの中で最大の株価を株式保有者が選んでいることを示している。

転換社債の発行時における株式の 1 単位の価値はその時の資産価値が V、株式数が L、転換社債の発行枚数が M である時、$\tilde{S}_0^{(0)}(L, M, V, 0)$ となる（$W_0^0 = \{0\}$ に注意)。

定理 1 の $\tilde{S}_n^{(i)}$ は $R_n(w, \omega) = q/g_n(w, \omega)$、$n = 1, \ldots, N$ にのみ依存しているので $a > 0$ を 1 つ決め、額面 q を aq に変更し、転換価格 g_n を ag_n に変更しても $\tilde{S}_1^{(0)}(L, M, V, 0)$ は変わらないことに注意されたい。

$f: (0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ を

$$f(x, y) = \tilde{S}_1^{(0)}(x, y, 1, 0), \quad x > 0,\ y \geqq 0,$$

により定義する。この時、次のことが成立する（証明は補論を参照)。

定理 2

（1）$L > 0$、$M \geqq 0$、$V > 0$ に対して

$$\tilde{S}_1^{(0)}(L, M, V, 0) = f\left(\frac{L}{V}, MV\right).$$

（2）$0 < x \leqq x'$、$0 \leqq y \leqq y'$ ならば $f(x, y) \geqq f(x', y')$

（3）$x > 0$、$y \geqq 0$ とする。今、$x_n \to x$、$y_n \uparrow y$、$n \to \infty$ ならば $f(x_n, y_n) \to f(x, y)$

（4）$x > 0$ に対して

$$f(x, 0) = \frac{1}{x},$$

かつ

$$f(x, y) < \frac{1}{x}, \quad y > 0.$$

（5）$c_n = 0$、$n = 1, 2, \ldots, N$ ならば

$$f(x, y) \geqq \frac{1}{x + yq/\alpha_0}, \quad x > 0,\ y \geqq 0.$$

最初の設定を思い出すと、転換社債の発行前の資産価値が V_{00} 株式総数が L_0 であった。転換社債の発行枚数を M_0 発行直後の資産価値を V_0 とすると、転換社債の発行により株式価値が変化しないためには

$$\frac{V_{00}}{L_0} = \tilde{S}_1^0(L_0, M_0, V_0, 0) = f\left(\frac{L_0}{V_0}, \frac{M_0}{V_0}\right),$$

が成立することが必要である。

残念ながら $f(x, y)$ の y に関する連続性が一般には証明できないため、任意の $V_0 > V_{00}$ に対して上式を満たす M_0 が存在するかはよくわからない。

強制転換社債でクーポンがない場合、すなわち $c_n = 0$、$n = 1, \ldots, N$ の場合は、上式を満たす (V_0, M_0) の組が少なくとも連続的に存在することが示せる。

7. おわりに

本稿では転換価格修正条項付き転換社債の価格について論じ、われわれの設定のもとでは、株式利益の希薄化を考慮した場合でも転換社債の公正価格は存在することを示した。ただし、それはマルチンゲールに対するかなり複雑な非線形方程式を通して決まるので、一般には計算することは容易ではない。資産価値過程が単純なモデルを用いて転換社債の発行条件が株主の利益を損ねているかどうかを調べる場合にも、従来とは全く違う新しい数値計算手法が必要となる。そのような手法を求めることは今後の課題である。

補論 1．基本的補題

$T > 0$ とする。$G\colon L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ は以下の条件（G）を満たすとする。

（G） $\xi_1, \xi_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ に対して $\xi_1 \leqq \xi_2$ a.s. ならば $G(\xi_1) \leqq G(\xi_2)$ a.s.

この時以下のことが成立する。

補題 1　今、$\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ が存在して

$$\tilde{\xi}_0 \leqq \tilde{\xi}_1 \quad \text{a.s.},$$

$$\tilde{\xi}_0 \leqq G(\tilde{\xi}_0), \quad G(\tilde{\xi}_1) \leqq \tilde{\xi}_1 \quad \text{a.s.},$$

が成立すると仮定する。

この時、以下を満たす $\xi_{\max} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ が存在する。

（1）$G(\xi_{\max}) = \xi_{\max}$、$\tilde{\xi}_0 \leqq \xi_{\max} \leqq \tilde{\xi}_1$ a.s.

