

近年のアフィン型 イールド・カーブ・モデルの展開： マクロ・ファイナンスへの応用、 ジャンプや信用リスクの取込み

くればやしとかあき
紅林孝彰

要旨

金利の期間構造（イールド・カーブ）の変動を表現するモデルの1つのクラスとして、アフィン・モデル（*affine model*）がある。このクラスのモデルは、無裁定条件のもとで、任意の満期の割引債のイールドを状態変数ベクトルの線形関数で表現することができ、債券や金利派生商品の価格付けが比較的容易となるため、これまでに数多くの研究が行われてきた。特に近年では、状態変数間の制約を緩めることで、モデルの表現力を高める研究や、状態変数にマクロ経済変数を取り込むことで、経済成長率やインフレ率などと金利の期間構造の関係の解明を試みる研究が注目されている。そこで、本稿では、これまでに行われてきたマルチ・ファクター・アフィン・モデルの研究の流れを整理するとともに、近年注目を集めつつある、マクロ経済変数を状態変数に取り入れたアフィン・モデルを紹介する。

キーワード：金利期間構造、アフィン・モデル、リスクの市場価格、ジャンプ拡散過程、信用リスク、マクロ・ファイナンス

本稿を作成するに当たっては、森田洋教授（横浜国立大学大学院国際社会科学研究所）に有益なコメントを頂いた。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

紅林孝彰 日本銀行金融研究所（現 総務人事局、E-mail: takaaki@bu.edu）

1. はじめに

アフィン・モデル (affine model) は、瞬間スポット・レートの確率過程を表現するモデルの1つであり、無裁定条件に加えて、パラメータに一定の制約を課すことで、任意の時刻における、任意の満期の割引債のイールドが、「状態変数ベクトルの線形関数」で表現できるものである。アフィン・モデルでは、債券や金利派生商品の価格付けが比較的容易にできるため、これまでに数多くの研究がなされてきた。よく知られたアフィン・モデルの例として、Vasicek [1977]、Cox, Ingersoll, and Ross [1985] (以降、CIR)、Hull and White [1990] などがある。これらのモデルは、イールド・カーブ・モデル発展の初期段階での代表的モデルであるが、いずれも1ファクターのシンプルなアフィン・モデルであり、それゆえ長短金利のツイストやイールド・カーブの歪みを表現することができないという限界があった。そこで、複数の状態変数を含むアフィン・モデル (以下、マルチ・ファクター・アフィン・モデル) が提案され、これを用いて金利の期間構造の表現力を高める研究が行われてきた。しかし、従来のファイナンス理論における研究では、主に金融商品の価格付けやイールド・カーブそのものの性質を説明することを目的として、金利の期間構造の変動の分析が行われており、経済学的な解釈には重点が置かれてこなかった。これに対して、近年では、状態変数にマクロ経済変数を取り込むことで、経済成長率やインフレ率と金利の期間構造の関係の解明を試みた、いわゆる「マクロ・ファイナンス」と呼ばれる分野の研究が注目されている。

本稿では、これまでに行われてきたマルチ・ファクター・アフィン・モデルの研究の流れを整理するとともに、アフィン・モデルを用いたマクロ・ファイナンスの研究内容を紹介する。なお、本稿では、読みやすさの観点から、各種の変数や数式の表記を統一している。そのため、原論文の表記とは必ずしも一致していない。

以下の構成は、次のとおりである。2節では、Duffie and Kan [1996] に沿って、無裁定のマルチ・ファクターの期間構造モデルが、アフィン・モデルになるための必要十分条件を示す。3節では、リスクの市場価格のモデル化方法により、コンプリートリー・アフィン・モデルとエッセンシャルリー・アフィン・モデルという2つの類型に整理できることを示す。また、それぞれのモデルの表現力の相違を纏めている。4節では、アフィン・モデルにジャンプ項を加えたアフィン・ジャンプ拡散モデルを説明する。モデルは数式が複雑となるため、補論で詳細を示した。5節では、信用リスクを含む金利を原資産価格とした金利派生商品の評価への応用例を紹介する。6節で、アフィン・モデルを用いたマクロ・ファイナンスの研究を紹介し、最後に7節で結語を述べる。

2. アフィン・モデル

本節では、Duffie and Kan [1996] に従って、マルチ・ファクター・アフィン・モデルを一般的な形で定義する。

リスク中立確率測度 Q のもとで、 N 次元状態変数ベクトル \mathbf{X}_t が、

$$d\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t) dt + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t) d\tilde{\mathbf{W}}_t, \quad (1)$$

というマルコフ過程に従っているとす。ただし、 $\boldsymbol{\mu}$ は N 次元ベクトル、 $\boldsymbol{\sigma}$ は $N \times N$ 行列であり、 $\tilde{\mathbf{W}}$ はリスク中立測度のもとでの N 次元標準ブラウン運動である。時刻 t における満期時刻 T の割引債価格が関数 $f(\mathbf{X}_t, T-t)$ で表せるとき、満期 τ ($= T-t$) のイールドは $-\ln f(\mathbf{X}_t, \tau)$ で定義され、これを用いて瞬間スポット・レート $r(\mathbf{X}_t)$ は、

$$r(\mathbf{X}_t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{-\ln f(\mathbf{X}_t, \tau)}{\tau}, \quad (2)$$

と定義される。

次の2つの仮定を満たしている瞬間スポット・レート・モデルが、アフィン・モデルと呼ばれる¹。

仮定 1. 瞬間スポット・レート $r(\mathbf{X}_t)$ 、ドリフト・ベクトル $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t)$ と分散共分散行列 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)^T$ の各成分は、 \mathbf{X}_t の線形関数である。

仮定 2. 瞬間スポット・レート $r(\mathbf{X}_t)$ と割引債価格 $f(\mathbf{X}_t, T-t)$ は、

$$f(\mathbf{X}_t, T-t) = E^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(\mathbf{X}_s) ds \right) \middle| \mathbf{X}_t \right] \quad \text{a.s., } 0 \leq t \leq T < \infty, \quad (3)$$

の関係を満たす。ただし、 $E^Q[\cdot]$ はリスク中立確率測度下での期待値を表す。

アフィン・モデルでは、イールドが状態変数ベクトルの線形関数で表現される。これがアフィン・モデルの最大の特徴であり、その扱いやすさゆえ割引債価格のみならず金利派生商品の価格付けなどに利用されるようになった。上記のイールドの定

1 より一般的なクラスの期間構造モデルとして、 $r(\mathbf{X}_t)$ を状態変数ベクトルの2次関数として表現した“Quadratic Term Structure Model”や、 $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t)$ と $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)^T$ も状態変数ベクトルの2次関数として表現した“Affine-Quadratic Term Structure Model”がある。前者としては、Ahn, Dittmar, and Gallant [2002] や Chen, Filipovic, and Poor [2004] などが、後者としては Ahn *et al.* [2003] や Jiang and Yan [2006] などが挙げられる。

義より、この特徴は、満期 $T - t$ の割引債価格が、(1) 式の過程に従う N 次元状態変数ベクトル \mathbf{X}_t の線形関数を指数とする指数関数

$$f(\mathbf{X}_t, T - t) = \exp[A(T - t) + \mathbf{B}(T - t) \cdot \mathbf{X}_t], \quad (4)$$

で表せることと同値である。ただし、 $A(T - t)$ はスカラー、 $\mathbf{B}(T - t)$ は N 次元ベクトルであり、 \cdot は、左右のベクトルの内積を表す。価格の表現関数からみたこの性質は、「指数アフィン」(exponential-affine) と呼ばれる。

以下では、(4) 式の係数 $A(T - t)$ 、 $\mathbf{B}(T - t)$ が満たすべき条件を示す。まず、 T を固定して、 $f(\mathbf{X}_t, T - t)$ を $F(\mathbf{X}_t, t)$ と定義し直す。割引債価格 $F(\mathbf{X}_t, t)$ の確率過程は、(1) 式に対し伊藤の補題を適用することで、

$$dF(\mathbf{X}_t, t) = DF(\mathbf{X}_t, t) dt + F_x(\mathbf{X}_t, t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t) d\tilde{\mathbf{W}}_t, \quad (5)$$

となる。ただし、 D は、割引債価格 $F(\mathbf{X}_t, t)$ に対して、

$$DF(\mathbf{X}_t, t) = F_t(\mathbf{X}_t, t) + F_x(\mathbf{X}_t, t) \cdot \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t) + \frac{1}{2} \text{tr}[F_{xx}(\mathbf{X}_t, t) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)^T], \quad (6)$$

を満たす作用素であり、 F_t 、 F_x 、はそれぞれ F の t 、 \mathbf{X}_t による偏微分ベクトル、 F_{xx} は F の \mathbf{X}_t による 2 階偏微分行列を表す。(4) 式を (6) 式に代入することで、

$$DF(\mathbf{X}_t, t) = F(\mathbf{X}_t, t) \left[-A'(T - t) - \mathbf{B}'(T - t) \cdot \mathbf{X}_t + \mathbf{B}(T - t) \cdot \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N B_i(T - t) B_j(T - t) \sigma_i(\mathbf{X}_t) \sigma_j(\mathbf{X}_t)^T \right], \quad (7)$$

を得る。 $A'(T - t)$ 、 $\mathbf{B}'(T - t)$ は、それぞれ $A(t)$ と $\mathbf{B}(t)$ の導関数に、 $T - t$ を代入したものである。また、 $\sigma_i(\mathbf{X}_t)$ は、行列 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)$ の第 i 行ベクトルであり、 $\sigma_i(\mathbf{X}_t) \sigma_j(\mathbf{X}_t)^T$ は $\sum_{k=1}^N \sigma_{ik}(\mathbf{X}_t) \sigma_{jk}(\mathbf{X}_t)$ となるスカラー量である。ここで、仮定 2 が成立しているとすると、ファインマン・カックの公式より、

$$DF(\mathbf{X}_t, t) - r(\mathbf{X}_t) F(\mathbf{X}_t, t) = 0, \quad (8)$$

であり、 F は常に正なので、(7)、(8) 式より

$$0 = -r(\mathbf{X}_t) - A'(\tau) - \mathbf{B}'(\tau) \cdot \mathbf{X}_t + \mathbf{B}(\tau) \cdot \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N B_i(\tau) B_j(\tau) \sigma_i(\mathbf{X}_t) \sigma_j(\mathbf{X}_t)^T, \quad (9)$$

となる。

仮定1より、任意の i ($= 1, \dots, N$) について、(9) 式の右辺で \mathbf{X}_t の第 i 成分である x_i の項を、 $[-B'_i(\tau) + B_i(\mathbf{B}(\tau))]x_i$ と纏めることができる。ただし、 $B_i(\mathbf{B}(\tau))$ は、 $\alpha + \sum_{\varphi} b_j B_{\varphi}(\tau) + \sum_{jk} d_{jk} B_j(\tau) B_k(\tau)$ という形の関数である。ここで、 α 、 b_j 、 d_{jk} は、 $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t)$ と $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)^T$ の各成分が \mathbf{X}_t の線形関数であることから定数項と1次項に纏められたパラメータである。すると、(9) 式が \mathbf{X}_t のすべての要素について成り立つことから、 $-B'_i(\tau) + B_i(\mathbf{B}(\tau)) = 0$ となり、

$$\mathbf{B}'(\tau) = \mathbf{B}(\mathbf{B}(\tau)), \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{0}, \quad (10)$$

というリッカチ方程式²が導かれる。

一方、(9) 式の右辺で \mathbf{X}_t を含まない項は、 $-A'(\tau) + A(\mathbf{B}(\tau))$ と書ける。ここで、 $A(\mathbf{B}(\tau))$ は $B_i(\mathbf{B}(\tau))$ と同様な関数である。(9) 式をすべての \mathbf{X}_t について満たすには、この項もゼロになる必要があるので、

$$A'(\tau) = A(\mathbf{B}(\tau)), \quad A(0) = 0, \quad (11)$$

となり、(10) 式のリッカチ方程式を解いて求まる $\mathbf{B}(\tau)$ を用いて、

$$A(\tau) = \int_0^{\tau} A(\mathbf{B}(s)) ds, \quad (12)$$

と計算される。

このように、状態変数ベクトル \mathbf{X}_t が(1) 式の確率過程に従い、かつ仮定1、2が満たされるようなアフィン・モデルにおいては、(10) 式が有限な解を持つような N 次元ベクトル $\mathbf{B}(\tau)$ と、(12) 式で求められる $A(\tau)$ を用いて、割引債価格を(4) 式のような指数アフィンの形で表現することができる。

以下では、仮定1に従い、 N 次元状態変数ベクトル \mathbf{X}_t を用いて、瞬間スポット・レート r_t 、(1) 式の $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t)$ と $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)$ を次のように表現する。

$$r_t(\mathbf{X}_t) = \delta_0 + \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \mathbf{X}_t, \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{K}\mathbf{X}_t, \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{S}_t. \quad (15)$$

