

多変量派生資産の評価： コピュラと共単調和によるアプローチ

こくれあつゆき
小暮厚之

要 旨

多変量派生資産とは、将来のペイオフが複数の原資産に依存している派生資産を指す。このような多変量派生資産を評価するためには、多変量リスク中立分布を規定する必要がある。もしも多変量派生資産が市場において頻繁に取引されていれば、その市場価格から多変量派生リスク中立分布を抽出することが可能であろう。しかし、新たに多変量派生資産が市場に導入される場合や、既に導入されていたとしても流動性が低い場合には、市場価格から多変量リスク中立分布を完全に決定することは困難である。ただし、そのような場合でも、多変量派生資産を構成する各個別資産は市場で広く取引されている場合が通常であり、少なくとも各資産の個別リスク中立周辺分布を規定することは可能であろう。

本稿では、個別リスク中立分布が既に規定されているという条件のもとで、いかに多変量派生資産を評価すべきかという問題を考える。よく知られているように、多変量リスク中立分布は、個別リスク中立分布とリスク中立コピュラ関数に分解できる。リスク中立コピュラをモデリングする手法として、個別ディストーションと同時ディストーションを考察する。また、最近の保険リスク理論の成果である共単調性という考え方を適用して、リスク中立コピュラを規定することなく多変量資産を評価するアプローチを試みる。日経225およびS&P500株価に対する適用を通じて、その実用性を検討する。

キーワード：多変量派生証券、コピュラ、レインボー・オプション、共単調和、アジアン・オプション

本稿は、筆者が日本銀行金融研究所客員研究員の期間に行った研究をまとめたものである。同研究所企画役の家田明氏（現在は日本銀行金融機構局）から有益な助言を頂いた。また、本稿の作成に当たり、同研究所客員研究生の長谷川智弘氏（現在は三菱UFJ証券）より計算補助を受けた。ここに記して感謝する。ただし本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。

小暮厚之 慶應義塾大学総合政策学部教授（E-mail: kogure@sfc.keio.ac.jp）

1 . はじめに

多変量派生資産とは、将来のペイオフが複数の原資産に依存している派生資産を指す。例えば、バスケット・オプションは、複数の資産のポートフォリオ（バスケット）を原資産とするオプションである。レインボー・オプションは、複数の原資産の最大値あるいは最小値を対象とするオプションである。また、アジアン・オプションは、同一ではあるが異時点間の株価の算術平均を対象とするオプションであり、多変量派生資産の範疇に入る。

このような多変量派生資産を評価するためには、多変量リスク中立分布を規定する必要がある。もしも多変量派生資産が市場において頻繁に取引されていれば、その市場価格から多変量派生リスク中立分布を抽出することが可能であろう。しかし、新たに多変量派生資産が市場に導入される場合や、既に導入されていたとしても流動性が低い場合には、市場価格から多変量リスク中立分布を完全に決定することは困難である。ただし、そのような場合でも、多変量派生資産を構成する各個別資産は市場で広く取引されている場合が通常であり、少なくとも各資産の個別リスク中立周辺分布を規定することは可能であろう。本稿では、個別リスク中立分布が既に規定されているという条件のもとで、いかに多変量派生資産を評価すべきかという問題を考える。

よく知られているように、多変量リスク中立分布は、個別リスク中立分布とリスク中立コピュラに分解できる。リスク中立コピュラをモデリングする手法として、個別ディストーションと同時ディストーションを考察する。また、共単調性の理論を用いて、リスク中立コピュラを規定することなく多変量資産を評価するアプローチを試みる。

2 . リスク中立化法

いま m 個の資産があるとし、それらの満期 T 年における価格を X_1, X_2, \dots, X_m とする。満期におけるヨーロッパ型多変量資産のペイオフを、

$$H(X_1, X_2, \dots, X_m),$$

とする。例えば、バスケット・コール・オプションであれば、

$$H(X_1, X_2, \dots, X_m) = (X_1 + X_2 + \dots + X_m - K)_+,$$

となる。ここで、 $_+$ は正值部分を表す。また、レインボー・オプションであれば、

$$H(X_1, X_2, \dots, X_m) = (\max(X_1, X_2, \dots, X_m) - K)_+,$$

という形のペイオフとなる。以下では、リスク・フリー・レートが存在するものとし、その値を r とする。このとき、多変量資産の理論価格は

$$e^{-rT} E^*[H(X_1, X_2, \dots, X_m)] = e^{-rT} \int H(x_1, x_2, \dots, x_m) dF^*(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

と表せる。ここで、 F^* は X_1, X_2, \dots, X_m の同時リスク中立分布¹、 E^* は F^* に関する期待値演算を表す。同時分布 F^* は、

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_m) = C^*(F_{X_1}^*(x_1), F_{X_2}^*(x_2), \dots, F_{X_m}^*(x_m)), \quad (1)$$

のように、周辺分布 $F_{X_j}^*$ とコピュラ C^* に分解できる²。各 X_j の個別市場が十分に流動的であるとすれば、既存の手法によって、市場に存在する資産の市場価格から対応する X_j のリスク中立確率分布 $F_{X_j}^*$ を抽出することができる³。したがって、多変量派生資産の評価の大きな課題は、コピュラ C^* をいかにモデリングするかという点にある。

3. リスク中立コピュラのモデリング

Wang [2005] は、多変量リスク評価のモデリングとして、単一変量のリスク評価であるディストーション変換⁴の考え方を拡張して、「個別ディストーション」(individual distortion) と「同時ディストーション」(joint distortion) という2つのアプローチを提案している。以下では、説明の簡便化のために、2変量 ($m=2$) の場合について2つのアプローチを考察する。