（2）$\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ が

$$G(\xi) \geqq \xi, \quad \xi \leqq \tilde{\xi}_1 \quad \text{a.s.},$$

を満たすならば

$$\xi_{\max} \geqq \xi \quad \text{a.s.}$$

証明　α を非可算な最小の順序数とする。今、可算な順序数 β に対して

$$\xi_\beta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P),$$

を以下のように帰納的に定める。

$$\xi_1 = \tilde{\xi}_1,$$

$\beta = \gamma + 1$ ならば

$$\xi_\beta = G(\xi_\gamma),$$

β が直前の順序数を持たないならば

$$\xi_\beta = \inf\{\xi_\gamma;\ \gamma < \beta\}.$$

この時、帰納的に $\gamma < \beta < \alpha$ ならば

$$\tilde{\xi}_0 \leqq \xi_\beta \leqq \xi_\gamma \leqq \tilde{\xi}_1 \quad \text{a.s.,} \tag{A-1}$$

となることがわかる。特に $\beta < \alpha$ に対して

$$\xi_\beta - G(\xi_\beta) \geqq 0,$$

かつ

$$\sum_{\gamma<\beta} E[\xi_\gamma - G(\xi_\gamma)] \leqq E[\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_0].$$

よって

$$\sum_{\gamma<\alpha} E[\xi_\gamma - G(\xi_\gamma)] < \infty.$$

しかし、この和は非負値の非可算和であるのであるであある $\gamma < \alpha$ が存在して $E[\xi_\gamma - G(\xi_\gamma)] = 0$ すなわち、$\xi_\gamma = G(\xi_\gamma)$ a.s. が成立する。β をそのような γ の最小元とし、$\xi_{\max} = \xi_\beta$ とおく。

ξ が（2）の条件を満たせば $\xi_\gamma \geqq \xi$、$\gamma < \alpha$ が帰納的にわかるので、$\xi_{\max} \geqq \xi$ を得る。■

補論 2. 証明の準備

$f\colon (0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times W_0^n\times\Omega\to[0,\infty)$、$n=0,1,2,\ldots,N$ が条件 $(\mathrm{MC})_n$ を満たすとは、以下の 5 条件（M-1）〜（M-5）を満たすことと定義する。

（M-1） f は $\mathcal{B}((0,\infty)\times[0,\infty)\times([0,\infty))\times\tilde{\mathcal{B}}_0^n\times\mathcal{F}_{T_n}$ 可測かつ

$$f(L,M,V,w,\omega)\leqq\frac{V}{L},\quad L>0,\ M,V\geqq 0,\ w\in W_0^n,\ \omega\in\Omega.$$

（M-2） $0<L\leqq L'$、$0\leqq M\leqq M'$、$0\leqq V'\leqq V$、$w,w'\in W_0^n$、$w'\leqq w$、$\omega\in\Omega$ ならば

$$f(L,M,V,w,\omega)\geqq f(L',M',V',w',\omega).$$

（M-3） $L>0$、$M,V\geqq 0$、$w\in W_0^n$、$\omega\in\Omega$ に対して $L_m\uparrow L$、$M_m\uparrow M$、$V_m\downarrow V$、$w_m\downarrow w$、$m\to\infty$ ならば

$$f(L_m,M_m,V_m,w_m,\omega)\downarrow f(L,M,V,w,\omega),\quad m\to\infty.$$

（M-4） $a>1$、$L>0$、$M,V\geqq 0$、$\omega\in\Omega$ に対して

$$af(aL,M,V,a^{-1}w,\omega)\geqq f(L,M,V,w,\omega).$$

（M-5） $a>0$、$L>0$、$M,V\geqq 0$、$\omega\in\Omega$ に対して

$$f(aL,aM,aV,w,\omega)=f(L,M,V,w,\omega).$$

本節では次の補題を証明する。

補題 2 $n=1,\ldots,N$、とし、$f\colon(0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times W_0^n\times\Omega\to[0,\infty)$ は条件 $(\mathrm{MC})_n$ を満たすものとする。この時、以下の条件を満たす $\tilde{f}^{(0)}\colon(0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times W_0^{n-1}\times\Omega\to[0,\infty)$、$\tilde{f}^{(1)}\colon(0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times W_0^n\times\Omega\to[0,\infty)$ が存在する。

（1） $\tilde{f}^{(0)}$ は条件 $(\mathrm{MC})_{n-1}$ を、$\tilde{f}^{(1)}$ は条件 $(\mathrm{MC})_n$ を満たす。
（2） $L>0$、$M,V\geqq 0$、$w\in W_0^{n-1}$ に対して

$$E[\tilde{f}^{(1)}(L,M,V,w)\mid\mathcal{F}_{T_{n-1}}]=\tilde{f}_n^{(0)}(L,M,V,w)\quad\text{a.s.}$$

（3） $L > 0$、$M, V \geqq 0$、$w \in W_0^{n-1}$ に対して、確率 1 で

$$\begin{aligned}&\tilde{f}^{(1)}(L, M, V, w)\\&= \inf_{y\in[0,M]} f(L + y\tilde{R}_n(\pi_n(\tilde{f}^{(1)}(L, M, V, w)), w), M - y,\\&\qquad\qquad (V - (M - y)\tilde{c}_n) \vee 0, \varphi(w, \pi_n(\tilde{f}^{(1)}(L, M, V, w)))),\end{aligned}$$

