# 追加融資を考慮した信用リスク：構造モデルによるELとULの解析解

やましたさとし　よしばとしなお
山下智志／吉羽要直

## 要　旨

*本稿では、追加融資が行われうる場合の信用リスクを考察する。具体的には、マートン型構造モデルにおいて、期待損失（expected loss: EL）を最小化するような追加融資行動を想定し、貸出量の変動がデフォルト確率、デフォルト時損失、金利収入の変化を通じて、ELや非期待損失（unexpected loss: UL）に及ぼす影響を解析的に把握する。さらに、融資初期時点におけるELとULが、2次元正規分布を用いて解析的に評価でき、数値解が容易に計算可能なことを示す。また、この結果を用いて、ELの最小化（金利収入とデフォルト時損失から構成される期待収益の最大化）がULの拡大を招くことを定量的に評価する。*

**キーワード：** デフォルト確率、デフォルト時損失率、デフォルト時エクスポージャー、期待損失、非期待損失、ストレス時期待損失

本稿の作成に当たっては、池田昌幸教授（早稲田大学）より大変貴重なコメントを多数頂いたほか、2006年12月に開催された大阪大学金融・保険教育研究センター・ワークショップ、金融庁・統計数理研究所共催「債権回収率・LGDモデルシンポジウム」参加者からも有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りは、すべて筆者たち個人に属する。

山下智志　統計数理研究所准教授（E-mail: yamasita@ism.ac.jp）
吉羽要直　日本銀行金融研究所企画役（E-mail: toshinao.yoshiba@boj.or.jp）

## 1．はじめに

2006年度末よりバーゼルⅡ（Basel Committee on Banking Supervision＜BCBS＞［2005a］）の段階的適用が始まった。先進的内部格付手法を採用した金融機関は、デフォルト確率（probability of default: PD）に加えて、7年以上の過去データを用いてデフォルト時損失率（loss given default: LGD）とデフォルト時エクスポージャー（exposure at default: EaD）の推計を行い、所要自己資本を算出することが2007年度末より求められる。

信用リスクの計量分析は、まず、PDのモデル化から始まり、バーゼルⅡの導入を契機にLGDのモデル化も進展している（Frye［2000］、Phytkin［2003］、Peura and Jokivuolle［2005］等）。一方、バーゼルⅡの先進的内部格付手法ではPD、LGD、EaDの推計が求められるにもかかわらず、EaDのモデル化はあまり進んでいない。実際、EaDについては、当初の融資額を所与として固定し、確率的な要素としては扱わない場合が多い。その理由としては以下の点が考えられる。①EaDは銀行がある程度コントロール可能な変数であること、②そのコントロールは将来時点の資産価値などを参照して行われ、以後のPD、LGDに影響を及ぼし得ること、③企業の借入需要や他の金融機関との競争もEaDの変動に関係すること、④貸出量だけでなく貸出金利によってもリスク・リターンの調整が行われる可能性が高いことなどである。このように、EaDをモデル化しようとすると、さまざまな制約のもとでの動学的最適化問題を取り扱うことになり、その扱いが容易ではない。

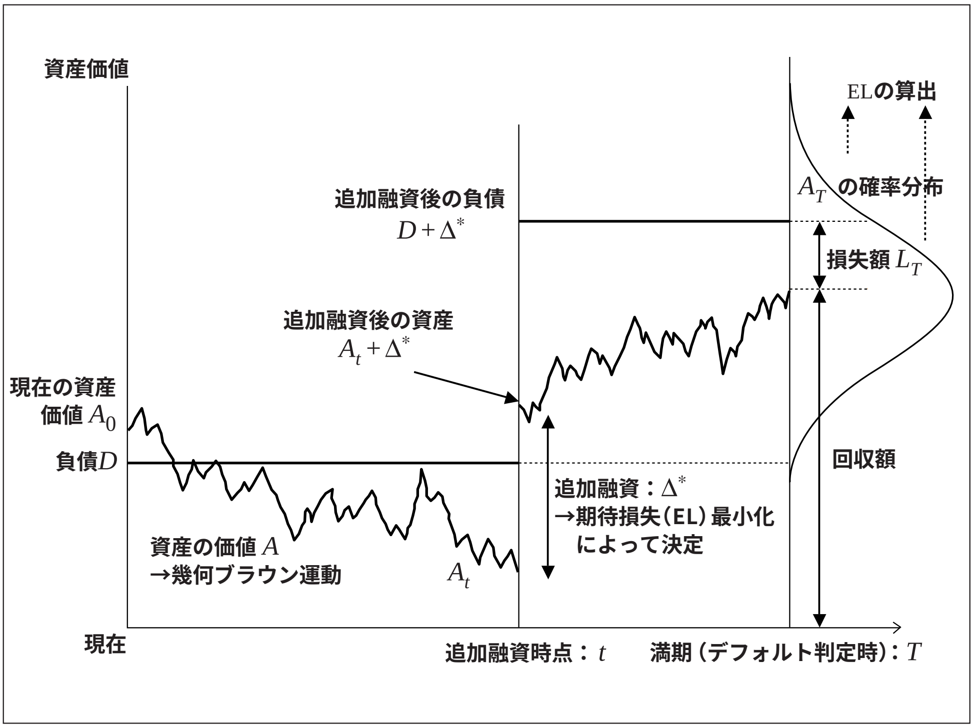
ごく最近、EaDのモデル化が試みられるようになってきた（Moral［2006］、Jiménez and Mencía［2007］、Kupiec［2007］）。しかしながら、これらは、EaDの過去データを用いた簡単な回帰分析であったり、共通ファクターとの関係を考慮しながらEaDを確率分布として捉える手法にとどまっており、EaDを銀行がコントロールできる内生的な変数として捉えるアプローチではない[1]。

本稿では、信用リスク・モデルの動学化の第一歩として、銀行が所与のタイミングで追加融資を1回行う場合を想定し、EaDの変化とPDやLGDの変化との構造的な相互関係を考慮したモデル化を行う。そのうえで、期待損失（expected loss: EL）や非期待損失（unexpected loss: UL）を導出する。

具体的には、融資の満期時点でデフォルトの有無を判定するマートン型の構造モデルを用いて、期中での追加融資によってEaDに変化が生じた際、PDやLGDの変化を通じて、ELやULがどのように変化するかを考察する。その際、期中での追加融資は、その時点でELを最小化するように行われるものとする。これをイメージ図で表すと図1のようになる。

1 銀行が企業にコミットメント・ラインを提供しているときには、EaDは銀行がコントロールできる変数とはならない。本稿の問題意識とは異なるが、業績や資金繰りが悪化した企業がコミットメント・ラインを行使することによる信用リスクの増大は、EaDの確率モデルを促す重要な問題として検討され始めている（例えば、Schuermann［2004］、Gruber and Parchert［2006］を参照）。

**図1　最適追加融資と損失額**




本稿では、こうしたモデル化により、追加融資を考慮した場合のELやULが2次元正規分布の分布関数を用いて解析的に表現でき、数値解が容易に計算可能なことを示す[2]。また、このモデルでは、追加融資の判断や追加融資に伴うEL・ULの変化を明確に特徴付けることができる。

まず、追加融資の判断時点で、企業の資産価値に応じて、銀行の対応が3つに分かれることを示す。資産価値が一定値よりも下落した場合は、追加融資によりPDを低下させELを抑制できるため、銀行は追加融資を行う。一方、資産価値が一定値よりも上昇した場合も、貸出金利と調達金利の差による金利収入の増加を通じてELを抑制（期待収益を増大）できるため、銀行は追加融資を行う。両者の中間では、追加融資しないことが最適な判断となる。

ところが、EL最小化行動に伴う追加融資は、ULの拡大につながりやすい。本稿では、上記のモデルにより数値例を用いてELの低下とULの上昇を定量的に評価し

2 企業の債券や株式価値の解析的な評価という観点からは、Geske［1977］や池田・小林・高橋［2005］が関連した分析を行っている。Geske［1977］では、企業が短期債と長期債の2種類の債券を発行している際に、短期債の満期での償還は増資によって行われると仮定することで、株式価値、債券価値を2次元正規分布の分布関数を用いて評価している。一方、池田・小林・高橋［2005］では、短期債の満期で新たな短期債を発行することで資金調達を行ったり、短期債の償還を猶予するモデルへの拡張を行っている。

ている。EL最小化に伴う追加融資がULの拡大をもたらす現象は、銀行が融資の信用リスクを動的に管理しようとした場合、期待収益（損失）とその分散あるいはVaR（Value-at-Risk）のトレードオフに対して、どのような選好を持つかという問題に直面することを示唆している。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、2節では、追加融資を考慮したモデルを構築し、追加融資の条件や融資後のPD等を考察したうえで、ELを解析的に評価する。3節では、一定の条件下でUL（の寄与）を求めることとストレス時期待損失（stressed expected loss: SEL）を求めることが同値になることを示したうえで、SELを解析的に評価する。4節では、本稿をまとめる。

## 2．追加融資を考慮したEL

### (1) マートン・モデルと銀行の損失関数

ある企業の資産価値$A_t$は次の幾何ブラウン運動に従うとする。

$$dA_t = \mu A_t dt + \sigma A_t dW_t\,. \tag{1}$$

この資産価値$A_t$は、企業の持つ資産を流動化したときの価値を表すものとする。

マートン・モデル（Merton［1974］）と同様に、この企業に対してある1つの銀行が時点$T$を満期とする額面$D$の貸出を行うとする。銀行は、割引率$r_{L0}$（貸出金利）で割引債の形で貸出を行うものとする。したがって、時点0での貸出量は$De^{-r_0 T}$となる。満期$T$で資産価値が負債額面$D$を下回っているときには、企業はデフォルトし、その資産価値で負債の返済が行われるものとする[3]。

(1)式より、時点0での資産価値を$A_0$とすると、満期$T$で資産価値$A_T$は、

$$\ln A_T \sim \mathrm{N}(\ln A_0 + (\mu - \sigma^2/2)\,T, \sigma^2 T)\,, \tag{2}$$

となる。このとき、当該企業のPDは、

$$PD = \Pr(A_T < D) = \Pr(\ln A_T < \ln D) = \Phi(d_0)\,, \tag{3}$$

3 既存研究では、担保付の融資を考え、LGDは担保の償却によってカバーできない部分としてモデル化されることが多い（Frye［2000］、Phytkin［2003］、Peura and Jokivuolle［2005］等）。本稿では、より単純に、融資全体のうち残余資産でカバーできない部分をLGDとして捉える。デフォルトのモデルでは、ある閾値に到達した時点でデフォルトが生じるとした初到達時間モデル（Black and Cox［1976］等）が採用されることが多いが、閾値を融資額に設定するとLGDが0になってしまうため、本稿では採用しなかった。また、Leland［1994］やLeland and Toft［1996］で考慮されている法人税やデフォルト・コストについては、簡単化のため捨象した。

$$d_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left\{\ln\frac{D}{A_0} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right\}, \tag{4}$$

で与えられる。ここで、$\Phi(\cdot)$は標準正規分布の分布関数である。

銀行は、企業に貸し出す資金を市場で割引債の形で調達するものとする。その際の調達金利は$r_{M0}$とする。つまり、銀行は、額面$De^{(r_{M0}-r_{L0})T}$、金額では $De^{-r_0 T}$の調達を行い、全額を企業に貸し出す。満期$T$で、銀行は$De^{(r_{M0}-r_{L0})T}$を市場に返済する一方で、当該企業から$D$の返済を受ける。ただし、当該企業がデフォルトした場合$(A_t < D)$には、そのときの資産価値$A_T$を流動化して、市場への返済に充てることになる。つまり、満期時の銀行の損失$L_T$は、

$$L_T = D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + (D - A_T)^+, \tag{5}$$

で表され[4]、時点0でのELは、

$$\begin{aligned} E_0[L_T] &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + E_0[(D - A_T)^+] \\ &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + D\Phi(d_0) - A_0 e^{\mu T}\Phi(d_0 - \sigma\sqrt{T}), \end{aligned} \tag{6}$$

と表すことができる[5]。ここで、(6) 式右辺第1項の$D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1)$は銀行の金利コスト額を示している。通常、$r_{M0} < r_{L0}$であるため金利収入（負の金利コスト）と解釈できる。第2項以下は、ブラック＝ショールズ・モデルで行使価格を$D$としたときのプット・オプション価格に対応している。

