

信用VaRの債務者別分解とパラメータ感応度： 条件付鞍点法によるVaR解析表現法の応用

きくちけんたろう
菊池健太郎

要 旨

信用リスク計測技術の進展により、与信ポートフォリオ全体の信用リスク量を債務者別に分解することが可能となった。こうした技術は、与信の大口集中リスクの把握や、リスク配賦資本にかかるコストを加味した収益性評価に活用していくことができる。また、デフォルト率の変動やモデル・パラメータの調整に伴う信用リスクの変動を把握することもリスク管理実務上、重要になってくる。本稿では、与信ポートフォリオのバリュー・アット・リスク (VaR) に対する個別債務者のリスク寄与度を、条件付鞍点法と呼ばれる近似手法により解析的に表現し、その近似精度の検証を行った。また、デフォルト率などモデル・パラメータに対するVaR感応度の近似表現を導出し、デフォルト率に対する感応度を試算したほか、資本コストを加味した収益性評価や、追加与信がもたらす資本コスト増加の試算など各種の活用事例を示した。

キーワード：ファクター型信用リスクモデル、VaR、リスク寄与度、リスク感応度、条件付鞍点法、分割型条件付鞍点法、資本コスト控除後収益

本稿は、2007年3月に日本銀行金融研究所で開催された「信用リスク評価の高速化手法」をテーマとするファイナンス研究会への提出論文に加筆・修正を施したものである。同研究会の参加者からは、貴重なコメントを多数頂戴した。記して感謝したい。また、室町幸雄氏（ニッセイ基礎研究所）とオースターリー教授（デルフト工科大学）からも多くの示唆に富むコメントを頂戴した。あわせて感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りは、すべて筆者個人に属する。

菊池健太郎 日本銀行金融研究所（現 総務人事局）

1 . はじめに

金融機関の信用リスク管理では、与信ポートフォリオ全体のリスク計測のみならず、債務者別あるいは業種別・内部格付別・地域別などさまざまなカテゴリー別にリスクを計測する取組みが進展している。こうした取組みは、与信ポートフォリオ中のリスクの所在を詳細に把握するのに有益なほか、信用コストやリスク配賦資本にかかるコストを反映した収益性評価にも活用できる。例えば、与信ポートフォリオマネジメントに関する勉強会 [2007] では、金融機関の実務担当者が、クレジット・ポートフォリオ・マネジメント (CPM) の目的として与信集中リスクへの対応とリスク・リターンの最適化を挙げている。このように、債務者別の信用リスクの正確な把握や、信用リスクを加味した収益性評価手法の確立は、CPMの実践の現場においても求められている。

与信ポートフォリオ全体のリスクはバリュー・アット・リスク (VaR) で評価されている場合が多く、個別債務者のリスク量は、VaRに占める個別債務者の寄与度で把握される。本稿では、これをリスク寄与度と呼ぶ。VaRに対する個別債務者のリスク寄与度について、いくつかの定義が既存研究の中で示されてきた。例えば、Gupton, Finger, and Bhatia [1997] では、ある債務者のリスク寄与度を、元のポートフォリオのVaRと当該債務者を除外した与信ポートフォリオのVaRの差として定義している。

しかし、このように定義されたリスク寄与度は、個別債務者のリスク寄与度の総和が与信ポートフォリオのVaRに一致せず、与信ポートフォリオの集中リスクの把握やリスク配賦資本に基づいた与信の収益性評価などに活用しづらいという問題がある。また、与信額やデフォルト率など各債務者の異質性が前提になっているため¹、VaR計測にモンテカルロ法を用いると、(a)検証したい債務者数分のシミュレーションが必要になり計算負荷が非常に大きくなる、(b)2つのVaRの差で求めたリスク寄与度であるため精度確保の面でも工夫が必要になるという問題を抱えている。

の問題に対しては、Litterman [1997] やTasche [1999]、Hallerbach [2002] が「リスク寄与度の総和がリスク指標に一致する」という良い性質が成立する条件が存在することをリスク指標一般に関して証明している。ここで、リスク寄与度は「リスク指標をデフォルト時損失額で偏微分し、これにデフォルト時損失額を乗じたもの」と定義されている。これを与信ポートフォリオのVaRに適用して、計算手法の確立と数値検証を行ったものとして、Martin, Thompson, and Browne [2001]、Muromachi [2004]、室町 [2005]、Huang, Oosterlee, and Mesters [2007] がある。

1 異質性が前提となる場合、無限分散ポートフォリオを前提としたVaRの解析解、および、この解から導出される寄与度計算式は使用できない。このため、モンテカルロ法が近似解析解に基づく寄与度計算法が必要となる。

Martin, Thompson, and Browne [2001] では「無条件鞍点法」というVaRの解析的近似手法に基づき、リスク寄与度を近似評価する手法が考案されている。また、Muromachi [2004] や室町 [2005]、Huang, Oosterlee, and Mesters [2007] では、鞍点法の近似精度改善に向けて「条件付鞍点法」を用いてリスク寄与度を近似評価する手法が研究されている²。

の問題については、モンテカルロ法を用いずに近似解析手法を活用するという上述のような研究群のほか、モンテカルロ法の時間効率性を改善する技術を活用しようという試みも行われている。例えば、Glasserman [2006] は、加重サンプリング法（Importance Sampling法：以下、IS法）をリスク寄与度分解に応用している。

信用リスク管理実務においては、リスク計測モデルで所与の定数値とされているパラメータ、例えば各債務者のデフォルト率の変動し、その結果、リスク量が変化していく現象についても定量的に把握しておく必要がある。与信ポートフォリオマネジメントに関する勉強会 [2007] では、実務担当者が重要と考えるCPMの目的として、信用度悪化に対する予防的な措置が挙げられており、パラメータ変化に対するリスク量の感応度を計測する手法へのニーズは高いと考えられる。与信ポートフォリオVaRのパラメータに対する感応度を考察した研究は、大偏差原理を用いた計算法を提案したDembo, Deuschel, and Duffie [2004] 以外、未だその数は少ないようである。

本稿では、まず、Muromachi [2004]、室町 [2005]、Huang, Oosterlee, and Mesters [2007] で扱われている条件付鞍点法に基づくリスク寄与度について近似表現式の導出を解説する。そのうえで、菊池 [2007] で提案された「分割型条件付鞍点法」に基づくリスク寄与度の近似表現を導出する。金融機関の与信ポートフォリオは一般に大口集中度が高い。この場合、条件付鞍点法でも十分なVaRの精度が保証されないことが菊池 [2007] で指摘されており、分割型条件付鞍点法はその対応として考案された手法である。本稿では、同手法をリスク寄与度の近似表現導出に拡張した。

そのパフォーマンスを検証するために、モンテカルロ法による計算結果と比較したところ、シミュレーションの効率性が高いIS法を採用したにもかかわらずモンテカルロ法には以下のような問題が生じた。まず、同質な債務者からなるポートフォリオを分析対象としたにもかかわらず寄与度が異なるという現象が確認された。こうしたシミュレーション誤差の存在は、与信額が異なるポートフォリオではリスク寄与度と与信額の順番が異なるという結果をもたらしている。また、誤差は与信額のサイズによらず観察され、大口先ほど誤差が絶対水準でみて大きく現れていた。本稿で示す解析的な近似手法では、本来、こうした問題は生じない。また、リスク寄与度近似値の精度検証においても良好な結果が得られており、かつ、リスク寄与度の総和が全体のVaRに一致するという特性が近似計算においても維持されている

2 菊池 [2007] では、さまざまな与信ポートフォリオ構成やモデル・パラメータ設定について、VaRの近似精度を比較した結果、無条件鞍点法よりも条件付鞍点法の方が近似精度が高く、安定性においても優れていることが示されている。ただし、大口集中度が高いと条件付鞍点法でもVaRの近似精度が悪化することが指摘されている。

ことがわかり、本稿の手法の優位性が確認された。

本稿では、リスク寄与度の近似表現に加え、デフォルト率やモデル・パラメータに対する感応度（以下、リスク感応度）についても、条件付鞍点法を用いた近似表現を導出した。これらリスク寄与度やリスク感応度の近似表現の活用法として、与信の大口集中やデフォルト率の分布について金融機関のポートフォリオを模したサンプル・ポートフォリオを想定し、ある特定の債務者（具体的には大口先）について、資本コスト控除後収益（Shareholder Value Added：以下、SVA）を用いた収益性評価と、追加与信時のリスク量や資本コスト、SVAの変化について試算を行った事例を紹介する。デフォルト率の上昇が信用コストのみならず資本コストの増加を通じてSVAを悪化させる様子や、追加与信が必要リスク配賦資本を引き上げ、資本コスト増を通じてSVAが赤字に転じる様子を示した。

本稿の構成は以下のとおりである。2節では、ファクター型信用リスクモデルの記法を示した後、与信ポートフォリオ損失額分布とVaR表現の導出を行う。3節ではリスク寄与度とリスク感応度の表現を前節で求めたVaR表現から導出する。4節では条件付鞍点法によるリスク寄与度とリスク感応度の近似表現を導出する。5節では、リスク寄与度の近似精度をIS法と比較検証する。6節では、リスク寄与度とリスク感応度を用いた収益性評価と追加与信時のリスク量等の変化を試算した事例を紹介する。7節では、本稿のまとめを行う。

2 .ファクター型信用リスクモデルにおける損失額分布とVaR表現

本節では、ファクター型信用リスクモデルの概要を説明した後、与信ポートフォリオ損失額の分布、およびVaRの積分表現を導出する。

(1) ファクター型信用リスクモデルの概要

まず、ファクター型信用リスクモデルの概要を説明する。あわせて、次節以降で使用される記法について定義する。より詳細な解説は、菊池 [2007]の2節(2)と補論1を参照されたい。

債務者 j の企業価値 X_j を、以下のような確率変数で与える。

$$X_j = \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{Z} + b_j \epsilon_j. \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_N)$ は、全債務者の企業価値に影響を与える確率変数（共通ファクター）であり、 ϵ_j は、債務者 j に固有の確率変数（固有ファクター）である。また、 $\mathbf{F}_j = (f_j^{(1)}, \dots, f_j^{(N)})$ は、債務者 j の共通ファクターに関するファクター・ローディングを表すベクトルである。 b_j は、固有ファクターに関するファクター・ローディングを表している。

本稿では共通ファクターと固有ファクターは全て独立であると仮定する。また、共通ファクターや固有ファクターが従う確率分布に特段の仮定はおかない。さらに、全ての企業価値のファクター・ローディング・ベクトルは確定的とする。これらの仮定により、各債務者の企業価値は共通ファクター Z の条件下で独立（条件付独立）となり、解析解を求めるうえで計算が容易となる³。

ファクター型信用リスクモデルでは、債務者 j の企業価値 X_j がある閾値 C_j を下回ったときをデフォルトと定義する。これにより、債務者 j のデフォルト率 p_j は

$$p_j = P(X_j \leq C_j), \quad (2)$$

で表現される（ここで、 P は確率測度を表す）。

債務者 j のデフォルト時損失額は、与信額 e_j とデフォルト時損失率 l_j を用いて $e_j l_j$ と表せる。与信ポートフォリオの損失額 L は、債務者 j の指標関数 Y_j （デフォルトなら1、そうでないなら0の値をとる関数）を用いて、

$$L = \sum_{j=1}^M e_j l_j Y_j, \quad (3)$$

と表される。なお、本稿では、与信額 e_j とデフォルト時損失率 l_j は確定的であるとする。

本稿で使用する記法・定義を以下にまとめておく。

M ：与信ポートフォリオを構成する債務者の数

$p_j(\mathbf{z})$ ：共通ファクター $Z = \mathbf{z}$ を条件とする債務者 j の条件付デフォルト率

本稿でデフォルト率という場合、(2)式の無条件デフォルト率を指す

$E[\cdot]$ ：確率測度 P のもとでの期待値オペレータ

$f_{L|\mathbf{z}}(u)$ ：共通ファクター $Z = \mathbf{z}$ を条件とする与信ポートフォリオ損失額の条件付密度関数

L_j ：債務者 j の損失額（ $e_j l_j Y_j$ に等しい）

q_α ：信頼水準 α のVaR、数学的には $q_\alpha = \inf \{u : P(L \geq u) \leq 1 - \alpha\}$

(2) 与信ポートフォリオの損失額分布・VaR表現の導出

与信ポートフォリオ損失額分布関数とVaR表現式を導出する。導出過程の詳細は、菊池 [2007] 3節を参照されたい。

3 ファクター・ローディング・ベクトルを確率変数として扱うことも可能である。必要最小限のファクター（これらのファクターをまとめてベクトル U とする）を適当に選択すれば、 U の条件のもとで各債務者の企業価値が独立となり、各債務者のデフォルト事象は独立に発生する。ファクター・ローディング・ベクトルを確定的としたとき $U=Z$ である。

与信ポートフォリオ損失額 L の共通ファクター $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ を条件とする条件付密度関数 $f_{L|\mathbf{z}}(u)$ は次のような表現を持つ。

$$f_{L|\mathbf{z}}(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(K_{L|\mathbf{z}}(s) - su) ds \quad (c \text{ は任意の実数}) \quad (4)$$

上式の $K_{L|\mathbf{z}}(s)$ は L の条件付キュムラント母関数と呼ばれるもので、

$$\begin{aligned} K_{L|\mathbf{z}}(s) &:= \log E [e^{sL} | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] = \log \prod_{j=1}^M (1 - p_j(\mathbf{z}) + p_j(\mathbf{z}) e^{se_j l_j}) \\ &= \sum_{j=1}^M \log (1 - p_j(\mathbf{z}) + p_j(\mathbf{z}) e^{se_j l_j}), \end{aligned} \quad (5)$$

と定義、計算される。なお、(4)式右辺の積分区間は、複素平面内の実軸上の任意の実数を通る虚軸と平行な直線である。

次に、与信ポートフォリオ損失額 L の条件付分布関数⁴の積分表現を示す。4節でリスク感応度の鞍点近似を行う際に必要となるので、条件付分布関数 $P(L > u | \mathbf{Z} = \mathbf{z})$ をあらかじめ次のように2通りの表現で表しておく。

$$Q_{L|\mathbf{z}}(u) := P(L > u | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(K_{L|\mathbf{z}}(s) - su)}{s} ds & (\forall c > 0) \\ 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{\exp(K_{L|\mathbf{z}}(s) - su)}{s} ds & (\forall c' < 0) \end{cases} \quad (6)$$

(6)式右辺の積分区間は、複素平面の実軸上の0以外の任意の実数を通る虚軸と平行な直線である。

与信ポートフォリオ損失額 L の分布関数 $P(L > u)$ は、 $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ を条件とする条件付損失額分布関数 $P(L > u | \mathbf{Z} = \mathbf{z})$ の期待値として表現できるので、(6)式を用いると、

$$P(L > u) = E[Q_{L|\mathbf{z}}(u)], \quad (7)$$

となる。

(7)式で表される与信ポートフォリオ損失額の分布関数の表現を用いると、VaR表現も次のように導出できる。信頼水準 α のVaRを q_α とおくと、次式が成立する。

$$1 - \alpha = P(L > q_\alpha) = E[Q_{L|\mathbf{z}}(q_\alpha)]. \quad (8)$$

Muromachi [2004], 室町 [2005], Martin, and Ordovás [2006], Huang, Oosterlee,

4 確率変数 X の分布関数 $F(x)$ とは、通常、 X が x 以下となる確率 $P(X \leq x)$ を指すが、本稿では X が x を上回る確率 $P(X > x)$ も分布関数と呼ぶ。

and Mesters [2007] 菊池 [2007] では、(8) 式のVaR表現に対して、鞍点法と呼ばれる積分の近似計算を用いてVaRを計算する方法が示されている。

3 . リスク寄与度とリスク感応度の積分表現

本節では、まず、2節(8) 式のVaR表現を与信額やデフォルト率などモデル・パラメータで偏微分することによって、リスク寄与度ならびにモデル・パラメータに対するVaR感応度を定義する。また本節では、VaRの積分表現(8) 式を用いて、寄与度と感応度の積分表現を導出する。

(1) リスク寄与度の定義

複数の先行研究が、異なったリスク寄与度の定義を与えている。しかし、その一部は、ポートフォリオを構成する各与信のリスク寄与度の総和がポートフォリオ全体のリスク量に一致するという性質を満たしておらず、大口集中リスクの把握やリスク配賦資本に基づいた収益性評価などに活用し難かった。Litterman [1997] や Tasche [1999]、Hallerbach [2002] は、ポートフォリオのリスク量が各デフォルト時損失額に対して偏微分可能であり、かつ1次同次性を満たす場合、「全与信に関する総和がポートフォリオ全体のリスク量に一致する」という良い性質を持つリスク寄与度が、リスク量をデフォルト時損失額で偏微分した値とデフォルト時損失額の積として定義できることを証明した。