が成立する。

（4） $L > 0$、$M, V \geqq 0$、$w \in W_0^{n-1}$ および $\mathcal{F}_{T_n}$ 可測な非負値確率変数 ξ に対して

$$\begin{aligned}\xi \leqq \inf_{y\in[0,M]} & f(L + y\tilde{R}_n(\pi_n(\xi), w), M - y,\\& (V - (M - y)\tilde{c}_n) \vee 0, \varphi(w, \pi_n(\xi))),\end{aligned}$$

が確率 1 で成立するならば、

$$\xi \leqq \tilde{f}^{(1)}(L, M, V, w) \quad \text{a.s.}$$

この補題を示すため、$n = 1, 2, \ldots, N$、および条件 $(\mathrm{MC})_n$ を満たす $f: (0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times W_0^n \times \Omega \to [0, \infty)$ を任意にとり、以下それを固定して考えていく。

命題 3　$x > 0$、$y \geqq 0$、$0 < L$、$0 \leqq M$、$0 \leqq V$、$w \in W_0^n$、$\omega \in \Omega$ とする。$y_m \to y$、$L_m \to L$、$M_m \to M$、$V_m \to V$、$w_m \to w$、$m \to \infty$ ならば

$$\begin{aligned}&\limsup_{m\to\infty} f(L_m + xy_m, (M_m - y_m) \vee 0, (V_m - (M - m_m)y_m\tilde{c}_n) \vee 0, w_m, \omega)\\&\leqq f(L + xy, (M - y) \vee 0, (V - (M - y)\tilde{c}_n) \vee 0, w, \omega).\end{aligned}$$

証明　今、

$$\begin{aligned}L'_m &= L + xy - \left(\frac{L}{2} \wedge \sup_{k\geqq m}(|L - L_k| + x|y - y_k|)\right),\\M'_m &= \left((M - y) \vee 0 - \sup_{k\geqq m}(|M - M_k| + |y - y_k|)\right) \vee 0,\\V'_m &= \left(V - (M - y)\tilde{c}_n + \sup_{k\geqq m}|y - y_k|\tilde{c}_n\right) \vee 0,\\w'_m(t) &= w_m(t) + \sup_{k\geqq m} \sup_{s\in[0,T_n)} |w(s) - w_m(s)|,\end{aligned}$$

とおくと、

$$L'_m \uparrow L + xy, \quad M'_m \uparrow (M-y) \vee 0, \quad V'_m \downarrow (V - y\tilde{c}_n) \vee 0, \quad w'_m \downarrow w,$$

であるので、条件（M-3）より

$$f(L'_m, M'_m, V'_m, w'_m, \omega) \to f(L + xy, (M-y) \vee 0, (V - y\tilde{c}_n) \vee 0, \omega),$$

を得る。また、十分大きな m に対して

$$L_m + xy_m \geqq L'_m, \quad (M_m - y_m) \vee 0 \geqq M'_m,$$
$$V'_m \geqq (V_m - y_m\tilde{c}_n) \vee 0, \quad w'_m \geqq w_m,$$

であるので条件（M-2）より

$$f(L_m, M_m, V_m, w_m, \omega) \geqq f(L'_m, M'_m, V'_m, w'_m, \omega),$$

がわかり主張を得る。 ■

$$F(x, L, M, V, w, \omega)$$
$$= \inf\{f(L + xy, M - y, (V - (M-y)\tilde{c}_n(\omega)) \vee 0, w, \omega); y \in [0, M]\}, \tag{A-2}$$

とおく。

命題 4

（1）$x \leqq x'$、$L \leqq L'$、$M \leqq M'$、$V' \leqq V$、$w' \leqq w$ ならば

$$F(x, L, M, V, w, \omega) \geqq F(x', L', M', V', w', \omega),$$

また、

$$F(x, L, M, V, w, \omega) \leqq \frac{V}{L}, \quad L > 0, M, V \geqq 0, w \in W_0^n, \omega \in \Omega.$$

（2）$x, L > 0$、$M, V \geqq 0$、$w \in W_0^n$、$\omega \in \Omega$ とする。$x_m \uparrow x$、$L_m \uparrow L$、$M_m \uparrow M$、$V_m \downarrow V$、$w_m \downarrow w$、$m \to \infty$ ならば

$$F(x_m, L_m, M_m, V_m, w_m, \omega) \downarrow F(x, L, M, V, w, \omega), \quad m \to \infty.$$

（3）$a > 1$、$x, L > 0$、$M, V \geqq 0$、$\omega \in \Omega$ とする。この時、

$$aF(ax, aL, M, V, a^{-1}w, \omega) \geqq F(x, L, M, V, w, \omega).$$

（4）$a > 0$、$x, L > 0$、$M, V \geqq 0$、$\omega \in \Omega$ とする。この時、

$$F(x, aL, aM, aV, w, \omega) = F(x, L, M, V, w, \omega).$$

証明　（1）は明らか。（2）を示す。

$$\limsup_{m\to\infty} F(x_m, L_m, M_m, V_m, w_m, \omega) \leqq F(x, L, M, V, w, \omega),$$