以上の議論は、追加融資されない条件下でのELの評価であった。次に、時点$t$において追加融資が行われた場合のELの評価を行う。

## （2）時点$t$でのEL

期中時点$t$ $(0 < t < T)$で、銀行は貸出先企業の資産価値$A_t$を観察できるものとする。また、当該企業の資産価値$A_t$が貸出額面$D$を下回っていても、当該企業はデフォルトしない。

銀行は時点$t$で追加融資できるものとする[6]。追加融資の期間は$\tau = T - t$とし、時点$T$で期初の貸出とあわせて回収を行う。時点$t$で銀行が企業に融資する貸出金利

4 $(X)^+$は$X$の正の部分を表す。すなわち、$(X)^+ = \max(X, 0)$である。

5 (6) 式から期待LGD$(E_0[(D - A_T)^+]/D)$は、$\Phi(d_0) - (A_0/D)e^{\mu T}\Phi(d_0 - \sigma\sqrt{T})$で与えられる（Altman, Resti, and Sironi［2001］を参照）。本稿では、貸出債権のプライシングを行うわけではないため、リスク中立測度ではなく現実の観測測度で議論を行っている。

6 時点$t$での早期（部分）回収は考えない。

は$r_L$、市場からの調達金利は$r_M$とする[7]。

時点$t$で、額面$\Delta \geq 0$の追加融資（割引貸出）を行ったとすると、当該企業には$\Delta e^{-r_L\tau}$のキャッシュが入り、企業の資産価値はそれだけ上昇する。すなわち、企業の資産価値は時点$t$より$A_t+\Delta e^{-r_L\tau}$を初期値と設定し直して幾何ブラウン運動に従うことになる。

貸出量変化後の当該企業のデフォルト確率$PD_t(\Delta)$は、

$$PD_t(\Delta)=\Pr(A_T<D+\Delta)=\Phi(d_t(\Delta)), \tag{7}$$

$$d_t(\Delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left\{\ln\frac{D+\Delta}{A_t+\Delta e^{-r_L\tau}}-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right\}, \tag{8}$$

となる。貸出量変化後の満期における銀行の損失は、

$$L_T(\Delta)=De^{(r_{M0}-r_{L0})T}+\Delta e^{(r_M-r_L)\tau}-D-\Delta+(D+\Delta-A_T)^+, \tag{9}$$

と表現されることから、時点$t$でのELは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}E_t[L_T(\Delta)]&=D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1)+\Delta(e^{(r_M-r_L)\tau}-1)+(D+\Delta)\Phi(d_t(\Delta))\\&\quad-(A_t+\Delta e^{-r_L\tau})e^{\mu\tau}\Phi(d_t(\Delta)-\sigma\sqrt{\tau}).\end{aligned} \tag{10}$$

## （3）時点$t$でのELを最小化する追加融資量

次に、時点$t$での追加融資により、ELが低下する場合があること、ELを最小化する最適な追加融資量が算出できることを示す。

（10）式で表される銀行の期待損失$E_t[L_T(\Delta)]$の追加融資量$\Delta$に関する微分は、

$$\frac{\partial E_t[L_T(\Delta)]}{\partial\Delta}=e^{(r_M-r_L)\tau}-1+\Phi(d_t(\Delta))-e^{(\mu-r_L)\tau}\Phi(d_t(\Delta)-\sigma\sqrt{\tau}), \tag{11}$$

となる。（11）式を一般化して

$$f(d)\equiv e^{(r_M-r_L)\tau}-1+\Phi(d)-e^{(\mu-r_L)\tau}\Phi(d-\sigma\sqrt{\tau}), \tag{12}$$

と置くと、最適追加融資量が有限な正の値という条件のもとでは、$r_L>r_M$ならば

7 本稿では、追加融資のタイミング$t$、追加融資に適用される貸出金利$r_L$を固定して、追加融資量を最適化する問題を考えるが、追加融資量を固定して貸出金利を最適化する問題や、追加融資のタイミング$t$を最適化する問題への拡張も可能である。

$f(d_1^*)=0$ となる $d=d_1^*$ が存在（ケース1）し、$\mu > r_M$ ならば $f(d_2^*)=0$ となる $d=d_2^*$ が存在（ケース2）することがわかる（ただし、$d_1^* < d_2^*$）。この $d_1^*$, $d_2^*$ は、数値計算で簡単に求めることができる（詳細は補論1を参照）。そこで、$t, T, r_M, r_L, \mu, \sigma$ を所与とし、ELが行われる2つのケースについて、最適な追加融資量や最小化されたELを求める。

まず、ケース1は、$r_L > r_M$ のもとで、$A_t > D\xi_1^*$ の場合に追加融資が行われることを示している。ここで $\xi_1^*$ は、

$$\xi_1^* \equiv e^{-d_1^*\sigma\sqrt{\tau}-(\mu-\sigma^2/2)\tau}, \tag{13}$$

で定義される。最適な追加融資量 $\Delta_1^*$ は、

$$\Delta_1^* = \frac{A_t - D\xi_1^*}{\xi_1^* - e^{-r_L\tau}}, \tag{14}$$

となる。最適な追加融資量 $\Delta_1^*$ のもとでデフォルト確率は、

$$\Phi(d_t(\Delta_1^*)) = \Phi(d_1^*), \tag{15}$$

となり、銀行のELは(10)、(15)式より次式で表せる。

$$E_t[L_T(\Delta_1^*)] = D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1) + D\Phi(d_1^*) - A_t e^{\mu\tau}\Phi(d_1^* - \sigma\sqrt{\tau}). \tag{16}$$

次に、ケース2は、$\mu > r_M$ のもとで、$A_t < D\xi_2^*$ の場合に追加融資が行われることを示している。このとき、最適な追加融資量 $\Delta_2^*$ は、

$$\Delta_2^* = \frac{A_t - D\xi_2^*}{\xi_2^* - e^{-r_L\tau}}, \tag{17}$$

デフォルト確率は、

$$\Phi(d_t(\Delta_2^*)) = \Phi(d_2^*), \tag{18}$$

となり、銀行のELは、

$$E_t[L_T(\Delta_2^*)] = D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1) + D\Phi(d_2^*) - A_t e^{\mu\tau}\Phi(d_2^* - \sigma\sqrt{\tau}), \tag{19}$$

となる。ただし、

$$\xi_2^* \equiv e^{-d_2^*\sigma\sqrt{\tau}-(\mu-\sigma^2/2)\tau}, \tag{20}$$

である（詳細は補論1を参照）。

以下では、企業の期待資産成長率$\mu$や貸出金利$r_L$が銀行の調達金利$r_M$よりも大きいという状況を考える[8]。このとき、以下の3つの状態が存在する[9]。

状態Ⅰ：$A_t > D\xi_1^*$で追加融資が行われる（金利差による期待利益の上昇）。
状態Ⅱ：$D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*$で追加融資が行われない。
状態Ⅲ：$A_t < D\xi_2^*$で追加融資が行われる（PDの低下によるEL最小化）。

具体的な例として、満期時点$T=2$（年）、追加融資判定時点$t=1$（年）、追加融資判定時点の貸出金利$r_L=1\%$、追加融資判定時点の調達金利$r_M=0.5\%$、企業の期待資産成長率$\mu=5\%$、資産価値のボラティリティ$\sigma=10\%$と設定する。この条件下で、初期時点の貸出額面$D$を100として、追加融資の有無の分岐点となる資産価値$A_t$の水準（すなわち、$D\xi_1^*$、$D\xi_2^*$）を考察する。

$\mu > r_M$かつ$r_L > r_M$であり、(12)式の$f(d)=0$となる$d$は2つ存在し、

$$d_1^* \cong -1.905,\ d_2^* \cong 0.632\,, \tag{21}$$

となる。これらを(13)、(20)式に代入することで、追加融資が行われる状況は、$A_t > D\xi_1^* \cong 115.67$あるいは$A_t < D\xi_2^* \cong 89.74$が成立する場合であることがわかる。追加融資後のPDは(15)、(18)式に$d_1^*$、$d_2^*$の値を代入することで得られる。追加融資直前の企業の資産価値$A_t$に対して、最適な追加融資量$\Delta^*$をプロットすると、図 2のようになる。

追加融資直前の資産価値$A_t$について、いくつかの数値を与え、最適追加融資量$\Delta^*$と追加融資のあり・なしの場合のEL、PDを表1に示す。まず、$A_t$が90もしくは115の場合、追加融資なし（$\Delta^*=0$）が最適となっている。$A_t=80,\ 85$と資産価値が低い状態では、追加融資を行うことでELが低下することが、追加融資なしの$\mathrm{EL}_t(0)$と追加融資ありの$\mathrm{EL}_t(\Delta^*)$の変化から確認できる。追加融資によりPDが低下している点も確認される（$\mathrm{PD}_t(\Delta^*) < \mathrm{PD}_t(0)$）。なお、$A_t=80$と資産価値が低いほど、そのEL改善（低下）効果は大きく現れている。一方、$A_t=120,\ 125$と資産価値が高い状態では、PDは上昇する（$\mathrm{PD}_t(\Delta^*) > \mathrm{PD}_t(0)$）ものの、EaD増加に伴う金利収入の上昇により、EL（表1では、負値すなわち期待収益）は改善している。

8 $\mu \geq r_L > r_M$と$r_L > \mu > r_M$の2つの場合があり得るが、前者の場合、資産価格$A_t$の水準によらず追加融資$\Delta > 0$によって企業の資本価値（株主価値）を上げることができる。これは、追加融資後の資本価値は$(A_t + \Delta e^{-r_L \tau})e^{\mu\tau} - De^{(r_{M0}-r_{L0})T} - \Delta e^{(r_M - r_L)\tau} + E_t[L_T(\Delta)]$となり、$\mu \geq r_L$では資本価値の追加融資量に関する1階微分が必ず正になるためである。

9 厳密には、追加融資量が有限である場合に3つの状態に分かれる。追加融資量が有限になる条件等も補論1を参照。

**図2　追加融資直前の企業の資産価値 $A_t$ と最適な追加融資量 $\Delta^*$**

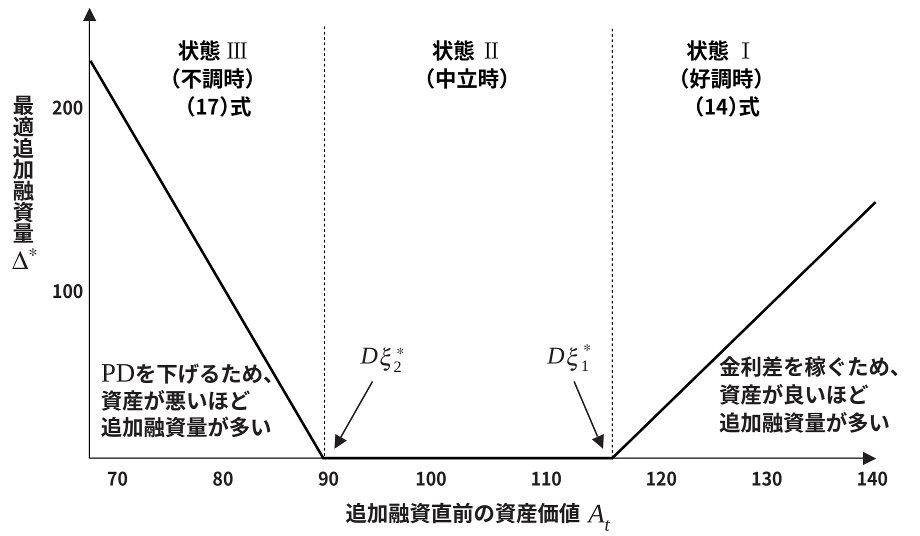


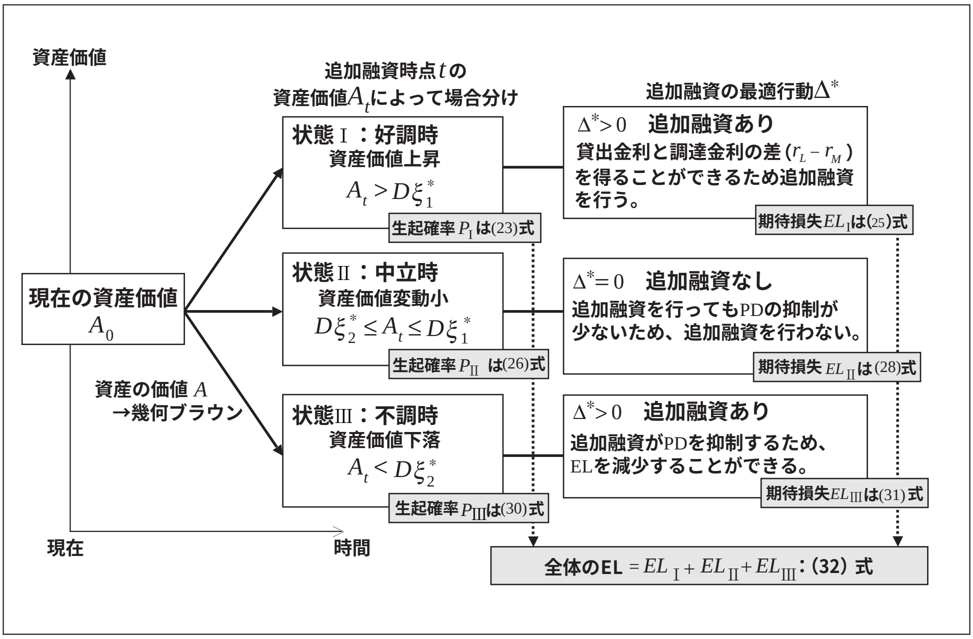

**表1　時点 $t$ での企業の資産価値と最適追加融資量、EL、PDの変化**

| $A_t$ | $\Delta^*$ | $EL_t(\Delta^*)$ | $EL_t(0)$ | $PD_t(\Delta^*)$ | $PD_t(0)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 80 | 105.19 | 13.54 | 15.06 | 73.64% | 96.26% |
| 85 | 51.21 | 9.85 | 10.26 | 73.64% | 88.00% |
| 90 | 0.00 | 6.16 | 6.16 | 72.69% | 72.69% |
| 115 | 0.00 | –0.87 | –0.87 | 3.23% | 3.23% |
| 120 | 26.01 | –0.99 | –0.96 | 2.84% | 1.15% |
| 125 | 56.02 | –1.11 | –0.98 | 2.84% | 0.37% |