(1) 個別ディストーション

観察確率測度における X_1 と X_2 の分布関数 F は、(1)式と同様に、

$$F(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)), \quad (2)$$

のように周辺分布 F_{X_1} 、 F_{X_2} とコピュラ C に分解できる。

個別ディストーションでは、リスク中立コピュラ C^* は観察確率測度のコピュラ C に等しいとモデル化する。

Rosenberg [2003] では、かなり一般的な条件のもとで $C=C^*$ が成立するとの主張が述べられている。そのような、個別ディストーションが成立する例を述べよう。

1 より正確に言えば、各資産の現在価格を条件とした条件付同時リスク分布である。

2 コピュラについては、戸坂・吉羽 [2005]、Embrechts, McNeil, and Straumann [2001]、Frees and Valdez [1998] 等を参照されたい。また、本稿に必要な知識を補論1にまとめている。

3 Mandler [2002] では、多様な抽出手法が述べられている。

4 いわゆるWang変換 (Wang [2000]) はその代表的な例である。

例1：アジアン・オプション

時点0の株価（既知）を s 、1年後の株価を X_1 、2年後の株価を X_2 とすると、満期時点 $T=2$ 年において

$$\left(\frac{X_1 + X_2}{2} - K \right)_+,$$

を支払うアジアン・コール・オプションを考える。ブラック＝ショールズ・モデルでは、 X_1 と X_2 は一定の μ 、 σ を用いて、

$$X_1 = s \exp\{\mu + \sigma Z_1\}, \quad X_2 = X_1 \exp\{\mu + \sigma Z_2\} = s \exp\{2\mu + \sigma(Z_1 + Z_2)\},$$

とモデル化される⁵。ここで、 Z_1 と Z_2 は互いに独立な標準正規分布に従う確率変数である。このとき、 X_1 と X_2 の周辺分布は

$$F_{X_1}(x_1) = \Phi((\log(x_1/s) - \mu)/\sigma), \quad F_{X_2}(x_2) = \Phi((\log(x_2/s) - 2\mu)/\sqrt{2}\sigma),$$

となる。ここで、 Φ は標準正規分布の分布関数を表す。また、 X_1 と X_2 のコピュラは

$$C(u, v) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v) | 1/\sqrt{2}),$$

となる。ここで、 $\Phi_2(\cdot, \cdot | \rho)$ は相関係数が ρ の標準2変量正規分布関数を表す。ブラック＝ショールズ・モデルでは、リスク中立分布の周辺分布は

$$F_{X_1}^*(x_1) = \Phi\left(\frac{\log(x_1/s) - \mu_1^*}{\sigma}\right), \quad F_{X_2}^*(x_2) = \Phi\left(\frac{\log(x_2/s) - \mu_2^*}{\sqrt{2}\sigma}\right),$$

コピュラは

$$C^*(u, v) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v) | \rho^*),$$

とモデル化される。ここで、 μ_1^* 、 μ_2^* 、 ρ^* は無裁定性条件

$$E^*[e^{-r} X_1] = s, \quad E^*[e^{-2r} X_2] = s, \quad E^*[e^{-r} X_2 | X_1 = x_1] = x_1,$$

を満たすように定められる。ここで、 E^* はリスク中立分布に関する期待値を表す。その結果

.....
5 標準的には、 $X_1 = s \exp\{\mu - \sigma^2/2 + \sigma Z_1\}$ 、 $X_2 = X_1 \exp\{\mu - \sigma^2/2 + \sigma Z_2\}$ と表現するかもしれない。本稿では、説明の便宜上、 $\mu - \sigma^2/2$ を単一のパラメータとして、このように表現している。

$$\mu_1^* = \mu_2^* = r - \sigma^2/2, \quad \rho^* = 1/\sqrt{2},$$

が成立し、 $C = C^*$ となる。すなわち、アジアン・オプションの場合は、個別ディストーションが成立している。この直感的な理由は、アジアン・オプションのペイオフは確かに2変量に依存するが、基礎証券は単一だからである。

次の例は、個別ディストーションが成立しない場合である。

例2：バスケット・オプション

満期時点 $T = 1$ 年の株式1の価格を X_1 、株式2の株価を X_2 とするとき、満期時点1において

$$\left(\frac{X_1 + X_2}{2} - K \right)_+,$$

を支払うバスケット・コール・オプションを考える。時点0におけるそれぞれの株価を s_1, s_2 とすると、ブラック＝ショールズ・モデルでは

$$X_1 = s_1 \exp\{\mu_1 + \sigma_1 Z_1\}, \quad X_2 = s_2 \exp\{\mu_2 + \sigma_2 Z_2\},$$

であり、 Z_1 と Z_2 は相関係数が ρ である2変量標準正規分布に従う。このとき、 X_1 と X_2 の周辺分布は

$$F_{X_1}(x_1) = \Phi\left(\frac{\log(x_1/s_1) - \mu_1}{\sigma_1}\right), \quad F_{X_2}(x_2) = \Phi\left(\frac{\log(x_2/s_2) - \mu_2}{\sigma_2}\right),$$

となり、コピュラは

$$C(u, v) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v) | \rho),$$

となる。リスク中立分布は

$$F_{X_1}^*(x_1) = \Phi\left(\frac{\log(x_1/s_1) - \mu_1^*}{\sigma_1}\right), \quad F_{X_2}^*(x_2) = \Phi\left(\frac{\log(x_2/s_2) - \mu_2^*}{\sigma_2}\right),$$

および

$$C^*(u, v) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v) | \rho^*),$$

とモデル化される。この場合、無裁定性条件

$$E^*[X_1] = s_1 e^r, \quad E^*[X_2] = s_2 e^r,$$

から

$$\mu_1^* = r - \sigma_1^2/2, \quad \mu_2^* = r - \sigma_2^2/2,$$

が成立するが、 ρ^* の値は定まらない。すなわち、個別資産の価格だけからでは、バ

スケット・オプションのコピュラは定まらない。この直感的な理由は、バスケット・オプションはアジアン・オプションと同一のペイオフの表現を持つが、アジアン・オプションとは異なり、その基礎証券は単一ではないからである⁶。この場合には、個別ディストーションはリスク中立コピュラを特定化する1つの手法である。