与信ポートフォリオのVaRに対して上記のように定義される「良い」性質を持つリスク寄与度の研究を行った論文として、Martin, Thompson, and Browne [2001]、Muromachi [2004]、室町 [2005]、Huang, Oosterlee, and Mesters [2007] がある。本稿でもこれらの先行研究と同様に、信頼水準 α のVaRである q_α に対応する債務者 j のリスク寄与度 $q_\alpha(j)$ を、

$$q_\alpha(j) := (e_j l_j) \frac{\partial q_\alpha}{\partial (e_j l_j)} = e_j \frac{\partial q_\alpha}{\partial e_j}, \quad (9)$$

と定義する。(9) 式の1番目の等号はリスク寄与度の定義、2番目の等号は、「VaRをデフォルト時損失額で偏微分し、積をとる操作」を「VaRを与信額で偏微分し、積をとる操作」に置き換えることができることを表している⁵。

本稿では、VaRを与信額で偏微分し、積をとった量をリスク寄与度と定義する。このリスク寄与度の定義では、(9) 式の右边が定義されるかどうか、すなわちVaRが個別債務者の与信額に対して偏微分可能であるかどうかが問題となるが、ここでの

5 証明は次式のとおり。

$$e_j \partial VaR / \partial e_j = e_j (\partial VaR / \partial (e_j l_j)) \cdot (\partial (e_j l_j) / \partial e_j) = (e_j l_j) \partial VaR / \partial (e_j l_j) .$$

設定のもとでは、(9)式の右辺は定義されることが証明される(証明は補論1参照)。また、上述した「良い」性質を式で記述すると、

$$\sum_{j=1}^M q_{\alpha}(j) = \sum_{j=1}^M e_j \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial e_j} = q_{\alpha}, \quad (10)$$

となる。(10)式はVaRの正の1次同次性と呼ばれる性質を用いて証明される。(10)式の証明は補論1参照。

(9)(10)式を用いると、リスク寄与度について、以下の関係式が成立する。

$$\begin{aligned} q_{\alpha}(j) &= e_j \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial e_j} = e_j \frac{\partial E[L|L=q_{\alpha}]}{\partial e_j} = e_j \frac{\partial E\left[\sum_{j=1}^M e_j l_j Y_j | L=q_{\alpha}\right]}{\partial e_j} \\ &= E[e_j l_j Y_j | L=q_{\alpha}]. \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式から、債務者 j のリスク寄与度は、与信ポートフォリオ損失額が信頼水準 α のVaRとなる条件のもとでの債務者 j の条件付期待損失額と解釈することができる。モンテカルロ法によりリスク寄与度を計算する場合には、(9)式を直接用いるのではなく、(11)式の最右辺を計算する。しかし、通常のモンテカルロ法では、ポートフォリオ損失額 L が q_{α} に等しくなるというシナリオを相応数発生させるのに多大な計算時間を要してしまう。そこで、Glasserman [2006]では、比較的少ない計算負荷でリスク寄与度を求めるためにIS法を用いた方法を提案し、数値検証を行っている。5節では、サンプル・ポートフォリオを用いて、条件付鞍点法により近似計算したリスク寄与度とIS法により計算したリスク寄与度の比較を行っている。

(2) リスク寄与度の表現式の導出

ここでは、VaR表現(8)式の両辺を与信額で偏微分することにより、債務者 j のリスク寄与度 $q_{\alpha}(j)$ の表現式を導出する。

(8)式を債務者 j の与信額 e_j で偏微分し、式を整理すると、

$$\begin{aligned} q_{\alpha}(j) &= e_j \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial e_j} = \frac{E\left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e_j \frac{\partial K_{L|z}(s)}{\partial e_j} \frac{\exp(K_{L|z}(s)-sq_{\alpha})}{s} ds\right]}{E\left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(K_{L|z}(s)-sq_{\alpha}) ds\right]} \\ &= \frac{l_j e_j E\left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} P_j(\mathbf{z}) \exp(K_{L(j)|z}(s)-s(q_{\alpha}-l_j e_j)) ds\right]}{E\left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(K_{L|z}(s)-sq_{\alpha}) ds\right]}, \end{aligned} \quad (12)$$

となる。ここで、 $K_{L_{(j)}|z}(s)$ は、元のポートフォリオから債務者 j の与信を取り除いたポートフォリオの条件付キュムラント母関数を表している。また、(12)式の2行目の等号成立については、補論2で証明を行っている。

さらに、(12)式は、(4)式のポートフォリオ損失額の条件付密度関数を用いて次のようにも表現できる。

$$q_{\alpha}(j) = \frac{l_j e_j E[P_j(\mathbf{z}) f_{L_{(j)}|z}(q_{\alpha} - l_j e_j)]}{E[f_{L|z}(q_{\alpha})]} \quad (13)$$

ここで、 $f_{L_{(j)}|z}(\cdot)$ は、元のポートフォリオから債務者 j の与信を取り除いたポートフォリオの損失額の条件付確率密度関数を表している。また、 $f_{L_{(j)}|z}(q_{\alpha} - l_j e_j)$ について、

$$f_{L_{(j)}|z}(q_{\alpha} - l_j e_j) = \begin{cases} \prod_{m \neq j} (1 - p_m(\mathbf{z})) \cdots (q_{\alpha} - l_j e_j = 0) \\ 0 \quad \cdots (q_{\alpha} - l_j e_j < 0) \end{cases}, \quad (14)$$

が成立することに注意が必要である。 $q_{\alpha} - l_j e_j = 0$ のとき、 $f_{L_{(j)}|z}(q_{\alpha} - l_j e_j)$ は元のポートフォリオから債務者 j の与信を取り除いたポートフォリオから発生する損失額がゼロとなる確率を表している。これは、 j 以外の全ての債務者がデフォルトしない確率を意味している。したがって、 j 以外の債務者 i の非デフォルト確率 $1 - p_i(\mathbf{z})$ の積となる。また、 $q_{\alpha} - l_j e_j < 0$ のとき、 $f_{L_{(j)}|z}(q_{\alpha} - l_j e_j)$ は元のポートフォリオから債務者 j の与信を取り除いたポートフォリオから発生する損失額がゼロを下回る確率を表している。しかし、そのような事象は起こりえないため確率はゼロとなる。

以上より、リスク寄与度の表現式は(12)式(もしくは(13)式)で記述できることがわかった。ただし、表現式の分母、分子の積分を解析的に評価することは難しく、一般には計算が簡単ではない。そこで、4節では、鞍点法と呼ばれる積分の近似計算手法を分母、分子に適用して、リスク寄与度を近似計算する公式を導出する。

(3) リスク感応度の定義と積分表現の導出

本稿では、リスク感応度を、条件付デフォルト率 $p_j(\mathbf{z})$ に影響を与えるパラメータ(無条件デフォルト率やファクター・ローディング)でVaRを偏微分したものと定義する。したがって、2節(1)のモデルの仮定から与信額 e_j やデフォルト時損失率 l_j は $p_j(\mathbf{z})$ に影響を与えないことから、リスク寄与度の定義に現れるVaRを与信額(もしくはデフォルト時損失率)で偏微分した量は、リスク感応度の範疇には含まれないことに注意されたい。

債務者 j に関するパラメータ(無条件デフォルト率やファクター・ローディング)をまとめて θ_j とおく。本稿では、リスク感応度を、信頼水準 α のVaRをパラメータ θ_j に対して偏微分した量 $q_{\theta}(j)$ とする。

リスク感応度 $q_{\theta}(j)$ の表現は、リスク寄与度表現の導出と同様に、(8)式の両辺

を θ_j で偏微分し、式を整理することにより導出される。その結果は、

$$q_{\theta}(j) = \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial \theta_j} = \frac{E \left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\partial K_{L|z}(s, \theta)}{\partial \theta_j} \frac{\exp(K_{L|z}(s, \theta) - sq_{\alpha})}{s} ds \right]}{E \left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(K_{L|z}(s, \theta) - sq_{\alpha}) ds \right]}, \quad (15)$$

で与えられる。ここで、条件付キュムラント母関数 $K_{L|z}(\cdot)$ は s と $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_M)$ に依存して定まることから、ここでは強調して $K_{L|z}(s, \theta)$ と書いている。さらに、(15)式右辺を変形すると以下の式を得る。

$$q_{\theta}(j) = \frac{E \left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\partial p_j(\mathbf{z})}{\partial \theta_j} \frac{\exp(K_{L(j)|z}(s, \theta) - s(q_{\alpha} - l_j e_j)) - \exp(K_{L(j)|z}(s, \theta) - sq_{\alpha})}{s} ds \right]}{E \left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(K_{L|z}(s, \theta) - sq_{\alpha}) ds \right]}. \quad (16)$$

(16)式の分子を(6)式を用いて書き換え、分母を(4)式を用いて書き換えると、リスク感応度は次のようにも表現できる。

$$q_{\theta}(j) = \frac{E \left[\frac{\partial p_j(\mathbf{z})}{\partial \theta_j} (P(L_{(j)} > q_{\alpha} - l_j e_j | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) - P(L_{(j)} > q_{\alpha} | \mathbf{Z} = \mathbf{z})) \right]}{E[f_{L|z}(q_{\alpha})]}. \quad (17)$$

ここで、 $L_{(j)}$ は債務者 j を除いたポートフォリオから発生する損失額を表す確率変数である。

ここで、モンテカルロ法でリスク感応度を計算する場合の問題点に触れておきたい。リスク感応度を、パラメータ θ_j を微小に変化させた時のVaRの変化量としてモンテカルロ法で求める場合、VaRの非線形性のため、感応度が θ_j の変動幅によって異なる値が算出される問題に直面する。そこで、(17)式の分子と分母をモンテカルロ法によって計算することでリスク感応度を算出する解決策が考えられる。しかし、実務では、ある特定の債務者のパラメータに対する感応度だけでなく、全債務者のパラメータに対するリスク感応度を比較するような必要性が生じうる。そのような場合、(17)式の分子の計算で、元のポートフォリオから1債務者を取り除いたポートフォリオから発生する損失額を、全ての債務者に対して計算しなければならない。これは、IS法などの効率的なシミュレーション手法を用いたとしても、多大な計算時間を要することが予想される。そこで、4節では、リスク感応度の表現(16)式の分母と分子に条件付鞍点法を適用して、リスク感応度の近似表現を導出する。この近似表現によりリスク感応度を極めて効率的に算出することが可能となる。

4 リスク寄与度とリスク感応度の条件付鞍点法を用いた近似表現

本節では、前節で導出したリスク寄与度とリスク感応度の表現を具体的に計算するために、表現式に鞍点法と呼ばれる積分の近似計算手法を適用し、リスク寄与度とリスク感応度の近似表現式を導出する。

(1) 条件付鞍点法による計算の概要

リスク寄与度とリスク感応度の近似表現を導出するための準備として、与信ポートフォリオ損失額の密度関数と分布関数を条件付鞍点法によって近似した式を導出する。

まず、与信ポートフォリオを A とし、 A から発生する損失額を表す確率変数を L_A で表す。与信ポートフォリオ A の損失額 L_A について、共通ファクター $Z = z$ を条件とする条件付密度関数 $f_{L_A|z}(u)$ を考える。2節(2)の(4)式と同様の議論より $f_{L_A|z}(u)$ は次の表現を持つ。

$$f_{L_A|z}(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(K_{L_A|z}(s) - su) ds, \quad (18)$$

ここで、 $K_{L_A|z}(s)$ はポートフォリオ A の条件付キュムラント母関数を表している。

次に、(18)式に鞍点法を適用する。まず、(18)式の被積分関数の一部を $a_z(s) := K_{L_A|z}(s) - su$ と表す。なお、 $u \leq 0$ の場合は、条件付密度関数は鞍点法に頼らなくても計算できるため、 $u > 0$ についてのみ鞍点法を適用する($u \leq 0$ の場合は $a_z(s)$ の鞍点は存在しない)。

$a_z(s)$ の鞍点では1階微分が0となる、すなわち、

$$a'_z(s) = K_{L_A|z}^{(I)}(s) - u = 0, \quad (19)$$

が満たれる⁶。ここで、 $a'_z(s)$ は $a_z(s)$ の1階の導関数であり、 $K_{L_A|z}^{(I)}(s)$ は $K_{L_A|z}(s)$ の1階の導関数である。鞍点は、共通要因 z と損失額 u に依存するので、 $\hat{s}(z, u)$ と表す。

$a_z(s)$ を条件付鞍点 $\hat{s}(z, u)$ の回りでテイラー展開する。キュムラント母関数の2階の導関数 $K_{L_A|z}^{(II)}(s)$ を用いて2次までのテイラー展開を示すと、

$$K_{L_A|z}(s) - su \approx K_{L_A|z}(\hat{s}(z, u)) - \hat{s}(z, u)u + \frac{1}{2} K_{L_A|z}^{(II)}(\hat{s}(z, u))(s - \hat{s}(z, u))^2, \quad (20)$$

となる。

L_A の条件付密度関数 $f_{L_A|z}(u)$ の表現(18)式に(20)式を代入すると、以下のような計算が可能となり、条件付密度関数の近似表現が導出される。

6 数学的な厳密さがある程度保ちつつ、鞍点法の直観的な意味を解説した文献として、江沢 [1995] がある。菊池 [2007] 4節では、鞍点法によるVaRの近似表現の導出の準備として鞍点法の説明を簡単に行っている。

$$\begin{aligned}
f_{L_A|\mathbf{z}}(u) &= \frac{\exp(K_{L_A|\mathbf{z}}(\hat{s}(\mathbf{z}, u)) - \hat{s}(\mathbf{z}, u)u)}{2\pi i} \int_{\hat{s}(\mathbf{z}, u) - i\infty}^{\hat{s}(\mathbf{z}, u) + i\infty} \exp\left(\frac{1}{2}K_{L_A|\mathbf{z}}^{(II)}(\hat{s}(\mathbf{z}, u))(s - \hat{s}(\mathbf{z}, u))^2\right) ds \\
&= \frac{\exp(K_{L_A|\mathbf{z}}(\hat{s}(\mathbf{z}, u)) - \hat{s}(\mathbf{z}, u)u)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}K_{L_A|\mathbf{z}}^{(II)}(\hat{s}(\mathbf{z}, u))(iy)^2\right) dy \\
&= \frac{\exp(K_{L_A|\mathbf{z}}(\hat{s}(\mathbf{z}, u)) - \hat{s}(\mathbf{z}, u)u)}{\sqrt{2\pi K_{L_A|\mathbf{z}}^{(II)}(\hat{s}(\mathbf{z}, u))}}. \tag{21}
\end{aligned}$$

上式1行目の等号成立は、(18)式に(20)式を代入し、複素平面内の実軸上の鞍点 $\hat{s}(\mathbf{z}, u)$ を通る虚軸と平行な直線に積分区間を変更したことによる。この積分区間の変更は、(18)式の右辺の積分区間に現れる c が任意であることにより保証されている。1~2行目では、 $s = \hat{s}(\mathbf{z}, u) + iy$ と変数変換を行った。

次に、 L_A の $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ を条件とする条件付分布関数 $P(L_A > u | \mathbf{Z} = \mathbf{z})$ の近似計算公式を導出する。(6)式と同様に $P(L_A > u | \mathbf{Z} = \mathbf{z})$ は次の表現を持つ。

$$\begin{aligned}
P(L_A > u | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(K_{L_A|\mathbf{z}}(s) - su)}{s} ds \quad (\forall c > 0) \\
&= 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{\exp(K_{L_A|\mathbf{z}}(s) - su)}{s} ds \quad (\forall c' < 0). \tag{22}
\end{aligned}$$

(22)式の右辺に鞍点法を適用する際には、鞍点の符号が重要になるのであらかじめまとめておくと、

$$\begin{aligned}
E[L_A | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] < u &\Leftrightarrow \hat{s}(\mathbf{z}, u) > 0 \\
E[L_A | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] = u &\Leftrightarrow \hat{s}(\mathbf{z}, u) = 0 \\
E[L_A | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] > u &\Leftrightarrow \hat{s}(\mathbf{z}, u) < 0, \tag{23}
\end{aligned}$$

となる。これは、 $a_{\mathbf{z}}(s) := K_{L_A|\mathbf{z}}(s) - su$ が下に凸な関数であることを用いて証明される(詳しくは菊池[2007]参照)。