² リッカチ (Riccati) 方程式とは、 $y'(\tau) = P(\tau)y^2(\tau) + Q(\tau)y(\tau) + R(\tau)$ という形の微分方程式のことである。リッカチ方程式は、2 階常微分方程式に変形することができ、これが解析的に解ける場合には、解析解を持つ。

ただし、 δ_1 、 Ψ は N 次元ベクトル、 \mathbf{K} 、 Σ は $N \times N$ 行列であり、 \mathbf{S}_t は N 次元対角行列であり、その各対角成分は、

$$\mathbf{S}_{t(ii)} \equiv \sqrt{\alpha_i + \boldsymbol{\beta}_i \cdot \mathbf{X}_t}, \quad (16)$$

とする。ここで $\boldsymbol{\beta}_i$ ($i = 1, \dots, N$) は N 次元ベクトルである。 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)$ を (15)、(16) 式のように仮定することにより、(1) 式の分散共分散行列 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)^T$ のすべての要素は、 $[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)^T]_{ij} = c_{ij} + \mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{X}_t$ ($i, j = 1, \dots, N$) のように、 \mathbf{X}_t の線形関数で表現される。

状態変数のボラティリティ $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)$ を決定する独立な状態変数の数を $m \equiv \text{rank}(\boldsymbol{\beta})$ ($\boldsymbol{\beta} \equiv (\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_N)$) とし、許容可能 (admissible)³なアフィン・モデルのクラスを m と N で表現することを考え、これを $A_m(N)$ と定義する。 $A_m(N)$ のアフィン・モデルでは、状態変数ベクトル \mathbf{X}_t に線形変換を施すことにより、(15)、(16) 式を次のように表現することができる。

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\tilde{\mathbf{X}}_t) = \tilde{\mathbf{S}}_t, \quad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{t(ii)} \equiv \sqrt{\tilde{\mathbf{X}}_{t(i)}}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{t(jj)} \equiv \sqrt{\tilde{\alpha}_j + \sum_{k=1}^m [\tilde{\boldsymbol{\beta}}_j]_k \tilde{\mathbf{X}}_{t(k)}}, \quad m+1 \leq j \leq N. \quad (19)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{X}}_{t(i)}$ は、線形変換後の \mathbf{X}_t の第 i 成分である。

m の値が大きくなるほど、アフィン・モデルは次のような長所を持つようになる。まず、(18) 式の条件から非負性が保たれる状態変数の数が多くなる ($A_m(N)$ クラスのアフィン・モデルでは、 m 個の状態変数が非負となる)。その結果、ランク数 m の値が大きくなるにつれて、状態変数の線形和として (13) 式のように表現される瞬間スポット・レートも負になりにくくすることができる。さらに、状態変数のボラティリティが、より多くの独立な状態変数を含むため、所与の \mathbf{X}_t のもとで与えられる条件付ボラティリティの自由度も高まる。

しかし、一方で、 m が大きくなるにつれて、(19) 式よりも (18) 式で表現される要素の数が多くなるため、状態変数間で負の相関を取りにくくなる。例えば、 $m = N$ の場合、すべての状態変数は非負となるが、どの状態変数間でも、負の相関を想定することができなくなってしまう⁴。

このように、アフィン・モデルでは、瞬間スポット・レートの非負性を保証するために m の値を大きくしようとする、状態変数間の相関が負の値を取りにくくなり、モデルの柔軟性が低下してしまうため、使用する目的に合わせて両者のバランスを考慮することが重要となる。

3 ここでは、(16) 式において $\alpha_i + \boldsymbol{\beta}_i \cdot \mathbf{X}_t$ ($i = 1, \dots, N$) が常に正値を取ることを「許容可能」と定義する。

4 この問題は、後述の Duffie and Singleton [1999] などでも議論されている。

3. アフィン・モデルの2つの類型

(1) リスクの市場価格と期間プレミアム

2節で述べたように、アフィン・モデルでは、任意の満期の割引債のイールドを状態変数ベクトルの線形式で表現することができる。しかし、リスク中立確率測度のもとで構築したアフィン・モデルについて、アフィン性を保ったまま現実確率測度への変換を行うには、リスクの市場価格を適切な形で定義する必要がある。

各状態変数のリスクの市場価格を N 次元ベクトル \mathbf{A}_t で表現すると、(1) 式は、現実確率測度 P のもとで、

$$d\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t) dt + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)\mathbf{A}_t dt + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t) d\mathbf{W}_t, \quad (20)$$

となる。したがって、現実確率測度 P のもとで状態変数ベクトル \mathbf{X}_t がアフィン性を保つためには、

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t) + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)\mathbf{A}_t, \quad (21)$$

が \mathbf{X}_t の線形関数になっていればよい。具体的には、(21) 式の右辺第 1 項は既に状態変数ベクトル \mathbf{X}_t の線形関数であるので、(21) 式の右辺第 2 項の $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)\mathbf{A}_t$ が状態変数ベクトル \mathbf{X}_t の線形関数になっていればよい。

こうした条件を満たすリスクの市場価格としては、2種類のモデル化法が知られており、それらに対応するモデルは、それぞれ、コンプリートリー・アフィン・モデル、エッセンシャル・アフィン・モデルと呼ばれる。後者は前者を拡張した、より広いクラスである。アフィン・モデルを用いた、金利の期間構造や金利派生商品に関する研究の多くは、これらのいずれかに分類される。そこで、本節(2)、(3)では両モデルの特徴と限界について、それぞれ順に述べる。

また、リスクの市場価格 \mathbf{A}_t を用いると、満期 τ の割引債の瞬間スポット・レート r_t に対する期待超過リターンは、次のように計算することができる。

まず、(4) 式から、

$$F_x(\mathbf{X}_t, t) = F(\mathbf{X}_t, t)\mathbf{B}(T-t), \quad (22)$$

が得られ、これと(8)式を(5)式に代入すると、割引債価格 $F(\mathbf{X}_t, t)$ は、

$$\frac{dF(\mathbf{X}_t, t)}{F(\mathbf{X}_t, t)} = r(\mathbf{X}_t) dt + \mathbf{B}(T-t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t) d\tilde{\mathbf{W}}_t, \quad (23)$$

と表すことができる。これを、現実確率測度 P のもとで表現し直すと、

$$\frac{dF(\mathbf{X}_t, t)}{F(\mathbf{X}_t, t)} = \{r(\mathbf{X}_t) + \mathbf{B}(T-t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t) \mathbf{A}_t\} dt + \mathbf{B}(T-t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t) d\mathbf{W}_t, \quad (24)$$

となる。したがって、ターム τ のスポット・レートの瞬間スポット・レートに対する期待超過リターンを「期間プレミアム」と定義する⁵と、期間プレミアム $e_{\tau,t}$ は、

$$e_{\tau,t} = \mathbf{B}(T-t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t) \mathbf{A}_t, \quad (25)$$

と表現される。

(2) コンプリートリー・アフィン・モデル

Fisher and Gilles [1996]、Dai and Singleton [2000] は、各状態変数のリスクの市場価格 \mathbf{A}_t を、 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)$ の線形表現 (15) 式で使った \mathbf{S}_t を用いて、

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{S}_t \boldsymbol{\lambda}, \quad (26)$$

とモデル化した。ここで、 $\boldsymbol{\lambda}$ は定数ベクトルである。このとき、(21) 式右辺第 2 項の $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t) \mathbf{A}_t$ は、(15) 式を用いて

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t) \mathbf{A}_t = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{S}_t \mathbf{A}_t = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{S}_t^2 \boldsymbol{\lambda}, \quad (27)$$

と表せ、これも状態変数ベクトル \mathbf{X}_t の線形関数になっている。したがって、状態変数ベクトル \mathbf{X}_t が現実確率測度 P のもとでもアフィン性を保っていることが確認できる。リスクの市場価格を (26) 式の \mathbf{A}_t を用いて表現したアフィン・モデルは、特に、コンプリートリー (completely) アフィン・モデルと呼ばれる。

特に、 $N = 3$ の場合 (以下、3 ファクター・モデルと呼ぶ) は、許容可能なコンプリートリー・アフィン・モデル⁶として、表 1 の 4 つのクラスがある。これは、状態変数のボラティリティ $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)$ の変動を説明する独立な状態変数の数 m に注目した、前節のクラスの定義によるものである。

Dai and Singleton [2000] は、「アフィン・モデルでは、瞬間スポット・レートの非負性を保証することと、状態変数間の相関に自由度を持たせることを、同時に達成できない」ことを、 $N = 3$ の場合について検証した。米国スワップ・レートを用いた実証分析の結果、イールド・カーブへのフィットやボラティリティの期間構造な

5 一般には、「期間プレミアム」は、満期 $T-t$ の割引債のイールド $y(t, T)$ を用いて、 $y(t, T) - (1/(T-t)) \times \int_t^T E_t[r_s] ds$ と定義される。なお、Singleton [2006] では、この一般的な定義による期間プレミアムと (25) 式の期待超過リターンとの間に成り立つ関係式を示している。

6 コンプリートリー・アフィン・モデルが許容可能となるようなパラメータの十分条件については、Dai and Singleton [2000] を参照。

表 1 3 ファクターのコンプリートリー・アフィン・モデルの例

クラス	代表的なモデル
$A_0(3)$	ガウシアン・モデル
$A_1(3)$	Balduzzi <i>et al.</i> [1996]
$A_2(3)$	Chen [1996]
$A_3(3)$	Chen and Scott [1993]

備考：クラス名は、Dai and Singleton [2000] の命名に従った。 $A_m(N)$ の N が状態変数（ファクター）の数、 m が状態変数のボラティリティに影響を与える独立な状態変数の数を表す。

どのイールド・カーブの特徴をうまく表現するためには、状態変数間の相関を負にすることが重要であり、 m が小さい $A_1(3)$ クラスのモデルが実際のイールド・カーブの性質を最もよく表現すると指摘している。

コンプリートリー・アフィン・モデルでは、(26) 式のように、リスクの市場価格 A_t が、状態変数間の分散共分散構造を決定する行列 S_t の線形和で表現されているため、①割引債の期間プレミアム $e_{\tau,t}$ を状態変数ベクトル X_t のボラティリティと独立に決めることができない、②各状態変数に関するリスクの市場価格の符号は時間によらず一定となるという制約がある。

Duffee [2002] は、これらの制約が、それぞれ、イールド・カーブが持つ 2 つの性質、すなわち、①各満期の期間プレミアムとイールドのボラティリティとの相関はあまり高くない、②期間プレミアムの分散はその平均値対比でも大きいという性質と整合的になりにくいことを指摘している。特に、後者の性質をすべての満期で実現するモデルを前述の制約②のもとで作ろうとすると、モデルで表現できるイールド・カーブの形が限定されてしまうという問題が生じる⁷。

(3) エssenシャルリー・アフィン・モデル

このようなコンプリートリー・アフィン・モデルの問題を解決するため、Duffee [2002] は、リスクの市場価格がボラティリティと独立に変化できるよう、コンプリートリー・アフィン・モデルの制約を緩めた、エssenシャルリー (essentially)・アフィン・モデルを提案した。

エssenシャルリー・アフィン・モデルでは、(26) 式の代わりに、リスクの市場価格を次のように表現する。

7 (26) 式で定義されるリスクの市場価格 A_t の各要素の符号は、時間によらず一定である。このため、(25) 式で表現される期間プレミアムの分散を一定の大きさに保ったまま、期間プレミアムの平均値を小さくするには、複数の状態変数のリスクの市場価格が互いに打ち消し合う必要がある。しかし、常にこれが成立するためには、打ち消し合う状態変数の自己相関が同程度である必要があり、この場合、満期の異なるイールドの変動を表現するうえで、制約がかかることになる。

表2 コンプリートリー・アフィンとエッセンシャルリー・アフィンの比較

	コンプリートリー	エッセンシャルリー
X_t (リスク中立確率測度下)	アフィン過程	アフィン過程
X_t (現実確率測度下)	アフィン過程	アフィン過程
状態価格デフレータの過程 ⁸	アフィン過程	アフィン過程でない
リスクの市場価格と 状態変数ベクトルの分散	独立に決められない	独立に決められる
リスクの市場価格の符号 モデルの柔軟度	λ と一致 低い	λ に制約されない 高い
予測力 (1952~98年の米国債)*	RW より低い	RW より高い