(2) 同時ディストーション

同時ディストーションによるリスク中立コピュラのモデリングは、コピュラ密度関数によって表現できる。 $m = 2$ の場合に、(1)の両辺を x_1 と x_2 に関して偏微分すると、2変量リスク中立密度関数

$$f^*(x_1, x_2) = f_{X_1}^*(x_1) f_{X_2}^*(x_2) c^*(F_{X_1}^*(x_1), F_{X_2}^*(x_2)), \quad (3)$$

が得られる。ここで、 $f_{X_1}^*$ 、 $f_{X_2}^*$ は、 F_1^* と F_2^* の密度関数であり、 c^* は C^* の密度関数

$$c^*(u, v) \equiv \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} C^*(u, v),$$

である。同様にして、(2)式より、観察確率測度の2変量密度関数は

$$f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)), \quad (4)$$

と表現できる。ここで、 f_{X_1} 、 f_{X_2} 、 c は、それぞれ F_1 、 F_2 、 C の密度関数である。

同時ディストーションによるリスク中立密度関数は、(3)式において

$$c^*(F_{X_1}^*(x_1), F_{X_2}^*(x_2)) = c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)), \quad (5)$$

と仮定することによって、

$$f^*(x_1, x_2) = f_{X_1}^*(x_1) f_{X_2}^*(x_2) c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)), \quad (6)$$

と与えられる。

(3) 同時ディストーションとプライシング・カーネル

同時ディストーションは、プライシング・カーネルによって理解できる。各 X_j の

6 2変量派生資産（例えば、満期のペイオフが $X_1 X_2$ である資産）の市場価格が既知であれば、それに基づいて ρ^* の値を導くことは可能である。本稿では、そのような多変量派生資産は市場に導入されていないと想定している。

プライシング・カーネルは

$$M_{X_j}(x) \equiv \frac{f_{X_j}^*(x)}{f_{X_j}(x)}, \quad j=1, 2,$$

と定義される。このとき、各 X_j の個別のリスク中立密度は

$$f_{X_j}^*(x_j) = M_{X_j}(x_j) f_{X_j}(x_j),$$

と表される。同様に、2変量プライシング・カーネルは

$$M(x_1, x_2) \equiv \frac{f^*(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)},$$

と定義され、2変量リスク中立密度は

$$f^*(x_1, x_2) = M(x_1, x_2) f(x_1, x_2),$$

と表現できる。

(3) (4)式より、2変量プライシング・カーネルは

$$M(x_1, x_2) = M_{X_1}(x_1) M_{X_2}(x_2) \frac{c^*(F_{X_1}^*(x_1), F_{X_2}^*(x_2))}{c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))},$$

と表現できる。したがって、(5)式は

$$M(x_1, x_2) = M_{X_1}(x_1) M_{X_2}(x_2),$$

と同値である。すなわち、同時ディストーションによるリスク中立コピュラのモデリングとは、2変量プライシング・カーネルとして個別プライシング・カーネルの積を採用していることと同値である。

4. 多変量派生証券評価モデルの推定

本節では、周辺リスク中立分布が与えられているときに、個別資産の市場価格から個別ディストーションと同時ディストーションによって、多変量派生資産の理論価格を推定する手法を考察する。

(1) 個別ディストーションによる評価

個別ディストーション・モデルによる評価を行うために以下の定理を用いる。

定理1 $(X_1, X_2) \sim F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$ とするとき、

$$(F_{X_1}^{-1}(F_{X_1}(X_1)), F_{X_2}^{-1}(F_{X_2}(X_2))) \sim C(F_{X_1}^*(x_1), F_{X_2}^*(x_2)),$$

が成立する。

すなわち、 $(F_{X_1}^{-1}(F_{X_1}(X_1)), F_{X_2}^{-1}(F_{X_2}(X_2)))$ は、周辺分布がリスク中立確率のそれに一致し、コピュラが観測確率のそれに一致する。この定理の証明は補論2に述べる。この定理1から、 $C = C^*$ のとき

$$E^*[H(X_1, X_2)] = E[H(F_{X_1}^{-1}(F_{X_1}(X_1)), F_{X_2}^{-1}(F_{X_2}(X_2)))] \quad (7)$$

となる。この結果を利用して、個別ディストーションによる多変量派生資産の評価を行うことができる。

いま具体的な例として、2つの資産の粗収益率の最小値を原資産とするレインボー・オプションの評価を考えよう。2つの資産の時点0における価格を s_1, s_2 、時点 T における価格を X_1, X_2 と書くとき、そのようなレインボー・オプションの満期時点 T におけるペイオフは

$$H(X_1, X_2) = 100 \left(\min \left(\frac{X_1 - s_1}{s_1}, \frac{X_2 - s_2}{s_2} \right) \right)_+,$$

と与えられる。 $R_j \equiv X_j / s_j$ ($j = 1, 2$) とおくと、このペイオフは

$$H(X_1, X_2) = 100 (\min(R_1, R_2) - 1)_+ \equiv K(R_1, R_2),$$

と書き換えられ、(7)式より、理論価格は

$$H_0^I = e^{-rT} E^*[K(R_1, R_2)] = e^{-rT} E[K(F_{R_1}^{-1}(F_{R_1}(R_1)), F_{R_2}^{-1}(F_{R_2}(R_2)))] \quad (8)$$