$a_{\mathbf{z}}(s) := K_{L_A|\mathbf{z}}(s) - su$ の鞍点の符号に応じて、(22)式右辺の積分区間を、条件付鞍点 $\hat{s}(\mathbf{z}, u)$ を通る複素平面の虚軸と平行な直線に変更すると、(22)式は、

$$P(L_A > u | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{s}(\mathbf{z}, u) - i\infty}^{\hat{s}(\mathbf{z}, u) + i\infty} \frac{\exp(K_{L_A|\mathbf{z}}(s) - su)}{s} ds & (E[L_A | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] < u) \\ \frac{1}{2} & (E[L_A | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] = u), \\ 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{s}(\mathbf{z}, u) - i\infty}^{\hat{s}(\mathbf{z}, u) + i\infty} \frac{\exp(K_{L_A|\mathbf{z}}(s) - su)}{s} ds & (E[L_A | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] > u) \end{cases} \tag{24}$$

となる。

(20)式を(24)式に代入して、 $s = \hat{s}(\mathbf{z}, u) + iy$ と変数変換して計算を実行すると、

$$P(L_A > u | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \approx \begin{cases} \frac{\exp(K_{L_A|\mathbf{z}}(\hat{s}(\mathbf{z}, u)) - \hat{s}(\mathbf{z}, u)u)}{\lambda(\mathbf{z}, u)} B_0(\lambda(\mathbf{z}, u)) & (E[L_A | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] < u) \\ \frac{1}{2} & (E[L_A | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] = u) \\ 1 - \frac{\exp(K_{L_A|\mathbf{z}}(\hat{s}(\mathbf{z}, u)) - \hat{s}(\mathbf{z}, u)u)}{\lambda(\mathbf{z}, u)} B_0(-\lambda(\mathbf{z}, u)) & (E[L_A | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] > u) \end{cases}$$

$$\lambda(\mathbf{z}, u) := \hat{s}(\mathbf{z}, u) \sqrt{K_{L_A|\mathbf{z}}^{(II)}(\hat{s}(\mathbf{z}, u))}, \quad (25)$$

を得る。ここで、 $B_0(\cdot)$ は、次式のように定義される次数0のエッシャー関数と呼ばれるものである（エッシャー関数について詳しくはJensen [1995]を参照）。

$$B_0(\lambda) = \lambda \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) (1 - \Phi(\lambda)). \quad (26)$$

上式の $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数を表している。

以上より、与信ポートフォリオ損失額の条件付密度関数と分布関数の条件付鞍点法を用いた近似公式が導出された。これらの近似計算公式を用いて、リスク寄与度と感応度の近似表現を導出する。

(2) リスク寄与度の条件付鞍点法を用いた近似表現

3節(2)で導出したリスク寄与度の表現式((12)式)の分母と分子のそれぞれに与信ポートフォリオ損失額の条件付密度関数の近似計算(21)式を適用する。ただし、(12)式の分子に現れる条件付密度関数は $f_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(q_\alpha - l_j e_j)$ なので、 $q_\alpha > l_j e_j$ の場合にのみ条件付鞍点法を適用する($q_\alpha \leq l_j e_j$ の場合は密度関数の値は明らかである、(14)式を参照)。また、本節(1)では、条件付鞍点を共通ファクター \mathbf{z} とポートフォリオ損失額 u の関数として $\hat{s}(\mathbf{z}, u)$ と表示したが、以降では損失額 u を省略して $\hat{s}(\mathbf{z})$ のように表す。

リスク寄与度の条件付鞍点法を用いた近似表現は、場合分けにより以下のように示される。

(i) $q_\alpha > l_j e_j$ の場合

$$q_\alpha(j) = \frac{E \left[l_j e_j p_j(\mathbf{z}) \frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\bar{s}_j(\mathbf{z})) - \bar{s}_j(\mathbf{z})(q_\alpha - l_j e_j))}{\sqrt{K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}^{(II)}(\bar{s}_j(\mathbf{z}))}} \right]}{E \left[\frac{\exp(K_{L|\mathbf{z}}(\hat{s}(\mathbf{z})) - \hat{s}(\mathbf{z})q_\alpha)}{\sqrt{K_{L|\mathbf{z}}^{(II)}(\hat{s}(\mathbf{z}))}} \right]},$$

$$\text{ただし、} K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}^{(I)}(\bar{s}_j(\mathbf{z})) = q_\alpha - l_j e_j, K_{L|\mathbf{z}}^{(I)}(\hat{s}(\mathbf{z})) = q_\alpha. \quad (27)$$

(ii) $q_\alpha = l_j e_j$ の場合

$$q_\alpha(j) = \frac{E \left[l_j e_j p_j(\mathbf{z}) \prod_{k \neq j} (1 - p_k(\mathbf{z})) \right]}{E \left[\frac{\exp(K_{L|\mathbf{z}}(\hat{s}(\mathbf{z})) - \hat{s}(\mathbf{z}) q_\alpha)}{\sqrt{K_{L|\mathbf{z}}^{(II)}(\hat{s}(\mathbf{z}))}} \right]} .$$

(iii) $q_\alpha < l_j e_j$ の場合

$$q_\alpha(j) = 0 .$$

ここで、分子の条件付鞍点 $\bar{s}_j(\mathbf{z})$ は、元のポートフォリオから債務者 j への与信を除いたポートフォリオ $L_{(j)}$ と VaR である q_α から債務者 j のデフォルト時損失額 $l_j e_j$ を減じた損失額 $q_\alpha - l_j e_j$ に対応する鞍点である。

(27) 式に基づき全ての債務者のリスク寄与度を計算する場合、債務者ごとに異なる鞍点 $\bar{s}_j(\mathbf{z})$ を求めるのに多少計算時間を要するが、シミュレーションによる計算時間に比べれば遥かに短時間の計算で済む。5節では、ここで表した近似公式を用いてリスク寄与度の近似精度を検証する。

(3) リスク感応度の条件付鞍点法を用いた近似表現

最後に、リスク感応度の条件付鞍点法を用いた近似表現を導出する。3節(3)で導出したリスク感応度の表現式((16)式)の分母と分子のそれぞれに条件付鞍点法を適用する。その際には、本節(1)で導出したポートフォリオ損失額の条件付密度関数の公式((21)式)を分母の計算に、条件付分布関数の公式((25)式)を分子の計算に適用する。簡単化のため、ここでは、 $q_\alpha > l_j e_j$ の場合のみを考える。

まず、表現の記述に用いる条件付鞍点 $\hat{s}(\mathbf{z})$ 、 $\bar{s}_j(\mathbf{z})$ 、 $\tilde{s}_j(\mathbf{z})$ を用意しておく。 $\hat{s}(\mathbf{z})$ は、与信ポートフォリオ L と損失額 q_α に対応する条件付鞍点である。 $\bar{s}_j(\mathbf{z})$ は与信ポートフォリオ L から債務者 j を除いたポートフォリオ $L_{(j)}$ と損失額 $q_\alpha - l_j e_j$ に対応する条件付鞍点を表す。また、 $\tilde{s}_j(\mathbf{z})$ はポートフォリオ $L_{(j)}$ と損失額 q_α に対応する条件付鞍点を表す。条件付鞍点 $\hat{s}(\mathbf{z})$ 、 $\bar{s}_j(\mathbf{z})$ 、 $\tilde{s}_j(\mathbf{z})$ が満たすべき関係式は、

$$K_{L|\mathbf{z}}^{(I)}(\hat{s}(\mathbf{z})) = q_\alpha, \quad (28)$$

$$K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}^{(I)}(\bar{s}_j(\mathbf{z})) = q_\alpha - l_j e_j, \quad (29)$$

$$K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}^{(I)}(\tilde{s}_j(\mathbf{z})) = q_\alpha, \quad (30)$$

となる。さらに、以下のリスク感応度の近似表現式の導出に必要な記号をここで定義しておく。

$$\bar{\lambda}_j(\mathbf{z}) := \bar{s}_j(\mathbf{z}) \sqrt{K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}^{(II)}(\bar{s}_j(\mathbf{z}))}, \quad (31)$$

$$\tilde{\lambda}_j(\mathbf{z}) := \tilde{s}_j(\mathbf{z}) \sqrt{K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}^{(II)}(\tilde{s}_j(\mathbf{z}))}. \quad (32)$$

リスク感応度の表現(16)式の分子に現れる期待値の中身を $Q_j(\mathbf{z})$ とし、この $Q_j(\mathbf{z})$ を(25)式を用いて条件付鞍点法により近似計算する。その際、 $E[L_{(j)}|\mathbf{Z}=\mathbf{z}]$ の大きさに応じて下記のように場合分けする必要がある。 $Q_j(\mathbf{z})$ の近似計算結果は以下ようになる。

$q_\alpha - l_j e_j > E[L_{(j)}|\mathbf{Z}=\mathbf{z}]$ の場合

$$Q_j(\mathbf{z}) = \frac{\partial p_j(\mathbf{z})}{\partial \theta_j} \left(\frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\bar{s}_j(\mathbf{z})) - \bar{s}_j(\mathbf{z})(q_\alpha - l_j e_j))}{\bar{\lambda}_j(\mathbf{z})} B_0(\bar{\lambda}_j(\mathbf{z})) - \frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\tilde{s}_j(\mathbf{z})) - \tilde{s}_j(\mathbf{z})q_\alpha)}{\tilde{\lambda}_j(\mathbf{z})} B_0(\tilde{\lambda}_j(\mathbf{z})) \right). \quad (33)$$

$q_\alpha - l_j e_j = E[L_{(j)}|\mathbf{Z}=\mathbf{z}]$ の場合

$$Q_j(\mathbf{z}) = \frac{\partial p_j(\mathbf{z})}{\partial \theta_j} \left(\frac{1}{2} - \frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\bar{s}_j(\mathbf{z})) - \bar{s}_j(\mathbf{z})q_\alpha)}{\bar{\lambda}_j(\mathbf{z})} B_0(\tilde{\lambda}_j(\mathbf{z})) \right). \quad (34)$$

$q_\alpha > E[L_{(j)}|\mathbf{Z}=\mathbf{z}] > q_\alpha - l_j e_j$ の場合

$$Q_j(\mathbf{z}) = \frac{\partial p_j(\mathbf{z})}{\partial \theta_j} \left(1 - \frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\bar{s}_j(\mathbf{z})) - \bar{s}_j(\mathbf{z})(q_\alpha - l_j e_j))}{\bar{\lambda}_j(\mathbf{z})} B_0(-\bar{\lambda}_j(\mathbf{z})) - \frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\tilde{s}_j(\mathbf{z})) - \tilde{s}_j(\mathbf{z})q_\alpha)}{\tilde{\lambda}_j(\mathbf{z})} B_0(\tilde{\lambda}_j(\mathbf{z})) \right). \quad (35)$$

$q_\alpha = E[L_{(j)}|\mathbf{Z}=\mathbf{z}]$ の場合

$$Q_j(\mathbf{z}) = \frac{\partial p_j(\mathbf{z})}{\partial \theta_j} \left(\frac{1}{2} - \frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\bar{s}_j(\mathbf{z})) - \bar{s}_j(\mathbf{z})(q_\alpha - l_j e_j))}{\bar{\lambda}_j(\mathbf{z})} B_0(-\bar{\lambda}_j(\mathbf{z})) \right). \quad (36)$$

$q_\alpha < E[L_{(j)}|\mathbf{Z}=\mathbf{z}]$ の場合

$$Q_j(\mathbf{z}) = \frac{\partial p_j(\mathbf{z})}{\partial \theta_j} \left(-\frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\bar{s}_j(\mathbf{z})) - \bar{s}_j(\mathbf{z})(q_\alpha - l_j e_j))}{\bar{\lambda}_j(\mathbf{z})} B_0(-\bar{\lambda}_j(\mathbf{z})) + \frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\tilde{s}_j(\mathbf{z})) - \tilde{s}_j(\mathbf{z})q_\alpha)}{\tilde{\lambda}_j(\mathbf{z})} B_0(-\tilde{\lambda}_j(\mathbf{z})) \right). \quad (37)$$

以上より、リスク感応度の表現式である(16)式の分子の近似を(33)~(37)式で表すことができた。

一方、(16)式の分母を条件付鞍点法により近似計算するには、本節(1)で導出した(21)式を使えばよい。計算した結果は、

$$(16) \text{式右辺の分母} = E[f_{L|z}(q_\alpha)] \approx E \left[\frac{\exp(K_{L|z}(\hat{s}(\mathbf{z})) - \hat{s}(\mathbf{z})q_\alpha)}{\sqrt{2\pi K_{L|z}^{(II)}(\hat{s}(\mathbf{z}))}} \right], \quad (38)$$

となる。以上の議論から、リスク感応度の条件付鞍点法による近似表現は、

$$q_\theta(j) = \frac{E[Q_j(\mathbf{z})]}{E \left[\frac{\exp(K_{L|z}(\hat{s}(\mathbf{z})) - \hat{s}(\mathbf{z})q_\alpha)}{\sqrt{2\pi K_{L|z}^{(II)}(\hat{s}(\mathbf{z}))}} \right]}, \quad (39)$$

となる。ただし、 $Q_j(\mathbf{z})$ は(33)~(37)式で計算可能である。

5 . 条件付鞍点法によるリスク寄与度の近似精度検証

本節では、条件付鞍点法によるリスク寄与度の近似精度をサンプル・ポートフォリオを用いて検証する。

まず、個別債務者のリスク属性(与信額、デフォルト率、資産相関<共通ファクターのローディング・ベクトル>)が均一な与信ポートフォリオについて近似精度の検証を行う。次に、個別債務者のリスク属性のうち与信額だけが異なるポートフォリオを作成し、リスク寄与度の近似精度を検証する。与信額の分布は大口集中という与信ポートフォリオの特性を表したものをを用いる。いずれのケースでも、Glasserman [2006] によるIS法を用いたモンテカルロ法によるリスク寄与度と比較し、条件付鞍点法をリスク寄与度を用いた場合の特徴を明らかにする。

(1) 個別債務者のリスク属性が均一な場合

近似精度の検証は、真値との比較で行う。個別債務者のリスク属性が均一な場合、与信ポートフォリオ全体のリスク量を試行回数十分に多いモンテカルロ法で与え、これを等分することでリスク寄与度の真値と定義することができる。

条件付鞍点法を用いた計算法は解析的手法であるため、均一なリスク寄与度が得られるが、リスク寄与度の計算にモンテカルロ法を用いた場合、そうなるとは限らない。そこで、IS法で計算したリスク寄与度のばらつき具合についても検証する。

なお、真値を求めるためのモンテカルロ法では、ポートフォリオ全体のVaR算出

を1回限り行えばよいので、試行回数を100万回と多めに設定している⁷。一方、リスク寄与度を求めるモンテカルロ法では、「ポートフォリオ全体の損失額が信頼水準 α のVaRに等しくなるシナリオ」を発生させる必要が生じるが、通常のモンテカルロ法では、VaRにほぼ一致するような試行結果は稀にしか得られず、しかも、各債務者のリスク寄与度の精度を高めるために、この稀な試行結果を十分多く得る必要があり、必要なシミュレーション回数が非常に多くなる。Glasserman [2006] は、この問題を回避するための手法としてIS法を考案した。IS法では、まず、ポートフォリオの損失額分布を測度変換し、その「期待損失」が元のポートフォリオのVaRになるよう調整する。そのうえでモンテカルロ法を行えば、損失額がVaRに近くなる試行が数多く得られるため、リスク寄与度を求めるためのサンプリングが効率的に行える。測度変換にはパラメータの最適化計算が必要になるが、その計算負荷よりもモンテカルロ法の効率化の効果が遥かに大きい。本稿ではIS法のシミュレーション回数を10万回としている。

検証に用いるポートフォリオは次のとおりである。なお、デフォルト時損失率は以下全ての分析で、各債務者ともに100%に設定している。

- 債務者数1,000、デフォルト率5%、資産相関0.1
- 債務者数1,000、デフォルト率5%、資産相関0.3
- 債務者数1,000、デフォルト率0.05%、資産相関0.1

リスク寄与度の真値は、上記の ~ のポートフォリオが債務者数1,000のリスク属性が均一であるため、モンテカルロ法により計算した信頼水準99.9%のVaR (与信ポートフォリオ全体のVaR) の1,000分の1となる。

比較の結果が表1である。真値の列にはポートフォリオ全体のVaRとこれを1,000で除したリスク寄与度を示し、モンテカルロ法によるリスク寄与度の列には1,000先の平均値と標準偏差を示した。まず、条件付鞍点法の近似精度をみると、いずれのポートフォリオでも真値と一致しており、近似精度が高いことが確認された。一方、モンテカルロ法のリスク寄与度をみると、平均的には真値と一致しているが、ある程度ばらつきが存在している。そもそも、リスク寄与度は債務者別の計数に注目するものであることにかんがみれば、真値との乖離がどの程度の大きさのものであるかが重要となる。