を示せばよい。各 $k \geqq 1$ に対して、$y_k \in [0, M]$ で、

$$\begin{aligned}&f(L + xy_k, M - y_k, (V - (M - y_k)\tilde{c}_n(\omega)) \vee 0, w, \omega)\\ &\leqq F(x, L, M, V, w, \omega) + \frac{1}{k},\end{aligned}$$

となるものが存在する。$z_m = (y_k - (M - M_m)) \vee 0$、$m = 1, 2, \ldots$ とおくと $z_m \in [0, M_m]$ で $z_m \to y_k$、$m \to \infty$ となる。この時、命題 3 より

$$\begin{aligned}&\limsup_{m\to\infty} F(x_m, L_m, M_m, V_m, \omega)\\ &\geqq \limsup_{m\to\infty} f(L_m + x_m z_m, M_m - z_m, (V_m - (M_m - z_m)\tilde{c}_n(\omega)) \vee 0, \omega)\\ &\geqq f(L + xy_k, M - y_k, (V - (M - y_k)\tilde{c}_n(\omega)) \vee 0, \omega)\\ &\geqq F(x, L, M, V, \omega) + \frac{1}{k},\end{aligned}$$

となり、k は任意であるので（2）を得る。

（3）は (MC)$_n$ の条件（M-4）および F の定義より明らか。（4）も (MC)$_n$ の条件（M-5）および F の定義より明らか。■

Ψ_n: $L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P) \times W_0^{n-1} \to L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P)$ を

$$\Psi_n(\xi, w)(\omega) = \tilde{R}_n(\pi_n(\xi)(\omega), w, \omega) = \frac{q}{\tilde{g}_n(\pi_n(\xi)(\omega), w, \omega)},$$

$\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P)$、$w \in W_0^{n-1}$ で定義すると、

$$\Psi_n(\xi, w) \in \left(0, \frac{q}{\alpha_0}\right] \text{ a.s.} \quad \xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P),\ w \in W_0^{n-1}, \tag{A-3}$$

となる。

命題５

（1）$\xi_1, \xi_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P)$ が $\xi_1 \leqq \xi_2$ a.s. ならば

$$\pi_n(\xi_1) \leqq \pi_n(\xi_2), \quad \Psi_n(\xi_1, w) \geqq \Psi_n(\xi_2, w) \quad \text{a.s.},$$

がすべての $w \in W_0^{n-1}$ に対して成立する。

（2）$a > 1$、$\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P)$、$w \in W_0^{n-1}$ に対して

$$\pi(a\xi, aw) = a\pi(\xi, w), \quad a\Psi_n(a\xi, aw) \geqq \Psi_n(\xi, w) \quad \text{a.s.}$$

（3）$\xi, \xi_m \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P)$、$w, w_m \in W_0^{n-1}$、$m = 1, 2, \ldots$ であり $\xi_m \downarrow \xi$、a.s.、$w_m \downarrow w$、$m \to \infty$ ならば

$$\pi(\xi_m) \downarrow \pi(\xi) \; in \; W_{n-1}^n, \quad \Psi_n(\xi_m, w_m) \uparrow \Psi_n(\xi, w), \quad \text{a.s.} \quad m \to \infty,$$

が成立する。

証明　（1）は

$$E[\xi_1 \vee 0 \mid \mathcal{F}_t] \leqq E[\xi_2 \vee 0 \mid \mathcal{F}_t] \quad \text{a.s.} \quad t \geqq 0,$$

となるので仮定（A-2）よりわかる。（2）も仮定（A-4）より

$$\tilde{g}_n(a\pi_n(\xi)(\omega), aw, \omega) \leqq a\tilde{g}_n(\pi_n(\xi)(\omega), w, \omega),$$

であることに注意すればわかる。

（3）を示す。

$$M(t) = E[\xi \vee 0 \mid \mathcal{F}_t], \quad M_m(t) = E[\xi_m \vee 0 \mid \mathcal{F}_t], \quad m = 1, 2, \ldots,$$

とおくと、

$$M(\cdot) \in C([0, \infty); \mathbb{R}) \text{ a.s.} \quad m = 1, 2, \ldots,$$

であり、かつ

$$P(M_m(t) \geqq M_{m+1}(t) \geqq M(t), t \in [0, \infty)) = 1, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

が成立する。また

$$E\left[\sup_{k \geqq m} \sup_{t\in[0,T_n]} |M(t) - M_k(t)|^2\right] = E\left[\sup_{t\in[0,T_n]} |M(t) - M_m(t)|^2\right]$$
$$\leqq 4E[|M(T_n) - M_m(T_n)|^2]$$
$$\leqq 4E[|\xi - \xi_m|^2] \to 0, \quad m \to \infty,$$