備考：* Duffee [2002] による。

$$A_t = S_t \lambda_1 + S_t^- \lambda_2 X_t. \quad (28)$$

ただし、 λ_1 は N 次元ベクトル、 λ_2 は $N \times N$ 行列、行列 S_t^- は以下のような N 次元対角行列である。

$$S_{t(ii)}^- = \begin{cases} (\alpha_i + \beta_i \cdot X_t)^{-1/2}, & \text{if } \inf(\alpha_i + \beta_i \cdot X_t) > 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (29)$$

このモデルでも、 $\sigma(X_t)A_t$ が次のように X_t の線形関数になる。

$$\sigma(X_t)A_t = \Sigma S_t A_t = \Sigma S_t^2 \lambda_1 + \Sigma I_t^- \lambda_2 X_t. \quad (30)$$

ただし、 I_t^- は $N \times N$ 対角行列であり、第 ii 要素 $I_{t(ii)}^-$ が、 $S_{t(ii)}^- > 0$ ならば 1、 $S_{t(ii)}^- = 0$ ならば 0 となるものである。したがって、コンプリートリー・アフィン・モデルと同様、リスク中立確率測度のもとのみならず現実確率測度のもとでも、状態変数ベクトル X_t がアフィン性を保っていることを確認できる。

一方で、エッセンシャルリー・アフィン・モデルは、リスクの市場価格 A_t に課せられていた制約が緩められ、 A_t と状態変数間の分散共分散構造を決定する行列 S_t の関係を比較的柔軟に表現できるため、 A_t の各要素の符号を時間とともに変えることができる。コンプリートリー・アフィン・モデルとエッセンシャルリー・アフィン・モデルの特徴を比較し、表 2 に纏めた。

8 状態価格デフレータとは、状態変数の不確実性を持つリスクを考慮した割引率に相当し、 $(d\pi_t/\pi_t) = -r_t dt - A_t dW_t$ という確率微分方程式で表現される。したがって、状態価格デフレータの過程がアフィン過程であるためには、状態価格デフレータの分散共分散行列を表す $A_t A_t^\top$ が、状態変数ベクトル X_t の線形関数で書き表せる必要がある。

このように、リスクの市場価格を柔軟に表現できるエッセンシャル・アフィン・モデルを用いることで、コンプリートリー・アフィン・モデルに比べて、現在のイールド・カーブから、将来のイールドに関する情報をより適切に取り出すことができる。

Duffee [2002] は、1952～98年の米国債データを用いた分析の結果⁹、コンプリートリー・アフィン・モデルによるイールドの予測力がランダム・ウォーク (RW) モデル¹⁰による予測力よりも低く、エッセンシャル・アフィン・モデルでは、RW モデルよりも高いことを示した¹¹。

(28)式で表されるように、エッセンシャル・アフィン・モデルは、コンプリートリー・アフィン・モデルのリスクの市場価格に、 $S_t^{-1}\lambda_2 X_t$ の項を加えたものである。(29)式の条件から、 $A_N(N)$ クラスのアフィン・モデルでは、エッセンシャル・アフィン・モデルとコンプリートリー・アフィン・モデルは同一のものとなる。(27)式と(30)式を見比べると、 m が小さいほど I_t が0以外の要素を多く持つため、(25)式で定義される期間プレミアムの表現力は、エッセンシャル・アフィン・モデルの方が、同じクラスのコンプリートリー・アフィン・モデルと比べて高くなる。しかし、エッセンシャル・アフィン・モデルについてもコンプリートリー・アフィン・モデルと同様に、 m を小さくするほど、モデルが表現できるイールドの条件付ボラティリティの自由度が小さくなり、モデルから計算される瞬間スポット・レートが負の値を取る可能性も高まってしまう。すなわち、エッセンシャル・アフィン・モデルでは、期間プレミアムの時間変化を表現できるようになったものの、これとボラティリティの時間変化を、同時に表現することができないという問題がある¹²。以上の性質を纏めたものが、表3である。

9 1952～94年のデータからパラメータを推定し、1995～98年の予測を行った。また、パラメータはQML (quasi maximum likelihood) で推定している。QMLについては、Fisher and Gilles [1996]を参照。

10 将来のイールドの予測値として、予測時点のイールドを用いるモデル。

11 このほか、Dai and Singleton [2002]では、期待仮説の観点からリスクの市場価格に関する実証的な分析を行っている。

12 この問題を解決するため、Duarte [2004]は、エッセンシャル・アフィン・モデルをさらに拡張し、リスクの市場価格を、 $A_t = \Sigma^{-1}\lambda_0 + S_t\lambda_1 + S_t^{-1}\lambda_2 X_t$ と表現するモデルを提案した。エッセンシャル・アフィン・モデルでは、リスクの市場価格の符号を時間とともに変化させるためには、 S_t^{-1} が0と異なる要素を数多く持たなければならない。そのためには、 m を小さくする必要があるが、そうするとボラティリティの時間変化を表現することが難しくなる。これに対して、上記のようなDuarte [2004]のモデルでは、 m の値にかかわらず、リスクの市場価格の符号を時間とともに変化させることができる。しかし、Duarte [2004]が行った実証分析の結果、彼らのモデルを用いても、期間プレミアムの時間変化とボラティリティの時間変化を十分な精度で同時に捉えることはできなかった。

表3 ランク m の値によるモデルの表現力の違い

	ランク m	コンプリートリー・アフィン	エッセンシャルリー・アフィン
ボラティリティの表現力	ランク小 ランク大	小さい (瞬間スポット・レートが負になりやすい) 大きい (瞬間スポット・レートが負になりにくい)	
期間プレミアムの表現力	ランク小 ランク大	小さい (リスクの市場価格の符号は時間不変)	大きくなる (コンプリートリー・アフィン対比) 小さい (コンプリートリー・アフィンと同程度)

4. アフィン・ジャンプ拡散モデルと派生商品の価格評価

ここまでは、瞬間スポット・レートを説明する状態変数ベクトルが、連続的な拡散過程に従うものとして考えてきた。しかし、多くの既存研究では、瞬間スポット・レートの過程をモデル化するうえで、ジャンプが重要な役割を果たすことが示されている¹³。これは、次のような理由によるものである。瞬間スポット・レートを決定する状態変数ベクトル \mathbf{X}_t に影響を及ぼしうる要因（あるいは \mathbf{X}_t そのもの）の候補としては、①瞬間スポット・レートに相当する短期金利が金融政策のターゲットであることに起因するもの（例えばインフレ率や経済成長率などの経済指標など）や、②短期金利市場の需給動向などが考えられる。したがって、経済指標が非連続的に大きく変化したり、大きな需給ショックがまれに生じるような場合、これらの状態変数はジャンプを含む確率過程に従うとして捉えた方が適切であると考えられる。

そこで、本節では、状態変数ベクトル \mathbf{X}_t が、(1) 式にジャンプ項を加えた、アフィン・ジャンプ拡散過程に従う場合に、債券価格が指数アフィンとなるための条件を示す。さらに、ジャンプを含む場合に、オプションなどの金利派生商品の価格を評価する方法として、Duffie, Pan, and Singleton [2000] と Chacko and Das [2002] を紹介する。

(1) アフィン・ジャンプ拡散モデル

状態変数ベクトル \mathbf{X}_t が、(1) 式にジャンプ項を加えた、

$$d\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t) dt + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t) d\tilde{\mathbf{W}}_t + d\mathbf{Z}_t, \quad (31)$$

という、アフィン・ジャンプ拡散過程に従う場合を考える。ただし、 \mathbf{Z}_t は、強度 $\lambda(\mathbf{X}_t)$ で発生し、大きさが確率分布 $v \in \mathbb{R}^N$ に従うジャンプ過程であるものとする。

13 例えば、Das [2002]、Johannes [2004]、Zhou [2001] などを参照。

る。このとき、割引債価格 $F(\mathbf{X}_t, t)$ は、

$$D^*F(\mathbf{X}_t, t) - r(\mathbf{X}_t)F(\mathbf{X}_t, t) = 0, \quad (32)$$

$$F(\mathbf{X}_t, T) = 1, \quad (33)$$

を満たす。ただし、 D^* は

$$D^*F(\mathbf{X}_t, t) = DF(\mathbf{X}_t, t) + \lambda(\mathbf{X}_t) \int [F(\mathbf{X}_t + z, t) - F(\mathbf{X}_t, t)] dv(z), \quad (34)$$

を満たす作用素である。このとき、2節で(8)式を解いて(4)式の係数 $A(\cdot)$ 、 $\mathbf{B}(\cdot)$ を求めたように、(32)、(33)式を解くことで、ジャンプを含まない場合と同様に、状態変数ベクトル \mathbf{X}_t の指数アフィン関数として、割引債価格 $f(\mathbf{X}_t, T - t)$ を(4)式のように表現することができる。ただし、2節で示した仮定1、仮定2に加えて、次の仮定3を満たす必要がある。

仮定 3. ジャンプの強度 $\lambda(\mathbf{X}_t)$ は、 \mathbf{X}_t の線形関数である。

以上のように、状態変数ベクトルが(31)式に従い、仮定1～3を満たす、瞬間スポット・レートのモデルは、アフィン・ジャンプ拡散モデルと呼ばれる¹⁴。

(2) 金利派生商品の価格評価 1—Duffie, Pan, and Singleton [2000]

瞬間スポット・レート $r(\mathbf{X}_t)$ が、アフィン・ジャンプ拡散過程に従う N 次元状態変数ベクトル \mathbf{X}_t の線形関数であり、時刻 T におけるペイオフが、 $(v_0 + v_1 \cdot \mathbf{X}_T) \exp(\mathbf{u} \cdot \mathbf{X}_T)$ である金融商品の価格は、以下のように表すことができる。

$$E_t \left[\exp \left(- \int_t^T r(\mathbf{X}_s) ds \right) (v_0 + v_1 \cdot \mathbf{X}_T) e^{\mathbf{u} \cdot \mathbf{X}_T} \right]. \quad (35)$$

この式は、次のようなものに応用することができる。

① 信用リスクのある債券の価格評価

デフォルト強度が $\lambda_t(\mathbf{X}_t)$ で、デフォルト時に額面の一定割合 w が回収される割引債¹⁵の価格は、

14 Bates [2000] や Bakshi, Cao, and Chen [1997] は、オプションのボラティリティ・スマイルを説明するためには、リターンだけではなく、ボラティリティにもジャンプ過程を仮定する必要があると述べている。

15 このような債券の価格評価を試みたものとして、例えば、Lando [1998] などがある。

$$\begin{aligned} & E_t \left[\exp \left(- \int_0^T (r(\mathbf{X}_t) + \lambda(\mathbf{X}_t)) dt \right) \right] \\ & + w \int_0^T E_t \left[\lambda(\mathbf{X}_s) \exp \left(- \int_0^s (r(\mathbf{X}_s) + \lambda(\mathbf{X}_s)) ds \right) \right] dt, \end{aligned} \quad (36)$$

として計算することができる¹⁶ため、特にデフォルト強度 $\lambda_t(\mathbf{X}_t)$ が状態価格ベクトル \mathbf{X}_t の線形関数である場合には、(35)式を用いて表現することができる。

② 状態変数ベクトル \mathbf{X}_T の条件付特性関数

\mathbf{X}_T の条件のもとでの、状態変数ベクトル \mathbf{X}_T の条件付特性関数 $E_t[e^{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{X}_T} | \mathbf{X}_t]$ は、さまざまな場面で応用することができる。例えば、Singleton [2001]は、特性関数を用いて、アフィン・ジャンプ拡散モデルで最尤推定量を求める方法を示している。

③ オプションの価格（後述〈69、70ページの例1、2〉）

このように、(35)式を用いることで、さまざまな金融商品の価格評価を行うことができる。Duffie, Pan, and Singleton [2000]は、この式の解を示した。以下にその導出法を示す。

状態変数ベクトル \mathbf{X}_t が、確率空間 (Ω, \mathcal{F}, Q) におけるリスク中立確率測度 Q のもとで、(31)式のジャンプ拡散過程に従っているとす。ただし、ドリフト $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t)$ 、分散共分散行列 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)^\top$ 、ジャンプ強度 $\lambda(\mathbf{X}_t)$ と割引率 $r(\mathbf{X}_t)$ は、それぞれ

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t) = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 \mathbf{X}_t, \quad \mathbf{K} = (\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times N}, \quad (37)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t)^\top)_{ij} = (\mathbf{H}_0)_{ij} + (\mathbf{H}_1)_{ij} \cdot \mathbf{X}_t, \quad \mathbf{H} = (\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1) \in \mathbb{R}^{N \times N} \times \mathbb{R}^{N \times N \times N}, \quad (38)$$

$$\lambda(\mathbf{X}_t) = l_0 + l_1 \cdot \mathbf{X}_t, \quad l = (l_0, l_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad (39)$$

$$r(\mathbf{X}_t) = \rho_0 + \rho_1 \cdot \mathbf{X}_t, \quad \boldsymbol{\rho} = (\rho_0, \rho_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad (40)$$