そこで表2では、真値との乖離率を、条件付鞍点法とモンテカルロ法 (平均・標準偏差) について求めてみた。条件付鞍点法では、ポートフォリオ では乖離率でもみても小数点二桁の精度で0%に、低デフォルト率ポートフォリオ でも、ほぼゼロに近い乖離率になった。これに対し、モンテカルロ法によるリスク寄与度の標準偏差は、 で1%台、 では9%台と、リスク寄与度計算にかなりの誤差が生じていることがわかる。これをポートフォリオ について示したものが図1である。

⁷ これは、菊池 [2007] で条件付鞍点法の精度検証を行った際と同一な条件である。

表1 リスク寄与度の計算精度

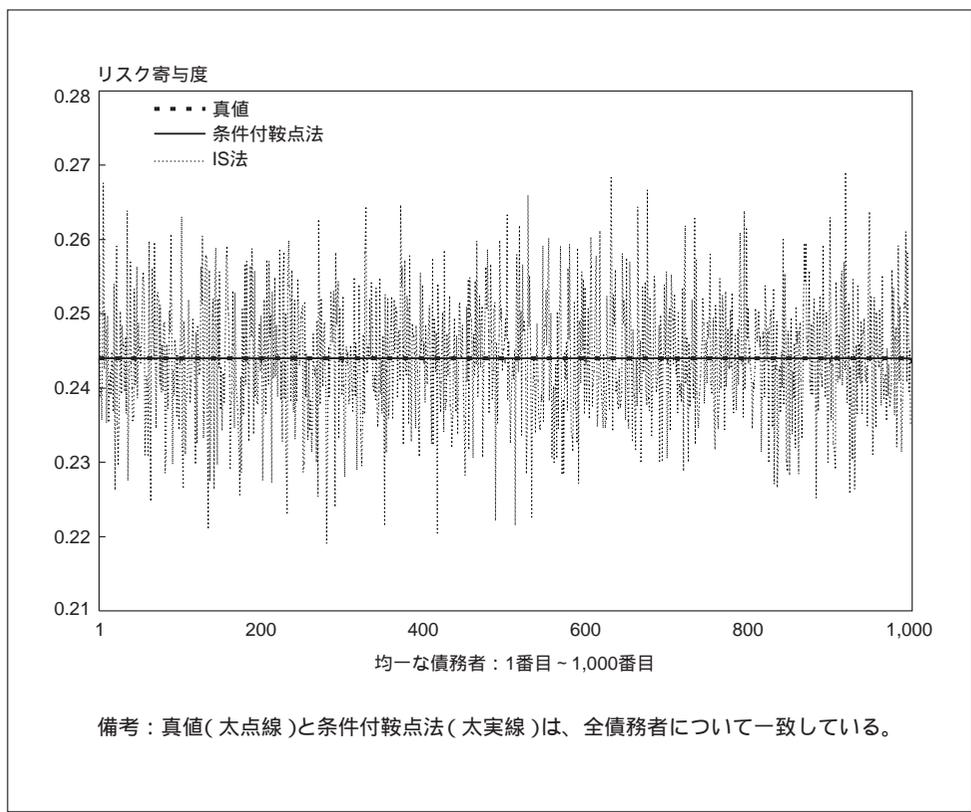
	真値		条件付鞍点法	モンテカルロ法 (IS法)	
	ポート全体の 99.9%VaR	リスク寄与度 全体/1,000先	リスク寄与度	リスク寄与度 平均値	標準偏差
ポートフォリオ	244	0.2440	0.2440	0.2440	0.0084
ポートフォリオ	527	0.5270	0.5270	0.5270	0.0055
ポートフォリオ	9	0.0090	0.0090	0.0090	0.0008

表2 乖離率による精度比較

	条件付鞍点法(%)	モンテカルロ法 (IS法)	
		平均値(%)	標準偏差(%)
ポートフォリオ	0.00	0.00	3.44
ポートフォリオ	0.00	0.00	1.04
ポートフォリオ	0.12	0.00	9.34

備考：乖離率の定義は(比較対象 - 真値) ÷ 真値。標準偏差の場合は、標準偏差 ÷ 真値。

図1 リスク寄与度のばらつき



(2) 個別債務者のリスク属性が均一でない場合

個別債務者のリスク属性（与信額、デフォルト率、資産相関＜共通ファクターのローディング・ベクトル＞）のうち与信額のみが異なるポートフォリオについて、リスク寄与度の近似精度を検証する。

前述の検証と異なり、リスク寄与度の真値を与信ポートフォリオ全体のVaRの除算で得ることはできない。また、モンテカルロ法で得られたリスク寄与度には誤差が存在していたため、条件付鞍点法の近似精度をこれとの比較で検証することもできない。もっとも、表1・2からは、平均的にみればモンテカルロ法のリスク寄与度の精度は高いことが確認されている。そこで、与信額に応じて減少していくリスク寄与度について、誤差による振幅を含みながら減少していくモンテカルロ法の計測値のほぼ中央を通りながら近似計測値が減少していくか否かで、条件付鞍点法の近似パフォーマンスを評価した。この目的のため、与信額以外のリスク属性は均一に設定している。

また、近似精度の別の検証ポイントとして、リスク寄与度の総和と全体のVaRの一致性をみた。リスク寄与度の表現式では両者が一致する性質が保たれているが、実際に数値計算を行う際に必要となる近似表現への変形において、両者に乖離が発生する。その乖離度で近似精度を評価するという方法を補完的な検証法として採用した。

なお、与信集中度の高いポートフォリオに対する解析的近似アプローチ法では、条件付鞍点法に工夫を加えた「分割型条件付鞍点法」が有効なことが菊池 [2007] によって示されている。そこで、同手法を用いたリスク寄与度の近似表現式（補論3の(A-23) (A-24)式)に基づく計測を活用し、リスク寄与度の計算においても「分割型条件付鞍点法」が有益であることを確かめた。

(イ) サンプル・ポートフォリオの設定

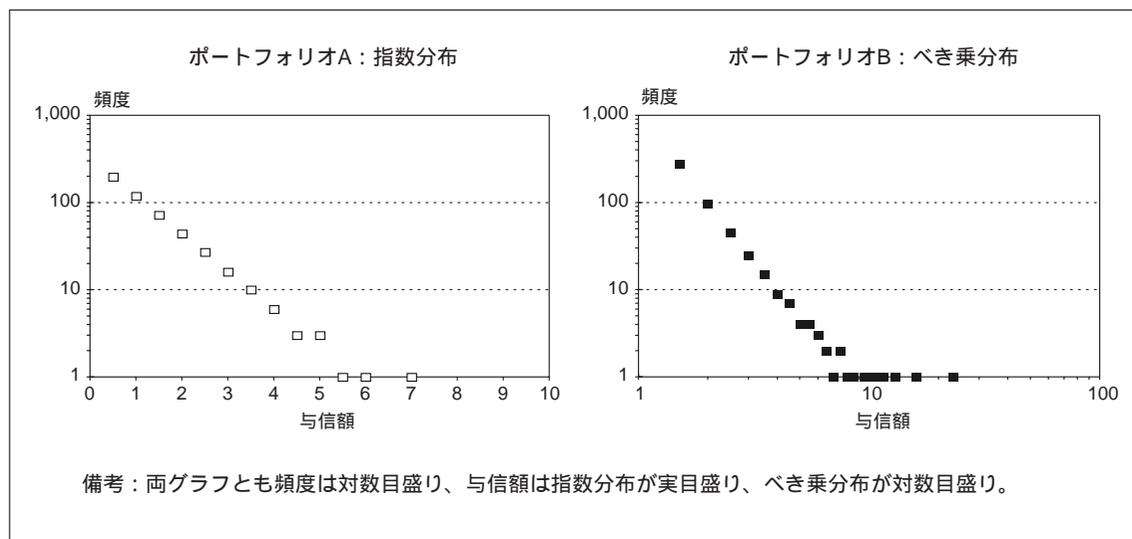
サンプル・ポートフォリオとして、大口集中特性を持つ与信額の分布を指数分布で表現したポートフォリオA、べき乗分布で表現したポートフォリオBの2種類を用いた。債務者数は500、デフォルト率は全債務者ともに0.5%とした（表3を参照）。与信額分布を刻み幅0.5単位の頻度ヒストグラムで表示したのが図2である。指数分布は、縦軸の頻度を対数目盛りで、横軸の与信額を等間隔にとると、直線的に減少する分布となる。一方、べき乗分布では両軸とも対数軸をとると直線的な分布となる。いずれも頻度1のサンプルが大口与信に相当する分布のテイル部に存在しているが、べき乗分布の方が指数分布よりテイルが長い⁸ため、大口先はポートフォリオBに多くなっている。

8 大口先が多いポートフォリオBの方が与信集中度が高いかどうかは、集中度を何で計測するかに依存する。上位先1～5%までの累積与信額構成比ではポートフォリオBの方が大きい⁹が、ハーフィンダール指数（シェアの二乗和×10,000）は、39.8対36.4とポートフォリオAの方が高い。

表3 サンプル・ポートフォリオ

	デフォルト率(%)	与信額分布	
ポートフォリオA	$p_j = 0.5$	$e_j = -\log(1 + 0.001 - j/500)$	$j = 1, \dots, 500$
ポートフォリオB	$p_j = 0.5$	$e_j = 1/(1 - 5 \times 10^{-5} - (j-1)/500)^{1/2}$	$j = 1, \dots, 500$

図2 与信額分布の頻度ヒストグラム



モデル・パラメータやシミュレーション等の設定は以下のとおりである。資産相関が低いほどVaRの近似精度が悪化することが菊池 [2007] で判明しているため、あえて低めの資産相関を想定し、厳しい条件下での検証を行った。信頼水準についても同様な目的から通常より高い値を想定している。

使用モデル：1ファクター・モデル

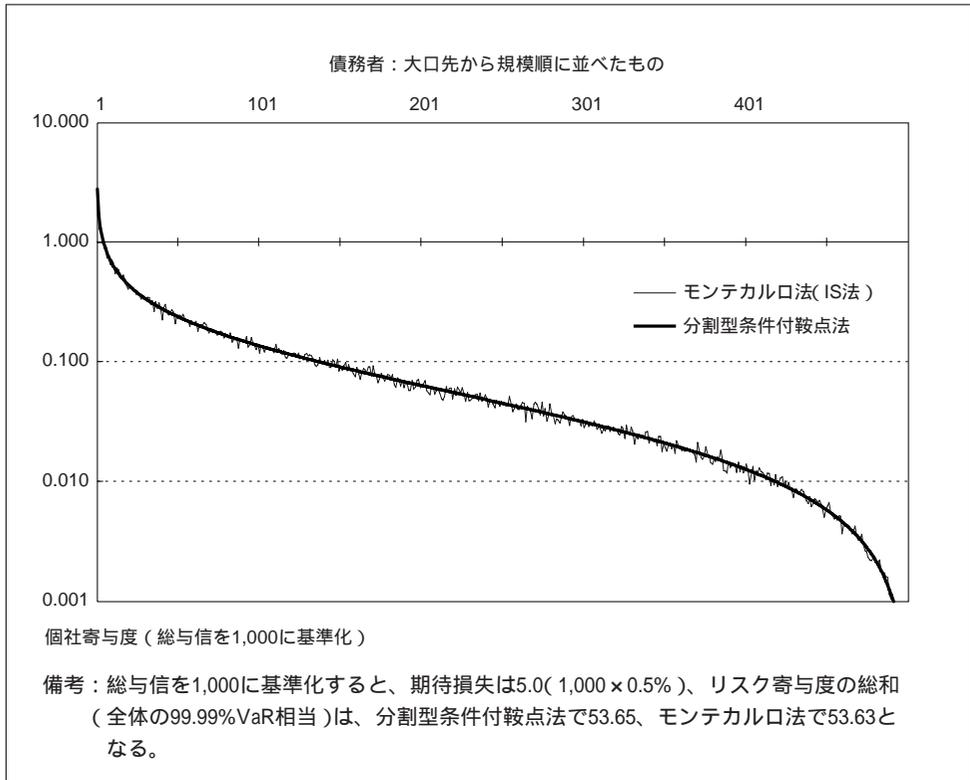
資産相関とデフォルト時損失率は全ての債務者で同一：資産相関0.05、デフォルト時損失率100%

リスク寄与度計算に用いるポートフォリオ損失額：信頼水準99.99%のVaR

モンテカルロ法の試行回数：100万回

まず、ポートフォリオAについて条件付鞍点法（分割型）とモンテカルロ法によるリスク寄与度の計算結果を示した（図3）。横軸方向に与信額の大きい順に500先を並べ、縦軸にリスク寄与度を対数目盛りで表示している。条件付鞍点法によるリスク寄与度は、与信額の順位と入れ替わることなく滑らかに減少している一方、モンテカルロ法によるリスク寄与度は隣接しあう与信額間で振幅しており、与信額とリスク寄与度の順位が一致していないことがわかる。

図3 ポートフォリオAのリスク寄与度



条件付鞍点法のリスク寄与度はモンテカルロ法のその概ね中心を通過しており、モンテカルロ法の結果が「与信額順位の前後を平均してみれば正しい」のならば、条件付鞍点法の近似パフォーマンスは、水準のフィットおよび安定性という両面で優れていると考えられる⁹。

図4は、ポートフォリオAの分割型条件付鞍点法の結果をベンチマークとし、条件付鞍点法とモンテカルロ法についてベンチマークとの乖離を示したものである。図4(1)に乖離水準を、図4(2)に乖離率を表示している。条件付鞍点法の乖離は、最大口先以外、ほぼゼロとなっている。モンテカルロ法の乖離については、図3でみたとおり振幅が大きいが、乖離率の平均値が0.017%、1階の自己相関が0.05とともほぼゼロであることから、ゼロ回りの無相関な変動であることがわかる。なお、自己相関が存在する場合、条件付鞍点法のリスク寄与度計算に、与信額分布のある

⁹ 均一なポートフォリオについては、全債務者の平均が真の値にほぼ一致する点を表2で確認した。ただし、不均一なポートフォリオでは平均値による比較ができないため、「与信額順位の前後を平均してみれば正しい」ならば、という条件のもとでの判断となる。なお、全債務者の合計値はモンテカルロ法と分割型条件付鞍点法でほぼ一致している。図3の備考を参照。

図4(1) リスク寄与度の乖離 (ポートフォリオA)

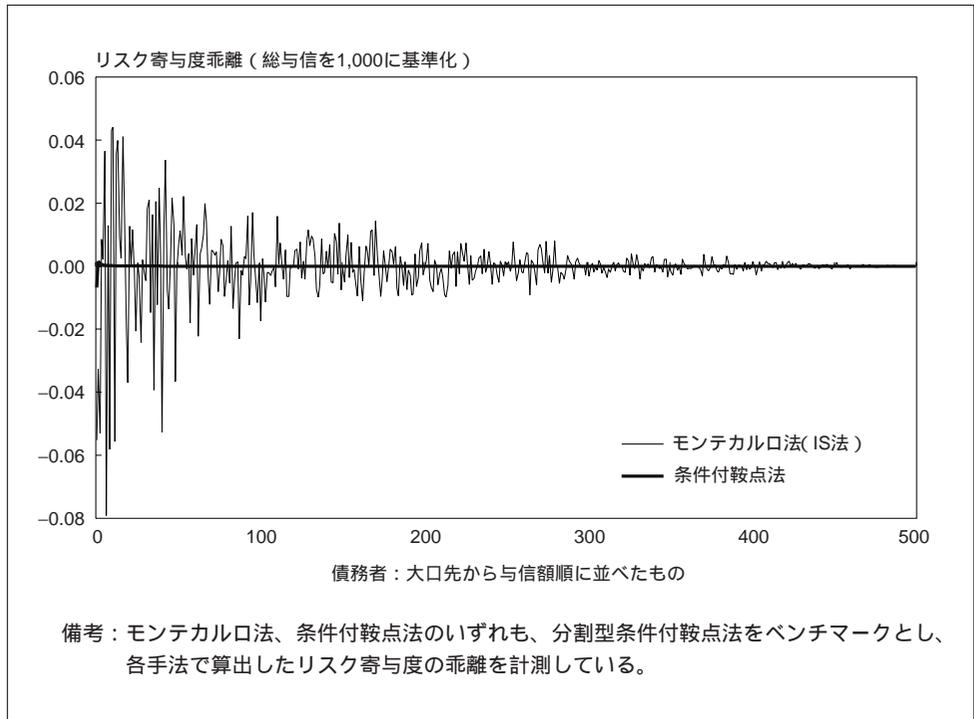
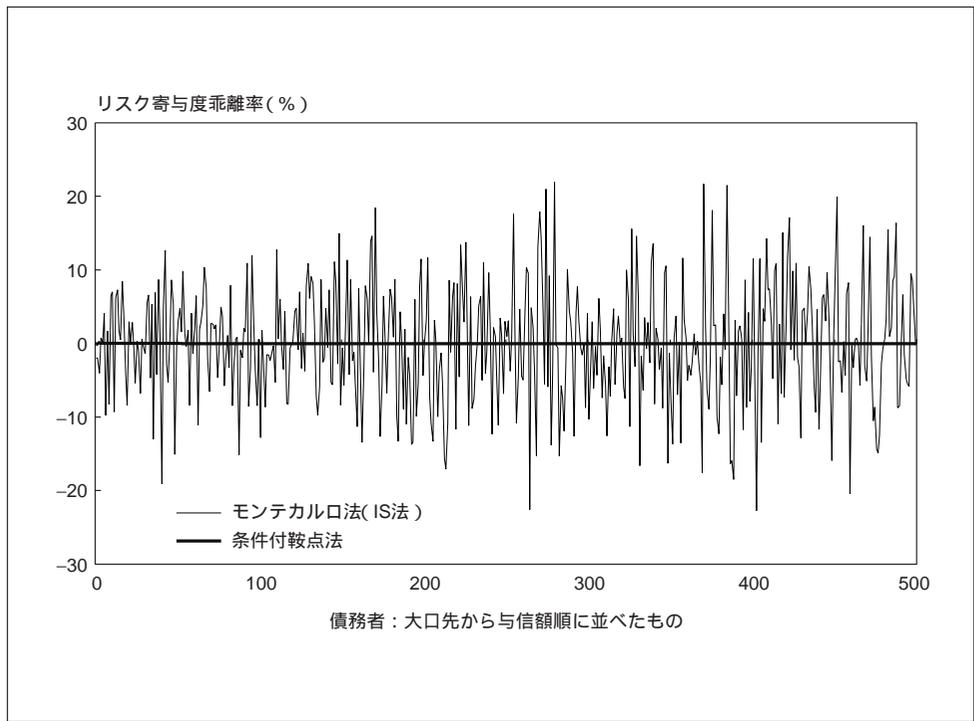