## （4）初期時点のEL

ここまでは時点$t$において資産価値$A_t$が判明したという前提でELの最小化問題を考察した。以下では、時点$t$において生起した$A_t$の状態に応じて上記のように銀行が行動する場合、初期時点でELがどのように評価されるのかを考察する（図 3を参照）。こうしたアプローチは、将来の行動を確率的に考慮したうえで、初期時点でのリスクを把握するという意味で、「確率動学的なリスク評価法」の1つといえる。具体的には、まず、時点$t$での資産価値$A_t$に応じて状態Ⅰ、状態Ⅱ、状態Ⅲに分け、それぞれの生起確率と時点$t$でのELを求める。各状態のELを足し上げて、最終的に初期時点のELを導出する。

**図3　資産価値$A_t$に応じた初期時点のELの評価**




(1)式より、時点$t$で企業の資産価値$A_t$の分布は

$$\ln A_t \sim \mathrm{N}(\ln A_0 + (\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t), \tag{22}$$

となり、各状態の生起確率とELは以下のように与えられる（各状態のELに関する数式展開の詳細は補論2を参照)。

**状態Ⅰの生起確率とEL**

$r_L > r_M$が成立しているという条件下では、時点$t$で企業の資産価値が高い状態（$A_t > D\xi_1^*$）にあれば、追加融資が行われる。その確率$P_{\mathrm{I}} \equiv \Pr[A_t > D\xi_1^*]$は（23)式で与えられる。

$$P_{\mathrm{I}} \equiv \Pr[A_t > D\xi_1^*] = \Pr[\ln A_t > \ln D - d_1^* \sigma\sqrt{\tau} - (\mu - \sigma^2/2)\tau]$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\ln D - \ln A_0 - d_1^*\sigma\sqrt{\tau} - (\mu - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{t}}\right) = \Phi(-\delta_1^*). \tag{23}$$

ここで、$\delta_1^*$は、(4)式の$d_0$を用いて、

$$\delta_1^* = d_0\sqrt{T/t} - d_1^*\sqrt{\tau/t}, \tag{24}$$

と定義した。状態ⅠのELを$EL_{\mathrm{I}}$とすると、$EL_{\mathrm{I}}$は(25)式で与えられる。

$$EL_{\mathrm{I}} \equiv E_0\,[L_T(\Delta_1^*)\,1_{A_t > D\xi_1^*}]$$
$$= D\{\Phi(d_1^*) + e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1\}\,\Phi(-\delta_1^*) - A_0 e^{\mu T}\Phi(d_1^* - \sigma\sqrt{\tau})\,\Phi(-\delta_1^* + \sigma\sqrt{t}\,)\ . \tag{25}$$

**状態 II の生起確率とEL**

$D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*$ ならば追加融資は行われない。この確率$P_{\mathrm{II}}$は、(23) 式と同様の手順で (26) 式で与えられる。

$$P_{\mathrm{II}} \equiv \Pr\,[D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*] = \Phi(\delta_1^*) - \Phi(\delta_2^*)\ . \tag{26}$$

ここで、

$$\delta_2^* = d_0\sqrt{T/t} - d_2^*\sqrt{\tau/t}\ \ , \tag{27}$$

と定義した。状態 II のELを$EL_{\mathrm{II}}$とすると、$EL_{\mathrm{II}}$は (28) 式で与えられる。

$$EL_{\mathrm{II}} \equiv E_0\,[L_T(0)1_{D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*}]$$
$$= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1)\{\Phi(\delta_1^*) - \Phi(\delta_2^*)\} + D\{\Phi_2(\delta_1^*, d_0; \rho) - \Phi_2(\delta_2^*, d_0; \rho)\}$$
$$- A_0 e^{\mu T}\{\Phi_2(\delta_1^* - \sigma\sqrt{t}, d_0 - \sigma\sqrt{T}; \rho) - \Phi_2(\delta_2^* - \sigma\sqrt{t}, d_0 - \sigma\sqrt{T}; \rho)\}\ . \tag{28}$$

ここで、$\rho$ は (29) 式で与えた。

$$\rho = \sqrt{t/T}\ \ . \tag{29}$$

**状態IIIの生起確率とEL**

$\mu > r_M$ が成立しているという条件下では、時点 $t$ で企業の資産価値が低い状態 $(A_t < D\xi_2^*)$ にあれば、追加融資が行われる。その確率$P_{\mathrm{III}}$は、

$$P_{\mathrm{III}} \equiv \Pr\,[A_t < D\xi_2^*] = \Phi(\delta_2^*)\ , \tag{30}$$

で与えられる。また、状態IIIのELを$EL_{\mathrm{III}}$とすると、$EL_{\mathrm{III}}$は (31) 式で与えられる。

$$EL_{\mathrm{III}} \equiv E_0[L_T\ (\Delta_2^*)1_{A_t < D\xi_2^*}]$$
$$= D\{\Phi(d_2^*) + e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1\}\,\Phi(\delta_2^*) - A_0\, e^{\mu T}\Phi(d_2^* - \sigma\sqrt{\tau})\,\Phi(\delta_2^* - \sigma\sqrt{t}\,)\ . \tag{31}$$

### 全体のEL

追加融資を考慮して初期時点で評価したELは(25)、(28)、(31)式より、以下のように2次元標準正規分布の分布関数を用いて表現される[10]。

$$\begin{aligned}E_0[L_T] &= EL_{\mathrm{I}} + EL_{\mathrm{II}} + EL_{\mathrm{III}} \\ &= D\,(e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1) \\ &\quad + D\{\Phi(d_1^*)\,\Phi(-\delta_1^*)+\Phi(d_2^*)\,\Phi(\delta_2^*)+\Phi_2(\delta_1^*, d_0;\rho)-\Phi_2(\delta_2^*, d_0;\rho)\} \qquad (32) \\ &\quad - A_0\,e^{\mu T}\{\Phi(d_1^*-\sigma\sqrt{\tau})\,\Phi(-\delta_1^*+\sigma\sqrt{t})+\Phi(d_2^*-\sigma\sqrt{\tau})\,\Phi(\delta_2^*-\sigma\sqrt{t}) \\ &\quad + \Phi_2(\delta_1^*-\sigma\sqrt{t}, d_0-\sigma\sqrt{T};\rho)-\Phi_2(\delta_2^*-\sigma\sqrt{t}, d_0-\sigma\sqrt{T};\rho)\}.\end{aligned}$$

ただし、$d_0$、$\delta_1^*$ 、$\delta_2^*$、$\rho$ はそれぞれ(4)、(24)、(27)、(29)式で定義される（$d_1^*$、$d_2^*$の求め方は補論1を参照)。

本節(3)と同じ設定で[11]、当初資産価値$A_0$の数値に対して、追加融資を考慮したEL($E_0[L_T(\Delta^*)]$、(32)式)と追加融資を考慮しないEL ($E_0[L_T(0)]$、(6)式)を表 2で比較する。表 1では$A_t$の値によって追加融資が行われない場合が存在したが、表 2では、時点$t$までの資産価値変動が確率的に与えられるため、どのような$A_0$の水準に対しても追加融資の可能性がある。表2からは、どの当初資産価値$A_0$に対しても、追加融資を考慮することによって、ELが小さくなること、特に、$A_0$が小さい場合には$\mu$がある程度大きくても、時点$t$での資産価値$A_t$が小さいままである可能性が高く、PDの低下を見込んで追加融資が行われやすくなり、その結果、ELの改善（低下）効果も大きくなることがわかる。

**表2　追加融資を考慮したELと考慮しないEL**

| $A_0$ | (1) $E_0[L_T(\Delta^*)]$ | (2) $E_0[L_T(0)]$ | (1)–(2) | $P_{\mathrm{I}}$ | $P_{\mathrm{II}}$ | $P_{\mathrm{III}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 80 | 10.78 | 12.00 | –1.21 | 0.1% | 24.2% | 75.8% |
| 85 | 7.45 | 8.03 | –0.58 | 0.4% | 45.9% | 53.7% |
| 90 | 4.66 | 4.90 | –0.24 | 2.0% | 66.4% | 31.6% |
| 95 | 2.54 | 2.63 | –0.09 | 6.4% | 78.1% | 15.4% |
| 100 | 1.06 | 1.10 | –0.04 | 15.7% | 78.0% | 6.3% |
| 105 | 0.11 | 0.15 | –0.04 | 30.2% | 67.6% | 2.2% |
| 110 | –0.47 | –0.40 | –0.07 | 47.9% | 51.4% | 0.6% |
| 120 | –1.06 | –0.86 | –0.21 | 79.3% | 20.6% | 0.0% |

10 2次元標準正規分布の分布関数（累積密度関数）の計算は、例えば、ハル［2005］の付録12Cを参照。

11 (3)では、時点$t$での貸出金利$r_L=1\%$、調達金利$r_M=0.5\%$と設定したが、初期時点の貸出金利、調達金利もそれぞれ$r_{L0}=1\%$、$r_{M0}=0.5\%$と同じ金利を想定する。なお、両時点での適用金利が異なっても同様に議論できる。また、時点$t$で貸出量（EaD）ではなく追加融資の貸出金利$r_L$を調整してEL最小化を行うモデルも考えられる。

## 3．追加融資を考慮したUL

2節ではEL最小化を前提として最適な追加融資量や初期時点でのELの評価、数値例によるEL改善幅を考察した。ただし、期中時点でEL最小化を目的とした追加融資を行うことを想定したとき、ULが引き下げられるとは限らず、その場合、信用リスクが削減されるとはいえない。そして、ULが上昇したときには、その分に応じて自己資本を積み増す必要がある。そこで、本節では、追加融資を考慮した場合のULを導出し、追加融資を考慮しない場合との比較を行う。