のように、状態変数ベクトル \mathbf{X}_t の線形関数で表現されると仮定する。このとき、一定の条件のもとで、パラメータ・セット $\mathcal{X} = (\mathbf{K}, \mathbf{H}, l, \theta, \boldsymbol{\rho})$ ¹⁷によって決まる \mathbf{X}_t の分布のもとでの期待値 $E^{\mathcal{X}}$ を用いて、時刻 T におけるペイオフの時刻 t における価格は、

$$\begin{aligned} \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{u}, \mathbf{X}_t, t, T) & \equiv E^{\mathcal{X}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(\mathbf{X}_s) ds \right) e^{\mathbf{u} \cdot \mathbf{X}_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ & = e^{\alpha(t) + \beta(t) \cdot \mathbf{X}_t}, \end{aligned} \quad (41)$$

¹⁶ 信用リスクを含む債券の価格モデルについては5節で述べる。

¹⁷ θ は、 $\theta(\mathbf{c}) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\mathbf{c} \cdot \mathbf{z}) d\mathbf{v}(\mathbf{z})$ ($\mathbf{c} \in \mathbb{C}^N$)によって定義され、ジャンプの大きさの分布を決めるパラメータである。

$$\begin{aligned}\phi^{\mathcal{X}}(v_1, \mathbf{u}, \mathbf{X}_t, t, T) &\equiv \mathbb{E}^{\mathcal{X}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(\mathbf{X}_s) ds \right) (v_1 \cdot \mathbf{X}_T) e^{u \cdot \mathbf{X}_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{u}, \mathbf{X}_t, t, T) (A(t) + \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{X}_t),\end{aligned}\quad (42)$$

として求めることができる¹⁸。これらより、(35)式は、

$$\begin{aligned}v_0 \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{u}, \mathbf{X}_t, t, T) + \phi^{\mathcal{X}}(v_1, \mathbf{u}, \mathbf{X}_t, t, T) \\ = \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{u}, \mathbf{X}_t, t, T) (v_0 + A(t) + \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{X}_t),\end{aligned}\quad (43)$$

と表現できる。

また、Duffie, Pan, and Singleton [2000] は、(35)式をオプションの価格評価へ応用するため、以下のような拡張も行っている。まず、 $e^{a \cdot \mathbf{X}_T} 1_{b \cdot \mathbf{X}_T \leq y}$ のようなペイオフを持つ金融商品の価格は、一定の条件のもとで、

$$\begin{aligned}G_{a,b}(y; \mathbf{X}_0, T, \mathcal{X}) &\equiv \mathbb{E}^{\mathcal{X}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(\mathbf{X}_s) ds \right) e^{a \cdot \mathbf{X}_T} 1_{b \cdot \mathbf{X}_T \leq y} \right] \\ &= \frac{\psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a}, \mathbf{X}_0, 0, T)}{2} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}[\psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a} + i v \mathbf{b}, \mathbf{X}_0, 0, T) e^{-i v y}]}{v} dv,\end{aligned}\quad (44)$$

と計算することができる¹⁹。ただし、 $1_{a \leq b}$ は、 $a \leq b$ のときは1、それ以外の場合は0となる演算子である。これと同様にして、

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{a,b,d}(y; \mathbf{X}_0, T, \mathcal{X}) &\equiv \mathbb{E}^{\mathcal{X}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(\mathbf{X}_s) ds \right) \mathbf{a} \cdot \mathbf{X}_T e^{d \cdot \mathbf{X}_T} 1_{b \cdot \mathbf{X}_T \leq y} \right] \\ &= \frac{\phi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{X}_0, 0, T)}{2} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}[\phi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a}, \mathbf{d} + i v \mathbf{b}, \mathbf{X}_0, 0, T) e^{-i v y}]}{v} dv,\end{aligned}\quad (45)$$

と計算できる。

これらを用いると、オプション価格の評価を行うことができる。

例 1. 行使価格 c 、満期 $T-t$ で、満期時のペイオフが $(e^{d \cdot \mathbf{X}_T} - c)^+$ であるヨーロッパアン・コール・オプションの、時刻ゼロでの価値は、

¹⁸ $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 、 $A(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ の具体的な式の形と、(41)、(42)式が成立するための条件は、補論1を参照。
¹⁹ (44)式が成り立つための条件と導出過程は、補論2を参照。

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{d}, c, T, \mathcal{X}) &= \mathbb{E}^{\mathcal{X}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(\mathbf{X}_s) ds \right) (e^{d \cdot \mathbf{X}_T} - c)^+ \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathcal{X}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(\mathbf{X}_s) ds \right) (e^{d \cdot \mathbf{X}_T} - c) 1_{-d \cdot \mathbf{X}_T \leq -\ln c} \right] \\
&= G_{d, -d}(-\ln c; \mathbf{X}_0, T, \mathcal{X}) - c G_{0, -d}(-\ln c; \mathbf{X}_0, T, \mathcal{X}),
\end{aligned} \tag{46}$$

となるので、(41)、(44)式を用いて計算することができる。

例 2. 瞬間スポット・レートが確定的 ($r(\mathbf{X}_t) = \rho_0$) である場合、アジアン・オプションの価格を次のように求めることができる。確率過程 Y_t を、

$$Y_t = \int_0^t X_s^{(i)} ds, \tag{47}$$

と定義する。ただし、 $X_t^{(i)}$ は原資産の価格過程である。リスク中立確率測度 Q のもとで、 \mathbf{X}_t がアフィン・ジャンプ拡散過程に従っていると仮定すると、瞬間スポット・レートが確定的な場合には、 $N + 1$ 次元ベクトル $\tilde{\mathbf{X}}_t = (\mathbf{X}_t, Y_t)$ がアフィン・ジャンプ拡散過程に従う。したがって、アジアン・オプションの価格は、 $\tilde{\mathcal{X}} = (\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{H}}, \tilde{l}, \theta, \tilde{\rho})$ によって決まる $\tilde{\mathbf{X}}_t$ の分布のもとの期待値 $\mathbb{E}^{\tilde{\mathcal{X}}}$ を用いて、

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\tilde{\mathcal{X}}} \left[\exp \left(- \int_0^T \rho_0 ds \right) \left(\frac{1}{T} \int_0^T X_s^{(i)} ds - c \right)^+ \right] \\
&= \mathbb{E}^{\tilde{\mathcal{X}}} \left[\exp \left(- \int_0^T \rho_0 ds \right) \left(\frac{1}{T} \int_0^T X_s^{(i)} ds - c \right) 1_{(1/T) \int_0^T X_s^{(i)} ds \geq c} \right] \\
&= \frac{1}{T} \mathbb{E}^{\tilde{\mathcal{X}}} \left[\exp \left(- \int_0^T \rho_0 ds \right) \int_0^T X_s^{(i)} ds 1_{-\int_0^T X_s^{(i)} ds \leq -cT} \right] \\
&\quad - c \mathbb{E}^{\tilde{\mathcal{X}}} \left[\exp \left(- \int_0^T \rho_0 ds \right) 1_{-\int_0^T X_s^{(i)} ds \leq -cT} \right] \\
&= \frac{1}{T} \tilde{G}_{e(N+1), -e(N+1), 0}(-cT; \tilde{\mathbf{X}}_0, T, \tilde{\mathcal{X}}) - c G_{0, -e(N+1)}(-cT; \tilde{\mathbf{X}}_0, T, \tilde{\mathcal{X}}),
\end{aligned} \tag{48}$$

として求めることができる。ただし、 $e(N + 1)$ は、第 $N + 1$ 要素は 1、他の要素は 0 の $N + 1$ 次元ベクトルである。したがって、(48)式は、(41)、(42)、(44)、(45)式を用いて計算することができる。

(3) 金利派生商品の価格評価 2—Chacko and Das [2002]

2節で述べたように、状態変数ベクトル \mathbf{X}_t が（ジャンプを含まない）アフィン過程に従うとき、リッカチ方程式を解くことで割引債価格を表現する指数アフィン関数の係数を求めることができる。Chacko and Das [2002] は、 \mathbf{X}_t がアフィン拡散ジャンプ過程に従う場合でも、ジャンプが発生する強度が \mathbf{X}_t の各要素について定数であれば、2節と同様の方法で、金利派生商品の価格が求められることを示した。具体的には、満期時のペイオフが、状態変数ベクトル \mathbf{X}_t の、①線形関数、②指数アフィン関数、③線形式の時間積分である場合について、金利派生商品価格の算出法を示した。

リスク中立確率測度 Q のもとで、瞬間スポット・レート r_t と $(N - 1)$ 次元状態変数ベクトル \mathbf{Y}_t からなるベクトル $\mathbf{X}_t = [r_t, \mathbf{Y}_t^T]^T$ が、次の過程に従っているものとする。

$$d\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t) dt + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t) d\tilde{\mathbf{W}}_t + \mathbf{J} dN_t. \quad (49)$$

ただし、 N_t は、強度 $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, l$) の l 次元直交ポアソン過程であり、 $N \times l$ 行列 \mathbf{J} の各要素は、ジャンプの大きさを表す、互いに相関を持つ確率変数であり、その条件付分布は状態変数ベクトル \mathbf{X}_t と独立であるものと仮定する。このように、Chacko and Das [2002] のモデルは、ジャンプ項の定義の仕方が Duffie, Pan, and Singleton [2000] とは異なっており、状態変数ベクトル \mathbf{X}_t の各要素のジャンプの大きさや発生強度の分布について、相関を明示的に取り扱えるという長所を有している。

時刻 t における満期 τ の証券の価格 $P(\mathbf{X}_t, t)$ を考える。このとき、(49) 式の過程に従う \mathbf{X}_t が仮定 1~3 の条件を満たしていれば、

$$D^{**} P(\mathbf{X}_t, t) = DP(\mathbf{X}_t, t) + \sum_{i=1}^l \lambda_i E[P(\mathbf{X}_t + \mathbf{J}^{(i)}, t) - P(\mathbf{X}_t, t)], \quad (50)$$

で定義される作用素 D^{**} を用いて、ファインマン・カックの公式より、

$$D^{**} P(\mathbf{X}_t, t) + \mathbf{d} \cdot \mathbf{s} P(\mathbf{X}_t, t) = 0, \quad (51)$$

(\mathbf{d} は定数ベクトル、 $\mathbf{s} = [\mathbf{X}_t^T, 1]^T$) が成り立ち、 $P(\mathbf{X}_t, t)$ は、ある境界条件

$$(A(0), \mathbf{B}(0)) \equiv \mathbf{b}, \quad (52)$$

のもとで、

$$P(\mathbf{X}_t, t) = \exp[A(T - t) + \mathbf{B}(T - t) \cdot \mathbf{X}_t], \quad (53)$$

という指数アフィンの形で表現できる。

係数 $A(T-t)$ 、 $B(T-t)$ の値は、 X_t のドリフト $\mu(X_t)$ や分散共分散 $\sigma(X_t)\sigma(X_t)^T$ の構造に依存する。これらは、2 節と同様に (51) 式で変数を分離し、リッカチ方程式を解くことで求められる。それらの解を、 $A^*(\theta; T-t, \mathbf{b}, \mathbf{d})$ 、 $B^*(\theta; T-t, \mathbf{b}, \mathbf{d})$ とする。ただし、 θ は、 X_t の確率過程 (49) 式を決めているパラメータ・ベクトルである。

割引債価格の場合は満期時点 ($\tau = 0$) で 1 になり、かつ $\mathbf{d} = \mathbf{d}^* = [-1, 0, \dots, 0]^T$ とすると (51) 式が (32) 式と同じになることから、(53) 式は上記の \mathbf{d} 、 \mathbf{d}^* のもとで、

$$f(X_t, \tau) = P(X_t, t) = \exp[A^*(\theta; T-t, \mathbf{0}, \mathbf{d}^*) + B^*(\theta; T-t, \mathbf{0}, \mathbf{d}^*) \cdot X_t], \quad (54)$$

という形で表現することができる。

以上より、状態変数ベクトル X_t に (49) 式を仮定した場合の割引債価格の関数が求まった。これを用いた金利派生商品の価格算出法を以下に示す。

時刻 $T + \hat{\tau}$ に満期を迎え、時刻 T におけるペイオフが $\tilde{f}(x_T, \hat{\tau})$ である証券を考える。ただし、 x_T は時刻 T までに X_t が辿ったパスである。この証券を原資産とし、時刻 T を満期とするコール・オプション（権利行使価格 K ）の、満期時刻 T におけるペイオフは、

$$\tilde{F}_T(0; \hat{\tau}) = \max[\tilde{f}(x_T, \hat{\tau}) - K, 0], \quad (55)$$