と表現できる。ここで、 F_{R_j} は R_j の分布関数、 $F_{R_j}^*$ は R_j のリスク中立分布関数である。

いま、観測のスタート時点 t_0 として、時点 $t = t_0, t_0 + T, t_0 + 2T, \dots, t_0 + nT$ における2つの資産の価格の観測値を X_{1t}, X_{2t} ($t = 1, 2, \dots, n$) とするとき、

$$R_{jt} \equiv \frac{X_{jt}}{X_{j, t-1}}, \quad j = 1, 2; t = 1, 2, \dots, n,$$

は粗収益率データである。この粗収益率データ $\{(R_{1t}, R_{2t})\}$ が、2変量時系列データとして定常であるという仮定のもとで、現時点における派生証券の現在価値(8)は

$$\hat{H}_0^I = e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n K(\hat{F}_{R_1}^{-1}(\hat{F}_{R_1}(R_{1t})), \hat{F}_{R_2}^{-1}(\hat{F}_{R_2}(R_{2t}))) \quad (9)$$

によって推定できる。ここで、 $\hat{F}_{R_j}, \hat{F}_{R_j^*}$ は、それぞれ $F_{R_j}, F_{R_j^*}$ の推定量である⁷。

(2) 同時ディストーション・モデルによる評価

同時ディストーション・モデルの場合は、ペイオフが $H(X_1, X_2)$ で与えられる派生証券の現在価値は

$$H_0^J = e^{-rT} E[M_{X_1}(X_1)M_{X_2}(X_2)H(X_1, X_2)],$$

と表現できる。前節で取り上げたレインボー・オプションの場合には、

$$H_0^J = e^{-rT} E[M_{R_1}(R_1)M_{R_2}(R_2)K(R_1, R_2)], \quad (10)$$

となる。ここで、 M_{R_j} は R_j のプライシング・カーネルであり、

$$M_{R_j}(r) = \frac{dF_{R_j^*}(r)}{dF_{R_j}(r)},$$

によって定義される。このとき、現時点における派生証券の現在価値(10)は

$$\hat{H}_0^J = e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{M}_{R_1}(R_{1t}) \hat{M}_{R_2}(R_{2t}) K(R_{1t}, R_{2t}), \quad (11)$$

によって推定できる。ここで、 \hat{M}_{R_j} は、 M_{R_j} の推定量である。

5. 周辺リスク中立分布の抽出とレインボー・オプション評価への応用

4節で提案した手法に基づいて、日経225 とS&P500の2つの株価指数を原資産とするレインボー・オプションの評価を考察する。ここでは、2つの資産として

$$X_1 = \text{日経225株価指数}, X_2 = \text{S\&P500株価指数}$$

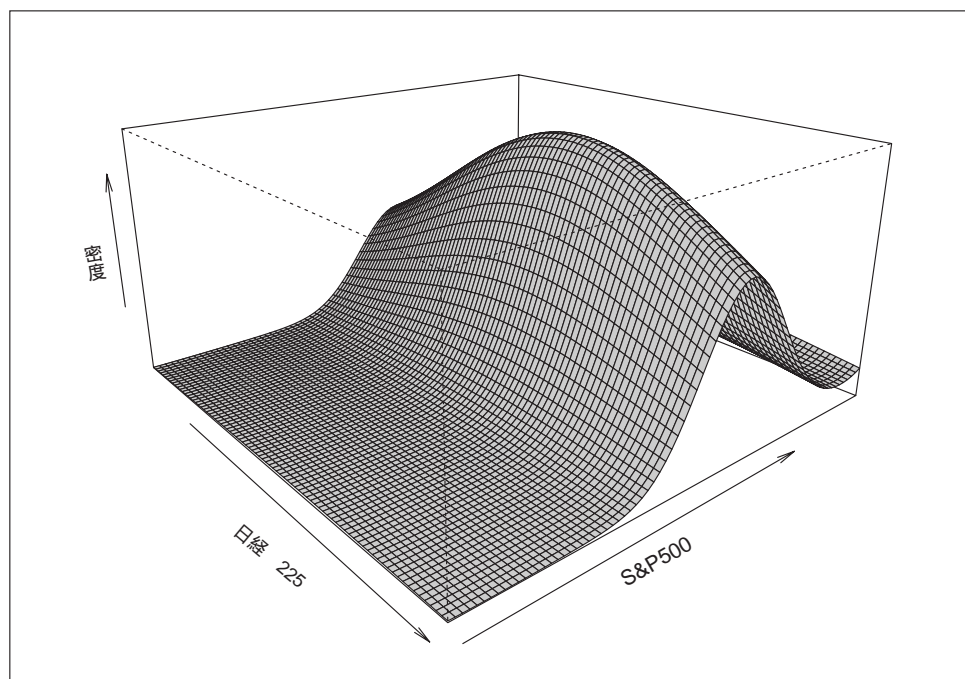
を取り上げる。また満期までの期間 T を1ヵ月とする。2000年1月から2004年12月までの期間の粗収益率の基本統計量は表1に掲げるとおりであり、その2変量密度関数は図1のように推定される。

7 この推定法は、Rosenberg [2003] で推定された手法と異なり、密度関数の推定を必要としない。密度関数のノンパラメトリック推定は、平滑化パラメータの選択という困難な問題を抱えており、しばしば不安定な推定結果をもたらす。したがって、われわれの推定法の方がよりロバストな推定を与えらる。

表1 粗収益率の基本統計量

	平均	標準偏差	相関係数
日経 225	0.9906	0.0551	0.4908
S&P500	0.9966	0.0455	

図1 2つの粗収益率の密度関数の推定値



(1) 周辺リスク中立分布の抽出

Mandler [2002] 5.2節に従って、資産価格のリスク中立分布が混合対数正規分布に従うと想定してリスク中立分布を抽出する。時点0における資産価格を s とするとき、満期時点 T の資産価格 X のリスク中立密度関数は

$$f_X^*(x|s) = \frac{1}{x} \sum_{j=1}^k \theta_j \frac{1}{\sigma_j} \phi\left(\frac{\log(x/s) - \mu_j}{\sigma_j}\right), \quad x > 0, \quad (12)$$