### （1）ULとストレス時期待損失

銀行の与信ポートフォリオのULをVaRとELとの差で定義する。VaRの算出に当たっては、ファクター型のマートン・モデルを用いる。すなわち、ポートフォリオを構成する各与信$i$の損失$L_i$は、共通ファクター（システマティック・リスクファクター）$X$と、それとは独立な個別ファクター$Y_i$によって生じるとする。このとき、共通ファクター$X$を所与とすると、各債務者のデフォルトは互いに独立となる。ポートフォリオが十分に分散化され、どの債務者のエクスポージャーも、ポートフォリオ全体に比べると無視し得るほど小さいという状況では、与信ポートフォリオの損失$L=\sum_i L_i$の分布は、$X$を所与とするときの条件付期待損失$E[L|X]$で与えられる（Vasicek［2002］、Gordy［2003］、安藤［2005］）。さらに、①共通ファクター$X$は単変量、②全ての与信$i$について、共通ファクター$X$の条件付期待損失$E[L_i|X]$は、$X$について連続微分可能で単調減少関数、という2つの条件が成立するとき、ポートフォリオの損失分布の$\alpha$分位点$q_\alpha(L)$、すなわち、信頼水準$\alpha$のVaRは、$X$の$1-\alpha$分位点$x_{1-\alpha}$を用いて、(33)式で表現される。

$$q_\alpha(L)=E[L|X=x_{1-\alpha}]. \tag{33}$$

ここで、(33)式の条件付期待値について、

$$E[L|X=x_{1-\alpha}]=\sum_i E[L_i|X=x_{1-\alpha}], \tag{34}$$

が成立し、ポートフォリオのVaRである$q_\alpha(L)$に対する各与信$i$の寄与分は、

$$\mathrm{SEL}_i=E[L_i|X=x_{1-\alpha}], \tag{35}$$

で表すことができる。(35)式を与信$i$のストレス時期待損失（SEL）と呼ぶ。信頼水準$\alpha$での与信ポートフォリオのULのうち、与信$i$の寄与分は、

$$\mathrm{UL}_i=\mathrm{SEL}_i-E[L_i], \tag{36}$$

と表されるため、与信$i$のSELを求めることで、ポートフォリオのULに対する与信$i$の寄与を算出することができる。表記の簡便化のため、以下では添字$i$を省略する。

## （2）ストレス時期待損失の算出

ストレス時期待損失（SEL）を求めるため、まず「ストレス」を定義する。（1）式で表される企業の資産価値変動を導出する標準ブラウン運動$W_t$は、共通ファクター$X_t$と$\sqrt{R}$という相関を持ち、共通ファクター$X_t$、個別ファクター$Y_t$は互いに独立な標準ブラウン運動で表現されるとする[12]。このような$W_t$は、

$$W_t = \sqrt{R} X_t + \sqrt{1-R} Y_t \,, \qquad (37)$$

で与えられる。

$X_0 = 0$とすると、「ストレス」は、$X_T = \sqrt{T}\Phi^{-1}(1-\alpha) = -\sqrt{T}\Phi^{-1}(\alpha)$という値をとっている状況を指す。したがって、SELは、追加融資を考慮しなければ、

$$q_a(L) = SEL = D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + E_0[(D-A_T)^+ \mid X_T = -\sqrt{T}\Phi^{-1}(\alpha)] \,, \qquad (38)$$

と表現できる。（38）式の条件付期待値を評価すると、追加融資を考慮しない場合のSELは、

$$SEL = D\{e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1 + \Phi(d_S)\} - A_0 e^{\mu T} e^{-\sigma\sqrt{T}\sqrt{R}\Phi^{-1}(\alpha)} e^{-R\sigma^2 T/2} \Phi(d_S - \sigma\sqrt{T}\sqrt{1-R}) \,, \qquad (39)$$

で与えられる（詳細は補論3）。ここで、$d_s$は次式のように定義した。

$$d_S \equiv \frac{d_0 + \sqrt{R}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-R}} = \frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{R}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-R}} \,. \qquad (40)$$

## （3）時点$t$でのストレス時期待損失

時点$t$での追加融資後の当該企業のストレス時期待損失（SEL）は、

$$\begin{aligned} SEL_t(\Delta^*) = {} & D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + \Delta^*(e^{(r_M - r_L)\tau} - 1) \\ & + E_t[(D + \Delta^* - A_T)^+ \mid X_T = -\sqrt{T}\Phi^{-1}(\alpha), X_t, Y_t] \,, \end{aligned} \qquad (41)$$

と表現される。ここでは、追加融資がなされる場合と追加融資がなされない場合に分けて、（41）式右辺の期待値がどのように表現されるかを考察する。

12 本稿では、バーゼルⅡの内部格付アプローチの考え方（BCBS［2005b］を参照）に即して、資産価値と共通ファクターの相関を正の値$\sqrt{R}$としているが、資産価値に対して共通ファクターと負の相関を持つ場合も本稿の枠組みで考えられる。

**追加融資がなされる場合**

$X_t,\, X_{T-t} \equiv X_T - X_t$ を用いてストレスの条件を表すと、

$$X_T = X_t + X_{T-t} = -\sqrt{T}\,\Phi^{-1}(\alpha)\,, \tag{42}$$

となる。$\Delta^*$が時点$t$でのELを最小化する最適な追加融資量であることを考慮すると、$A_T$は、$Y_{T-t} \equiv Y_T - Y_t$も用いて、

$$\begin{aligned} A_T &= (A_t + \Delta^* e^{-r_L\tau})\, e^{(\mu-\sigma^2/2)\tau} e^{\sigma(\sqrt{R}X_{T-t}+\sqrt{1-R}Y_{T-t})} \\ &= (D+\Delta^*)\, e^{-d^*\sigma\sqrt{\tau}} e^{\sigma(\sqrt{R}X_{T-t}+\sqrt{1-R}Y_{T-t})} \\ &= (D+\Delta^*)\, e^{-d^*\sigma\sqrt{\tau}} e^{\sigma\{\sqrt{R}(-\sqrt{T}\Phi^{-1}(\alpha)-X_t)+\sqrt{1-R}Y_{T-t}\}}\,, \end{aligned} \tag{43}$$

と表現される。このとき、(41) 式は次式に帰着する。

$$\begin{aligned} SEL_t(\Delta^*) &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1) + \Delta^*(e^{(r_M-r_L)\tau}-1) \\ &\quad +(D+\Delta^*)\, E_t[(1-e^{-d^*\sigma\sqrt{\tau}} e^{-\sigma\sqrt{RT}\,\Phi^{-1}(\alpha)} e^{-\sigma\sqrt{R}X_t} e^{\sigma\sqrt{1-R}Y_{T-t}})^+ \mid X_t] \\ &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1) + (e^{(r_M-r_L)\tau}-1)\,\frac{A_t - D\xi^*}{\xi^* - e^{-r_L\tau}} \\ &\quad + \frac{A_t - De^{-r_L\tau}}{\xi^* - e^{-r_L\tau}}\, E_t[(1-e^{-d^*\sigma\sqrt{\tau}} e^{-\sigma\sqrt{RT}\,\Phi^{-1}(\alpha)} e^{-\sigma\sqrt{R}X_t} e^{\sigma\sqrt{1-R}Y_{T-t}})^+ \mid X_t]\,. \end{aligned} \tag{44}$$

**追加融資がなされない場合**

追加融資がなされない場合、$\Delta^* = 0$より、(41) 式は次式に帰着する。

$$\begin{aligned} SEL_t(0) &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1) + E_t[(D-A_T)^+ \mid X_T = -\sqrt{T}\Phi^{-1}(\alpha), X_t, Y_t] \\ &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1) + E_t[(D-A_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\{-\sqrt{RT}\,\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{1-R}(Y_t+Y_{T-t})\}})^+ \mid Y_t]\,. \end{aligned} \tag{45}$$

## (4) 初期時点でのストレス時期待損失

追加融資を考慮した初期時点でのストレス時期待損失$E_0[SEL_t(\Delta^*)]$は、追加融資を考慮したELと同様に、時点$t$での資産価値$A_t$の状態に応じて3つの状態に分けて評価できる。すなわち、

$$E_0[SEL_t(\Delta^*)] = SEL_{\mathrm{I}} + SEL_{\mathrm{II}} + SEL_{\mathrm{III}}\,. \tag{46}$$

ただし、

$$SEL_{\mathrm{I}} \equiv E_0[SEL_t(\Delta_1^*)1_{A_t > D\xi_1^*}], \tag{47}$$

$$SEL_{\mathrm{II}} \equiv E_0[SEL_t(0)1_{D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*}], \tag{48}$$

$$SEL_{\mathrm{III}} \equiv E_0[SEL_t(\Delta_2^*)1_{A_t < D\xi_2^*}], \tag{49}$$

となる。これは、追加融資を考慮したELと同様、2次元正規分布の分布関数を用いて解析的に表現できる。その導出の概略を以下に示す。

### 状態 I のSEL

（44）式を用いて、（47）式を評価すると次式を得る（詳細は補論4を参照）。

$$\begin{aligned}
SEL_{\mathrm{I}} =& D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1)\Phi(-\delta_1^*) \\
&+\frac{1}{\xi_1^*-e^{-r_L\tau}}[(e^{(r_M-r_L)\tau}-1)\{A_0e^{\mu t}\Phi(-\delta_1^*+\sigma\sqrt{t})-D\xi_1^*\Phi(-\delta_1^*)\} \\
&+A_0e^{\mu t}\{\Phi_2(-\delta_1^*+\sigma\sqrt{t}, h_1^*+\sigma Rt/\sqrt{\eta};\rho^*) \\
&-e^{-\sigma h_1^*\sqrt{\eta}-\sigma^2 t/2+\sigma^2(1-R)T/2}\Phi_2(-\delta_1^*+\sigma(1-R)\sqrt{t}, h_1^*-\sigma(1-R)\tau/\sqrt{\eta};\rho^*)\} \\
&-De^{-r_L\tau}\{\Phi_2(-\delta_1^*, h_1^*;\rho^*)-e^{-\sigma h_1^*\sqrt{\eta}+\sigma^2\eta/2}\Phi_2(-\delta_1^*-\sigma R\sqrt{t}, h_1^*-\sigma\sqrt{\eta};\rho^*)\}].
\end{aligned} \tag{50}$$

ただし、$\eta$、$h_1^*$、$h_2^*$、$\rho^*$は（51）～（53）式のように与える。

$$\eta \equiv (1-R)\tau+Rt, \tag{51}$$

$$h_i^* \equiv \frac{d_i^*\sqrt{\tau}+\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{RT}}{\sqrt{\eta}}, \quad i=1,2, \tag{52}$$

$$\rho^* \equiv R\sqrt{t/\eta}. \tag{53}$$

### 状態 II のSEL

（45）式を用いて、（48）式を評価すると次式を得る（詳細は補論4）。

$$\begin{aligned}
SEL_{\mathrm{II}} =& D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1)\{\Phi(\delta_1^*)-\Phi(\delta_2^*)\}+D\{\Phi_2(d_s^*, \delta_1^*;\rho_s)-\Phi_2(d_s^*, \delta_2^*;\rho_s)\} \\
&-A_0e^{(\mu-\sigma^2R/2)T-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)}\{\Phi_2(d_s-\sigma_s, \delta_1^*-\rho_s\sigma_s;\rho_s) \\
&-\Phi_2(d_s-\sigma_s, \delta_2^*-\rho_s\sigma_s;\rho_s)\}.
\end{aligned} \tag{54}$$

ただし、$d_s$は（40）式、$\rho_s$、$\sigma_s$は（55）式、（56）式のように与える。

$$\rho_s \equiv \sqrt{(1-R)\,t/T}\ , \tag{55}$$

$$\sigma_s \equiv \sigma\sqrt{(1-R)\,T}\ . \tag{56}$$

## 状態IIIのSEL

状態ⅠのSELと同様に、(49)式を評価すると次式を得る（詳細は補論4)。

$$\begin{aligned}
SEL_{\mathrm{III}} &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1)\,\Phi(\delta_2^*)\\
&+\frac{1}{\xi_2^*-e^{-r_L\tau}}\,[(e^{(r_M-r_L)\tau}-1)\{A_0e^{\mu t}\Phi(\delta_2^*-\sigma\sqrt{t})-D\xi_2^*\Phi(\delta_2^*)\}\\
&+A_0e^{\mu t}\{\Phi_2(\delta_2^*-\sigma\sqrt{t},h_2^*+\sigma Rt/\sqrt{\eta};-\rho^*)\\
&-e^{-\sigma h_2^*\sqrt{\eta}-\sigma^2t/2+\sigma^2(1-R)T/2}\,\Phi_2(\delta_2^*-\sigma(1-R)\sqrt{t},h_2^*-\sigma(1-R)\tau/\sqrt{\eta};-\rho^*)\}\\
&-De^{-r_L\tau}\{\Phi_2(\delta_2^*,h_2^*;-\rho^*)-e^{-\sigma h_2^*\sqrt{\eta}+\sigma^2\eta/2}\,\Phi_2(\delta_2^*+\sigma R\sqrt{t},h_2^*-\sigma\sqrt{\eta};-\rho^*)\}]\,.
\end{aligned} \tag{57}$$