となる。これより、時刻 t における満期 $\tau = T - t$ のオプション価格は、 $\tilde{F}_t(\tau; \hat{\tau})$ と表せる（下図を参照）。

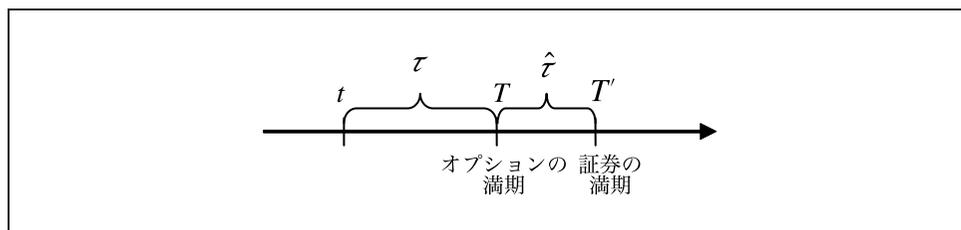
このオプションの時刻 t での価格は、リスク中立確率測度 Q のもとで

$$\tilde{F}_t(\tau; \hat{\tau}) = E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \max[\tilde{f}(x_T, \hat{\tau}) - K, 0] \right], \quad (56)$$

と書くことができる。ここで、

$$Z_t \equiv \int_t^T r_s ds, \quad (57)$$

図 1 証券とオプションの満期



と置くと $P(\mathbf{X}_t, t) = E_t^Q[e^{-Z_t}]$ であり、オプションの価格式 (56) を、次のように2つの部分に分けて表現できる。

$$\begin{aligned}\tilde{F}_t(\tau; \hat{v}) &= E_t^Q[e^{-Z_t} \tilde{f}(\mathbf{x}_T, \hat{v}) 1_{\{\tilde{f}(\mathbf{x}_T, \hat{v}) \geq K\}}] - KE_t^Q[e^{-Z_t} 1_{\{\tilde{f}(\mathbf{x}_T, \hat{v}) \geq K\}}] \\ &= \Pi_{0,t} \Pi_{1,t} - KP(\mathbf{X}_t, t) \Pi_{2,t}.\end{aligned}\quad (58)$$

ただし、

$$\Pi_{0,t} \equiv E_t^Q[e^{-Z_t} \tilde{f}(\mathbf{x}_T, \hat{v})], \quad (59)$$

$$\Pi_{1,t} \equiv E_t^Q \left[\frac{e^{-Z_t} \tilde{f}(\mathbf{x}_T, \hat{v}) 1_{\{\tilde{f}(\mathbf{x}_T, \hat{v}) \geq K\}}}{E_t^Q[e^{-Z_t} \tilde{f}(\mathbf{x}_T, \hat{v})]} \right], \quad (60)$$

$$\Pi_{2,t} \equiv E_t^Q \left[\frac{e^{-Z_t} 1_{\{\tilde{f}(\mathbf{x}_T, \hat{v}) \geq K\}}}{E_t^Q[e^{-Z_t}]} \right], \quad (61)$$

と定義する。また $\Pi_{1,t}$ 、 $\Pi_{2,t}$ に対応する特性関数をそれぞれ、 $\tilde{\Pi}_{1,t}$ 、 $\tilde{\Pi}_{2,t}$ とする。

Chacko and Das [2002] では、ペイオフ $\tilde{f}(\mathbf{x}_T, \hat{v})$ が、次の3種類で表せる金融商品について、 $\Pi_{0,t}$ 、 $\tilde{\Pi}_{1,t}$ 、 $\tilde{\Pi}_{2,t}$ の式を、それぞれ、 $A^*(\theta; \tau, \mathbf{b}, \mathbf{d})$ と $\mathbf{B}^*(\theta; \tau, \mathbf{b}, \mathbf{d})$ の関数として示している²⁰。

- ① \mathbf{X}_t の線形式であるもの
- ② \mathbf{X}_t の指数アフィンであるもの
- ③ \mathbf{X}_t の線形式を一定の期間にわたって積分したもの

この方法により、さまざまな金利派生商品の価格を求めることができる。具体的には、①を用いることで金利のキャップやフロアなど、②を用いることで債券のオプション、先物、先物オプションなど、③を用いることでアジアン・オプションなどの価格を計算することができる。

例えば、②の例として、満期時刻 T におけるペイオフが、

$$\tilde{f}(\mathbf{x}_T, \hat{v}) = \exp(k_0 + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_T), \quad (62)$$

である証券のコール・オプションを考える。このオプションの時刻 t での価格 ((56) 式) は、(58) 式の形で表現でき、 $\Pi_{0,t}$ 、 $\tilde{\Pi}_{1,t}$ 、 $\tilde{\Pi}_{2,t}$ は、それぞれ、

$$\Pi_{0,t} = \exp[A^*(\theta; T-t, \mathbf{b}_0, \mathbf{d}^*) + \mathbf{B}^*(\theta; T-t, \mathbf{b}_0, \mathbf{d}^*) \cdot \mathbf{x}_T], \quad (63)$$

$$\tilde{\Pi}_{1,t} = \frac{1}{\Pi_{0,t}} \exp[A^*(\theta; T-t, \mathbf{b}_1, \mathbf{d}^*) + \mathbf{B}^*(\theta; T-t, \mathbf{b}_1, \mathbf{d}^*) \cdot \mathbf{x}_T], \quad (64)$$

20 具体的な方法や式の形は、Chacko and Das [2002] を参照。

$$\tilde{\Pi}_{2,t} = \frac{1}{P(X_t, t)} \exp[A^*(\theta; T-t, \mathbf{b}_2, \mathbf{d}^*) + \mathbf{B}^*(\theta; T-t, \mathbf{b}_2, \mathbf{d}^*) \cdot \mathbf{x}_T], \quad (65)$$

として求めることができる。ただし、

$$\mathbf{b}_0 = [k_0, \mathbf{k}_1^T]^T, \quad (66)$$

$$\mathbf{b}_1 = (1 + i\omega)[k_0, \mathbf{k}_1^T]^T, \quad (67)$$

$$\mathbf{b}_2 = i\omega[k_0, \mathbf{k}_1^T]^T, \quad (68)$$

である。 $\tilde{\Pi}_{1,t}$ 、 $\tilde{\Pi}_{2,t}$ に一種のフーリエ逆変換

$$\Pi_{j,t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega K} \tilde{\Pi}_{j,t} \right) d\omega, \quad j = 1, 2, \quad (69)$$

を適用することで、 $\Pi_{1,t}$ 、 $\Pi_{2,t}$ を計算することができる。

5. 信用リスクを含むモデル

ここまでは、国債などのように、信用リスクがないと想定しうる金融商品を考えてきた。しかし、社債やLIBOR、スワップ契約においては、発行体やカウンターパーティのデフォルトにより、元本やクーポンなどが支払われない可能性がある。本節では、このような信用リスクを考慮したアフィン・モデルを用いた研究を紹介する。

(1) 信用リスクを含む短期金利

無リスクの瞬間スポット・レート r_t 、ハザード率 h_t 、期待損失率 L_t を用いると、信用リスクを調節した瞬間スポット・レートを、 $R_t = r_t + h_t L_t$ と定義できる。デフォルトが発生しない場合には満期 T で H が支払われ、デフォルト発生時 (T' とする) には、その時点での証券の価値の $(1 - L_{T'})$ 倍が支払われる条件付請求権を考える。Duffie and Singleton [1999] は、この条件付請求権の価格が、リスク中立確率測度 Q のもとで、

$$V_0 = E_0^Q \left[\exp \left(- \int_0^T R_t dt \right) H \right], \quad (70)$$

として計算できることを、以下のように示した。

リスク中立確率測度 Q のもとで、時刻 s から $s + 1$ の間に確率 h_s でデフォルトが発生すると仮定する。また、時刻 $s + 1$ にデフォルトした場合に回収される金額 φ_{s+1} の期待値を時刻 s で評価すると、前述の仮定より、条件付請求権の時刻 $s + 1$ での価格 V_{s+1} を用いて、

$$E_s^Q[\varphi_{s+1}] = (1 - L_s)E_s^Q[V_{s+1}], \quad (71)$$

と表せる。この考え方を RMV (Recovery of Market Value) と呼ぶ²¹。ただし、 h_s と L_s は、 V_t ($t = 1, 2, \dots, s, s + 1, \dots$) と独立であるとする。一方で、 V_t は、

$$V_t = h_t e^{-r_t} E_t^Q[\varphi_{t+1}] + (1 - h_t) e^{-r_t} E_t^Q[V_{t+1}], \quad (72)$$

として計算することができる。 R_t の定義より、

$$e^{-R_t} = (1 - h_t) e^{-r_t} + h_t e^{-r_t} (1 - L_t), \quad (73)$$

が得られ²²、これと、(72) 式に (71) 式を代入したものより、 V_t は、

$$\begin{aligned} V_t &= E_t^Q[e^{-R_t} V_{t+1}] \\ &= E_t^Q \left[\exp \left(- \sum_{j=0}^{T-1} R_{t+j} \right) H \right], \end{aligned} \quad (74)$$

と表現することができる。ただし、 H はデフォルトが起こらなかった場合に満期 $t + T$ で支払われるペイオフである。以上は、離散時間の場合についての議論であるが、デフォルト時刻 T' に V_t がジャンプしない ($\Delta V(T') = 0, \text{ a.s.}$) という仮定のもとでは、連続時間でも同様に考えることができ、(70) 式が導かれる。

このように、一定の仮定を置くことで、信用リスクを伴う条件付請求権の価格を (70) 式のように表せ、これを信用リスクを伴わない条件付請求権の価格と同様の方法で求めることができる。したがって、無リスクの瞬間スポット・レート r_t と、「ショート・スプレッド」 $s_t \equiv h_t L_t$ ²³ をそれぞれ、状態変数ベクトルの線形式で表現することにより、アフィン・モデルの枠組みで、(信用リスクを伴う) 社債や LIBOR、スワップおよびそれらのオプションの価格評価を行うことが可能となる。

21 デフォルト時回収率の設定に同様な仮定を置いているものとして、Duffie and Singleton [1997]、Dai and Singleton [2000] などがある。一方、デフォルトの可能性がなく、同じキャッシュフローをもたらす債券の価格 P_t を用いて、 $\varphi_t = (1 - L_t)P_t$ とモデル化した、Recovery of Treasury という考え方もある。これを用いた例としては、Jarrow and Turnbull [1995]、Lando [1998] などがある。

22 (73) 式からは、 $R_t \cong r_t + h_t L_t$ となるため、 R_t の定義とは厳密には一致しない。

23 一般に瞬間スポット・レートをショート・レートと呼ぶため、これに合わせて s_t をショート・スプレッドと呼ぶ。

(2) 信用リスクを考慮したアフィン・モデル

(70)式を用いて信用リスクを伴う金利派生商品の価格を評価する方法には、① R_t の過程を直接モデル化する、② r_t 、 h_t 、 L_t の過程をそれぞれモデル化するという2種類がある。この2つの方法に沿って、社債、LIBOR、スワップなど信用リスクを考慮すべき金利派生商品の評価について、これまでにさまざまなモデルが研究されてきた。①の方法によるものとして、Duffie and Singleton [1997] が、②の方法によるものとして、Collin-Dufresne and Solnik [2001]、Duffee [1999]、Duffie and Singleton [1999] がある。以下では、これらを紹介する。

①のDuffie and Singleton [1997] は、カウンターパーティがデフォルトする可能性や国債との流動性の違いを反映した割引率 R_t を標準的な2ファクター CIR モデル²⁴でモデル化することで²⁵、LIBOR とスワップ・レートの期間構造を表現した。その結果、満期が長いスワップ・レートへのフィットは良かったものの、6ヵ月 LIBOR などの短期の部分では、自己相関を伴う大きな誤差が生じた。こうした問題に対し、Duffie and Singleton [1997] は、短期の部分の表現力を高める第3のファクターを加えることの有効性を示唆している。

②のDuffee [1999] は、無リスク瞬間スポット・レートを、標準的な2ファクター CIR モデルで表現する一方、これらの2つのファクターと独立な別の確率過程に従う状態変数を加えた3ファクター CIR モデルで、信用リスク全体を「瞬間デフォルト率」としてモデル化した²⁶。そのうえで、デフォルト時の回収率を一定²⁷とし、個別の社債データを用いて、以下のような分析結果を得た²⁸。

- ① 「瞬間デフォルト率」は、現実確率測度のもとでは平均回帰的、リスク中立測度のもとでは平均乖離的（非定常過程）である。
- ② 「瞬間デフォルト率」は、無リスク瞬間スポット・レートと負の相関を持つ²⁹。
- ③ 流動性プレミアムなどの存在により、信用リスクが非常に低い会社の社債であっても、国債などの無リスク金利に対するスプレッドは正になる。
- ④ 格付けの低い会社ほど、満期が長くなるにつれ、スプレッドが急激に拡大する。