と与えられる。ここで、 $\phi(\cdot)$ は標準正規分布の密度関数であり、 $\theta_j, \mu_j, \sigma_j$ のパラメータであり

$$\sum_{j=1}^k \theta_j = 1, \quad \theta_j > 0, \quad \sigma_j > 0,$$

という制約条件を満たすものとする。これらのパラメータをまとめて

$$\eta = (\theta_1, \dots, \theta_k, \mu_1, \dots, \mu_k, \sigma_1, \dots, \sigma_k),$$

と書く。このリスク中立密度(12)に基づく先物理論価格 $\tilde{F}(s|\eta)$ 、コール・オプション理論価格 $\tilde{C}(K, s, r|\eta)$ 、プット・オプション理論価格 $\tilde{P}(K, s, r|\eta)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\tilde{F}(s|\eta) &= \sum_{j=1}^k \theta_j \exp\left(\mu_j + \log s + \frac{1}{2} \sigma_j^2\right), \\ \tilde{C}(K, s, r|\eta) &= e^{-rT} \sum_{j=1}^k \theta_j \left[\exp\left(\mu_j + \log s + \frac{1}{2} \sigma_j^2\right) \Phi\left(\frac{-\log(K/s) + \mu_j + \sigma_j^2}{\sigma_j}\right) \right. \\ &\quad \left. - K \Phi\left(\frac{-\log(K/s) + \mu_j}{\sigma_j}\right) \right], \\ \tilde{P}(K, s, r|\eta) &= e^{-rT} \sum_{j=1}^k \theta_j \left[-\exp\left(\mu_j + \log s + \frac{1}{2} \sigma_j^2\right) \Phi\left(\frac{\log(K/s) - \mu_j - \sigma_j^2}{\sigma_j}\right) \right. \\ &\quad \left. + K \Phi\left(\frac{\log(K/s) - \mu_j}{\sigma_j}\right) \right],\end{aligned}$$

と表される。ここで K は権利行使価格であり、 r はリスク・フリー・レートである。

時点 t における株価を s_t 、リスク・フリー・レートを r_t 、 i 番目の権利行使価格を K_{it} と記す。時点 t における満期が T の先物価格の実際の値を $F(s_t)$ 、満期が T 、権利行使価格が K_{it} のコール・オプションとプット・オプションの実際の値を $C(K_{it}, s_t, r_t)$ 、 $P(K_{it}, s_t, r_t)$ とすると、 η を

$$\begin{aligned}& \sum_{i,t} (C(K_{it}, s_t, r_t) - \tilde{C}(K_{it}, s_t, r_t|\eta))^2 + \sum_{i,t} (P(K_{it}, s_t, r_t) - \tilde{P}(K_{it}, s_t, r_t|\eta))^2 \\ & + \sum_{i,t} (F(s_t) - \tilde{F}(s_t|\eta))^2, \tag{13}\end{aligned}$$

を最小化して求める⁸。

本稿では、混合分布の個数 k の値は $k=3$ として推定を行った。日経225オプションおよびS&P500オプションの価格は、2004年12月、2005年3月、6月、9月限月のオプションのうち、清算日から4週間前の日のプットとコールの価格を用いている。それぞれの日付については以下の表2、3に示す。

各日付において、日経225オプションでは500円刻みに、S&P500オプションでは5ドル刻みに権利行使価格が存在する。ここではその全ての権利行使価格についてのオプション価格を用いるのではなく、流動性の低いものは除外した。除外の基準は、

8(13)式において、取引量などに応じて各項に重みをつけた最小化を行うことで、より効率的な推定が可能かもしれない。

Rosenberg [2003] にならい「1日の取引が5件未満のものを除外」とした。そして、先物価格、現物価格、オプション価格採集日と同日のものをういた。また無リスク金利は、オプション価格採集日と同日の1ヵ月物ユーロ円TIBORおよびドルLIBORを用いた。各パラメータの推定値は表4のとおりである。対応する粗収益率の確率密度は図2の点線で描かれている。

表2 日経225 オプション価格の採集日

限月 (清算日)	2004年12月 (12月10日)	05年3月 (3月11日)	05年6月 (6月10日)	05年9月 (9月9日)
4週間前	11月12日	2月10日	5月13日	8月12日

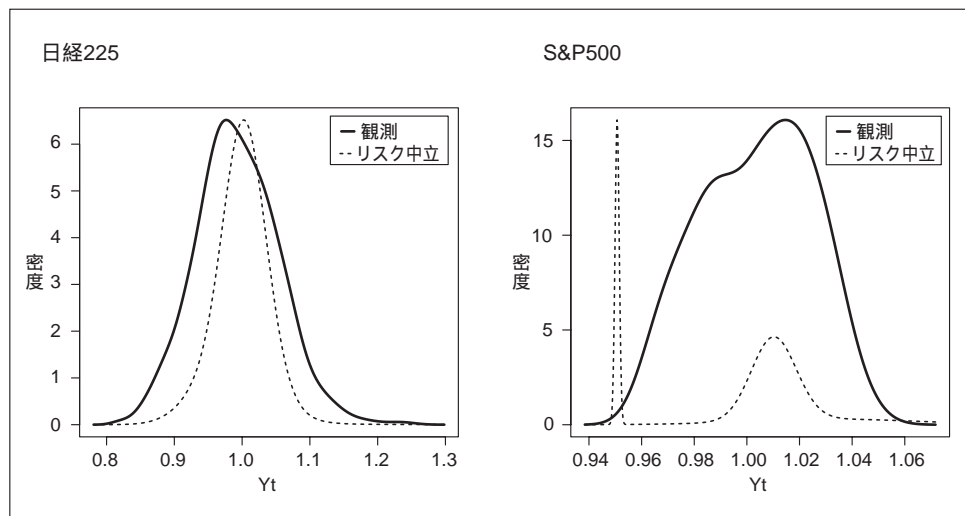
表3 S&P500 オプション価格の採集日

限月 (清算日)	2004年12月 (12月18日)	05年3月 (3月19日)	05年6月 (6月18日)	05年9月 (9月17日)
4週間前	11月19日	2月18日	5月20日	8月19日