より確率 1 で $M_m(\cdot) \downarrow M(\cdot)$ in W^n_{n-1} となることがわかる。よって、

$$\pi_n(\xi_m) \downarrow \pi_n(\xi) \quad \text{a.s.} \quad m \to \infty.$$

仮定（A-3）より $\tilde{g}_n(\pi(\xi_m)(\omega), w_m, \omega) \downarrow \tilde{g}_n(\pi(\xi)(\omega), w, \omega)$ a.s. $m \to \infty$ となる。これより主張がわかる。■

今、

$$G(\xi; L, M, V, w)(\omega) = F(\Psi_n(\xi, w)(\omega), L, M, V, \varphi_n(w, \pi_n(\xi)(\omega)), \omega), \tag{A-4}$$

$\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P)$、$L > 0$、$M, V \geqq 0$ により定めると

$$0 \leqq G(\xi; L, M, V, w)(\omega) \leqq \frac{V}{L}, \tag{A-5}$$

より

$$E[G(\xi; L, M, V, w)^2] < \infty.$$

よって (A-4) 式により写像 $G: L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P) \times (0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times W_0^{n-1} \to L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P)$ が定義される。

各 $L > 0$、$M, V \geqq 0$、$w \in W_0^n$ に対して $G(\cdot\,; L, M, V, w): L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P)$ は条件（G）を満たす。また、$\tilde{\xi}_0 = 0$、$\tilde{\xi}_1 = V/L$、とおくと

$$\tilde{\xi}_0 \leqq G(\tilde{\xi}_0; L, M, V, w) \leqq G(\xi; L, M, V, w) \leqq G(\tilde{\xi}_1; L, M, V, w) \leqq \tilde{\xi}_1,$$

がすべての $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P)$、$L > 0$、$M, V \geqq 0$ に対して成立する。よって、補題 1 より $\xi_{\max}(L, M, V) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P)$ が各 $L > 0$、$M, V \geqq 0$ に対して存在し、以下が成立する。

（L-1）$\xi_{\max}(L, M, V, w) = G(\xi_{\max}(L, M, V); L, M, V, w).$

（L-2）$\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P)$ が

$$G(\xi; L, M, V, w) \geqq \xi,$$

を満たすならば

$$\xi_{\max}(L, M, V, w) \geqq \xi \quad \text{a.s.},$$

が成立する。

命題 6

（1）$L \leqq L'$、$M \leqq M'$、$V' \leqq V$、$w \leqq w'$ ならば

$$\xi_{\max}(L, M, V, w) \geqq \xi_{\max}(L', M', V', w') \quad \text{a.s.},$$

また、

$$\xi_{\max}(L, M, V, w) \leqq \frac{V}{L} \quad \text{a.s.} \quad L > 0,\ M, V \geqq 0,\ w \in W_0^n,\ \omega \in \Omega.$$

（2）$L > 0$、$M, V \geqq 0$、$w \in W_0^n$ とする。$L_m \uparrow L$、$M_m \uparrow M$、$V_m \downarrow V$、$w_m \downarrow w$、$m \to \infty$ ならば

$$\xi_{\max}(L_m, M_m, V_m, w_m) \downarrow \xi_{\max}(L, M, V, w) \quad \text{a.s.} \quad m \to \infty.$$

（3）$a > 1$、$L > 0$、$M, V \geqq 0$、$w \in W_0^{n-1}$ とする。この時、

$$a\xi_{\max}(aL, M, V, a^{-1}w) \geqq \xi_{\max}(L, M, V, w) \quad \text{a.s.}$$

（4）$a > 0$、$L > 0$、$M, V \geqq 0$、$w \in W_0^{n-1}$ とする。この時、

$$\xi_{\max}(aL, aM, aV, w) = \xi_{\max}(L, M, V, w) \quad \text{a.s.}$$

証明　命題 4（1）、命題 5（1）より、$L \leqq L'$、$M \leqq M'$、$V' \leqq V$、$w \leqq w'$ ならば

$$G(\xi; L, M, V, w) \geqq G(\xi; L', M', V', w') \quad \text{a.s.} \quad \xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, P),$$

に注意。この時、

$$\begin{aligned}\xi_{\max}(L', M', V', w) &= G(\xi_{\max}(L', M', V', w'); L', M', V', w') \\ &\leqq G(\xi_{\max}(L', M', V', w); L, M, V, w) \quad \text{a.s.},\end{aligned}$$

より、(1) の前半がわかる。後半は明らか。
(2) を示す。$m = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\begin{aligned}\xi_{\max}(L_m, M_m, V_m, w_m) &\geqq \xi_{\max}(L_{m+1}, M_{m+1}, V_{m+1}, w_{m+1})\\ &\geqq \xi_{\max}(L, M, V, w) \quad \text{a.s.,}\end{aligned} \tag{A-6}$$