24 2つの状態変数が、それぞれ独立した CIR 過程に従うモデル。このモデルは、Pearson and Sun [1994] によって提案された。

25 CIR 型のモデルでは、状態変数が負の値を取ることができないため、スワップ・レートの水準や傾きが時刻とともに大きく変化する様子を捉えることができない。この問題を解決するため、Duffie and Singleton [1997] では、定数項を引いた形で、割引率を表現している ($R_t = Y_t^1 + Y_t^2 - \bar{y}$)。

26 第3のファクターのみで信用リスクを表現するのではなく、無リスクの瞬間スポット・レートを表す2つのファクターとともに用いているため、信用リスクと同スポット・レートは独立とはならない。また、厳密には流動性リスクなども第3のファクターに混在している。

27 具体的には、ムーディーズのデータをもとに、44% に固定して分析を行っている。

28 個別社債の代わりにインデックス・データを用いた同様の研究としては、社債インデックスとスワップ・スプレッドのインデックスを用いた Nielsen and Ronn [1996]、スワップ・スプレッドのインデックスを用いた Grinblatt [2001] や Duffie and Singleton [1997] を挙げることができる。

29 デフォルト率と金利に負の相関があることを指摘した分析としては、例えば、Longstaff and Schwartz [1995]、Duffee [1998] を参照。

一般に、同一企業に対する債権では、社債はスワップ契約よりも大きな信用リスクを抱えている。これは、社債は元本・利子とも信用リスクに晒されるのに対して、スワップは利子部分のリスクのみしか負わないうえ、このリスクも担保や値洗いによって軽減されるためである。Collin-Dufresne and Solnik [2001] は、スワップよりも社債の信用リスクが大きいことを検証するために、LIBOR 債券³⁰のイールドと LIBOR スワップ・レートに対するスプレッドとして定義した、「債券スワップ・スプレッド」について、以下のような分析を行った。

無リスク瞬間スポット・レートとその中心回帰水準をそれぞれガウシアン・モデルで表し、信用スプレッドをジャンプ拡散過程で表現した 3 ファクター・モデルを考える³¹。信用スプレッドのジャンプは、将来の信用度の急激な変化の可能性を考慮したものである。さらに、スワップ契約には信用リスクがない³²という仮定を加えることで、債券スワップ・スプレッドが正になることを説明した。

以上の研究は、いずれも、ガウシアン・モデル ($A_0(N)$)、または CIR 型モデル ($A_N(N)$) を用いたものである。しかし、1 節で述べたように、これらのモデルには、それぞれ問題点がある。まず、ガウシアン・モデルでは、すべての状態変数が負の値を取りうるが、それらの線形関数としてモデル化される、無リスク瞬間スポット・レートや信用リスクが負になることは、現実的ではない。一方、CIR 型モデルでは、状態変数間の負の相関が表現できない。しかし、前述のように、信用リスクが無リスク瞬間スポット・レートと負の相関を持つ傾向があることを考えると、信用リスクを含む金利の確率過程をモデル化するうえでは、やはり不都合が生じる。

そこで、Duffie and Singleton [1999] では、例えば 3 ファクターの場合には $A_1(3)$ や $A_2(3)$ クラスというように、ガウシアン・モデルと CIR 型モデルの中間のアフィン・モデルを用いて、無リスクの瞬間スポット・レートや信用リスクの非負性を保ちつつ、信用リスクと無リスク瞬間スポット・レートの間に負の相関を許容するようにモデル化することにより、信用リスクを伴う金融商品の価格特性を、より現実的に表現できる可能性について言及している。

6. アフィン・モデルを用いたマクロ・ファイナンス

従来、アフィン・モデルの開発・実証分析においては、各状態変数は直接観察不能な潜在変数として扱われてきた。一方で、Litterman and Scheinkman [1991] などが指摘しているように、イールド・カーブは、「水準」「傾き」「曲率」の 3 つのファクターで説明できることが広く知られている。アフィン・モデルの潜在変数は、こ

30 高格付け企業が、同年限の LIBOR を参照して発行する固定利付き債券であり、店頭取引されている。

31 各ファクター（状態変数）の確率過程が含むブラウン運動の間には、相関があるものと仮定している。

32 ただし、スワップ・レートは、6 ヶ月 LIBOR に基づいて決まるため、信用スプレッドのファクターは 6 ヶ月 LIBOR レートを通じて、スワップ・レートに影響を与える。

これらのファクターに対応していると考えられ、推定された状態変数の変動を解釈することが試みられてきた。

これに対して、近年では、イールド・カーブを表現する潜在変数だけでなく、マクロ経済変数など金融政策に影響を与える要因や、それらに対する市場の期待、あるいは政策金利の誘導目標そのものを状態変数とするアプローチが登場している。このようなモデル化手法により、イールド・カーブの表現力や将来のイールド・カーブの予測力を高める研究³³や、イールド・カーブの形状・変動とマクロ経済変数の関係を分析する研究³⁴が行われている。こうした研究分野は、マクロ経済学とファイナンスが融合してできたことから、「マクロ・ファイナンス」と呼ばれる。アフィン・モデルは、その線形性から、マクロ経済構造や中央銀行の政策反応を組み込みやすく、マクロ・ファイナンス・モデルに多用されている。本節では、こうしたアフィン・モデルに基づく近年の研究成果をいくつか紹介する。まず、マクロ経済変数を状態変数に用いた研究として、Ang and Piazzesi [2003]³⁵と Dewachter and Lyrio [2006] を紹介する³⁶。これらは、いずれもエッセンシャル・アフィン・モデルに属する。次に、政策金利の誘導目標を状態変数に用いたものとして、Piazzesi [2005] を紹介する。このモデルは、ジャンプを含むコンプリートリー・アフィン・モデルの一種である。

(1) マクロ経済変数を取り入れたアフィン・モデル

Ang and Piazzesi [2003] は、金利の期間構造を表現する3つの潜在変数に、2つのマクロ経済変数（インフレ率と経済成長率）およびそれらのラグ項を加えたアフィン・モデルを提案し、これを用いてマクロ経済変数がイールド・カーブのダイナミクスに与える影響を分析した。

インフレ率と経済成長率という観察可能な2つのマクロ経済変数と、それらの11次までのラグ項からなる状態変数ベクトル $\mathbf{X}_t^o = (f_t^{oT}, f_{t-1}^{oT}, \dots, f_{t-11}^{oT})^T$ を考える。一方、金利の期間構造を表現する潜在変数ベクトルを $\mathbf{X}_t^u = f_t^{uT}$ とする。これらを用いて、状態変数ベクトル $\mathbf{X}_t = (\mathbf{X}_t^{oT}, \mathbf{X}_t^{uT})^T$ を定義し、 \mathbf{X}_t が、ガウシアン VAR

33 逆に、コンプリートリー・アフィン・モデルを用いて GDP の予測を試みた研究として、Ang, Piazzesi, and Wei [2006] がある。

34 一種の線形モデルである VAR (Vector Autoregression) モデルを用いて、イールドとマクロ経済変数の関係を分析した研究として、Estrella and Mishkin [1997]、Evans and Marshall [1998] などがある。また、Rudebusch and Wu [2004, 2007] は誘導形ニューケインジアン・モデルに潜在変数を加えたアフィン・モデルを考案、Wu [2006] は動学的確率的一般均衡 (Dynamic Stochastic General Equilibrium) モデルからアフィン・モデルを導出し、それぞれイールド・カーブの形状・変動とマクロ経済変数の関係を分析している。さらに、Wachter [2006] では、消費モデルからアフィン・モデルを導いている。

35 Ang and Piazzesi [2003] に類似したモデルとして Duffee [2006] がある。同論文は、イールド・カーブとマクロ経済変数の関係を抽出するうえで潜在変数の推計が不要な、効率的推計方法を考案している。

36 このほか、構造型マクロモデルに金利の無裁定条件を加えたモデルとして Hördarl, Tristani, and Vestin [2006] がある。このモデルでは、「マクロ経済変数は瞬間スポット・レートと独立に決まる」という Ang and Piazzesi [2003] の制約が緩められており、金利の予測力が高いとの結果が得られている。

モデルの過程

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \Phi \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (75)$$

に従うと仮定する。ただし、 $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\mathbf{u}_t^{oT}, 0, \dots, 0, \mathbf{u}_t^{uT})^T$ は、各変数へのショックである。瞬間スポット・レート r_t は、状態変数ベクトル \mathbf{X}_t の線形関数として表す³⁷。

$$r_t = r(\mathbf{X}_t) = \delta_0 + \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \mathbf{X}_t. \quad (76)$$

また、リスクの市場価格も、以下のように \mathbf{X}_t の線形関数でモデル化する。

$$\boldsymbol{\Lambda}_t = \boldsymbol{\lambda}_0 + \boldsymbol{\lambda}_1 \mathbf{X}_t. \quad (77)$$

(75)~(77) 式から、このモデルは、エッセンシャル・アフィン・モデル ($A_0(N)$) の離散型とみなすことができる。このモデルでは、リスクの市場価格を (77) 式のように定義していることから、潜在変数だけでなく、マクロ経済変数によっても、リスクの市場価格が時間とともに変化する様子を説明することができる。

Ang and Piazzesi [2003] は、米国債データを用いて、マクロ経済変数と金利の期間構造の関係を分析した結果³⁸、①イールド・カーブの短期から中期の部分の変動は、マクロ経済変数によって説明できること、②潜在変数のうち「水準」と「傾き」を表現するファクター (\mathbf{X}_t^u のうちの2変数) は、マクロ経済変数から成る状態変数 \mathbf{X}_{t-1}^o に影響される一方、③「水準」を表すファクターのショック項 (\mathbf{u}_t^u の1つ) には強い自己相関が残ったため、マクロ経済変数や他のファクター \mathbf{X}_{t-1}^u だけでは説明しきれない部分もあることなどを示した。また、金利の期間構造に無裁定条件を課すと同時に、マクロ経済変数の時系列特性を考慮することで、無裁定条件を満たしていない従来の VAR モデルや、潜在変数のみで構築した期間構造モデルに比べて、将来のイールドに関する予測パフォーマンスが向上し、ランダム・ウォーク・モデルよりも高い予測力を得られるという結果も示された。

しかし、Ang and Piazzesi [2003] では、瞬間スポット・レートの中心回帰水準を時間によらず一定としているため、イールド・カーブの長期の部分の表現力が低いという短所がある³⁹。こうした問題意識のもと、Dewachter and Lyrio [2006] は、マクロ経済変数とそれらの長期的な中心回帰水準に関する期待を取り込んだ以下のようなエッセンシャル・アフィン・モデルを提案した。

37 (75) 式は、Clarida, Gali, and Gertler [2000] のフォワード・ルッキング型テラー・ルール・モデルに、イールドの潜在変数項を加えたものとみることでもできる。

38 実証分析は、①マクロ経済変数と潜在変数は互いに独立と仮定する、②各状態変数に対するリスクの市場価格はラグ項についてはゼロと仮定するなど、行列 Φ 、 $\boldsymbol{\Sigma}$ 、 $\boldsymbol{\lambda}_1$ のいくつかの要素にゼロ制約を課したモデルで行っている。

39 Kozicki and Tinsley [2001] は、短期金利の中心回帰水準のシフトによって、イールドの非正常性を説明し、このシフトが、金融政策における長期的な物価目標に対する市場の認識の変化と解釈できることを主張している。

y_t をアウトプット・ギャップ、 π_t をインフレ率、 ρ_t を瞬間実質金利、 π_t と ρ_t の中心回帰水準をそれぞれ π_t^* 、 ρ_t^* とする。アウトプット・ギャップの中心回帰水準 y_t^* はゼロとする。このとき、4次元の状態変数ベクトル $\mathbf{X}_t \equiv (y_t, \pi_t, \rho_t, \pi_t^*)$ が、次のような確率微分方程式を満たしていると仮定する。

$$d\mathbf{X}_t \equiv (\boldsymbol{\Psi} + \mathbf{K}\mathbf{X}_t) dt + \mathbf{S} d\mathbf{W}_t, \quad (78)$$

ただし、 \mathbf{W}_t は、現実確率測度のもとで、互いに独立なウィナー過程であるとし、各パラメータは次の形であるとする。

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{yy} & k_{y\pi} & k_{y\rho} & -k_{y\pi} - k_{y\rho}\gamma_{\pi^*} \\ k_{\pi y} & k_{\pi\pi} & k_{\pi\rho} & -k_{\pi\pi} - k_{\pi\rho}\gamma_{\pi^*} \\ k_{\rho y} & k_{\rho\pi} & k_{\rho\rho} & -k_{\rho\pi} - k_{\rho\rho}\gamma_{\pi^*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (79)$$

$$\boldsymbol{\Psi} = (-k_{y\rho}\gamma_0, -k_{\pi\rho}\gamma_0, -k_{\rho\rho}\gamma_0, 0)^T, \quad (80)$$

$$\mathbf{S} \equiv \text{diag}(\sigma_y, \sigma_\pi, \sigma_\rho, \sigma_{\pi^*}). \quad (81)$$