表4 混合対数正規モデルのパラメータ推定値

	θ_1	θ_2	μ_1	μ_2	μ_3	σ_1	σ_2	σ_3
日経225	0.6820	0.3123	0.0051	-0.0156	0.0585	0.0306	0.0517	0.1136
S&P500	0.6272	0.1601	0.0102	0.0329	-0.0506	0.0084	0.0316	0.0008

図2 粗収益率のリスク中立密度と観測密度



(2) レインボー・オプション評価への応用

まず、(9)式を用いて個別ディストーションによる理論価格の推定値を算出した。 F_{R_j} の推定値は、前節の混合対数正規モデルを用いた。また、 F_{R_j} の推定値は、経験分布関数

$$\hat{F}_{R_j}(x) \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(R_{ji} \leq x), \quad j=1, 2,$$

である。ここで、 $I(A)$ は指示関数であり、 A が真ならば1、偽ならば0をとる関数を表す。このとき

$$\hat{F}_{R_j}(R_{ju}) = \frac{R_{ju} \text{ 以下の観測値の個数}}{n}, \quad u=1, 2, \dots, n,$$

となる。その結果、 $\hat{H}_0^1 = 0.6468$ と算出された。比較のために、観測確率に関する値を計算したところ、 0.9643 と算出された。個別ディストーションによる評価の方が値が小さく、リスク中立確率と観測確率の差異が的確に反映されていると考えられる。Resenberg [2003]のアプローチは、密度関数のノンパラメトリック推定に基づいており、密度関数推定に特有な推定上の不安定さや計算の非効率性を抱えている。本アプローチを用いることによって、そのような問題を克服し、より信頼できる評価が可能となると考えられる。

次に、(11)式に基づいて、同時ディストーションによるオプション理論価格の推定値を算出した。 $M_{R_j}(r)$ は

$$\hat{M}_{R_j}(r) = \frac{\hat{f}_{R_j}^*(r)}{f_{R_j}(r)}, \quad j=1, 2, \quad (14)$$

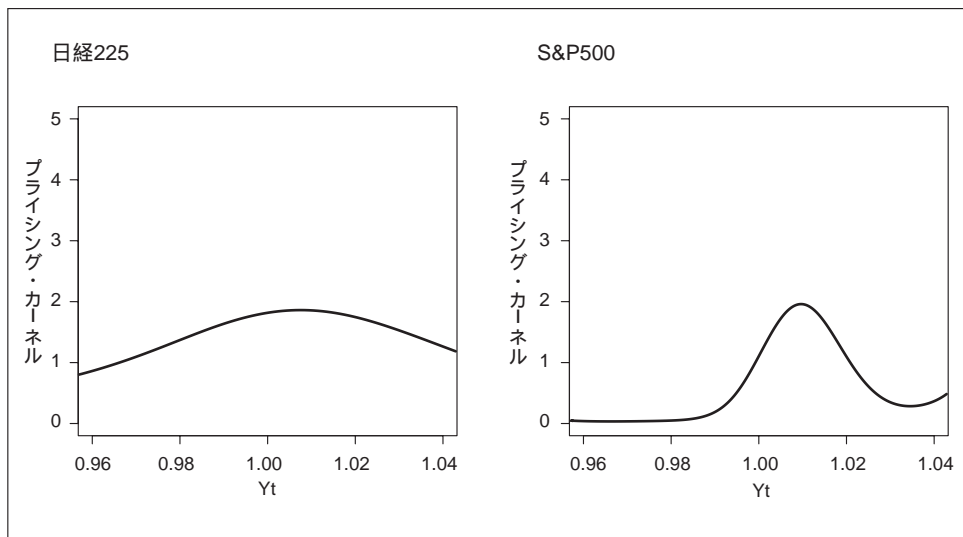
によって推定した。ここで、 $\hat{f}_{R_j}^*$ は前節で求めた混合正規分布による密度関数であり、 \hat{f}_{R_j} は正規カーネル密度関数推定値

$$\hat{f}_{R_j}(r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h} \phi\left(\frac{r - R_{ji}}{h}\right), \quad j=1, 2, \quad (15)$$

である。ここで、 h はバンド幅と呼ばれる平滑化パラメータであり、Sheathers and Jones 法により定めた⁹。その結果、同時ディストーションでは、 $\hat{H}_0^1 = 213.8177$ と推定された。このような非現実的な推定値が算出された理由として、図3にあるように、日経225およびS&P500のプライシング・カーネルが、右端の方で大きく歪んでいる（極端に大きな値をとる）ことが指摘できるかもしれない。これは、(14)式の分母を構成する(15)が、分布の裾において、密度関数推定に特有な不安定性

9 Sheathers and Jones法については、例えば Wand and Jones [1995] 3.6.2節を参照されたい。

図3 粗収益率のプライシング・カーネル



をもたらすことに起因するのかもしれない。それに対して、プライシング・カーネルを（直接は）推定しない、個別ディスティーションの方が安定的な結果を与えていると推察できる。