図4(2) リスク寄与度の乖離率 (ポートフォリオA)



区間で精度が低下する（傾向的に過大ないし過小評価する）現象が生じていることが疑われる。上記の結果はこうした可能性が低いことを示している。なお、モンテカルロ法の乖離率は与信額の規模によらず概ね一定であり、したがって、大口与信先ほどリスク寄与度計算に含まれる誤差が絶対水準で大きくなる。これは、モンテカルロ法でリスク寄与度を求める際に注意すべき点であろう。

図5は、ポートフォリオBについてベンチマーク（分割型条件付鞍点法）からの乖離率を示したものである。図4と異なり、条件付鞍点法とベンチマークの間に乖離が生じている。これは、ポートフォリオBが大口先を多く含むため、条件付鞍点法にバイアスが生じたものと考えられる¹⁰。乖離率の平均はモンテカルロ法が0.59%であるのに対し、条件付鞍点法は1.51%と大きかった。ただし、乖離の安定性という観点からみれば、モンテカルロ法が優れているとはいえない。

次に、別の観点からの近似パフォーマンス検証として、個別債務者のリスク寄与度の総和と全体のVaRの一致性をみた。両者の乖離率を条件付鞍点法と分割型条件付鞍点法について計測したところ表4のような結果となった。

図5 リスク寄与度の乖離率（ポートフォリオB）

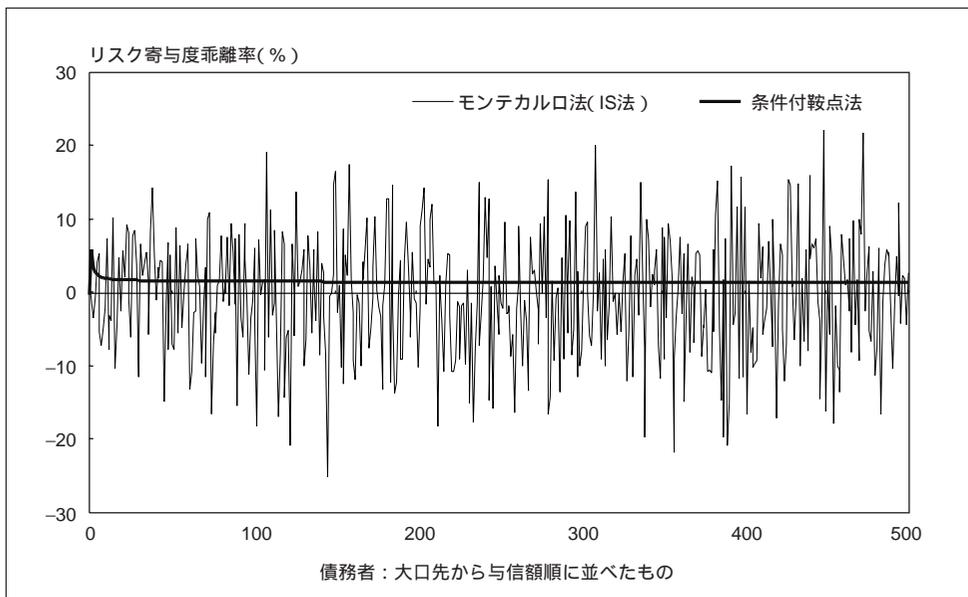


表4 リスク寄与度の総和とVaRの乖離率

	条件付鞍点法(%)	分割型条件付鞍点法(%)
ポートフォリオA	0.0680	0.0738
ポートフォリオB	1.4502	-0.0975

¹⁰ 菊池 [2007] は、与信ポートフォリオ全体のVaRについて、大口先への集中が大きいほど条件付鞍点法のVaR近似精度が低下することをサンプル・ポートフォリオを用いて示している。

ポートフォリオAでは、条件付鞍点法と分割型条件付鞍点法の2手法とも乖離率が0.1%未満となり、良好な近似パフォーマンスであることが確認された。一方、ポートフォリオBでは、条件付鞍点法の乖離率が1.4%とポートフォリオAに比べ大きくなっている。これは、大口与信が多くなると、全体のVaR算出のみならず、リスク寄与度への分解においても誤差が大きくなることを示している。一方、分割型条件付鞍点法では乖離率が大幅に改善しており、与信集中度の高いポートフォリオに対する同手法の有効性がリスク寄与度分解においても確認されている。

6 . リスク寄与度・感応度のパフォーマンス評価への応用

本節では、リスク寄与度とリスク感応度の信用リスク管理実務への活用を展望し、個別与信のパフォーマンス分析の数値例を示す。与信ポートフォリオのパフォーマンスを評価する指標としてSVAがあり、これを個別債務者の収益性評価に用いる。SVAは、経費控除後利益から信用コスト（期待損失額）と資本コスト（リスク配賦資本の額と資本コスト率の積）を減じた値として定義される。以下の分析では、SVAの構成要素の1つである資本コストの計算にリスク寄与度とリスク感応度を用いる。

(1) サンプル・ポートフォリオの設定

金融機関の与信ポートフォリオは、与信の大口集中という特徴のほか、さまざまなデフォルトリスクを抱えた債務者が存在しているという特徴を持つ。そこで、デフォルト率が異なる5つの内部格付を考え、これらの構成比を表5のように与えた。内部格付ごとに与信額の大口集中を表現するため、表3で設定したような指数分布を想定する。これをグラフで示すと図6のようになる。

表5 サンプル・ポートフォリオ

内部格付	デフォルト率 (%)	与信額構成比 (%)	債務者数 (構成比%)	与信額分布
1格	0.05	30	200 (8)	$e_j = -(3/2) * \log(1 + 0.002 - j / 200)$
2格	0.5	30	1,000 (40)	$e_k = -(3/10) * \log(1 + 0.0004 - k / 1000)$
3格	1	25	800 (32)	$e_l = -(5 / 16) * \log(1 + 0.0005 - l / 800)$
4格	3	10	400 (16)	$e_m = -(1 / 4) * \log(1 + 0.001 - m / 400)$
5格	7	5	100 (4)	$e_n = -(1/2) * \log(1 + 0.004 - n / 100)$

図6(1) 債務者数の与信額別・内部格付別構成比(小口)

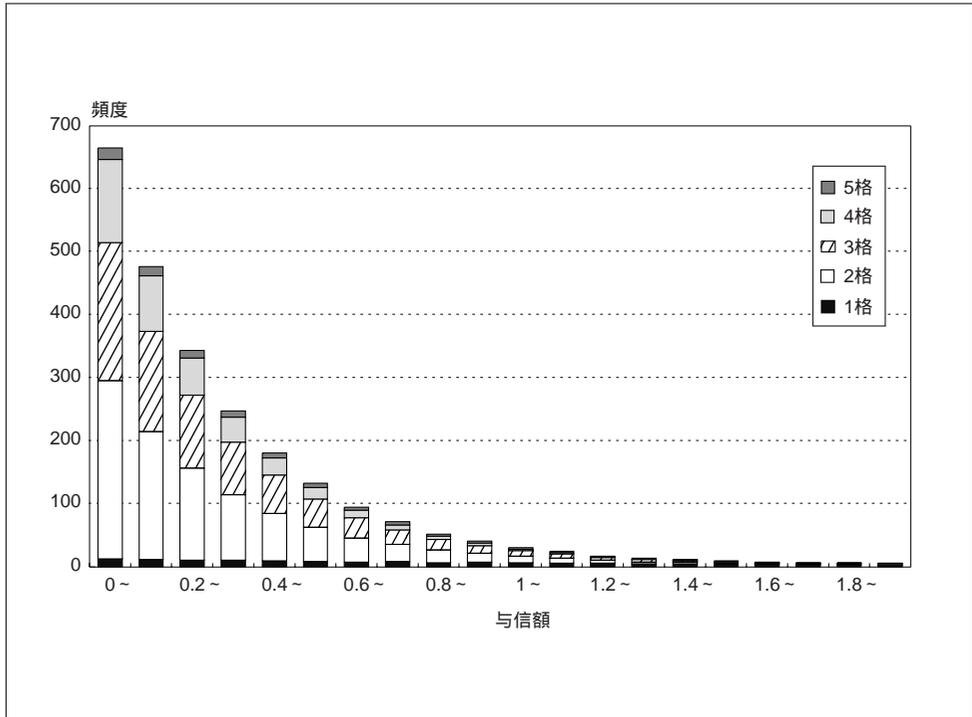


図6(2) 債務者数の与信額別・内部格付別構成比(大口)

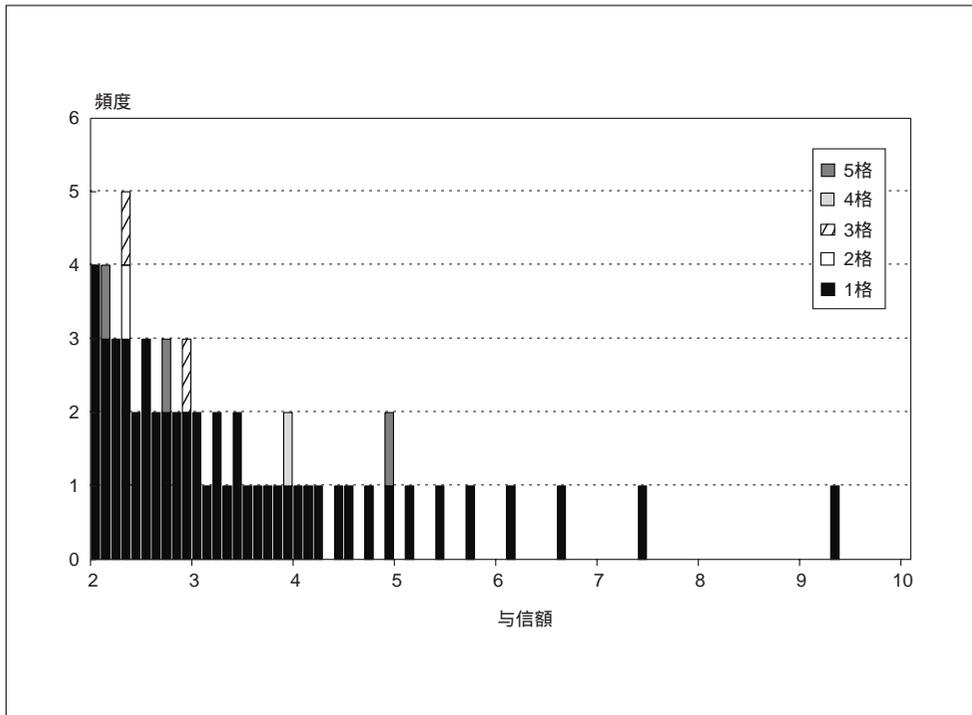


図6(1)は全与信額1,000(債務者数2,500)のうち、与信額2未満の分布を頻度ヒストグラムで表示したものである。0.1刻みにとった各グループの債務者数を内部格付別に示した。図6(2)には与信額2以上の分布を示している。与信額2以上を大口先とすると、そのほとんどが優良先(内部格付が1格:デフォルト率0.05%)となるよう指数分布を調整した。なお、大口問題先(同5格)も図6(2)中に3先含まれている。個別債務者の収益性評価では、最大口債務者を代表例として用いる。最大口債務者は1格に属し、与信額9.3(総与信額中の0.93%)を占めている。なお、内部格付別の与信額分布を図7に示した。

次に、SVAの計算方法を示す。個別債務者のSVAは以下の式で与えられ、右辺の3項はa、b、cのように設定する。

$$\text{個別債務者SVA} = \underbrace{\text{個別経費控除後利益}}_a - \underbrace{\text{個別信用コスト}}_b - \underbrace{\text{個別資本コスト}}_c$$

- a) 個別経費控除後利益 = 与信額 × 経費控除後利益率とし、経費控除後利益率を格付ごとに表6のように想定する。
- b) 個別信用コスト = 個別債務者の期待損失額(個別EL)
- c) 個別資本コスト = (リスク寄与度 - 個別EL) × 資本コスト率(10%)

経費控除後利益率は、2格~5格に関しては、格付ごとに個別SVAの総和がゼロとなるように設定している。1格については、最大口先の個別SVA、個別SVAの総和

図7 内部格付別の与信額分布

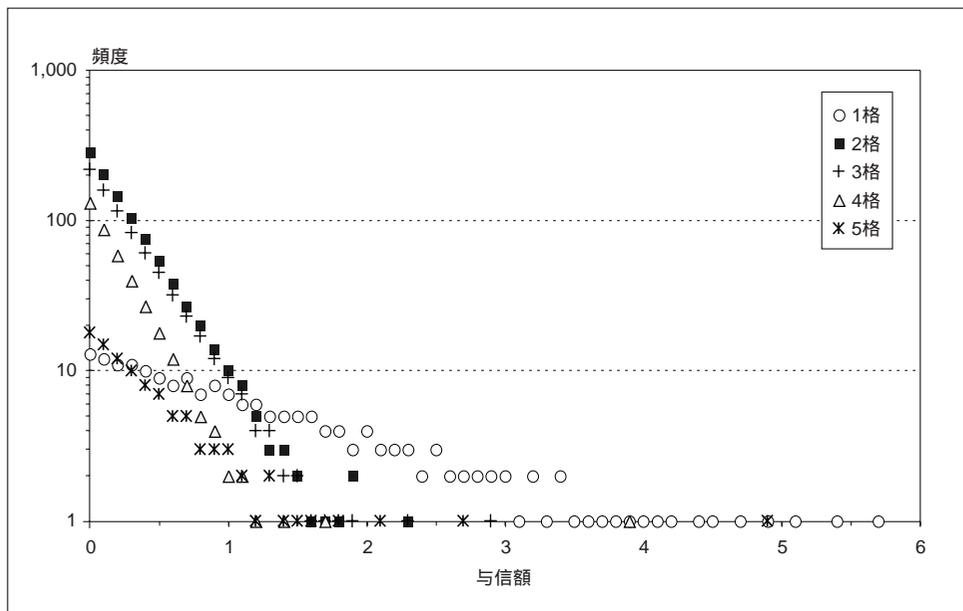


表6 内部格付別の経費控除後利益率

内部格付	経費控除後利益率 (%)
1格	0.200
2格	0.718
3格	1.376
4格	3.822
5格	8.584

がともに正となるように設定している。これは、以下で条件設定の変化により最大口先のSVAが負に転じていく様子を見るためである。リスク寄与度や感応度の計算では、分割型条件付鞍点法を用いている。計算法の詳細は、補論3で解説した。