各状態変数の中心回帰水準は、以下の条件を満たすものとする。

$$\rho_t^* = \gamma_0 + \gamma_{\pi^*}\pi_t^*, \quad (82)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E_t[y_s] = 0, \quad (83)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E_t[\pi_s | \pi_t^*] = \pi_t^*, \quad (84)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E_t[\rho_s | \rho_t^*] = \rho_t^*. \quad (85)$$

瞬間スポット・レート r_t を、

$$r_t \equiv \pi_t + \rho_t, \quad (86)$$

と定義する。

一方、リスクの市場価格は、(28) 式を用いて、

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{S}\boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\lambda}_2\mathbf{X}_t, \quad (87)$$

と定義する⁴⁰。ただし、 $\boldsymbol{\lambda}_1 \equiv (\lambda_y, \lambda_\pi, \lambda_\rho, \lambda_{\pi^*})^T$ であり、 $\boldsymbol{\lambda}_2$ は 4×4 行列である。

Dewachter and Lyrio [2006] は、米国債データを用いた実証分析の結果、①期待インフレ率の上昇とともにリスクの市場価格が上昇する傾向があること、②満期が

40 この場合は \mathbf{S}_t が定数行列 ($\mathbf{S}_t = \mathbf{S}$) であるため、 \mathbf{S}_t^- の定義 ((29) 式) より、 $\mathbf{S}_t^- = \mathbf{S}^{-1}$ となる。

1年以上のイールドでは、マクロ経済変数を用いない3ファクターのエッセンシャル・アフィン・モデルと比べてフィットが改善することを示した。前者は、長期金利の変動を説明するうえで、期待インフレ率が大きな役割を果たすことを示唆しており、後者はマクロ経済動向が重要であることを示している。また、金利の期間構造を表現する潜在変数の経済的な解釈を試みた結果、イールド・カーブの「水準」は長期のインフレ期待と、「傾き」は景気循環と、「曲率」は金融政策と、それぞれ強く結びついているという結論を得ている。

(2) 政策金利を取り入れたアフィン・モデル

金利の期間構造を表現するうえで、政策金利の変更は極めて重要な要因である。そこで、Piazzesi [2005] は、中央銀行による政策金利の誘導目標 θ_t を、状態変数 $\mathbf{X}_t = (\theta_t, s_t, v_t, z_t)$ の1つに取り込んだ、次のモデルを提案した。

$$d\theta_t = 0.0025(dN_t^U - dN_t^D), \quad (88)$$

$$ds_t = -\kappa_s s_t dt + \sqrt{v_t} dW_t^s, \quad (89)$$

$$dv_t = -\kappa_v (\bar{v} - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v, \quad (90)$$

$$dz_t = -\kappa_z z_t dt + dW_t^z. \quad (91)$$

ただし、 s_t は誘導目標と瞬間スポット・レートの乖離 $r_t - \theta_t$ であり、 W^s 、 W^v 、 W^z は、現実確率測度のもとで、互いに独立なブラウン運動に従うものとする。また、 N^U と N^D は確率的な強度 λ^U 、 λ^D を持つ計数過程 (counting process) であり、連邦公開市場委員会 (FOMC) 期間中のみ、

$$\lambda_t^U = \bar{\lambda} + \lambda_X \cdot (\mathbf{X}_t - \bar{\mathbf{X}}), \quad (92)$$

$$\lambda_t^D = \bar{\lambda} - \lambda_X \cdot (\mathbf{X}_t - \bar{\mathbf{X}}), \quad (93)$$

に従って変化しうると仮定する⁴¹。ここで、 $\bar{\lambda}$ は λ_t^U と λ_t^D に共通の平均値である。潜在変数 z_t は、中央銀行であるFRBが誘導目標 θ_t の設定を考える際に参照する情報であり、現在もしくは先行きのマクロ経済動向を示す情報と想定できる。 z_t は、(88)、(92)、(93)式を通じて、誘導目標 θ_t の変更に影響を与える。変更幅は、1回のFOMC当たり0.25%に固定した⁴²。 v_t は誘導目標からの乖離 s_t のボラティリティである((89)式)。同ボラティリティは、平均値 \bar{v} の周りで確率変動するようモデル化した((90)式)。また、潜在変数 z_t はガウシアン過程((91)式)に従うとした。

41 1994年以降、米国では、原則としてFOMC期間中に政策金利の変更を行っている。しかし、例外としてFOMC期間外に変更が行われたこともあるため、Piazzesi [2005] は、FOMC期間以外では、 λ をゼロに固定せず、 $\lambda^U = \lambda^D = 0.2$ と仮定してモデルを推計している。

42 米国の政策金利の最小単位は、1994年以降、0.25%とされている。

リスクの市場価格は、

$$A = (0, q_s, q_v, q_z), \quad (94)$$

と、定数としてモデル化した。このモデルでは、 θ_t がジャンプ過程に従っているが、(92)、(93) 式のように、ジャンプの強度が状態変数の線形式になっているほか、2～4 節で示した各種条件を満たしており、アフィン・モデルの枠組みでモデル化することができる。

LIBOR とスワップのデータを用いた実証分析の結果、Piazzesi [2005] では、このモデルが、Dai and Singleton [2000] の 3 ファクター・モデルと比べて、短期のイールドの表現力が高いことを示している⁴³。このことは、FRB による政策金利の誘導目標の設定が、イールド・カーブの動き、特に FOMC 期間中の動きを説明するうえで、重要なファクターであることを示している。また、中央銀行が参照する潜在変数 z_t （現在もしくは先行きのマクロ経済動向を示す情報）が、満期 2 年のイールドと相関が高いという実証結果が得られた。これは、FRB が政策金利の誘導目標を決定する際に、特に 2 年程度先の経済動向の見通しが大きく影響することを意味している。

このように、中央銀行による政策金利の誘導目標を状態変数に加えたアフィン・モデルを用いることにより、金融政策の変更が、市場で形成されるイールド・カーブに与える影響や、逆に、中央銀行が金融政策を決定する際に参照する市場の情報を分析することが可能となる。こうした点で、本邦市場のデータについても同様の分析を試みることは、興味深い研究テーマであると考えられる。

7. おわりに

1970 年代以降、ファイナンスの分野では、無裁定条件のもとで金利の期間構造を表現するモデルの研究が、数多く行われてきた。その中でも、アフィン・モデルは、任意の時刻における任意の満期の割引債のイールドを、状態変数ベクトルの線形関数で表現するものであり、債券や金利派生商品の価格付けが比較的容易にできるため、学界、実務界の両方で中心的な役割を果たしている。そこで、本稿では、リスクの市場価格、ジャンプ拡散過程、信用リスクへの応用に焦点を当てて、これまでのアフィン・モデルの発展を整理した。

従来のアフィン・モデルでは、潜在変数を状態変数としてモデル化が行われてきた。こうした潜在変数は、しばしば、イールド・カーブの水準、傾き、曲率を表現するファクターであると考えられてきたが、経済学的な解釈を与えることは困難で

43 具体的には、1 ヶ月、3 ヶ月 LIBOR との誤差 (RMSE) が小さく、現実のデータで観察されるように、 r_t の推計値と 6 ヶ月 LIBOR の相関が高かった。

あった。これに対して、近年では、状態変数にマクロ経済変数や政策金利を取り込むことで、経済成長率やインフレ率と金利の期間構造の関係の解明を試みる研究が盛んに行われており、政策インプリケーションを持つ実証分析結果が得られつつある。マクロ・ファイナンスと呼ばれるこの分野は、マクロ経済学とファイナンスの両分野におけるこれまでの蓄積を活用することで、今後、大きく発展していく可能性を秘めている。

補論 1. (41) 式と (42) 式について

状態変数ベクトル X_t が、確率空間 (Ω, \mathcal{F}, Q) で、(31)、(37)~(40) 式を満たしているとする。 $\mathcal{X} = (\mathbf{K}, \mathbf{H}, l, \theta, \rho)$ が、

$$E\left(\int_0^T |\gamma_t| dt\right) < \infty, \quad \gamma_t = \Psi_t(\theta(\boldsymbol{\beta}(t)) - 1)\lambda(X_t), \quad (\text{A-1})$$

$$E\left[\left(\int_0^T \boldsymbol{\eta}_t \cdot \boldsymbol{\eta}_t dt\right)^{1/2}\right] < \infty, \quad \boldsymbol{\eta}_t = \Psi_t \boldsymbol{\beta}(t)^\top \boldsymbol{\sigma}(X_t), \quad (\text{A-2})$$

$$E(|\Psi_T|) < \infty, \quad \Psi_t = \exp\left(-\int_0^t r(X_s) ds\right) e^{\alpha(t) + \boldsymbol{\beta}(t) \cdot X(t)}, \quad (\text{A-3})$$

の条件を満たすとき、 $(\mathbf{K}, \mathbf{H}, l, \theta, \rho)$ は、 $(\mathbf{u}, T) \in \mathbb{C}^n \times [0, \infty)$ において、“well-behaved” であると呼ばれ、(41) 式が成り立つ。伊藤の補題とファインマン・カックの公式より、(32) 式と同様に、

$$\boldsymbol{\beta}'(t) = \boldsymbol{\rho}_1 - \mathbf{K}_1^\top \boldsymbol{\beta}(t) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}(t)^\top \mathbf{H}_1 \boldsymbol{\beta}(t) - l_1 \{\theta(\boldsymbol{\beta}(t)) - 1\}, \quad \boldsymbol{\beta}(T) = \mathbf{u}, \quad (\text{A-4})$$

$$\alpha'(t) = \rho_0 - \mathbf{K}_0 \cdot \boldsymbol{\beta}(t) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}(t)^\top \mathbf{H}_0 \boldsymbol{\beta}(t) - l_0 \{\theta(\boldsymbol{\beta}(t)) - 1\}, \quad \alpha(T) = 0, \quad (\text{A-5})$$

を解くことで、 $\alpha(t)$ と $\boldsymbol{\beta}(t)$ の具体的な形を求めることができる。

さらに、“well-behaved” であることに加えて、 $(\mathbf{K}, \mathbf{H}, l, \theta, \rho)$ が、 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}, T) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^n \times [0, \infty)$ において、

$$E\left(\int_0^T |\tilde{\gamma}_t| dt\right) < \infty, \quad \tilde{\gamma}_t = \lambda(X_t) [\Phi_t \{\theta(\boldsymbol{\beta}(t)) - 1\} + \Psi_t \nabla(\theta(\boldsymbol{\beta}(t))) \cdot \mathbf{B}(t)], \quad (\text{A-6})$$

$$E\left[\left(\int_0^T \tilde{\boldsymbol{\eta}}_t \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}}_t dt\right)^{1/2}\right] < \infty, \quad \tilde{\boldsymbol{\eta}}_t = \Phi_t (\boldsymbol{\beta}(t) + \mathbf{B}(t))^\top \boldsymbol{\sigma}(X_t), \quad (\text{A-7})$$

$$E[|\Phi_T|] < \infty, \quad \Phi_t = \Psi_t (A(t) + \mathbf{B}(t) \cdot X_t), \quad (\text{A-8})$$

を満たすとき、 $(\mathbf{K}, \mathbf{H}, l, \theta, \rho)$ は “extended well-behaved” であると呼ばれ、

$$-\mathbf{B}'(t) = \mathbf{K}_1^\top \mathbf{B}(t) - \boldsymbol{\beta}(t)^\top \mathbf{H}_1 \boldsymbol{\beta}(t) + l_1 \nabla(\theta(\boldsymbol{\beta}(t))) \cdot \mathbf{B}(t), \quad \mathbf{B}(T) = \mathbf{v}_1, \quad (\text{A-9})$$

$$-A'(t) = \mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{B}(t) + \boldsymbol{\beta}(t)^T \mathbf{H}_0 \mathbf{B}(t) + l_0 \nabla(\theta(\boldsymbol{\beta}(t))) \cdot \mathbf{B}(t), \quad A(T) = 0, \quad (\text{A-10})$$

を満たす $A(t)$ と $\mathbf{B}(t)$ によって、(42) 式が成り立つ。

補論 2. (44) 式の成立条件と導出

$$G_{a,b}(y; \mathbf{X}_0, T, \mathcal{X}) = E^{\mathcal{X}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(\mathbf{X}_s) ds \right) e^{a \cdot \mathbf{X}_T} 1_{b \cdot \mathbf{X}_T \leq y} \right], \quad (\text{A-11})$$