6 . アジアン・オプションの評価：共単調和アプローチ

リスク中立コピュラが未知であるときのより安全なアプローチとして、理論価格の上限を求めるアプローチが考えられる。一般に、コピュラには、いかなるコピュラも

$$\max(u_1 + u_2 - 1, 0) \leq C(u_1, u_2) \leq \min(u_1, u_2),$$

という関係（Frechet-Hoeffdingの不等式）が成立し、これを用いて、コピュラのモデリングを規定することなく、例えばレインボー・オプションの理論価格の上限を求めることができる（Cherubini and Luciano [2002]）。

Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas, and Vyncke [2002b] では、アジアン・オプションの評価に対して、共単調性の理論を展開し、共単調和によってモンテカルロ法で得られる近似解に非常に近い上限が得られることを明らかにした。本節では、この共単調和の考え方を説明し、それを日経225株価に応用する。

(1) 共単調和

まず、共単調和について説明する¹⁰。任意の m 個の確率変数 $\{X_i\}$ の和

$$S \equiv \sum_{i=1}^m X_i,$$

を考える。 U を $[0, 1]$ 上の一様確率変数とすると、

$$S^c \equiv \sum_{i=1}^m F_{X_i}^{-1}(U),$$

を S の共単調和という。このとき、任意の定数 d に対して

$$E[(S - d)_+] \leq E[(S^c - d)_+], \quad (16)$$

であることが示される。 S が株価であれば、左辺は権利行使価格が d のコール・オプションの期待値を表し、この不等式は、コール・オプションの期待値が共単調和を対象とするコール・オプションの期待値によって抑えられることを意味する。

共単調和の定義から、右辺の期待値は周辺分布だけから計算できるはずである。実際

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^m E[(X_i - d_i)_+], \quad (17)$$

が成立する。ここで、各 d_i は

$$d_i = F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)),$$

によって与えられる。 X_i を S を構成する個別銘柄の株価とみなせば、(17)式の右辺は X_i に対する原資産とする権利行使価格が d_i のオプションの期待値の和である。ここで、 F_{S^c} は

$$F_{S^c}(u) \equiv \sum_{i=1}^m F_{X_i}(u), \quad 0 < u < 1,$$

によって求めることができる。

(2) アジアン・オプション

時点 t の株価を $A(t)$ とすると、満期時点 T におけるヨーロッパ型の算術平均アジアン・コール・オプションのペイオフは、その行使価格を K とすると、

$$(\bar{A} - K)_+,$$

10 共単調性の詳細については、Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas, and Vyncke [2002a, 2002b]、小暮 [2005] を参照されたい。

と与えられる。ここで、 \bar{A} は、時点

$$T - (m - 1)\delta, \dots, T - \delta, T,$$

における各株価 $A(T - i\delta)$ の算術平均

$$\bar{A} \equiv \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m A(T - (i-1)\delta),$$

である。ただし、 $T - (m - 1)\delta > 0$ とする。リスク中立確率に関する期待値を E^* とすると、時点 0 における理論価格は

$$C_A(K, T, m) \equiv e^{-rT} E^*[(\bar{A} - K)_+],$$

と与えられる。

ブラック = ショールズ・モデルでは、リスク中立確率測度のもとで、株価は幾何ブラウン運動

$$dA(t) = rA(t)dt + \sigma A(t)dW(t),$$

に従うと仮定される。ここで、 $\{W(t), t \geq 0\}$ は標準ブラウン運動である。このとき、 $A(T - (i-1)\delta)$ の周辺分布は対数正規分布であり、コピュラはガウシアン・コピュラとなる¹¹。この場合、 \bar{A} は非独立な対数正規分布の和の分布に従い、よく知られているように、その分布を解析的に表現することはできない。

$$X_i \equiv A(T - (i-1)\delta), \quad d = mK, \quad S = \sum_{i=1}^m X_i,$$

とおけば

$$C_A(K, T, m) = \frac{e^{-rT}}{m} E^*[(S - d)_+],$$

と表せる。したがって、共単調和の性質(16)式および(17)式を用いて

$$\begin{aligned} C_A(K, T, m) &\leq \frac{e^{-rT}}{m} E^*[(S^c - d)_+] \\ &= \frac{e^{-rT}}{m} \sum_{i=1}^m E^*[(X_i - d_i)_+] \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m e^{-r(i-1)\delta} E^*[e^{-r(T-(i-1)\delta)}(X_i - d_i)_+] \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m e^{-r(i-1)\delta} C(d_i, T - (i-1)\delta), \end{aligned}$$

.....
11 ガウシアン・コピュラとは、多変量正規分布のコピュラのことである。

表5 アジアン・オプションの評価

満期までの期間	4	3	2	1
i	1	2	3	4
d_i	9960.94	9974.02	9993.04	10072.00
$C(d_i)$	188.59	142.74	87.29	53.27

となる。ここで、 $C(K, \tau)$ は権利行使価格が K 、満期までの期間が τ の通常のコール・オプションの現在価値である。この共単調和による上限は、通常のコール・オプションを適当な比率で組み合わせることにより、アジアン・オプションをヘッジできることを示している。そして、そのような組合せの中で、最小の上限を与える最適なヘッジ戦略に一致する (Nielsen and Sandmann [2003])。

(3) 日経225を原資産とするアジアン・オプション

Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas, and Vyncke [2002b]では、ブラック＝ショールズ・モデルのもとで、共単調和の理論によってアジアン・オプションの評価を行っている。また、Albrecher [2004]では、株価が指数レビ過程に従うという仮定のもとで、共単調和を用いた評価を提案している。ここでは、日経平均を例にとり、5節で推定した混合対数正規モデルに基づく個別リスク中立確率を用いて、アジアン・オプションの評価を試みた。