であるので、確率 1 で

$$\xi_0 = \lim_{m\to\infty} \xi_{\max}(L_m, M_m, V_m, w_m),$$

が存在する。さらに、命題 4 (2)、命題 5 (3) より

$$\xi_0 = \lim_{m\to\infty} G(\xi_{\max}(L_m, M_m, V_m, w_m); L_m, M_m, w_m) = G(\xi_0; L, M, w) \quad \text{a.s.}$$

よって、

$$\xi_0 \leqq \xi_{\max}(L, M, V, w) \quad \text{a.s.}$$

これと (A-6) 式より、主張を得る。
(3) を示す。命題 4 (3)、命題 5 (2) より

$$\begin{aligned}G(a^{-1}\xi; aL, M, V, a^{-1}w) &\geqq F(a\Psi_n(\xi, w), aL, M, V, a^{-1}\varphi_n(\pi_n(\xi), w))\\ &\geqq a^{-1}F(\Psi_n(\xi, w), L, M, V, \varphi_n(\pi_n(\xi), w))\\ &\geqq a^{-1}G(\xi; L, M, V, w),\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}a^{-1}\xi_{\max}(L, M, V, w) &= a^{-1}G(\xi_{\max}(L, M, V, w); L, M, V, w)\\ &\leqq aG(a^{-1}\xi_{\max}(L, M, V, w); aL, M, V, a^{-1}w) \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

これより、主張を得る。
(4) を示す。$a > 0$ とする。命題 4 (4)、命題 5 (2) より

$$\begin{aligned}G(\xi; aL, aM, aV, w) &= F(\Psi_n(\xi, w), aL, aM, aV, \varphi_n(\pi_n(\xi), w))\\ &= F(\Psi_n(\xi, w), L, M, V, \varphi_n(\pi_n(\xi), w))\\ &= G(\xi; L, M, V, w),\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\xi_{\max}(L,M,V,w)=G(\xi_{\max}(L,M,V,w);aL,aM,aV,w)\quad \text{a.s.},$$
$$\xi_{\max}(L,M,V,w)\leqq \xi_{\max}(aL,aM,aV,w)\quad \text{a.s.},$$

を得る。a を a^{-1} で置き換えれば反対側の不等式も得る。これより、主張を得る。

■

W^n_{n-1} は可分距離空間であるので、稠密な可算部分集合 A が存在する。それを 1 つ固定する。$w_1,\dots,w_n\in W^n_{n-1}$ に対して $\min\{w_1,\dots,w_n\}\in W^n_{n-1}$ を

$$\min\{w_1,\dots,w_n\}(t)=\min\{w_1(t),\dots,w_n(t)\},$$

により定義する。W^n_{n-1} の部分集合集合 A' を

$$A'=\{\min\{r_1w_1,\dots,r_nw_n\};n\geqq 1,\\ w_1,\dots,w_n\in A,\ r_1,\dots,r_n\in\mathbb{Q}\cap[0,\infty)\},$$

で定義すると、A' も W^n_{n-1} の稠密な可算部分集合で $w,w'\in A'$、$r\in\mathbb{Q}$ ならば $\min\{w,w'\}$、$aw\in A'$ となる。

$w\in W^n_{n-1}$ に対して

$$A(w)=\{w'\in A';\text{ある }\varepsilon>0\text{ が存在して }w(t)+\varepsilon\leqq w'(t),\ t\in[n-1,n)\},$$

とおく。

次の命題は明らか。

命題 7

（1）$w,w'\in W^n_{n-1}$、$w\leqq w'$ ならば $A(w)\subset A(w')$。
（2）$w\in W^n_{n-1}$ とする。任意の $\varepsilon>0$ に対して $w(t)+\varepsilon\leqq w'(t)$、$t\in[n-1,n)$ となる $w'\in A(w)$ が存在する。また、$w_1,w_2\in A(w)$ ならば $\min\{w_1,w_2\}\in A(w)$。
（3）$w\in W^n_{n-1}$、$a\in\mathbb{Q}\cap(0,\infty)$ ならば $A(aw)=aA(w)$。

$Z\colon(0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times W^n_0\to W^n_{n-1}$ を

$$Z(L,M,V,w)=\pi_n(\xi_{\max}(L,M,V,w)),$$

で定める。$Z(L,M,V,w)(t)$、$t\in[T_{n-1},T_n)$ はマルチンゲールとなる。

この時、命題 6 より次がわかる。

命題８　$P(\Omega_0) = 1$ を満たす $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ が存在して $\omega \in \Omega_0$ に対して以下が成立する。

（1）$L \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$、$M, V \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$、$w \in A'$ ならば

$$Z(L, M, V, w)(\omega)(T_n-) = \xi_{\max}(L, M, V, w)(\omega),$$
$$F\left(\frac{q}{\tilde{g}_n(Z(L, M, V, w)(\omega), w, \omega)}, L, M, V, \varphi_n(Z(L, M, V, w)(\omega), w), \omega\right)$$
$$= \xi_{\min}(L, M, V, w)(\omega),$$
$$Z(\xi_{\min}(L, M, V, w), \omega) \leqq \frac{V}{L},$$
$$Z(aL, aM, aV, w) = Z(L, M, V, w), \quad a \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty),$$
$$aZ(aL, M, V, a^{-1}w) \geqq Z(L, M, V, w), \quad a \in \mathbb{Q} \cap (1, \infty).$$