## 全体のSEL

(46)、(50)、(54)、(57)式より、追加融資を考慮したSELは、次式のように2次元正規分布の分布関数を用いた解析解で表せる。

$$\begin{aligned}
E_0[SEL_t(\Delta^*)] &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1)\\
&+\frac{1}{\xi_1^*-e^{-r_L\tau}}\,[(e^{(r_M-r_L)\tau}-1)\{A_0e^{\mu t}\Phi(-\delta_1^*+\sigma\sqrt{t})-D\xi_1^*\Phi(-\delta_1^*)\}\\
&+\{A_0e^{\mu t}\Phi_2(-\delta_1^*+\sigma\sqrt{t},h_1^*+\sigma Rt/\sqrt{\eta};\rho^*)-De^{-r_L\tau}\Phi_2(-\delta_1^*,h_1^*;\rho^*)\}\\
&-e^{-\sigma h_1^*\sqrt{\eta}}\{A_0e^{\mu t-\sigma^2t/2+\sigma_s^2/2}\,\Phi_2(-\delta_1^*+\sigma(1-R)\sqrt{t},h_1^*-\sigma(1-R)\tau/\sqrt{\eta};\rho^*)\\
&-De^{-r_L\tau+\sigma^2\eta/2}\Phi_2(-\delta_1^*-\sigma R\sqrt{t},h_1^*-\sigma\sqrt{\eta};\rho^*)\}]\\
&+\frac{1}{\xi_2^*-e^{-r_L\tau}}\,[(e^{(r_M-r_L)\tau}-1)\{A_0e^{\mu t}\Phi(\delta_2^*-\sigma\sqrt{t})-D\xi_2^*\Phi(\delta_2^*)\}\\
&+\{A_0e^{\mu t}\Phi_2(\delta_2^*-\sigma\sqrt{t},h_2^*+\sigma Rt/\sqrt{\eta};-\rho^*)-De^{-r_L\tau}\Phi_2(\delta_2^*,h_2^*;-\rho^*)\}\\
&-e^{-\sigma h_2^*\sqrt{\eta}}\{A_0e^{\mu t-\sigma^2t/2+\sigma_s^2/2}\,\Phi_2(\delta_2^*-\sigma(1-R)\sqrt{t},h_2^*-\sigma(1-R)\tau/\sqrt{\eta};-\rho^*)\\
&-De^{-r_L\tau+\sigma^2\eta/2}\Phi_2(\delta_2^*+\sigma R\sqrt{t},h_2^*-\sigma\sqrt{\eta};-\rho^*)\}]\\
&+D\{\Phi_2(d_s,\delta_1^*;\rho_s)-\Phi_2(d_s,\delta_2^*;\rho_s)\}\\
&-De^{-d_s\sigma_s+\sigma_s^2/2}\{\Phi_2(d_s-\sigma_s,\delta_1^*-\rho_s\sigma_s;\rho_s)-\Phi_2(d_s-\sigma_s,\delta_2^*-\rho_s\sigma_s;\rho_s)\}\,.
\end{aligned} \tag{58}$$

## （5）追加融資を考慮したELとULの数値例

2節（4）と同じ設定のもとで追加融資を考慮したELとULの数値例を示す。ULの算出では、信頼水準$\alpha=99.9\%$として、追加融資を考慮したEL、SEL、ULの寄与を求め、追加融資を考慮しないEL、SEL、ULの寄与と比較する。相関については、$R=0.12$をベースに$R=0.24$の場合も検証する[13]。結果は表 3のとおりである。

表3では、ELを最小化するような追加融資が行われる場合、ELは小さくなるものの、SELが大きくなっている。このことから、追加融資が、ULを拡大させていることがわかる。これは、ELを抑制するための追加融資がEaDを拡大させたため、満期時点がストレス状態にあった場合、損失がより拡大してしまうことを意味している。また、ULの増加幅は相関$R$が高いほど大きくなることがわかる。

このように、銀行がELの最小化（期待収益の最大化）行動を行うと、ULで測ったときに非常に大きな信用リスクを抱えてしまう危険性があることがわかる。この問題に対しては、平均・分散分析のように、ELを一定値より低い水準に抑えたうえで、ULを最小化するという行動原理や、自己資本をある一定水準に保つため、ULの上限をその範囲に抑えつつ、ELを最小化（期待収益を最大化）する行動原理を規定し対処することが考えられる。あるいは、ELとULが取り得る組合せの中から、両者のトレードオフを勘案して銀行にとって望ましい組合せを選択するという考え方もある。いずれにせよ、銀行が融資の信用リスクを動的に管理しようとする場合、ELやULに対してどのような選好を持ち、その選好に従ってどのように行動するかの判断基準を明確に持つことが求められる。

**表3　追加融資を考慮したUL（$UL(\Delta^*)$）と考慮しないUL（$UL(0)$）**

| $A_0$ | $EL(\Delta^*)$ | $EL(0)$ | $R=0.12$ $SEL(\Delta^*)$ | $SEL(0)$ | $UL(\Delta^*)$ | $UL(0)$ | （参考）$R=0.24$ $UL(\Delta^*)$ | $UL(0)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 80 | 10.78 | 12.00 | 30.16 | 23.18 | 19.37 | 11.18 | 27.40 | 15.81 |
| 85 | 7.45 | 8.03 | 22.26 | 18.62 | 14.81 | 10.60 | 21.30 | 15.37 |
| 90 | 4.66 | 4.90 | 15.97 | 14.32 | 11.31 | 9.42 | 16.82 | 14.16 |
| 95 | 2.54 | 2.63 | 11.18 | 10.43 | 8.64 | 7.80 | 13.56 | 12.28 |
| 100 | 1.06 | 1.10 | 7.69 | 7.12 | 6.63 | 6.02 | 11.17 | 9.97 |
| 105 | 0.11 | 0.15 | 5.32 | 4.48 | 5.21 | 4.32 | 9.59 | 7.58 |
| 110 | –0.47 | –0.40 | 3.91 | 2.50 | 4.38 | 2.90 | 8.85 | 5.39 |
| 120 | –1.06 | –0.86 | 3.16 | 0.23 | 4.22 | 1.09 | 9.63 | 2.25 |

備考：簡単化のため以下のような表記法を用いている。

$EL(\Delta^*)\equiv E_0[L_T(\Delta^*)]$、$SEL(\Delta^*)\equiv E_0[SEL_t(\Delta^*)]$、$UL(\Delta^*)\equiv E_0[SEL_t(\Delta^*)]-E_0[L_T(\Delta^*)]$、$EL(0)\equiv E_0[L_T(0)]$、$SEL(0)\equiv E_0[SEL_t(0)]$、$UL(0)\equiv E_0[SEL_t(0)]-E_0[L_T(0)]$。

13 バーゼルⅡの内部格付アプローチでは、事業法人向けの与信について、PDに応じて指定関数に従い0.12～0.24の$R$を設定することが求められている（ただし、売上高が5千万ユーロ未満の場合は売上高でも調整される）。ここでは、バーゼルⅡで求められる相関$R$のうち、最も小さいもの（0.12）と最も大きいもの（0.24）を設定した。

## 4．おわりに

本稿では、信用リスク・モデルの構成要素の中で取組みが遅れていたEaDの変化について、追加融資を考慮したモデル化を試み、信用リスク量（EL、UL）を解析的に導出し、その検証を行った。EaDを銀行がコントロールできる変数として内生的にモデル化し、EaD、PD、LGDの構造的な関係に注目して、動的な信用リスクを解析的に評価したことが本稿の特徴である。具体的には、企業の資産価値を幾何ブラウン運動で与え、銀行が期中の資産価値に応じて期待損失を最小化するように追加融資を行うモデルを考えた。このもとで、初期時点でのELとUL（の寄与）が2次元正規分布の分布関数を用いて表現できることを示した。

本稿では、ELとULの解析的な評価が得られることに重点を置いたため、捨象した点や現実的ではない設定がいくつかある。主なものとしては、以下の点が挙げられる。

①追加融資量は銀行が定めることができる（常に資金需要がある）と考えている点。
②将来時点$t$における貸出金利$r_L$を外生的に与え（初期時点で観測可能）、その時点$t$の資産価値に依存しないと考えている点。
③ELの最小化を銀行の行動原理と考えている点。
④資産価値のパラメータ$\mu$や$\sigma$は満期まで一定と考えている点。
⑤追加融資は期中で1回だけと考えている点。

①と②については、本来、企業の資金需要と銀行の資金供給の双方により、追加融資量や貸出金利が決まるはずであるが、本稿では簡単化のため、このような仮定を置いている。ただし、資産の期待成長率$\mu$が貸出金利$r_L$よりも大きい状況では、追加融資は資本価値を上げることになるため、企業は追加融資の提供を受けると考えても不自然ではない。なお、銀行間の貸出競争を考慮すると、モデルがさらに複雑になるため、対象企業につき1行の独占供給を考えている。

③については、3節（5）で考察したように他の行動原理を想定することもできるが、効用関数や自己資本の設定が不要で、最も取り扱いやすいEL最小化（期待収益最大化）から着手した。

④については、銀行は資産価値のパラメータ$\mu$や$\sigma$については融資期間中不変であることを確信できる範囲内で融資期間$T$を設定しているとも考えることができる。この仮定のもとでは、時点$t$で資産価値が低くなったとしても、たまたま下振れした資産価値のパスの1つが実現したにすぎず、その後は平均的には期待成長率$\mu$で資産価値が回復していくと考える。パラメータ$\mu$が確率変動するようなモデル化や時点$t$で観察された資産価値$A_t$に応じて$\mu$を再設定するようなモデル化も可能ではあるが、解析的に扱いにくくなるため本稿では考えなかった。

⑤については、追加融資を複数回可能とすると、解析的に扱いにくくなるため、1回としている。なお、複数回にしてもシミュレーションによる分析は可能である

が、問題の本質を理解するうえでは1回の追加融資に絞った方が追加融資の効果を解釈しやすいと判断した。

このように、本稿では簡単化のために捨象した点も多いが、EL最小化という銀行の行動原理のもとで、追加融資が生じる現象を示し、その理由をPDの抑制や金利差に伴う期待収益の向上で説明することができた。また、追加融資に伴うEaDの変化が、PDやLGDに及ぼす影響を構造的に捉え、EL、ULの解析解が導出可能なことを示した。バーゼルⅡの先進的内部格付手法ではPDやLGDのみならずEaDの評価も求められている。本稿のモデルは、EaDの内生性やPD、LGD、EaDの相互関係を考慮してELやULを算出する際の1つのアプローチとして位置付けられる。

## 補論1．期中での追加融資の判定

### （1）追加融資が行われる資産価格の水準

本文（12）式の $f(d)$ の1階微分は、

$$\begin{aligned} f'(d) &= \phi(d) - e^{(\mu - r_L)\tau}\phi(d - \sigma\sqrt{\tau}) \\ &= \{1 - e^{(\mu - r_L - \sigma^2/2)\tau} e^{\sigma\sqrt{\tau}d}\}\phi(d), \end{aligned} \tag{A-1}$$

となるため、（A-2）式が成立する。

$$f'(d) \begin{cases} > 0 & if \quad d < \bar{d} \\ < 0 & if \quad d > \bar{d}. \end{cases} \tag{A-2}$$

ただし、$\bar{d}$ は（A-3）式で表される値である。

$$\bar{d} = \frac{r_L - \mu + \sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{\tau}. \tag{A-3}$$

$d$ の極限や $\bar{d}$ に関する $f(d)$ の値は、以下のとおりになる。

$$\lim_{d \to -\infty} f(d) = e^{(r_M - r_L)\tau} - 1, \tag{A-4}$$

$$\lim_{d \to \infty} f(d) = e^{(r_M - r_L)\tau} - e^{(\mu - r_L)\tau} = \{e^{r_M\tau} - e^{\mu\tau}\}e^{-r_L\tau}, \tag{A-5}$$

$$f(\bar{d}) = e^{(r_M - r_L)\tau} - 1 + \Phi(\bar{d}) - e^{(\mu - r_L)\tau}\Phi(\bar{d} - \sigma\sqrt{\tau}). \tag{A-6}$$

追加融資量が有限であるという条件のもとでは $f(\bar{d}) > 0$ となることから、（A-4）～（A-6）式より、$r_L > r_M$ ならば $d_1^* < \bar{d}$ の領域で $f(d_1^*) = 0$ となる $d_1^*$ が存在し、$\mu > r_M$ ならば $\bar{d} < d_2^*$ の領域で $f(d_2^*) = 0$ となる $d_2^*$ が存在する。