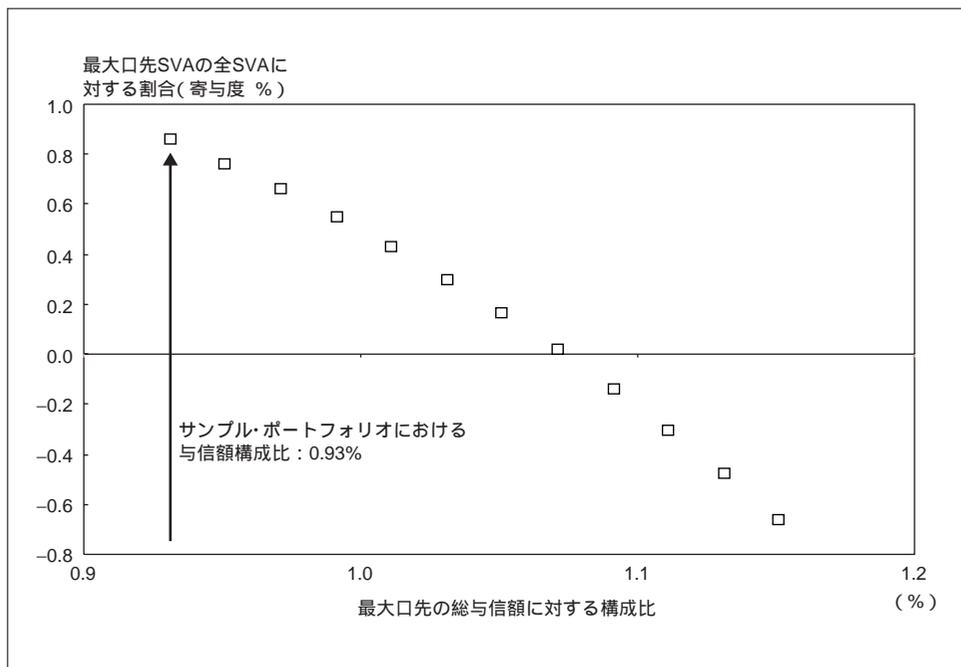
(2) 追加与信がもたらす資本コストの増加

高格付先への追加与信は、デフォルト率が一定である限り、信用コスト（期待損失）を比例的に増加させる。経費控除後利益も与信額に対する線形性を想定しているため、資本コストを考慮しない限り、収益性は不変である（収益額は比例増加する）。一方、VaRに対するリスク寄与度は、与信額の増加に対して非線形的に増加する。これは、大口先ほど万一デフォルトしたときの影響が大きくなるためである。したがって、追加与信は資本コストの増加を通じてSVAを低下させうる。その可能性や低下の程度は、追加与信に伴う資本コスト控除前の収益「額」の増加と資本コスト増加の相対関係に依存する。

図8は、上述の設定のもとでは、最大口先への追加与信がSVAを低下させる様子を示したものである。与信額の0.93%を占め、ポートフォリオ全体のSVAの0.86%に貢献していた最大口先が、資本コストの増加により全体への寄与を失っている。もちろん、追加与信が収益性に寄与するか否かは、利益率や経費率、信用コスト率のみならず資本コスト率も関連してくるため、必ずしも本事例のようにマイナスに影響するとは限らない。重要なのは、定量的な検証なしに表面的な利益額の増加のみで与信判断を行うことの危険性を認識し、信用コストや資本コストを加味した収益性の評価基準を持って与信や貸出金利に関する判断を行うという点にある。

実務においてこうした判断を行っていく際には、他金融機関との競争や与信先企業との長期的な関係といった要因が関与してくる。いずれも与信額の短期的な増減調整の困難さをもたらす要因であるが、このような与信の特性を前提に信用リスクを計測する場合、デフォルト率の時間変動の可能性が論点となる。次の事例では、この問題を考察する。

図8 最大口先への追加与信に伴うSVAの低下



(3) デフォルト率上昇がもたらす資本コストの増加

本稿では、ファクター型信用リスクモデルにおける無条件デフォルト率をデフォルト率と呼んできた(2節(1)の定義を参照)。条件付デフォルト率の変動が、共通ファクターの変動に起因するものか、固定パラメータとみなしていた無条件デフォルト率が変化したものかを判断するのは容易ではないが、債務者の信用リスクに長期的・恒常的な変化が生じたと判断されるケースは少なくないであろう。例えば、内外の格付機関においては、短期的な信用リスク変動ではなく恒常的な変化が生じたと判断される場合に格付を変更するという方針が採られている。以下では、債務者の信用力に何らかの構造的な変化が発生したケースなど、無条件デフォルト率が変化したと判断された場合の収益性評価を行う。ここでも、信用リスクへの配賦資本にかかる資本コストの変動が焦点となる。

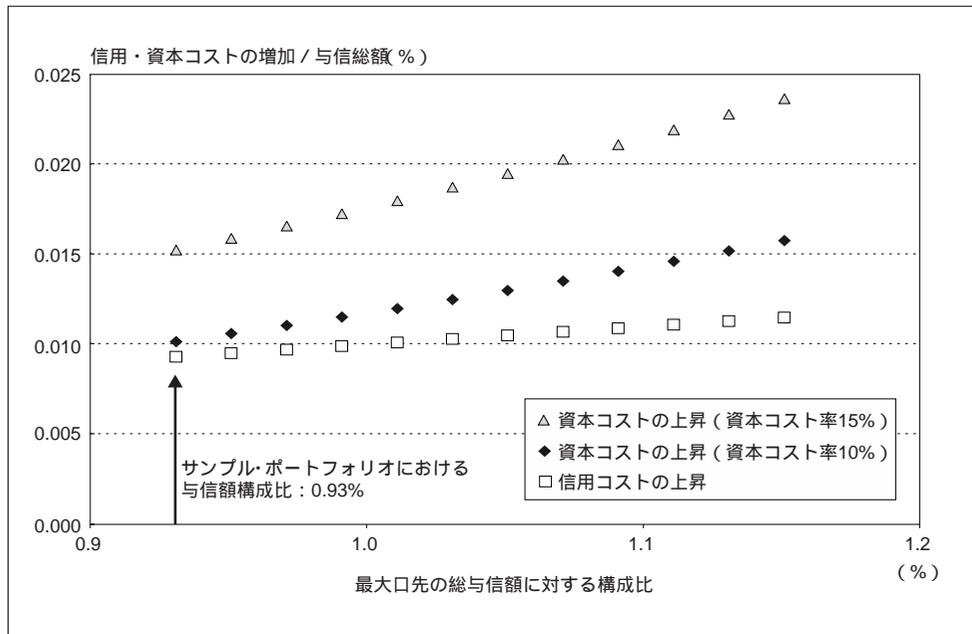
前出の試算事例と同様に最大口先を考察対象とし、デフォルト率が0.05%から1%分上昇した場合を考える。最大口先1社のデフォルト率上昇が与信ポートフォリオ全体の信用コストと資本コストにもたらした影響を図9に示した(横軸0.93%のサンプル・ポートフォリオのケース)。デフォルト率が0.95%上昇し、その与信額構成比が0.93%であるため、与信ポートフォリオ全体の信用コストは約0.01%上昇している。また、リスク感応度の近似表現(補論3(5))からポートフォリオ全体のVaRの上昇幅を算出し、資本コストの増分を求めたところ、資本コスト率10%では

信用コスト並みの負担増となった¹¹。ここでの数値例では、デフォルト率上昇が信用コストの上昇に対する引当負担とほぼ同額の資本コストを追加的に発生させていることになる。なお、株式市場が要求する資本コスト率が更に高い場合（図9では15%のケース）、信用コスト以上の負担が生じていることが確認される。

また、収益性の低下の絶対水準を評価するために、図10にサンプル・ポートフォリオの経費控除後利益率、信用コスト差引後の同利益率を示した（おのおの1.43%、0.37%）。ちなみに、信用コストを反映した邦銀のROAは、近年、概ね1%程度がそれ以下に分布しており、サンプル・ポートフォリオはやや低めの設定となっている。図9が示しているように最大口先1先のデフォルト率上昇でポートフォリオ収益率に0.02%の悪影響が出ており（資本コスト率10%のケース、信用・資本コスト上昇幅の合計）と信ポートフォリオ全体の収益率がそれほど高くないことにかんがみれば、無視できない大きさであることがわかる。

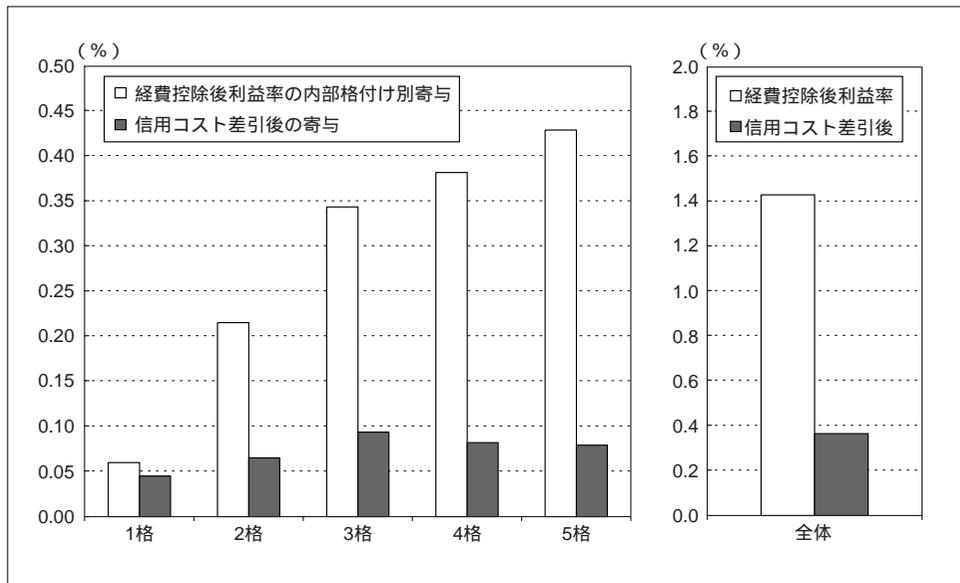
次に、最大口先への追加与信が行われていた場合について、デフォルト率上昇の影響を図9で確認する。まず、最大口先のウエイトが上昇するため、信用コストは総与信額対比でも緩やかに増加する。それ以上に、資本コスト（対総与信額）の増加が顕著であるが、これは本節(2)でみたようにVaRに対する最大口先の寄与

図9 最大口先のデフォルト率上昇とコスト増分



11 リスク感応度の計算では、ポートフォリオ全体のVaRをデフォルト率で微分した式の近似表現を利用した。微分対象をリスク寄与度として同様な近似表現を導出すれば、債務者別のSVAに対するデフォルト率上昇の影響を計算することができる。以下では、ポートフォリオ全体の収益性に対する影響を検証する。

図10 与信ポートフォリオの利益率



度が与信額の増加に対して非線形的に上昇するためである。その程度は、資本コスト率が高いほど大きくなっている（15%のケースを参照）。

本稿で示したリスク感応度の計算手法は、上記のような現象を定量的に計測する方法を提供する。将来のデフォルト率変動や与信額の変動の影響を事前に検証し、現在の与信行動、貸出金利設定、資本政策などの判断に反映させていくことは有益と考えられる。

7. まとめ

本稿では、与信ポートフォリオのリスク指標であるVaRを個別債務者別に分解した値、いわゆるリスク寄与度について、条件付鞍点法に基づいた近似表現式の導出を解説するとともに、菊池[2007]で提案された「分割型条件付鞍点法」を用いて、与信集中度が高いポートフォリオの債務者に対するリスク寄与度の近似表現式を導出した。その近似精度を検証した結果、Glasserman[2006]の加重サンプリング法と比べて、条件付鞍点法、および、分割型条件付鞍点法によるリスク寄与度の近似精度が高いことが確認された。これは、本稿の手法を用いることで、与信集中リスクの把握やリスク資本配賦に基づいた個別与信の収益性評価が、シミュレーションに比べて短時間で正確に行えることを示唆している。

また本稿では、デフォルト率などのパラメータの変化に対するVaRの感応度について条件付鞍点法を用いた近似表現を導出した。さらに、リスク量計測時には固定

されていたデフォルト率が将来変動した場合のVaRやリスク寄与度、収益性などの変化を、VaRの感応度を用いて検証する手法を提唱し、静学的なリスク分析（スナップショット的なリスク計測）からの拡張方向の1つを示した。

このほか、SVAを用いた収益性評価では、与信の大口集中が抱える潜在的な問題、すなわち、優良先である分には問題ないが、デフォルト率が上昇した場合のインパクトが大きいこと、追加与信はリスク寄与度や配賦資本、収益性への悪影響を非線形的に増加させることを定量的に検証した事例を紹介した。

VaRを債務者別に分解する計算手法や、デフォルト率・資産相関などモデル・パラメータに対するリスク感応度の計算手法は、上述のような分析事例以外にも多様な活用方法を有していると考えられる。本稿で提案した精度が高い近似計算手法は、こうしたリスク分析の土台を支える技術として有益であろう。

補論1．本論(9)式、(10)式に関する補足

本補論では、まず、本論(9)式の右辺が定義されること、すなわち、VaRが与信額に対して偏微分可能であることを証明する。次に、VaRが正の1次同次性(定義は下記参照)を満たすことを証明し、この性質を用いて、リスク寄与度の個別債務者に関する総和がVaRに一致すること(本論(10)式)を証明する。

本論(9)式右辺が定義されること(VaRが与信額に対して偏微分可能であること)

VaRが債務者の与信額に対して連続微分可能であることを証明し、本論(9)式右辺が意味を持つことを証明する。

本論(8)式より、与信ポートフォリオ損失額の分布関数は次式で記述される。

$$1 - \alpha = P(L > q_\alpha) = E \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(K_{L|Z}(s) - sq_\alpha)}{s} ds \right] \quad (c > 0) \quad (\text{A-1})$$

$$\equiv F((e_1, \dots, e_M), q_\alpha).$$

q_α が、各債務者の与信額 $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_M)$ に対して連続微分可能であることを保証する定理は、次の陰関数定理である。

定理(陰関数定理)(大森[1989]、ユルゲン＝ヨスト[2000]等を参照)

$f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ が、開集合 $A \subset \mathbf{R}^n$ 上のある点 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ で $f(\mathbf{a}) = c$ を満たし、 A 上で連続微分可能かつ1階の偏導関数 $\partial f(x_1, \dots, x_n) / \partial x_i$ ($i=1, \dots, n$) が連続であるとする。このとき、ある x_i について $\partial f(\mathbf{a}) / \partial x_i \neq 0$ ならば、方程式 $f(x_1, \dots, x_n) = c$ は x_i に関して解けて、 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ の開近傍上で定義された連続微分可能かつ1階の偏導関数が連続である関数 $g: \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$ が存在し、 $x_i = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ となる。

上記の陰関数定理を(A-1)式の $F((e_1, \dots, e_M), q_\alpha)$ に適用することを考える。条件付キュムラント母関数 $K_{L|Z}(s) = \log E[e^{sL} | \mathbf{Z} = \mathbf{z}]$ は、 $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_M)$ に対して連続微分可能で、偏導関数は連続である。したがって、 $F((e_1, \dots, e_M), q_\alpha)$ は、 $(e_1, \dots, e_M, q_\alpha)$ に関して連続微分可能かつ偏導関数が連続となる。また、

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha} F((e_1, \dots, e_M), q_\alpha) = E \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{\exp(K_{L|Z}(s) - sq_\alpha)}{s} ds \right]$$

$$= -E \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(K_{L|Z}(s) - sq_\alpha) ds \right] \quad (c > 0), \quad (\text{A-2})$$

となるが、(A-2)式の被積分項の符号は、

$$\exp(K_{L|Z}(s) - sq_\alpha) > 0, \quad (\text{A-3})$$

となるので、(A-2)式の左辺 0である。

以上より、陰関数定理を $F((e_1, \dots, e_M), q_\alpha)$ に適用することができ、方程式 $F((e_1, \dots, e_M), q_\alpha) = 1 - \alpha$ は q_α に関して解けて、 $e = (e_1, \dots, e_M)$ について連続微分可能かつ1階の偏導関数が連続である関数 $g: \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}$ が存在し、 $q_\alpha = g(e_1, \dots, e_M)$ となる。

したがって、本論中の仮定のもとで、VaRは各債務者の与信額に対して連続微分可能であることが証明され、本論(9)式右辺で定義されるリスク寄与度が意味を持つことが証明された。

VaRが正の1次同次性を満たすことの証明

VaRが与信額 $e = (e_1, \dots, e_M)$ の関数であることを強調するために、信頼水準 α のVaRを $q_\alpha(e_1, \dots, e_M)$ と記すと、VaRの正の1次同次性とは、

$$q_\alpha(\lambda e_1, \dots, \lambda e_M) = \lambda q_\alpha(e_1, \dots, e_M) \quad \forall \lambda > 0, \quad (\text{A-4})$$