満期までの期間を $T=4$ 週間、間隔を $\delta=1$ 週間とした。したがって、 $m=4$ である。リスク・フリー・レートは1% ($r=0.01$)とした。また、時点0の株価を $s=10,000$ とし、権利行使価格が $K=10,000$ のアジアン・オプションを考えた。このとき

$$d = mK = 40,000, \quad F_{Sc}(mK) = F_{Sc}(40,000) = 0.4568,$$

となり、表5のように計算された。

この結果、 $C_A=117.95$ と算出された。この値は、通常のコール・オプションの組み合わせによって得られる最適な上限であり、実際のアジアン・オプションの評価をするうえで有用な指針を与えるであろう。

7. 結論

本稿では、コピュラを用いて、多変量派生証券の評価を論じてきた。コピュラの大きな利点は、既知の周辺分布の情報を完全に取り込む形で、多変量リスクのモデリングが可能なことである。リスク中立コピュラのモデリングについては、Wangによって提案された個別ディストーションと同時ディストーションの2つのアプローチを考察した。われわれは、ブラック＝ショールズ・モデルが前提とするよ

うなパラメトリックな世界を想定せずに、セミ・ノンパラメトリックな観点から周辺リスクをモデリングした。日経225およびS&P500の2つの株価指数を原資産とするレインボー・オプションへの適用結果から、同時ディストーションによる多変量派生資産の評価には不安定な結果がもたらされることが示唆された。さらに、リスク中立コピュラにおけるパラメトリックなモデリングの仮定を外す意味で、共単調性によるアプローチを試み、日経225を原資産とするアジアン・オプションの評価を行った。

補論1 . コピュラ

2変数の場合について考える。コピュラとは、一般に2つの一様確率変数 U_1 と U_2 の同時分布関数

$$C(u_1, u_2) \equiv \Pr(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2), \quad 0 < u_1, u_2 < 1,$$

のことをいう。コピュラを用いると、 X_1 と X_2 の同時分布関数は

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)),$$

と表せる。したがって、周辺分布が所与ならば、同時分布はコピュラによって完全に特定化できる。 X_1 と X_2 が共単調の場合は、コピュラは

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= \Pr(U \leq u_1, U \leq u_2) \\ &= \Pr(U \leq \min(u_1, u_2)) = \min(u_1, u_2), \end{aligned}$$

となる。

いかなるコピュラも

$$\max(u_1 + u_2 - 1, 0) \leq C(u_1, u_2) \leq \min(u_1, u_2),$$

という関係（Frechet-Hoeffdingの不等式）を満たす。コピュラとして共単調性を選択することは、 $\{U_1 \leq u_1\}$ と $\{U_2 \leq u_2\}$ という2つのイベントが同時に起きる確率が最も大きくなる状況を想定していることになる。

補論2 . 定理1の証明

まず、 $F_{X_1}(X_1)$, $F_{X_2}(X_2)$ は、それぞれ一様分布に従うので、 $F_{X_1^*}(X_1^*)$, $F_{X_2^*}(X_2^*)$ の周辺分布は X_1^* , X_2^* の周辺分布に一致する。また、

$$\begin{aligned} & \Pr(F_{X_1^*}^{-1}(F_{X_1}(X_1)) \leq x_1, F_{X_2^*}^{-1}(F_{X_2}(X_2)) \leq x_2) \\ &= \Pr(F_{X_1}(X_1) \leq F_{X_1^*}(x_1), F_{X_2}(X_2) \leq F_{X_2^*}(x_2)) \\ &= \Pr(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(F_{X_1^*}(x_1)), X_2 \leq F_{X_2}^{-1}(F_{X_2^*}(x_2))) \\ &= C(F_{X_1}(F_{X_1}^{-1}(F_{X_1^*}(x_1))), F_{X_2}(F_{X_2}^{-1}(F_{X_2^*}(x_2)))) \\ &= C(F_{X_1^*}(x_1), F_{X_2^*}(x_2)), \end{aligned}$$

となる。

参考文献

- 小暮厚之、「共単調性による多変量保険リスクの評価」、『リスクと保険』第1巻、日本保険・年金リスク学会、2005年、7～20頁
- 戸坂凡展・吉羽要直、「コンピュータの金融実務での具体的な活用方法の解説」、『金融研究』第24巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2005年、115～162頁
- Albrecher, H., “The Valuation of Asian Options for Market Models of Exponential Levy Type,” Technical Paper, 2004.
- Cherubini, U., and E. Luciano, “Bivariate Option Pricing with Copulas,” *Applied Mathematical Finance*, 9, 2002, pp. 69-85.
- Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M. J., Kaas, R., and D. Vyncke, “The Concept of Comonotonicity in Actuarial Science and Finance: Theory,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 31, 2002a, pp. 3-33.
- , , , , and , “The Concept of Comonotonicity in Actuarial Science and Finance: Applications,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 31, 2002b, pp. 133-161.
- Embrechts, P. McNeil, A.J., and D. Straumann, “Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls,” in Dempster and Moffatt, eds. *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Cambridge University Press, 2001.
- Frees, E. W. and E. Valdez, “Understanding Relationships Using Copulas,” *North American Actuarial Journal*, 2, 1998, pp. 1-25.
- Mandler, M., *Market Expectations and Option Prices*, Physica-Verlag, 2002.
- Nielsen, J. A., and K. Sandmann, “Pricing Bounds on Asian Options,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 35, 2003, pp. 343-367.
- Rosenberg J. V., “Non-Parametric Pricing of Multivariate Contingent Claims,” *Journal of Derivatives*, 10, 2003, pp. 9-18.
- Wand, M. P., and M. C. Jones, *Kernel Smoothing*, Chapman & Hall, 1995.
- Wang, S., “A Class of Distortion Operations for Pricing Financial and Insurance Risks,” *Journal of Risk and Insurance*, 67, 2000, pp. 15-36.
- , “Normalized Exponential Tilting: Pricing and Measuring Multivariate Risks,” Manuscript, 2005.