これら $d_1^*$、$d_2^*$ は、$f(d)$ の1階微分が（A-1）式のように与えられることから、例えば、ニュートン法[14]によって求めることができる。ただし、（A-1）式で与えられる $f'(d)$ は $d$ の絶対値が大きいところでは急速に0に近づき、ニュートン法が不安定になる場合もある。この場合は、2分法[15]など他の手法によって $d_1^*$、$d_2^*$ を求めることができる。

---

14 適当な $d$ の初期値 $d^{(0)}$ を与え、$d^{(n+1)} = d^{(n)} - [f(d^{(n)}) / f'(d^{(n)})]$ で値を更新し、収束した値を解とする方法。

15 $d_1^* < \bar{d}$ の $d_1^*$ を求めるのであれば、まず、初期値として $d$ がとり得る下限の値を $d^L$、上限の値を $d^H = \bar{d}$ とする。$d^M = (d^L + d^H)/2$ に対して、$f(d^M) > 0$ であれば $d^H = d^M$ として更新し、$f(d^M) < 0$ であれば $d^L = d^M$ として更新し、$f(d^M)$ が十分に0に近づくか $d^H - d^L$ が十分に小さくなったときの $d^M$ を解とする方法。

次に、$t$、$T$、$r_M$、$r_L$、$\mu$、$\sigma$を所与とし、追加融資が行われる$A_t$の水準を検討する。ここで、追加融資が行われる直前の$d_t$の水準、すなわち、$d_t(0)$を$A_t$の関数と考え直して、関数$\tilde{d}(A_t)$を以下のように定義する。

$$\tilde{d}(A_t) = d_t(0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left\{\ln\frac{D}{A_t} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right\} . \quad \text{(A-7)}$$

そのうえで、関数$h(A_t)$を

$$h(A_t) \equiv \lim_{\Delta\to 0}\frac{\partial E_t[L_T(\Delta)]}{\partial\Delta} = e^{(r_M - r_L)\tau} - 1 + \Phi(\tilde{d}(A_t)) - e^{(\mu - r_L)\tau}\Phi(\tilde{d}(A_t) - \sigma\sqrt{\tau}) , \quad \text{(A-8)}$$

と置くと、$h(A_t) < 0$となる資産価格の水準$A_t$であれば追加融資が行われることがわかる。実際、(A-4)～(A-6)式より、$\tilde{d}(A_t) < d_1^*$か$\tilde{d}(A_t) > d_2^*$の場合に$h(A_t) < 0$となることが確認される。そこで、おのおののケースについて、$A_t$の閾値を求めてみる。

まず、$r_L > r_M$の状況で、$\tilde{d}(A_t) < d_1^*$ならば、

$$\ln D - \ln A_t < d_1^*\,\sigma\sqrt{\tau} + (\mu - \sigma^2/2)\,\tau , \quad \text{(A-9)}$$

より、

$$A_t > De^{-d_1^*\sigma\sqrt{\tau} - (\mu - \sigma^2/2)\tau} = D\xi_1^* , \quad \text{(A-10)}$$

となる。同様に、$\mu > r_M$の状況で$\tilde{d}(A_t) > d_2^*$ならば、

$$A_t < De^{-d_2^*\sigma\sqrt{\tau} - (\mu - \sigma^2/2)\tau} = D\xi_2^* \ , \quad \text{(A-11)}$$

となり、$D\xi_1^*$および$D\xi_2^*$が追加融資の有無を分ける資産水準$A_t$の閾値になることがわかる。

次に、おのおののケースで最適な追加融資量$\Delta_1^*$、$\Delta_2^*$を求める。$r_L > r_M$の状況で、(A-10)が成立して追加融資$\Delta > 0$を行うとき、$A_t > De^{-\bar{d}\sigma\sqrt{\tau} - (\mu - \sigma^2/2)\tau} = De^{-r_L\tau}$を満たすことから、

$$\frac{A_t}{D} > \frac{A_t + \Delta e^{-r_L\tau}}{D + \Delta} \geq \xi_1^* , \quad \text{(A-12)}$$

となっており、最適な追加融資量$\Delta_1^*$では、

$$\frac{A_t + \Delta_1^* e^{-r_L\tau}}{D + \Delta_1^*} = \xi_1^* , \quad \text{(A-13)}$$

を満たす。同様に、$\mu > r_M$で(A-11)式の状況で追加融資を行うときは、$A_t < De^{-r_L\tau}$となっており、

$$\frac{A_t}{D} < \frac{A_t + \Delta e^{-r_L \tau}}{D + \Delta} \leq \xi_2^*\ , \tag{A-14}$$

を満たし、最適な追加融資量$\Delta_2^*$は、

$$\frac{A_t + \Delta_2^* e^{-r_L \tau}}{D + \Delta_2^*} = \xi_2^*\ , \tag{A-15}$$

を満たす。(A-13)、(A-15)式より、最適な追加融資量$\Delta_1^*$、$\Delta_2^*$は(A-16)式で与えられる。

$$\Delta_1^* = \frac{A_t - D\xi_1^*}{\xi_1^* - e^{-r_L \tau}}\ ,\ \Delta_2^* = \frac{A_t - D\xi_2^*}{\xi_2^* - e^{-r_L \tau}}\ . \tag{A-16}$$

## (2) パラメータの大小関係と追加融資の有無

(A-4)～(A-6)式より、企業の期待資産成長率$\mu$、貸出金利$r_L$、銀行の調達金利$r_M$の大小関係と追加融資の有無を整理できる。企業の資金借入需要については、脚注8のとおり$\mu \geq r_L$では追加融資により期待資本価値が向上するため必ず需要があると考えることができる。また、本節(4)で示すように$r_L \leq r_M$または$\mu \leq r_M$では追加融資量は有限となる。以上の関係をまとめると、表A- 1のとおりとなる。

**表A- 1　時点$t$でのパラメータの大小関係と追加融資**

| パラメータの大小 | 融資量 | 追加融資の有無 | 企業の借入需要 |
| --- | --- | --- | --- |
| $\mu \geq r_L > r_M$ | 有限 | $A_t > D\xi_1^*$、$A_t < D\xi_2^*$ で追加融資 | 必ず需要 |
| | 無限 | $A_t$の水準によらず追加融資 | |
| $r_L > \mu \geq r_M$ | 有限 | $A_t > D\xi_1^*$、$A_t < D\xi_2^*$ で追加融資 | 需要は不明 |
| | 無限 | $A_t$の水準によらず追加融資 | |
| $\mu \geq r_M \geq r_L$ | 有限 | $A_t < D\xi_2^*$で追加融資 | 必ず需要 |
| $r_L \geq r_M > \mu$ | 有限 | $A_t > D\xi_1^*$ で追加融資 | 需要は不明 |
| $r_M \geq \mu > r_L$<br>$r_M \geq r_L \geq \mu$ | | 追加融資されない | |

## （3）追加融資量が有限であるための必要十分条件

$\partial E_t[L_T(\Delta)]/\partial\Delta|_{\Delta=0}$が負という状況であっても、$\partial E_t[L_T(\Delta)]/\partial\Delta|_{\Delta\to\infty}$が負の場合、追加融資量は有限にはならない。$E_t[L_T(\Delta)]$の追加融資量Δに関する2階微分を求めてみると、

$$\frac{\partial^2 E_t[L_T(\Delta)]}{\partial\Delta^2} = \{1-e^{(\mu-r_L-\sigma^2/2)\tau}e^{\sigma\sqrt{\tau}d_t}\}\phi(d_t)\frac{\partial d_t(\Delta)}{\partial\Delta}$$

$$= \frac{(A_t-De^{-r_L\tau})^2}{\sigma\sqrt{\tau}(D+\Delta)(A_t+\Delta e^{-r_L\tau})^2}\,\phi(d_t(\Delta))\,, \tag{A-17}$$

となり、常に正であるが、Δ→∞ の極限では、

$$\lim_{\Delta\to\infty}\frac{\partial^2 E_t[L_T(\Delta)]}{\partial\Delta^2} = \frac{(A_t-De^{-r_L\tau})^2\phi(\bar{d})}{\sigma\sqrt{\tau}}\lim_{\Delta\to\infty}\frac{1}{(D+\Delta)(A_t+\Delta e^{-r_L\tau})^2} = 0\,, \tag{A-18}$$

となり、直線に漸近することがわかる。漸近する直線の傾きは、

$$\lim_{\Delta\to\infty}\frac{\partial E_t[L_T(\Delta)]}{\partial\Delta} = e^{(r_M-r_L)\tau}-1+\Phi(\bar{d})-e^{(\mu-r_L)\tau}\Phi(\bar{d}-\sigma\sqrt{\tau})\,, \tag{A-19}$$

で表現でき、追加融資量が有限であるには（A-19）式が正であることが必要十分条件となる。この条件は、$\lim_{\Delta\to\infty}d_t(\Delta)=\bar{d}$より、

$$f(\bar{d})>0\,, \tag{A-20}$$

と同値である。

## （4）追加融資量が有限であるためのパラメータの条件

（A-19）式右辺の$\Phi(\bar{d})-e^{(\mu-r_L)\tau}\Phi(\bar{d}-\sigma/\sqrt{\tau})$は必ず正になる。したがって、$r_L\le r_M$では追加融資量は有限となる。また、$r_M<r_L$であっても$\mu\le r_M$であれば追加融資量は有限となる。以下、このことを示すために、次の命題A-1を証明する。

**命題A-1**　実数$\alpha$と正の実数$s$に対して、$\Phi(-\alpha+s/2)-e^{\alpha s}\Phi(-\alpha-s/2)>0$

**（証明）** 対数正規分布（A-21）式に従う確率変数$X$を考える。

$$\ln X \sim \mathrm{N}(\alpha s-s^2/2, s^2)\,. \tag{A-21}$$

このとき、

$$Y \equiv \frac{\ln X - (\alpha s - s^2/2)}{s} \ , \qquad \text{(A-22)}$$

と置くと、$Y \sim \mathrm{N}(0,1)$であり、

$$\Pr((1-X)^+ > 0) = \Pr(X < 1) = \Pr\left(Y < \frac{-(\alpha s - s^2/2)}{s}\right) = \Phi(-\alpha + s/2)\ , \qquad \text{(A-23)}$$

となる。定義により、$(1–X)^+ \geq 0$であり、（A-23）式より、$(1–X)^+ > 0$となる確率は正であるから、（A-22）式を用いて

$$\begin{aligned} 0 < E\,[(1-X)^+] &= \int_{-\infty}^{-\alpha+s/2} (1 - e^{sy+\alpha s - s^2/2})\,\phi(y)\,dy \\ &= \Phi(-\alpha + s/2) - e^{\alpha s}\Phi(-\alpha - s/2)\ , \end{aligned} \qquad \text{(A-24)}$$

となり、命題A-1が示された。 ■

$\alpha = (\mu - r_L)\sqrt{\tau}/\sigma,\ s = \sigma\sqrt{\tau}$と置いて命題A-1を適用すると、（A-19）式右辺の$\Phi(\bar{d}) - e^{(\mu - r_L)\tau}\,\Phi(\bar{d} - \sigma\sqrt{\tau})$は正になることがわかる。すなわち、$r_L \leq r_M$であれば（A-19）式右辺は正となることから、追加融資量は有限になることがわかる。

$r_L > r_M$であっても、$\mu \leq r_M$ならば、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\to\infty} \frac{\partial E_t[L_T(\Delta)]}{\partial \Delta} &\geq e^{(\mu - r_L)\tau} - 1 + \Phi(\bar{d}) - e^{(\mu - r_L)\tau}\Phi(\bar{d} - \sigma\sqrt{\tau}) \\ &= e^{(\mu - r_L)\tau}\{\Phi(-\bar{d} + \sigma\sqrt{\tau}) - e^{(r_L - \mu)\tau}\Phi(-\bar{d})\}, \end{aligned} \qquad \text{(A-25)}$$

となるから、$\alpha = (r_L - \mu)\sqrt{\tau}/\sigma,\ s = \sigma\sqrt{\tau}$と置いて命題A-1を適用すると、（A-25）式の右辺は正になり、追加融資量は有限になることがわかる。

したがって、$r_L \leq r_M$あるいは$\mu \leq r_M$であれば追加融資量は有限となり、追加融資量が無限になるのは$r_L > r_M$かつ$\mu > r_M$に限られることがわかる。