（2）$L, L' \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$、$M, M', V, V' \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$、$w, w' \in A'$ が $L \geqq L'$、$M \geqq M'$、$V \leqq V'$、$w \leqq w'$ を満たせば

$$\eta(L, M, V, w)(\omega) \leqq \eta(L', M', V', w')(\omega).$$

（3）$L, L_m \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$、$M, M_m, V, V_m \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$、$w, w_m \in A'$、$m = 1, 2, \ldots$ であり、$L_m \uparrow L$、$M_m \uparrow M$、$V_m \downarrow V$、$w_m \downarrow w$、$m \to \infty$ ならば

$$Z(L_m, M_m, V_m, w_m)(\omega) \downarrow Z(L, M, V, w)(\omega) \text{ in } W^n_{n-1}, \quad m \to \infty.$$

今、$\tilde{f}^{(i)}: (0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times W_0^{n-1} \times \Omega \to [0, \infty)$、$i = 0, 1$ を $\omega \in \Omega_0$ に対しては

$$\tilde{f}^{(1)}(L, M, V, w)(\omega)$$
$$= \inf\{Z(L', M', V', w)(\omega)(T_n-); L' \leqq L,\ M' \leqq M,\ V' \geqq V,\ w' \in A(w),$$
$$L', M', V' \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)\},$$
$$\tilde{f}^{(0)}(L, M, V, w)(\omega)$$
$$= \inf\{Z(L', M', V', w)(\omega)(T_{n-1}); L' \leqq L,\ M' \leqq M,\ V' \geqq V,\ w' \in A(w),$$
$$L', M', V' \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)\},$$

$\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$ に対しては

$$\tilde{f}^{(1)}(L, M, V, w)(\omega) = 0,$$
$$\tilde{f}^{(0)}(L, M, V, w)(\omega) = 0,$$

で定める。

これが、補題 2 を満たすことを以下で証明する。

（2）、（3）は $\tilde{f}$ の定義と命題 8 より明らか。（1）についても $\tilde{f}^{(1)}$ の可測性は明らか。また、$\tilde{f}^{(0)}$ が $(\mathrm{MC})_{n-1}$ の条件（M-1）、（M-2）、（M-3）を満たすことは、定義と命題 8 よりほぼ明らか。条件（M-4）、（M-5）を示す。

$a > 0$、$L > 0$、$M, V \geqq 0$、$w \in W_0^{n-1}$ とし, $a_m, L_m, M_m, V_m \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$、$w_m \in A(w)$、$m = 1, 2, \ldots$ を $a_m \uparrow a$、$L_m \uparrow L$、$M_m \uparrow M$、$V_m \downarrow V$、$w_m \downarrow w$、$m \to \infty$ を満たすものとする。$a > 1$ の時、

$$
\begin{aligned}
a\tilde{f}(aL, M, V, a^{-1}w) &= \lim_{m\to\infty} a_m \tilde{f}(a_m L_m, M_m, V_m, a_m^{-1} w_m) \\
&\geqq \lim_{m\to\infty} \tilde{f}(L_m, M_m, V_m, w_m) = \tilde{f}(L, M, V, w),
\end{aligned}
$$

これより条件（M-4）がわかる。

$a > 0$ の時、$r_k \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ を $r_k \downarrow a$、$k \to \infty$ となるようにとる。この時

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(aL, aM, r_k V, w) &= \lim_{m\to\infty} \tilde{f}(a_m L_m, a_m M_m, r_k V_m, w_m) \\
&= \lim_{k\to\infty} \tilde{f}\left(L_m, M_m, \frac{r_k}{a_m} V_m, w_m\right) \\
&= \tilde{f}\left(L, M, \frac{r_k}{a} V, w\right).
\end{aligned}
$$

$k \to \infty$ として条件（M-5）がわかる。

以上により補題 2 が証明された。

補論 3. 定理の証明

（1）定理 1 の証明

$f = \tilde{S}^{(0)}_{N+1} = V/L$ とおく。これは条件 $(\mathrm{MC})_{N+1}$ を満たす。以下、帰納的に条件 $(\mathrm{MC})_{n+1}$ を満たす $\tilde{S}^{(0)}_{n+1}$、$n = N, N-1, \ldots, 1$ が与えられた時、補題 2 を $f = \tilde{S}^{(0)}_{n+1}$ に対して適用し、これに対する補題 2 の $\tilde{f}^{(0)}$、$\tilde{f}^{(1)}$ をそれぞれ $\tilde{S}^{(0)}_n$、$\tilde{S}^{(1)}_n$ とおく。この時、$\tilde{S}^{(0)}_n$ は 条件 $(\mathrm{MC})_n$ を満たす。よってこの操作は継続できる。