が成り立つことをいう。

q_α の正の1次同次性は、与信ポートフォリオ (e_1, \dots, e_M) の損失額 L の分布関数と与信ポートフォリオ $(\lambda e_1, \dots, \lambda e_M)$ の損失額 L' の分布関数の間に成り立つ次の関係式を用いて、確かめることができる。

$$P(L' > \lambda u) = P(\lambda L > \lambda u) = P(L > u). \quad (\text{A-5})$$

ここで、(A-5)式の u として、与信ポートフォリオ (e_1, \dots, e_M) の信頼水準 α のVaRである $q_\alpha(e_1, \dots, e_M)$ をとると、

$$1 - \alpha = P(L > q_\alpha(e_1, \dots, e_M)) = P(L' > \lambda q_\alpha(e_1, \dots, e_M)), \quad (\text{A-6})$$

となり、与信ポートフォリオ $(\lambda e_1, \dots, \lambda e_M)$ の信頼水準 α のVaRである $q_\alpha(\lambda e_1, \dots, \lambda e_M)$ は、 $\lambda q_\alpha(e_1, \dots, e_M)$ に一致することがわかる。つまり、本稿で考える状況設定においては、VaRは正の1次同次性を満たす。

本論(10)式が成立することの証明(リスク寄与度の総和がVaRに一致すること)

本論(10)式が成立すること、すなわち、リスク寄与度の個別債務者に関する総和がVaRに一致することは、上記で証明したVaRの正の1次同次性を用いて下記のように証明される。

VaRの正の1次同次性より $\lambda q_\alpha(e_1, \dots, e_M) = q_\alpha(\lambda e_1, \dots, \lambda e_M)$ の両辺を、 λ で偏微分すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 q_{\alpha}(e_1, \dots, e_M) &= \frac{\partial q_{\alpha}(\lambda e_1, \dots, \lambda e_M)}{\partial(\lambda e_1)} \cdot \frac{\partial(\lambda e_1)}{\partial \lambda} + \dots + \frac{\partial q_{\alpha}(\lambda e_1, \dots, \lambda e_M)}{\partial(\lambda e_M)} \cdot \frac{\partial(\lambda e_M)}{\partial \lambda} \\
 &= \frac{\partial q_{\alpha}(\lambda e_1, \dots, \lambda e_M)}{\partial(\lambda e_1)} \cdot e_1 + \dots + \frac{\partial q_{\alpha}(\lambda e_1, \dots, \lambda e_M)}{\partial(\lambda e_M)} \cdot e_M.
 \end{aligned}
 \tag{A-7}$$

(A-7)式の両辺を λ 倍すると、次式が導出される。

$$\begin{aligned}
 \lambda q_{\alpha}(e_1, \dots, e_M) &= q_{\alpha}(\lambda e_1, \dots, \lambda e_M) \\
 &= \frac{\partial q_{\alpha}(\lambda e_1, \dots, \lambda e_M)}{\partial(\lambda e_1)} \cdot (\lambda e_1) + \dots + \frac{\partial q_{\alpha}(\lambda e_1, \dots, \lambda e_M)}{\partial(\lambda e_M)} \cdot (\lambda e_M).
 \end{aligned}
 \tag{A-8}$$

ここで、与信ポートフォリオ $(\lambda e_1, \dots, \lambda e_M) \equiv (y_1, \dots, y_M)$ は任意なので、(A-8)式から、

$$\begin{aligned}
 \lambda q_{\alpha}(e_1, \dots, e_M) &= q_{\alpha}(\lambda e_1, \dots, \lambda e_M) = q_{\alpha}(y_1, \dots, y_M) \\
 &= \sum_{j=1}^M y_j \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial y_j},
 \end{aligned}
 \tag{A-9}$$

が成立する。

補論2．本論(12)式の証明

本補論では、本論(12)式2行目の等号が成立することを証明する。そのためには、

$$\frac{\partial K_{L|\mathbf{z}}(s)}{\partial e_j} \frac{\exp(K_{L|\mathbf{z}}(s) - s q_\alpha)}{s} = l_j p_j(\mathbf{z}) \exp(K_{L(j)|\mathbf{z}}(s) - s(q_\alpha - l_j e_j)), \quad (\text{A-10})$$

が証明されればよい。

本論(5)式より、条件付キュムラント母関数は次のように計算されていた。

$$K_{L|\mathbf{z}}(s) = \sum_{j=1}^M \log(1 - p_j(\mathbf{z}) + p_j(\mathbf{z}) e^{s e_j l_j}). \quad (\text{A-11})$$

(A-11)式を(A-10)式左辺に代入して具体的に計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{L|\mathbf{z}}(s)}{\partial e_j} \frac{\exp(K_{L|\mathbf{z}}(s) - s q_\alpha)}{s} &= \frac{s l_j p_j(\mathbf{z}) e^{s e_j l_j}}{1 - p_j(\mathbf{z}) + p_j(\mathbf{z}) e^{s e_j l_j}} \frac{\exp(K_{L|\mathbf{z}}(s) - s q_\alpha)}{s} \\ &= l_j p_j(\mathbf{z}) e^{-s(q_\alpha - e_j l_j)} \prod_{k \neq j} (1 - p_k(\mathbf{z}) + p_k(\mathbf{z}) e^{s e_k l_k}) \\ &= l_j p_j(\mathbf{z}) \exp(K_{L(j)|\mathbf{z}}(s) - s(q_\alpha - l_j e_j)), \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

となる。

以上より、(A-10)式が証明されたので、本論(12)式が成立することがわかった。

補論3 . 与信集中度の高いポートフォリオに対するリスク寄与度・感応度の近似表現

菊池 [2007] では、与信集中度の高いポートフォリオのVaRを条件付鞍点法により計算する場合、その近似精度が悪くなることが指摘されている。本論5節のサンプル・ポートフォリオBでも、こうした傾向が現れていた。菊池 [2007] は、このような場合の対処法として、与信ポートフォリオを少数の与信額の大きな先からなる「大口ポートフォリオ」と多数の小額の与信先からなる「小口ポートフォリオ」に分割し、大口先の状態を表すツリーの枝ごとに、小口ポートフォリオの損失額分布関数に条件付鞍点法を適用するという「分割型条件付鞍点法」を提案し、同手法によりVaRの精度が大幅に改善されることを示している。

本補論では、与信集中度の高いポートフォリオの債務者のリスク寄与度とリスク感応度を「分割型条件付鞍点法」により計算するための近似式を導出する。なお、本論5、6節の数値検証においては、本補論で導出する寄与度と感応度の近似計算式を用いている。

(1) 損失額分布・VaRの表現

まず、与信ポートフォリオの債務者を与信額の降順の並びで1からインデックスを付け、債務者1, ..., N (1 ≤ N < M) からなる「大口ポートフォリオ」と債務者N + 1, ..., Mからなる「小口ポートフォリオ」に分割する。大口ポートフォリオの債務者の生存・デフォルトの状態の全ての組合せを s_1, \dots, s_{2^N} とし¹²、状態 $s_k (k = 1, \dots, 2^N)$ が起きる場合に大口ポートフォリオから発生する確定的な損失額を $loss_k (k = 1, \dots, 2^N)$ とする。また、小口ポートフォリオの損失額の合計を L' とおく。

元の与信ポートフォリオ損失額 L の(無条件)分布関数は次で記述される。

$$\begin{aligned} P(L > u) &= E [P(L > u) | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] \\ &= E \left[\sum_{k=1}^{2^N} P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) P(L' > u - loss_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

本論(6)式を用いて、(A-13)式2行目右辺の $P(L' > u - loss_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z})$ を、積分により表現すると、

$$P(L' > u - loss_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(K_{L'|z}(s) - s(u - loss_k))}{s} ds \quad \forall c > 0, \quad (\text{A-14})$$

となる。

12 大口債務者ポートフォリオはN社からなり、各債務者がとりうる状態の数は、デフォルトが生存の2つであるため、このポートフォリオの各債務者の状態の全ての組合せの数は、 2^N となる。

(A-13)式の u を信頼水準 α のVaR q_α とすると、

$$1 - \alpha = P(L > q_\alpha) = E\left[\sum_{k=1}^{2^N} P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) Q_k(L', q_\alpha, \mathbf{z})\right],$$

$$Q_k(L', q_\alpha, \mathbf{z}) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(K_{L|\mathbf{z}}(s) - s(q_\alpha - \text{loss}_k))}{s} ds \quad \forall c > 0, \quad (\text{A-15})$$

となる。

(2) リスク寄与度の表現

次に、与信集中度の高いポートフォリオに対するリスク寄与度の表現を導出する。そのために、(A-15)式に現れる $Q_k(L', q_\alpha, \mathbf{z})$ を債務者 j の与信額 e_j で偏微分する。債務者 j が「大口ポートフォリオ」に属しているか、「小口ポートフォリオ」に属しているかで偏微分の結果が異なることに注意が必要である。

債務者 j が「大口ポートフォリオ」に属している場合、(A-15)式の $Q_k(L', q_\alpha, \mathbf{z})$ を債務者 j の与信額 e_j で偏微分した結果は、

$$\frac{\partial Q_k(L', q_\alpha, \mathbf{z})}{\partial e_j} = \frac{1}{2\pi i} \left(-\frac{\partial q_\alpha}{\partial e_j} + \frac{\partial \text{loss}_k}{\partial e_j} \right) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(K_{L|\mathbf{z}}(s) - s(q_\alpha - \text{loss}_k)) ds, \quad (\text{A-16})$$

となる。「小口ポートフォリオ」から発生する損失額 L' に対する条件付密度関数 $f_{L'|\mathbf{z}}$ を用いて(A-16)式を書き直すと、

$$\frac{\partial Q_k(L', q_\alpha, \mathbf{z})}{\partial e_j} = \left(-\frac{\partial q_\alpha}{\partial e_j} + \frac{\partial \text{loss}_k}{\partial e_j} \right) f_{L'|\mathbf{z}}(q_\alpha - \text{loss}_k), \quad (\text{A-17})$$

となる。

本補論(A-15)式の両辺を、債務者 j の与信額 e_j で偏微分すると、

$$0 = E\left[\sum_{k=1}^{2^N} P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \frac{\partial Q_k(L', q_\alpha, \mathbf{z})}{\partial e_j}\right], \quad (\text{A-18})$$

となるので、(A-17) (A-18)式を用いて、リスク寄与度 $q_\alpha(j) = e_j \partial q_\alpha / \partial e_j$ について式を整理すると、

$$q_\alpha(j) = e_j \frac{E\left[\sum_{k=1}^{2^N} P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \frac{\partial \text{loss}_k}{\partial e_j} f_{L'|\mathbf{z}}(q_\alpha - \text{loss}_k)\right]}{E\left[\sum_{k=1}^{2^N} P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) f_{L'|\mathbf{z}}(q_\alpha - \text{loss}_k)\right]}, \quad (\text{A-19})$$

となり、債務者 j が「大口ポートフォリオ」に属している場合のリスク寄与度の表現が導出された。

一方、債務者 j が「小口ポートフォリオ」に属している場合、(A-15)式の $Q_k(L', q_\alpha, \mathbf{z})$ を債務者 j の与信額 e_j で偏微分した結果は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_k(L', q_\alpha, \mathbf{z})}{\partial e_j} &= \frac{-1}{2\pi i} \frac{\partial q_\alpha}{\partial e_j} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(K_{L'|\mathbf{z}}(s) - s(q_\alpha - \text{loss}_k)) ds \\ &+ \frac{l_j p_j(\mathbf{z})}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(K_{L'_{(j)}|\mathbf{z}}(s) - s(q_\alpha - \text{loss}_k - e_j l_j)) ds \quad \forall c \in \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (\text{A-20})$$

となる。ここで、 $K_{L'_{(j)}|\mathbf{z}}(s)$ は、「小口ポートフォリオ」から債務者 j を取り除いたポートフォリオから発生する損失額 $L'_{(j)}$ の条件付キウムラント母関数を表す。条件付密度関数を用いて上式を書き直すと、

$$\frac{\partial Q_k(L', q_\alpha, \mathbf{z})}{\partial e_j} = -\frac{\partial q_\alpha}{\partial e_j} f_{L'|\mathbf{z}}(q_\alpha - \text{loss}_k) + l_j p_j(\mathbf{z}) f_{L'_{(j)}|\mathbf{z}}(q_\alpha - \text{loss}_k - e_j l_j), \quad (\text{A-21})$$

となる。

上と同様に、債務者 j が「小口ポートフォリオ」に属している場合、(A-18)、(A-21)式を用いて式変形を行うと、次のような債務者 j のリスク寄与度の表現が導出される。

$$q_\alpha(j) = e_j l_j \frac{E\left[\sum_{k=1}^{2^N} P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) p_j(\mathbf{z}) f_{L'_{(j)}|\mathbf{z}}(q_\alpha - \text{loss}_k - e_j l_j)\right]}{E\left[\sum_{k=1}^{2^N} P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) f_{L'|\mathbf{z}}(q_\alpha - \text{loss}_k)\right]}. \quad (\text{A-22})$$

ここで、 $f_{L'_{(j)}|\mathbf{z}}$ は、「小口ポートフォリオ」から債務者 j を除いたポートフォリオから発生する損失額に対する条件付密度関数を表している。

(3) リスク寄与度の近似表現

与信集中度が高いポートフォリオに対するリスク寄与度の近似表現を、条件付鞍点法を用いて導出する。債務者が「大口ポートフォリオ」に属しているのか、「小口ポートフォリオ」に属しているのかでリスク寄与度の表現式が異なることは、本補論(2)で既にみた。もっとも、債務者が「大口」、「小口」のいずれの場合においても、表現式((A-19)、(A-22)式)の分母と分子に本論4節(1)の条件付鞍点法による損失額の条件付密度関数の近似公式(本論(21)式)を適用することができる。

債務者が「大口ポートフォリオ」に属するときのリスク寄与度の近似表現式を求めるには、(A-19)式右辺の分母と分子に条件付鞍点法を適用すればよい。計算した結果を示すと次のようになる。

$$q_{\alpha}(j) = e_j \frac{\sum_{k=1}^{2^N} \frac{\partial loss_k}{\partial e_j} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \frac{\exp(K_{L'|\mathbf{z}}(\bar{s}_k(\mathbf{z})) - \bar{s}_k(\mathbf{z})(q_{\alpha} - loss_k))}{\sqrt{K_{L'|\mathbf{z}}^{(II)}(\bar{s}_k(\mathbf{z}))}} \right]}{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \frac{\exp(K_{L'|\mathbf{z}}(\bar{s}_k(\mathbf{z})) - \bar{s}_k(\mathbf{z})(q_{\alpha} - loss_k))}{\sqrt{K_{L'|\mathbf{z}}^{(II)}(\bar{s}_k(\mathbf{z}))}} \right]} . \quad (\text{A-23})$$

ただし、 $K_{L'|\mathbf{z}}^{(I)}(\bar{s}_k(\mathbf{z})) = q_{\alpha} - loss_k$.

一方、債務者が「小口ポートフォリオ」に属するときのリスク寄与度の近似表現式を求めるには、(A-22)式右辺の分母と分子に条件付鞍点法を適用すればよい。計算の結果は次のとおりである。

$$q_{\alpha}(j) = e_j l_j \frac{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \frac{\exp(K_{L'|\mathbf{z}}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z})) - \bar{s}_j^k(\mathbf{z})(q_{\alpha} - loss_k - e_j l_j))}{\sqrt{K_{L'|\mathbf{z}}^{(II)}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z}))}} \right]}{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \frac{\exp(K_{L'|\mathbf{z}}(\hat{s}_k(\mathbf{z})) - \hat{s}_k(\mathbf{z})(q_{\alpha} - loss_k))}{\sqrt{K_{L'|\mathbf{z}}^{(II)}(\hat{s}_k(\mathbf{z}))}} \right]} . \quad (\text{A-24})$$

ただし、 $K_{L'|\mathbf{z}}^{(I)}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z})) = q_{\alpha} - loss_k - e_j l_j$, $K_{L'|\mathbf{z}}^{(I)}(\hat{s}_k(\mathbf{z})) = q_{\alpha} - loss_k$.