に、フーリエ・スティルチェス変換を施すと、

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{a,b}(v; \mathbf{X}_0, T, \mathcal{X}) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i v y} dG_{a,b}(y; \mathbf{X}_0, T, \mathcal{X}) \\ &= E^{\mathcal{X}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(\mathbf{X}_s) ds \right) \exp \{ (\mathbf{a} + i v \mathbf{b}) \cdot \mathbf{X}_T \} \right] \\ &= \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a} + i v \mathbf{b}, \mathbf{X}_0, 0, T), \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

となる。任意の v について、 $\mathcal{X} = (\mathbf{K}, \mathbf{H}, l, \theta, \rho)$ が、 $(\mathbf{a} + i v \mathbf{b}, T)$ で “well-behaved” であり、

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a} + i v \mathbf{b}, x, 0, T)| dv < \infty, \quad (\text{A-13})$$

のとき、(A-11) 式で定義される $G_{a,b}(\cdot, \mathbf{x}, T, \mathcal{X})$ が発散することなく、(44) 式のように計算することができる。このことを以下に示す。

まず、 $0 < \tau < \infty$ と、固定した $y \in \mathbb{R}$ について、

$$\begin{aligned} & \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{i v y} \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a} - i v \mathbf{b}, x, 0, T) - e^{-i v y} \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a} + i v \mathbf{b}, x, 0, T)}{i v} dv \\ &= \int_{-\tau}^{\tau} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i v(z-y)} - e^{i v(z-y)}}{i v} dG_{a,b}(z; x, T, \mathcal{X}) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{-i v(z-y)} - e^{i v(z-y)}}{i v} dv dG_{a,b}(z; x, T, \mathcal{X}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} -2 \operatorname{sgn}(z - y) \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\sin(v|z - y|)}{v} dv dG_{a,b}(z; x, T, \mathcal{X}), \end{aligned} \quad (\text{A-14})$$

が成り立つ。最初の等号は、(A-12) 式の逆変換によるものである。2 番目の等号は、(A-13) 式の条件より、フビニの定理が成り立つためであり、3 番目の等号は、

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (\text{A-15})$$

の関係を用いたものである。

ここで、

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\sin(v|z-y|)}{v} dv = \pi, \quad (\text{A-16})$$

であることから、(A-14) 式より

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{ivy} \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a} - iv\mathbf{b}, x, 0, T) - e^{-ivy} \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a} + iv\mathbf{b}, x, 0, T)}{iv} dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} -\text{sgn}(z-y) dG_{a,b}(z; x, T, \mathcal{X}) \\ &= \int_{-\infty}^y dG_{a,b}(z; x, T, \mathcal{X}) - \int_y^{\infty} dG_{a,b}(z; x, T, \mathcal{X}) \\ &= 2 \int_{-\infty}^y dG_{a,b}(z; x, T, \mathcal{X}) - \int_{-\infty}^{\infty} dG_{a,b}(z; x, T, \mathcal{X}), \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

が導かれる。したがって、 $\lim_{y \rightarrow -\infty} G_{a,b}(y; x, T, \mathcal{X}) = 0$ と (A-12) 式より、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ivy} \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a} - iv\mathbf{b}, x, 0, T) - e^{-ivy} \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a} + iv\mathbf{b}, x, 0, T)}{iv} dv \\ &= 2G_{a,b}(y; x, T, \mathcal{X}) - \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a}, x, 0, T), \end{aligned} \quad (\text{A-18})$$

となる。最後に、 $e^{ivy} \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a} - iv\mathbf{b}, x, 0, T)$ と $e^{-ivy} \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a} + iv\mathbf{b}, x, 0, T)$ は複素共役であることから、

$$\begin{aligned} & \frac{e^{ivy} \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a} - iv\mathbf{b}, x, 0, T) - e^{-ivy} \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a} + iv\mathbf{b}, x, 0, T)}{iv} \\ &= -2 \frac{\text{Im}[e^{-ivy} \psi^{\mathcal{X}}(\mathbf{a} + iv\mathbf{b}, x, 0, T)]}{v}, \end{aligned} \quad (\text{A-19})$$

であり、これを (A-18) 式に代入すると、(44) 式が得られる。

参考文献

- Ahn, Dong-Hyun, Robert F. Dittmar, and A. Ronald Gallant, "Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence," *Review of Financial Studies*, 15 (1), 2002, pp. 243–288.
- , ———, ———, and Bin Gao, "Purebred or Hybrid?: Reproducing the Volatility in Term Structure Dynamics," *Journal of Econometrics*, 116, 2003, pp. 147–180.
- Ang, Andrew, and Monica Piazzesi, "A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables," *Journal of Monetary Economics*, 50 (4), 2003, pp. 745–787.
- , ———, and Min Wei, "What Does the Yield Curve Tell Us about GDP Growth?" *Journal of Econometrics*, 131, 2006, pp. 359–403.
- Bakshi, Gurdip, Charles Cao, and Zhiwu Chen, "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models," *Journal of Finance*, 52 (5), 1997, pp. 2003–2049.
- Balduzzi, Pierluigi, Sanjiv R. Das, Silverio Foresi, and Rangarajan K. Sundaram, "A Simple Approach to Three Factor Affine Term Structure Models," *Journal of Fixed Income*, 6 (3), 1996, pp. 43–53.
- Bates, David, "Post-'87 Crash Fears in S&P 500 Future Options," *Journal of Econometrics*, 94, 2000, pp. 181–238.
- Chacko, George, and Sanjiv Das, "Pricing Interest Rate Derivatives: A General Approach," *Review of Financial Studies*, 15 (1), 2002, pp. 195–241.
- Chen, Li, Damir Filipovic, and H. Vincent Poor, "Quadratic Term Structure Models for Risk-free and Defaultable Rates," *Mathematical Finance*, 14 (4), 2004, pp. 515–536.
- Chen, Lin, *Stochastic Mean and Stochastic Volatility—A Three-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates and Its Application to the Pricing of Interest Rate Derivatives*, Blackwell Publishers, Oxford U.K., 1996.
- Chen, Ren-Raw, and Louis Scott, "Maximum Likelihood Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Fixed Income*, 3 (3), 1993, pp. 14–31.
- Clarida, Richard, Jordi Gali, and Mark Gertler, "Monetary Policy Rules and Economic Stability: Evidence and Some Theory," *Quarterly Journal of Economics*, 115 (1), 2000, pp. 147–180.
- Collin-Dufresne, Pierre, and Bruno Solnik, "On the Term Structure of Default Premia in the Swap and LIBOR Market," *Journal of Finance*, 56 (3), 2001, pp. 1095–1115.
- Cox, John C., Johnathan E. Ingersoll, and Stephen A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53 (2), 1985, pp. 385–407.
- Dai, Qiang, and Kenneth Singleton, "Specification Analysis of Affine Term Structure Models," *Journal of Finance*, 55 (5), 2000, pp. 1943–1978.

- , and ——, “Expectation Puzzles, Time-varying Risk Premia, and Affine Models of the Term Structure,” *Journal of Financial Economics*, 63 (3), 2002, pp. 415–441.
- Das, Sanjiv, “The Surprise Element: Jumps in Interest Rates,” *Journal of Econometrics*, 106 (1), 2002, pp. 27–65.
- Dewachter, Hans, and Marco Lyrio, “Macro Factors and the Term Structure of Interest Rates,” *Journal of Money, Credit, and Banking*, 38 (1), 2006, pp. 119–140.
- Duarte, Jefferson, “Evaluating an Alternative Risk Preference in Affine Term Structure Models,” *Review of Financial Studies*, 17 (2), 2004, pp. 379–404.
- Duffee, Gregory, “The Relation between Treasury Yields and Corporate Bond Yield Spreads,” *Journal of Finance*, 53 (6), 1998, pp. 2225–2241.
- , “Estimating the Price of Default Risk,” *Review of Financial Studies*, 12 (1), 1999, pp. 197–226.
- , “Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models,” *Journal of Finance*, 57 (1), 2002, pp. 405–443.
- , “Term Structure Estimation without Using Latent Factors,” *Journal of Financial Economics*, 79 (2), 2006, pp. 359–403.
- Duffie, Darrell, and Rui Kan, “A Yield-Factor Model of Interest Rates,” *Mathematical Finance*, 6 (4), 1996, pp. 379–406.
- , Jun Pan, and Kenneth Singleton, “Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions,” *Econometrica*, 68 (6), 2000, pp. 1343–1376.
- , and Kenneth Singleton, “An Economic Model of the Term Structure of Interest-Rate Swap Yields,” *Journal of Finance*, 52 (4), 1997, pp. 1287–1321.
- , and ——, “Modeling Term Structures of Defaultable Bonds,” *Review of Financial Studies*, 12 (4), 1999, pp. 687–720.
- Estrella, Arturo, and Frederic S. Mishkin, “The Predictive Power of the Term Structure of Interest Rates in Europe and the United States: Implications for the European Central Bank,” *European Economic Review*, 41 (7), 1997, pp. 1375–1401.
- Evans, Charles L., and David A. Marshall, “Monetary Policy and the Term Structure of Nominal Interest Rates: Evidence and Theory,” *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 49, 1998, pp. 53–111.
- Fisher, Mark, and Christian Gilles, “Estimating Exponential-Affine Models of the Term Structure,” working paper, Federal Reserve Board, 1996.
- Grinblatt, Mark, “An Analytic Solution for Interest Rate Swap Spreads,” *International Review of Finance*, 2 (3), 2001, pp. 113–149.
- Hördarl, Peter, Oreste Tristani, and David Vestin, “A Joint Econometric Model of Macroeconomic and Term Structure Dynamics,” *Journal of Econometrics*, 131, 2006, pp. 405–444.

- Hull, John, and Allan White, "Pricing Interest-rate-derivative Securities," *Review of Financial Studies*, 3 (4), 1990, pp. 573–592.
- Jarrow, Robert A., and Stuart M. Turnbull, "Pricing Options on Financial Securities Subject to Default Risk," *Journal of Finance*, 50 (1), 1995, pp. 53–86.
- Jiang, George J., and Shu Yan, "Affine-Quadratic Term Structure Models—Toward the Understanding of Jumps in Interest Rate," working paper, 2006.
- Johannes, Michael, "The Statistical and Economic Role of Jumps in Continuous-Time Interest Rate Models," *Journal of Finance*, 59 (1), 2004, pp. 227–260.
- Kozicki, Sharon, and P. A. Tinsley, "Shifting Endpoints in the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Monetary Economics*, 47 (3), 2001, pp. 613–652.
- Lando, David, "On Cox Processes and Credit-Risky Securities," *Review of Derivatives Research*, 2 (2/3), 1998, pp. 99–120.
- Litterman, Robert, and Jose Scheinkman, "Common Factors Affecting Bond Returns," *Journal of Fixed Income*, 1 (1), 1991, pp. 54–61.
- Longstaff, Francis, and Eduardo Schwartz, "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt," *Journal of Finance*, 50 (3), 1995, pp. 789–820.
- Nielsen, Soren S., and Ehud I. Ronn, "The Valuation of Default Risk in Corporate Bonds and Interest Rate Swaps," working paper, University of Texas at Austin, 1996.
- Pearson, Neil, and Tong-Sheng Sun, "Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross Model," *Journal of Finance*, 49 (4), 1994, pp. 1279–1304.
- Piazzesi, Monika, "Bond Yields and the Federal Reserve," *Journal of Political Economy*, 113 (2), 2005, pp. 311–344.
- Rudebusch, Glenn D., and Tao Wu, "A Macro-Finance Model of the Term Structure, Monetary Policy, and the Economy," working paper, Federal Reserve Bank of San Francisco, 2004.
- , and ———, "Accounting for a Shift in Term Structure Behavior with No-Arbitrage and Macro-Finance Models," *Journal of Money, Credit, and Banking*, 39 (2/3), 2007, pp. 395–422.
- Singleton, Kenneth, "Estimation of Affine Asset Pricing Models Using the Empirical Characteristic Function," *Journal of Econometrics*, 102 (1), 2001, pp. 111–141.
- , *Empirical Dynamic Asset Pricing*, Princeton University Press, 2006.
- Vasicek, Oldrich A., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5 (2), 1977, pp. 177–188.
- Wachter, Jessica A., "A Consumption-Based Model of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial Economics*, 79 (2), 2006, pp. 365–399.
- Wu, Tao, "Macro Factors and the Affine Term Structure of Interest Rates," *Journal of Money, Credit, and Banking*, 38 (7), 2006, pp. 1847–1875.

Zhou, Hao, “Jump-Diffusion Term Structure and Ito Conditional Moment Generator,”
working paper, Federal Reserve Board, 2001.