## 補論2．時点$t$での状態別のEL

### 状態ⅠのEL

$r_L > r_M$で$A_t > D\xi_1^*$ならば、時点$t$で追加融資が行われる。その状態ⅠのELを$EL_{\mathrm{I}}$とすると、(16) 式から、

$$EL_{\mathrm{I}} \equiv E_0[L_T(\Delta_1^*)1_{A_t>D\xi_1^*}]=D\{\Phi(d_1^*)+e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1\}\Pr[A_t>D\xi_1^*] - e^{\mu\tau}\Phi(d_1^*-\sigma\sqrt{\tau})E_0[A_t 1_{A_t>D\xi_1^*}], \quad \text{(A-26)}$$

となる。ここで、(A-26) 式中の期待値$E_0[A_t 1_{A_t>D\xi_1^*}]$は次式のように展開できる。

$$E_0[A_t 1_{A_t>D\xi_1^*}]=\int_{\delta_1^*}^{\infty} A_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t}e^{\sigma\sqrt{t}v}\phi(v)\,dv = A_0 e^{\mu t}\int_{\delta_1^*}^{\infty}\phi(v-\sigma\sqrt{t})\,dv$$

$$=A_0 e^{\mu t}\{1-\Phi(\delta_1^*-\sigma\sqrt{t})\}=A_0 e^{\mu t}\Phi(-\delta_1^*+\sigma\sqrt{t}). \quad \text{(A-27)}$$

よって、$EL_{\mathrm{I}}$は (25) 式で与えられる。

### 状態ⅡのEL

$D\xi_2^* \le A_t \le D\xi_1^*$ならば、追加融資は行われない。状態ⅡのELを$EL_{\mathrm{II}}$とすると、(10) 式で$\Delta=0$としたうえで$A_t$の確率分布に応じて期待値を評価し、

$$EL_{\mathrm{II}} \equiv E_0[L_T(0)1_{D\xi_2^*\le A_t\le D\xi_1^*}]=D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1)\Pr[D\xi_2^*\le A_t\le D\xi_1^*]$$

$$+DE_0[\Phi(\tilde{d}(A_t))1_{D\xi_2^*\le A_t\le D\xi_1^*}]-e^{\mu\tau}E_0[A_t\Phi(\tilde{d}(A_t)-\sigma\sqrt{\tau})1_{D\xi_2^*\le A_t\le D\xi_1^*}], \quad \text{(A-28)}$$

で与えられる。ただし、$\tilde{d}(A_t)$は (A-7) 式で定義した。ここで、$\ln A_t$を標準正規分布に従う確率変数$v$を用いて、

$$\ln A_t = \ln A_0 - (\mu-\sigma^2/2)\,t + \sigma\sqrt{t}v,$$

と表現すると、

$$\tilde{d}(A_t)=d_0\sqrt{T/\tau}-v\sqrt{t/\tau},$$

となり、

$$E_0[\Phi(\tilde{d}(A_t))1_{D\xi_2^*\le A_t\le D\xi_1^*}]=\int_{\delta_2^*}^{\delta_1^*}\Phi(d_0\sqrt{T/\tau}-v\sqrt{t/\tau})\phi(v)\,dv,$$

と展開できる。ここで、相関$\rho$の2次元標準正規分布の密度関数を$\phi_2(x, y; \rho)$、分布関数を$\Phi_2(x, y; \rho)$と表すと、

$$\Phi_2(x,y;\rho)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\phi_2(u,v;\rho)\,dvdu=\int_{-\infty}^{x}\Phi\left(\frac{y-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\phi(u)\,du,$$

と表現できるため、$\rho$を（29）式で与えると、

$$E_0[\Phi(\tilde{d}(A_t))1_{D\xi_2^*\leq A_t\leq D\xi_1^*}]=\Phi_2(\delta_1^*,d_0;\rho)-\Phi_2(\delta_2^*,d_0;\rho), \quad \text{(A-29)}$$

となる。さらに、

$$E_0[A_t\Phi(\tilde{d}(A_t)-\sigma\sqrt{\tau})1_{D\xi_2^*\leq A_t\leq D\xi_1^*}]$$

$$=A_0\,e^{(\mu-\sigma^2/2)t}\int_{\delta_2^*}^{\delta_1^*}e^{\sigma\sqrt{t}v}\Phi(d_0\sqrt{T/\tau}-\sigma\sqrt{\tau}-v\sqrt{t/\tau})\,\phi(v)\,dv$$

$$=A_0\,e^{\mu t}\int_{\delta_2^*}^{\delta_1^*}\Phi(d_0\sqrt{T/\tau}-\sigma\sqrt{\tau}-v\sqrt{t/\tau})\phi(v-\sigma\sqrt{t})\,dv$$

$$=A_0\,e^{\mu t}\{\Phi_2(\delta_1^*-\sigma\sqrt{t},d_0-\sigma\sqrt{T};\rho)-\Phi_2(\delta_2^*-\sigma\sqrt{t},d_0-\sigma\sqrt{T};\rho)\}, \quad \text{(A-30)}$$

となる。（A-28）式に（26）式、（A-29）式、（A-30）式を代入して（28）式を得る。

**状態IIIのEL**

$\mu > r_M$で$A_t< D\xi_2^*$ならば、時点$t$で追加融資が行われる。その状態IIIのELを$EL_{\text{III}}$とすると、（19）式から次式を得る。

$$EL_{\text{III}}\equiv E_0[L_T(\Delta_2^*)1_{A_t<D\xi_2^*}]$$

$$=D\{\Phi(d_2^*)+e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1\}\Pr[A_t<D\xi_2^*]$$

$$-e^{\mu\tau}\Phi(d_2^*-\sigma\sqrt{\tau})E_0[A_t1_{A_t<D\xi_2^*}]. \quad \text{(A-31)}$$

ここで、（A-27）式の導出と同様にして、

$$E_0[A_t1_{A_t<D\xi_2^*}]=A_0e^{\mu t}\Phi(\delta_2^*-\sigma\sqrt{t}), \quad \text{(A-32)}$$

が得られることから、（A-31）式に（30）式、（A-32）式を代入して（31）式を得る。

## 補論3．追加融資がない場合の初期時点でのストレス時期待損失

まず、ストレス状況の条件$X_T = -\sqrt{T}\,\Phi^{-1}(\alpha)$を具体的に考察する。満期での資産価値の対数値$\ln A_T$を、標準正規分布に従う確率変数$w$を用いて表現すると、(2)式より次式で与えられる。

$$\ln A_T = \ln A_0 + (\mu - \sigma^2/2)\,T + \sigma\sqrt{T}\,w\,. \qquad \text{(A-33)}$$

さらに（A-33）式の$w$を互いに独立な標準正規分布に従う確率変数$x, y$を用いて

$$w = \sqrt{R}x + \sqrt{1-R}y\,, \qquad \text{(A-34)}$$

と表現し、(37)式と比較すると、$X_T = -\sqrt{T}\,\Phi^{-1}(\alpha)$という条件は$x = -\Phi^{-1}(\alpha)$と同値になっていることがわかる。

したがって、追加融資がない場合の初期時点でのストレス時期待損失(38)式は(A-35)式で書き直すことができる。

$$SEL = D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1) + E_0[(D - A_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\sqrt{T}(-\sqrt{R}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{1-R}y)})^+]\,. \qquad \text{(A-35)}$$

ここで、$d_s$を(40)式のように定義すると、

$$\begin{aligned}
&E_0[(D - A_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\sqrt{T}(-\sqrt{R}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{1-R}y)})^+] \\
&= \int_{-\infty}^{d_S} (D - A_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\sqrt{T}(-\sqrt{R}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{1-R}y)})\phi(y)dy \\
&= D\Phi(d_S) - A_0 e^{\mu T} e^{-\sigma\sqrt{T}\sqrt{R}\Phi^{-1}(\alpha)} e^{-R\sigma^2 T/2}\,\Phi(d_S - \sigma\sqrt{T}\sqrt{1-R})\,,
\end{aligned} \qquad \text{(A-36)}$$

と変形できる。(A-35)式に(A-36)式を代入すると、(39)式が導出される。

## 補論4．追加融資を考慮した各状態でのストレス時期待損失

### 状態ⅠのSEL

（44）式を用いて、（47）式を評価すると

$$SEL_{\mathrm{I}}=D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1)\Pr[A_t>D\xi_1^*]+\frac{e^{(r_M-r_L)\tau}-1}{\xi_1^*-e^{-r_L\tau}}E_0[(A_t-D\xi_1^*)1_{A_t>D\xi_1^*}]$$

$$+\frac{1}{\xi_1^*-e^{-r_L\tau}}E_0[(A_t-De^{-r_L\tau})(1-e^{-d_1^*\sigma\sqrt{\tau}}e^{-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)}e^{-\sigma\sqrt{R}X_t}e^{\sigma\sqrt{1-R}Y_{T-t}})^+1_{A_t>D\xi_1^*}],\qquad\text{(A-37)}$$

となる。

（A-37）式において、

$$E_0[(A_t-D\xi_1^*)1_{A_t>D\xi_1^*}]=E_0[A_t1_{A_t>D\xi_1^*}]-D\xi_1^*\Pr[A_t>D\xi_1^*]$$

$$=A_0e^{\mu t}\Phi(-\delta_1^*+\sigma\sqrt{t})-D\xi_1^*\Phi(-\delta_1^*),\qquad\text{(A-38)}$$

が成立する。また、

$$E_0[(A_t-De^{-r_L\tau})(1-e^{-d_1^*\sigma\sqrt{\tau}}e^{-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)}e^{-\sigma\sqrt{R}X_t}e^{\sigma\sqrt{1-R}Y_{T-t}})^+1_{A_t>D\xi_1^*}]$$

$$=E_0[(A_0e^{(\mu-\sigma^2/2)t}e^{\sigma(\sqrt{R}X_t+\sqrt{1-R}Y_t)}-De^{-r_L\tau})(1-e^{-d_1^*\sigma\sqrt{\tau}}e^{-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)}e^{-\sigma\sqrt{R}X_t}e^{\sigma\sqrt{1-R}Y_{T-t}})$$
$$\times 1_{\sqrt{R}X_t+\sqrt{1-R}Y_t>\delta_1^*}1_{\sqrt{1-R}Y_{T-t}<d_1^*\sqrt{\tau}+\sqrt{R}(\sqrt{T}\Phi^{-1}(\alpha)+X_t)}]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\frac{\delta_1^*-\sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}}}^{\infty}\int_{-\infty}^{\frac{d_1^*+\sqrt{RT/\tau}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}}}(A_0e^{(\mu-\sigma^2/2)t}e^{\sigma\sqrt{t}(\sqrt{R}x+\sqrt{1-R}y)}-De^{-r_L\tau})$$
$$(1-e^{-d_1^*\sigma\sqrt{\tau}}e^{-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)}e^{-\sigma\sqrt{Rt}x}e^{\sigma\sqrt{(1-R)\tau}w})\phi(w)\phi(y)\phi(x)dwdydx$$

$$=A_0e^{\mu t}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{-\delta_1^*+\sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}}+\sigma\sqrt{(1-R)t}\right)\Phi\left(\frac{d_1^*+\sqrt{RT/\tau}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}}\right)\phi(x-\sigma\sqrt{Rt})dx$$

$$+A_0e^{(\mu-\sigma^2/2)t}e^{\sigma^2(1-R)T/2}e^{-d_1^*\sigma\sqrt{\tau}}e^{-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{-\delta_1^*+\sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}}+\sigma\sqrt{(1-R)t}\right)$$
$$\Phi\left(\frac{d_1^*+\sqrt{RT/\tau}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}}-\sigma\sqrt{(1-R)\tau}\right)\phi(x)dx$$

$$-De^{-r_L\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(-\frac{\delta_1^*+\sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}}\right)\Phi\left(\frac{d_1^*+\sqrt{RT/\tau}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}}\right)\phi(x)dx$$

$$+De^{-r_L\tau}e^{-d_1^*\sigma\sqrt{\tau}}e^{-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)}e^{\sigma^2(Rt+(1-R)\tau)/2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{-\delta_1^*+\sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}}\right)$$
$$\Phi\left(\frac{d_1^*+\sqrt{RT/\tau}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}}-\sigma\sqrt{(1-R)\tau}\right)\phi(x+\sigma\sqrt{Rt})dx,$$

であり、ここで、2次元正規分布関数に関する

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{a+\sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}}\right)\Phi\left(\frac{b+\sqrt{Rt/\tau}\,x}{\sqrt{1-R}}\right)\phi(x)dx=\Phi_2\left(a,\frac{b\sqrt{\tau}}{\sqrt{(1-R)\tau+Rt}};\frac{R\sqrt{t}}{\sqrt{(1-R)\tau+Rt}}\right),$$