これにより得られた $\tilde{S}^{(0)}_n$、$n = 1, \ldots, N+1$、$\tilde{S}^{(1)}_n$、$n = 1, \ldots, N$ が定理 1 を満たすことは明らか。

よって、定理 1 は証明された。

（2）定理 2 の証明

（1）は定理 1（7）より明らか。（2）は定理 1（4）より明らか。

（3）を示す。$x > 0$、$y \geqq 0$、$x_n \to x$、$y_n \uparrow y$、$n \to \infty$ とする。この時、$z_n = \inf_{k \geqq n} x_k$、$u_n = \sup_{k \geqq n} x_k$、$n = 1, 2, \ldots$ とおくと、$z_n \uparrow x$ であるので 定理 1（5）より

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n, y_n) \leqq \varlimsup_{n\to\infty} f(z_n, y_n) = f(x, y).$$

一方、

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} f(x_n, y_n) &\geqq \varliminf_{n\to\infty} \frac{u_n}{x} f\left(\frac{u_n}{x} x, y_n\right)\\ &\geqq \varliminf_{n\to\infty} f(x, y_n) = f(x, y).\end{aligned}$$

これらより（3）がわかる。

定理 1（2）、（3）、（8）より帰納的に

$$\tilde{S}^{(0)}_n(L, 0, V) = \tilde{S}^{(1)}_n(L, 0, V) = \frac{V}{L}, \quad n = N, N-1, \ldots, 1,$$

となることがわかる。これより（4）の前半を得る。定理 1（2）、（3）、（4）、（8）より

$$\begin{aligned}&\tilde{S}^{(1)}_1(L, M, 1)\\ &\leqq \tilde{S}^{(1)}_1(L + M\tilde{R}_n(\pi_n(\tilde{S}^{(1)}_n(L, M, V, w)), w), 0, 1, \varphi(w, \pi_n(\xi)))\\ &\leqq \frac{1}{L + M\tilde{R}_n(\pi_n(\tilde{S}^{(1)}_n(L, M, V, w)), w)} < \frac{1}{L}.\end{aligned}$$

よって定理 1（3）より（4）の後半を得る。
$c_n=0$、$n=1,2,\ldots,N$ の時、帰納的に

$$\tilde{S}_n^{(0)}(L,M,V)\geqq\frac{V}{L+Mq/\alpha_0},\quad \tilde{S}_n^{(1)}(L,0,V)\geqq\frac{V}{L+Mq/\alpha_0},$$
$$n=1,\ldots,N,$$

となることがわかる。実際、$\tilde{S}_{n+1}^{(0)}(L,M,V)\geqq V/(L+Mq/\alpha_0)$ ならば定理 1（8）より

$$\begin{aligned}
&\tilde{S}_n^{(1)}(L,M,V,w)\\
&=\inf_{y\in[0,M]}\tilde{S}_{n+1}^{(0)}(L+y\tilde{R}_n(\pi_n(\tilde{S}_n^{(1)}(L,M,V,w)),w),M-y,\\
&\qquad\qquad V,\varphi(w,\pi_n(\tilde{S}_n^{(1)}(L,M,V,w))))\\
&\geqq\inf_{y\in[0,M]}\frac{V}{(L+y\tilde{R}_n(\pi_n(\tilde{S}_n^{(1)}(L,M,V,w)),w)q/\alpha_0)+(M-y)q/\alpha_0}\\
&\geqq\inf_{y\in[0,M]}\frac{V}{(L+yq/\alpha_0)+(M-y)q/\alpha_0}=\frac{V}{L+Mq/\alpha_0}.
\end{aligned}$$

よって定理 1（3）より

$$\tilde{S}_n^{(0)}(L,M,V)\geqq\frac{V}{L+Mq/\alpha_0},$$

を得る。
以上により定理 2 が証明された。

参考文献

山田　健、「強制転換条項付き優先株式の 2 項ツリー法によるプライシング」、『金融研究』第 25 巻別冊第 2 号、日本銀行金融研究所、2006 年、189〜213 頁

Ayache, E., P. R. Forsyth, and K. R. Vetzal, "The Valuation of Convertible Bonds with Credit Risk," *Journal of Derivatives*, 11, 2003, pp. 9–29.

Brennan, M., and E. Schwartz, "Analyzing Convertible Bonds," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, 1980, pp. 907–929.

Ingersol, Jr., J.E., "A Contingent-Claim Valuations of Convertible Securities," *Journal of Financial Economics*, 4, 1977, pp. 289–321.

Merton, R. C., "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 29, 1974, pp. 449–470.

Takahashi, A., T. Kobayashi, and N. Nakagawa, "Pricing Convertible Bonds with Default Risk: A Duffie-Singleton Approach," *Journal of Fixed Income*, 11, 2001, pp. 20–29.