以上の議論より、与信集中度が高いポートフォリオに対するリスク寄与度の近似表現は、(A-23) (A-24)式となった。

(4) リスク感応度の表現

ここでは、与信集中度の高いポートフォリオに対するリスク感応度の表現を導出する。そのために、本補論(1)のVaRの表現(A-15)式をモデル・パラメータで偏微分することにより、感応度の表現式を導出する。

(A-15)式の両辺を債務者 j のモデル・パラメータ θ_j で偏微分して式を整理するという方針を採るが、以下でみるように、債務者 j が「大口ポートフォリオ」に属するのか、「小口ポートフォリオ」に属するのかでリスク感応度の表現が異なってくるので注意が必要である。

債務者 j が「大口ポートフォリオ」に属する場合

(A-15)式の両辺をモデル・パラメータ θ_j で偏微分すると、

$$0 = \sum_{k=1}^{2^N} E \left[\frac{\partial P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z})}{\partial \theta_j} Q_k(L', q_\alpha, \mathbf{z}) \right] + \sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \frac{\partial Q_k(L', q_\alpha, \mathbf{z})}{\partial \theta_j} \right], \quad (\text{A-25})$$

を得る。この(A-25)式の右辺第二項の $\partial Q_k(L', q_\alpha, \mathbf{z}) / \partial \theta_j$ を計算すると、

$$\frac{\partial Q_k(L', q_\alpha, \mathbf{z})}{\partial \theta_j} = -\frac{\partial q_\alpha}{\partial \theta_j} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(K_{L'|\mathbf{z}}(s) - s(q_\alpha - \text{loss}_k)) ds \quad \forall c \in \mathbf{R}, \quad (\text{A-26})$$

となる。

したがって、(A-25)と(A-26)式をVaRの偏微分したものについて整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \theta_j} &= \frac{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[\frac{\partial P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z})}{\partial \theta_j} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(K_{L'|\mathbf{z}}(s) - s(q_\alpha - \text{loss}_k))}{s} ds \right]}{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(K_{L'|\mathbf{z}}(s) - s(q_\alpha - \text{loss}_k)) ds \right]} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[\frac{\partial P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z})}{\partial \theta_j} P(L' > q_\alpha - \text{loss}_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \right]}{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) f_{L'|\mathbf{z}}(q_\alpha - \text{loss}_k) \right]}, \end{aligned} \quad (\text{A-27})$$

となる。

債務者 j が「小口ポートフォリオ」に属する場合

本補論(A-15)式の両辺をモデル・パラメータ θ_j で偏微分すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \frac{\partial Q_k(L', q_\alpha, \mathbf{z})}{\partial \theta_j} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(-s \frac{\partial q_\alpha}{\partial \theta_j} + \frac{\partial K_{L'|\mathbf{z}}(s)}{\partial \theta_j} \right) \frac{\exp(K_{L'|\mathbf{z}}(s) - s(q_\alpha - \text{loss}_k))}{s} ds \right], \end{aligned} \quad (\text{A-28})$$

となる。

(A-28)式を、VaRを θ_j で偏微分したものについて整理すると、次のように債務者 j のリスク感応度の表現が導出される。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_\alpha}{\partial \theta_j} &= \frac{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \frac{\partial p_j(\mathbf{z})}{\partial \theta_j} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(K_{L'(j)|\mathbf{z}}(s) - s(q_\alpha - \text{loss}_k - e_j l_j))}{s} ds \right]}{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(K_{L'|\mathbf{z}}(s) - s(q_\alpha - \text{loss}_k)) ds \right]} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \frac{\partial p_j(\mathbf{z})}{\partial \theta_j} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(K_{L'(j)|\mathbf{z}}(s) - s(q_\alpha - \text{loss}_k))}{s} ds \right]}{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(K_{L'|\mathbf{z}}(s) - s(q_\alpha - \text{loss}_k)) ds \right]} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \frac{\partial p_j(\mathbf{z})}{\partial \theta_j} P(L'_{(j)} > q_\alpha - \text{loss}_k - e_j l_j | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \right]}{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) f_{L'|\mathbf{z}}(q_\alpha - \text{loss}_k) \right]} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \frac{\partial p_j(\mathbf{z})}{\partial \theta_j} P(L'_{(j)} > q_\alpha - \text{loss}_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \right]}{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) f_{L'|\mathbf{z}}(q_\alpha - \text{loss}_k) \right]} \quad (\text{A-29})
\end{aligned}$$

ここで、 $L'_{(j)}$ は「小口ポートフォリオ」から債務者 j を取り除いたポートフォリオを構成する債務者がデフォルトすることにより発生する損失額を表す確率変数である。

以上より、債務者が「大口ポートフォリオ」に属していれば、リスク感応度の表現式は(A-27)式で、債務者が「小口ポートフォリオ」に属していれば、リスク感応度の表現式は(A-29)式で与えられることがわかった。

(5) リスク感応度の近似表現

与信集中度の高いポートフォリオに対するリスク感応度の近似表現式は、(A-27) (A-29)式に条件付鞍点法を適用することで得られる。具体的には、表現式の分母に本論4節(1)の条件付鞍点法による損失額の条件付密度関数の近似公式(本論(21)式)を、表現式の分子に本論(25)式を適用する。まず、「大口ポートフォリオ」に属する債務者のデフォルト・パラメータに対するリスク感応度の近似表現式を導出する。次に「小口ポートフォリオ」のそれを導出する。

条件付鞍点法をリスク感応度の表現式に適用する前に、表現の記述に用いる条件付鞍点 $\hat{s}_k(\mathbf{z})$ 、 $\bar{s}_j^k(\mathbf{z})$ 、 $\bar{s}_j^k(\mathbf{z})$ が満たすべき関係式を以下に記しておく。

$$K_{L'|\mathbf{z}}^{(I)}(\hat{s}_k(\mathbf{z})) = q_\alpha - loss_k,$$

$$K_{L'(j)|\mathbf{z}}^{(I)}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z})) = q_\alpha - loss_k - l_j e_j,$$

$$K_{L'(j)|\mathbf{z}}^{(I)}(\tilde{s}_j^k(\mathbf{z})) = q_\alpha - loss_k.$$

「大口ポートフォリオ」に属する債務者のデフォルト・パラメータに対する感応度
 リスク感応度の表現(A-27)式の分子の期待値の中身を $Q_j^k(\mathbf{z})$ とする。 $Q_j^k(\mathbf{z})$ は、
 本論(25)式を用いて条件付鞍点法を用いて次のように近似計算される。

$q_\alpha - loss_k > E[L'|\mathbf{Z} = \mathbf{z}]$ の場合

$$Q_j^k(\mathbf{z}) = P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \frac{\exp(K_{L'|\mathbf{z}}(\hat{s}_k(\mathbf{z})) - \hat{s}_k(\mathbf{z})(q_\alpha - loss_k))}{\hat{\lambda}_k(\mathbf{z})} B_0(\hat{\lambda}_k(\mathbf{z})), \quad (\text{A-30})$$

$$\hat{\lambda}_k(\mathbf{z}) := \hat{s}_k(\mathbf{z}) \sqrt{K_{L'|\mathbf{z}}^{(II)}(\hat{s}_k(\mathbf{z}))}.$$

$q_\alpha - loss_k = E[L'|\mathbf{Z} = \mathbf{z}]$ の場合

$$Q_j^k(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}). \quad (\text{A-31})$$

$q_\alpha - loss_k < E[L'|\mathbf{Z} = \mathbf{z}]$ の場合

$$Q_j^k(\mathbf{z}) = P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \left(1 - \frac{\exp(K_{L'|\mathbf{z}}(\hat{s}_k(\mathbf{z})) - \hat{s}_k(\mathbf{z})(q_\alpha - loss_k))}{\hat{\lambda}_k(\mathbf{z})} B_0(-\hat{\lambda}_k(\mathbf{z})) \right), \quad (\text{A-32})$$

$$\hat{\lambda}_k(\mathbf{z}) := \hat{s}_k(\mathbf{z}) \sqrt{K_{L'|\mathbf{z}}^{(II)}(\hat{s}_k(\mathbf{z}))}.$$

(A-27)式の分母を条件付鞍点法により近似すると、「大口ポートフォリオ」に属
 する債務者のデフォルト・パラメータに対するリスク感応度の近似表現は、

$$q_\theta(j) = \frac{\sum_{k=1}^{2^N} E[Q_j^k(\mathbf{z})]}{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[P(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \frac{\exp(K_{L'|\mathbf{z}}(\hat{s}_k(\mathbf{z})) - \hat{s}_k(\mathbf{z})(q_\alpha - loss_k))}{\sqrt{K_{L'|\mathbf{z}}^{(II)}(\hat{s}_k(\mathbf{z}))}} \right]}, \quad (\text{A-33})$$

と表される。ただし、分子の $Q_j^k(\mathbf{z})$ は(A-30)~(A-32)式で計算可能である。

「小口ポートフォリオ」に属する債務者のデフォルト・パラメータに対する感応度
 リスク感応度の表現(A-29)式の分子の期待値の中身を $Q_j^k(\mathbf{z})$ とする。 $Q_j^k(\mathbf{z})$ は、
 本論(25)式を用いて条件付鞍点法を用いて次のように近似計算される。

$q_\alpha - loss_k - e_j l_j > E[L_{(j)} | \mathbf{Z} = \mathbf{z}]$ の場合

$$Q_j^k(\mathbf{z}) = \frac{\partial p_j(\mathbf{z})}{\partial \theta_j} \left(\frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z})) - \bar{s}_j^k(\mathbf{z})(q_\alpha - loss_k - l_j e_j))}{\bar{\lambda}_j(\mathbf{z})} B_0(\bar{\lambda}_j^k(\mathbf{z}))}{-\frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z})) - \bar{s}_j^k(\mathbf{z})(q_\alpha - loss_k))}{\bar{\lambda}_j(\mathbf{z})} B_0(\bar{\lambda}_j^k(\mathbf{z}))} \right), \quad (\text{A-34})$$

$$\bar{\lambda}_j^k(\mathbf{z}) := \bar{s}_j^k(\mathbf{z}) \sqrt{K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}^{(II)}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z}))}, \quad \tilde{\lambda}_j^k(\mathbf{z}) := \bar{s}_j^k(\mathbf{z}) \sqrt{K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}^{(II)}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z}))}.$$

$q_\alpha - loss_k - e_j l_j = E[L_{(j)} | \mathbf{Z} = \mathbf{z}]$ の場合

$$Q_j^k(\mathbf{z}) = \frac{\partial p_j(\mathbf{z})}{\partial \theta_j} \left(\frac{1}{2} - \frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z})) - \bar{s}_j^k(\mathbf{z})(q_\alpha - loss_k))}{\bar{\lambda}_j^k(\mathbf{z})} B_0(\tilde{\lambda}_j^k(\mathbf{z})) \right), \quad (\text{A-35})$$

$$\tilde{\lambda}_j^k(\mathbf{z}) := \bar{s}_j^k(\mathbf{z}) \sqrt{K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}^{(II)}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z}))}.$$

$q_\alpha - loss_k > E[L_{(j)} | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] > q_\alpha - loss_k - e_j l_j$ の場合

$$Q_j^k(\mathbf{z}) = \frac{\partial p_j(\mathbf{z})}{\partial \theta_j} \left(\frac{1 - \frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z})) - \bar{s}_j^k(\mathbf{z})(q_\alpha - loss_k - l_j e_j))}{\bar{\lambda}_j^k(\mathbf{z})} B_0(-\bar{\lambda}_j^k(\mathbf{z}))}{-\frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z})) - \bar{s}_j^k(\mathbf{z})(q_\alpha - loss_k))}{\bar{\lambda}_j^k(\mathbf{z})} B_0(\bar{\lambda}_j^k(\mathbf{z}))} \right), \quad (\text{A-36})$$

$$\bar{\lambda}_j^k(\mathbf{z}) := \bar{s}_j^k(\mathbf{z}) \sqrt{K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}^{(II)}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z}))}, \quad \tilde{\lambda}_j^k(\mathbf{z}) := \bar{s}_j^k(\mathbf{z}) \sqrt{K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}^{(II)}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z}))}.$$

$q_\alpha - loss_k = E[L_{(j)} | \mathbf{Z} = \mathbf{z}]$ の場合

$$Q_j^k(\mathbf{z}) = \frac{\partial p_j(\mathbf{z})}{\partial \theta_j} \left(\frac{1}{2} - \frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z})) - \bar{s}_j^k(\mathbf{z})(q_\alpha - loss_k - l_j e_j))}{\bar{\lambda}_j(\mathbf{z})} B_0(-\bar{\lambda}_j^k(\mathbf{z})) \right), \quad (\text{A-37})$$

$$\bar{\lambda}_j^k(\mathbf{z}) := \bar{s}_j^k(\mathbf{z}) \sqrt{K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}^{(II)}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z}))}.$$

$q_\alpha - loss_k < E[L_{(j)} | \mathbf{Z} = \mathbf{z}]$ の場合

$$Q_j^k(\mathbf{z}) = \frac{\partial p_j(\mathbf{z})}{\partial \theta_j} \left(\begin{array}{c} - \frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z})) - \bar{s}_j^k(\mathbf{z})(q_\alpha - loss_k - l_j e_j))}{\bar{\lambda}_j^k(\mathbf{z})} B_0(-\bar{\lambda}_j^k(\mathbf{z})) \\ + \frac{\exp(K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z})) - \bar{s}_j^k(\mathbf{z})(q_\alpha - loss_k))}{\bar{\lambda}_j^k(\mathbf{z})} B_0(-\bar{\lambda}_j^k(\mathbf{z})) \end{array} \right), \quad (\text{A-38})$$

$$\bar{\lambda}_j^k(\mathbf{z}) := \bar{s}_j^k(\mathbf{z}) \sqrt{K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}^{(II)}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z}))}, \quad \tilde{\lambda}_j^k(\mathbf{z}) := \bar{s}_j^k(\mathbf{z}) \sqrt{K_{L_{(j)}|\mathbf{z}}^{(II)}(\bar{s}_j^k(\mathbf{z}))}.$$

(A-29)式の分母を条件付鞍点法により近似すると、「小口ポートフォリオ」に属する債務者のデフォルト・パラメータに対するリスク感応度の近似表現は、

$$q_\theta(j) = \frac{\sum_{k=1}^{2^N} E[Q_j^k(\mathbf{z})]}{\sum_{k=1}^{2^N} E \left[p(s_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \frac{\exp(K_{L'|\mathbf{z}}(\hat{s}_k(\mathbf{z})) - \hat{s}_k(\mathbf{z})(q_\alpha - loss_k))}{\sqrt{K_{L'|\mathbf{z}}^{(II)}(\hat{s}_k(\mathbf{z}))}} \right]}. \quad (\text{A-39})$$

ここで分子の $Q_j^k(\mathbf{z})$ は、(A-34)~(A-38)式で計算可能である。

参考文献

- 大森英樹、『多変数の微分積分』、裳華房、1989年
- 江沢 洋、『漸近解析』、岩波書店、1995年
- 菊池健太郎、「与信ポートフォリオVaRの解析的な評価法：条件付鞍点法による近似計算の理論と数値検証」、『金融研究』第26巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2007年、137～186頁（本号所収）
- 室町幸雄、「デフォルト相関を考慮したポートフォリオの信用リスク計測モデル」、京都大学大学院博士学位申請論文、2005年
- ユルゲン・ヨスト・小谷元子訳、『ポストモダン解析学』、シュプリンガー・フェアラーク東京、2000年
- 与信ポートフォリオマネジメントに関する勉強会、「わが国の金融機関における与信ポートフォリオマネジメントの現状と課題」、2007年（<http://www.boj.or.jp>）
- Dembo, A., J. D. Deuschel, and D. Duffie, “Large portfolio losses,” *Finance and Stochastics*, 8 (1), 2004, pp. 3-16.
- Glasserman, P., “Measuring marginal risk contributions in credit portfolios,” *The Journal of Computational Finance*, 9 (2), 2006, pp. 1-41.
- Gupton, G., C. Finger, and M. Bhatia, “CreditMetrics - Technical document,” J. P. Morgan, New York, 1997. (<http://www.riskmetrics.com>)
- Hallerbach, W., “Decomposing Portfolio Value-at-Risk : A General Analysis,” *The Journal of Risk*, 5 (2), 2002, pp. 1-18.
- Huang, X., C. Oosterlee, and M. Mesters, “Computation of VaR and VaR Contribution in the Vasicek Portfolio Credit Loss Model: a Comparative Study,” Delft University of Technology, 2007. (<http://www.defaultrisk.com>)
- Jensen, J., *Saddlepoint Approximations*, Oxford University Press, 1995.
- Litterman, R., “Hot spots and hedges,” *Risk*, 10 (3), 1997, pp. 42-45.
- Martin, R. K. Thompson, and C. Browne, “VAR: who contributes and how much,” *Risk*, 14 (8), 2001, pp. 99-102.
- , and R. Ordovás, “An indirect view from the saddle,” *Risk*, 19 (10), 2006, pp. 94-99.
- Muromachi, Y., “A conditional independence approach for portfolio risk evaluation” *The Journal of Risk*, 7 (1), 2004, pp. 27-53.
- Tasche, D., “Risk Contributions and Performance Measurement,” working paper, Zentrum Mathematik TU Munchen, 1999.