の関係を用いて、(51)～(53)式のように、$\eta$、$h_1^*$、$\rho^*$を置くと、

$$\begin{aligned}
&E_0[(A_t-De^{-r_L\tau})(1-e^{-d_1^*\sigma\sqrt{\tau}}e^{-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)}e^{-\sigma\sqrt{R}X_t}e^{\sigma\sqrt{1-R}Y_{T-t}})^+1_{A_t>D\xi_1^*}]\\
&=A_0e^{\mu t}\Phi_2(-\delta_1^*+\sigma\sqrt{t},h_1^*+\sigma Rt/\sqrt{\eta};\rho^*)\\
&-A_0e^{(\mu-\sigma^2/2)t}e^{\sigma^2(1-R)T/2-d_1^*\sigma\sqrt{\tau}-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)}\Phi_2(-\delta_1^*+\sigma(1-R)\sqrt{t},h_1^*-\sigma(1-R)\tau/\sqrt{\eta};\rho^*)\\
&-De^{-r_L\tau}\Phi_2(-\delta_1^*,h_1^*;\rho^*)+De^{-r_L\tau}e^{-d_1^*\sigma\sqrt{\tau}-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)+\sigma^2(Rt+(1-R)\tau)/2}\\
&\quad\Phi_2(-\delta_1^*-\sigma R\sqrt{t},h_1^*-\sigma\sqrt{\eta};\rho^*),\qquad\text{(A-39)}
\end{aligned}$$

となる。(A-37)式に(23)、(A-38)、(A-39)式を代入すれば、(50)式を導出できる。

**状態IIのSEL**

(45)式を用いて、(48)式を評価すると、

$$\begin{aligned}
SEL_{\mathrm{II}}&=D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T}-1)\Pr[D\xi_2^*\le A_t\le D\xi_1^*]\\
&+E_0[(D-A_0e^{(\mu-\sigma^2/2)T}e^{\sigma\{-\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{1-R}(Y_t+Y_{T-t})\}})^+1_{D\xi_2^*\le A_t\le D\xi_1^*}],\qquad\text{(A-40)}
\end{aligned}$$

となる。ここで、(55)式のように$\rho_s$を置くと、

$$\begin{aligned}
&E_0[(D-A_0e^{(\mu-\sigma^2/2)T}e^{\sigma\{-\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{1-R}(Y_t+Y_{T-t})\}})^+1_{D\xi_2^*\le A_t\le D\xi_1^*}]\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\frac{d_S\sqrt{T}-y\sqrt{t}}{\sqrt{\tau}}}\int_{\frac{\delta_2^*-\sqrt{1-R}y}{\sqrt{R}}}^{\frac{\delta_1^*-\sqrt{1-R}y}{\sqrt{R}}}(D-A_0e^{(\mu-\sigma^2/2)T}e^{\sigma\{-\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{1-R}(\sqrt{t}y+\sqrt{\tau}w)\}})\phi(x)\phi(w)\phi(y)dxdwdy\\
&=D\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\frac{d_S\sqrt{T}-y\sqrt{t}}{\sqrt{\tau}})\{\Phi(\frac{\delta_1^*-\sqrt{1-R}y}{\sqrt{R}})-\Phi(\frac{\delta_2^*-\sqrt{1-R}y}{\sqrt{R}})\}\phi(y)dy\\
&-A_0e^{(\mu-\sigma^2R/2)T-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\frac{d_S\sqrt{T}-y\sqrt{t}}{\sqrt{\tau}}-\sigma\sqrt{(1-R)\tau})\\
&\times\{\Phi(\frac{\delta_1^*-\sqrt{1-R}y}{\sqrt{R}})-\Phi(\frac{\delta_2^*-\sqrt{1-R}y}{\sqrt{R}})\}\phi(y-\sigma\sqrt{(1-R)t})dy
\end{aligned}$$

$$= D\{\Phi_2(d_S, \delta_1^*; \rho_S) - \Phi_2(d_S, \delta_2^*; \rho_S)\}$$

$$- A_0 e^{(\mu-\sigma^2 R/2)T - \sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)}\{\Phi_2(d_S - \sigma\sqrt{(1-R)T},\ \delta_1^* - \sigma(1-R)\sqrt{t};\ \rho_S)$$

$$- \Phi_2(d_S - \sigma\sqrt{(1-R)T},\ \delta_2^* - \sigma(1-R)\sqrt{t};\ \rho_S)\}, \qquad \text{(A-41)}$$

となり、(56)式のように$\sigma_s$を置くと、(26)式を用いて(54)式を導出できる。

## 状態IIIのSEL

状態ⅠのSELの導出と同様に、(A-38)式に対応して

$$E_0[(A_t - D\xi_2^*)1_{A_t < D\xi_2^*}] = E_0[A_t 1_{A_t < D\xi_2^*}] - D\xi_2^* \Pr[A_t < D\xi_2^*]$$

$$= A_0 e^{\mu t}\Phi(\delta_2^* - \sigma\sqrt{t}) - D\xi_2^*\Phi(\delta_2^*), \qquad \text{(A-42)}$$

を得る。また、(A-39)式に対応して

$$E_0[(A_t - De^{-r_L\tau})(1 - e^{-d_2^*\sigma\sqrt{\tau}} e^{-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)} e^{-\sigma\sqrt{R}X_t} e^{\sigma\sqrt{1-R}Y_{T-t}})^+ 1_{A_t < D\xi_2^*}]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\frac{\delta_2^* - \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}}}\int_{-\infty}^{\frac{d_2^* + \sqrt{RT/\tau}\Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}}} (A_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t} e^{\sigma\sqrt{t}(\sqrt{R}x + \sqrt{1-R}y)} - De^{-r_L\tau})$$

$$(1 - e^{-d_2^*\sigma\sqrt{\tau}} e^{-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)} e^{-\sigma\sqrt{Rt}x} e^{\sigma\sqrt{(1-R)\tau}w})\phi(w)\phi(y)\phi(x)dwdydx$$

$$= A_0 e^{\mu t}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{\delta_2^* - \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}} - \sigma\sqrt{(1-R)t}\right)\Phi\left(\frac{d_2^* + \sqrt{RT/\tau}\,\Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{Rt/\tau}\,x}{\sqrt{1-R}}\right)\phi(x - \sigma\sqrt{Rt})dx$$

$$- A_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t} e^{\sigma^2(1-R)T/2 - d_2^*\sigma\sqrt{\tau} - \sigma\sqrt{RT}\,\Phi^{-1}(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{\delta_2^* - \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}} - \sigma\sqrt{(1-R)t}\right)$$

$$\times\Phi\left(\frac{d_2^* + \sqrt{RT/\tau}\,\Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{Rt/\tau}\,x}{\sqrt{1-R}} - \sigma\sqrt{(1-R)\tau}\right)\phi(x)dx$$

$$- De^{-r_L\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{\delta_2^* - \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}}\right)\Phi\left(\frac{d_2^* + \sqrt{RT/\tau}\,\Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{Rt/\tau}\,x}{\sqrt{1-R}}\right)\phi(x)dx$$

$$+ De^{-r_L\tau} e^{-d_2^*\sigma\sqrt{\tau} - \sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha) + \sigma^2(Rt + (1-R)\tau)/2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{\delta_2^* - \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}}\right)$$

$$\times\Phi\left(\frac{d_2^* + \sqrt{RT/\tau}\Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{Rt/\tau}\,x}{\sqrt{1-R}} - \sigma\sqrt{(1-R)\tau}\right)\phi(x + \sigma\sqrt{Rt})dx,$$

を得る。ここで、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{a-\sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}}\right)\Phi\left(\frac{b+\sqrt{Rt/\tau}\,x}{\sqrt{1-R}}\right)\phi(x)dx=\Phi_2\left(a,\frac{b\sqrt{\tau}}{\sqrt{(1-R)\tau+Rt}};\frac{-R\sqrt{t}}{\sqrt{(1-R)\tau+Rt}}\right),$$

の関係式を用いて、(51)～(53)式のように、$\eta$、$h_2^*$、$\rho^*$を置くと、

$$\begin{aligned}&E_0[(A_t-De^{-r_L\tau})(1-e^{-d_2^*\sigma\sqrt{\tau}}e^{-\sigma\sqrt{RT}\,\Phi^{-1}(\alpha)}e^{-\sigma\sqrt{R}X_t}e^{\sigma\sqrt{1-R}Y_{T-t}})^+1_{A_t<D\xi_2^*}]\\&=A_0e^{\mu t}\{\Phi_2(\delta_2^*-\sigma\sqrt{t},h_2^*+\sigma Rt/\sqrt{\eta};-\rho^*)\\&\quad-e^{-\sigma h_2^*\sqrt{\eta}-\sigma^2t/2+\sigma^2(1-R)T/2}\Phi_2(\delta_2^*-\sigma(1-R)\sqrt{t},h_2^*-\sigma(1-R)\tau/\sqrt{\eta};-\rho^*)\}\\&\quad-De^{-r_L\tau}\{\Phi_2(\delta_2^*,h_2^*;-\rho^*)-e^{-\sigma h_2^*\sqrt{\eta}+\sigma^2\eta/2}\Phi_2(\delta_2^*+\sigma R\sqrt{t},h_2^*-\sigma\sqrt{\eta};-\rho^*)\}\ ,\end{aligned}\tag{A-43}$$

を得ることから、(30)、(A-42)、(A-43)式から(57)式を導出できる。

## 参考文献

安藤美孝、「与信ポートフォリオの信用リスクの解析的な評価方法：極限損失分布およびグラニュラリティ調整を軸に」、『金融研究』第24巻別冊第1号、日本銀行金融研究所、2005年、39〜120頁

池田亮一・小林孝雄・高橋明彦、「負債の期間構造と信用リスク評価」、CIRJEディスカッションペーパー CIRJE-J-131、2005年

ハル, ジョン、三菱証券 商品開発本部訳『フィナンシャルエンジニアリング第5版』、金融財政事情研究会、2005年

Altman, E. I., A. Resti, and A. Sironi, "Analyzing and Explaining Default Recovery Rates," ISDA Research Report, London, December 2001.

Basel Committee on Banking Supervision (BCBS), "International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards," Basel Committee Publications No. 107, November 2005a. (http://www.bis.org/)

———, "An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions," July 2005b. (http://www.bis.org/)

Black, F., and J. C. Cox, "Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions," *Journal of Finance*, 31 (2), 1976, pp. 351-367.

Frye, J., "Collateral damage," *Risk*, 13 (4), 2000, pp. 91-94.

Geske, R., "The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12 (4), 1977, pp. 541-552.

Gordy, M., "A risk-factor model foundation for rating based bank capital rules," *Journal of Financial Intermediation*, 12 (3), 2003, pp. 199-232.

Gruber, W., and R. Parchert, "Overview of EAD Estimation Concepts," in *The Basel II Risk Parameters*, B. Engelmann, and R. Rauhmeier, eds. Springer, 2006, pp. 177-196.

Jiménez, G., and J. Mencía, "Modelling the Distribution of Credit Losses with Observable and Latent Factors," working paper, 2007.

Kupiec, P. H., "A Generalized Single Common Factor Model of Portfolio Credit Risk," presented at 17th Annual Derivatives Securities and Risk Management Conference, Federal Deposit Insurance Corporation's Center for Financial Research, 2007.

Leland, H. E., "Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure," *Journal of Finance*, 49 (4), 1994, pp. 1213-1252.

———, and K. B. Toft, "Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads," *Journal of Finance*, 51 (3), 1996, pp. 987-1019.

Merton, R. C., "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 29 (2), 1974, pp. 449-470.

Moral, G., "EAD Estimates for Facilities with Explicit Limits," in *The Basel II Risk Parameters*, B. Engelmann, and R. Rauhmeier, eds. Springer, 2006, pp. 197-242.

Peura, S., and E. Jokivuolle, "LGD in a Structural Model of Default," in *Recovery Risk*, E. I. Altman, A. Resti, and A. Sironi, eds. Risk Books, 2005, pp. 201-216.

Pykhtin, M., "Unexpected Recovery Risk," *Risk*, 16 (8), 2003, pp. 74-78.

Schuermann, T., "What Do We Know About Loss-Given-Default?," in *Credit Risk Models and Management* 2nd Edition, D. Shimko, ed., Risk Books, 2004, pp. 249-274.

Vasicek, O., "Loan portfolio value," *Risk*, 15 (12), 2002, pp. 160-162.