ARCH型モデルと “Realized Volatility”による ボラティリティ予測と バリュー・アット・リスク

渡部敏明（わたなべとしあき）／佐々木浩二（ささきこうじ）

要　旨

本稿は、日次リターンにさまざまなARCH型モデルを当てはめた場合と、日中リターンから計算される“Realized Volatility”（以下、RVと呼ぶ）に長期記憶性と非対称性を考慮したARFIMAXモデルを当てはめた場合とで、ボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク（VaR）のパフォーマンス比較を行ったものである。日経平均の日次リターンとRVを用いて分析を行った結果、RVを真のボラティリティの代理変数としたボラティリティ予測の比較では、RVをARFIMAXモデルによって定式化した場合が最もパフォーマンスが高いのに対して、VaRによる比較では、日次リターンをボラティリティ変動の長期記憶性と非対称性を考慮したFIEGARCHモデルによって定式化した場合が最もパフォーマンスが高いことが明らかになった。また、VaRでは、誤差項の分布に、正規分布だけでなく、裾の厚いt分布や分布に歪みのあるskewed-t分布を用いた分析も行っており、日経平均の日次リターンの分布には有意な歪みがないので、skewed-t分布を用いるとパフォーマンスが低下することが明らかになっている。

キーワード： ARFIMAX、FIEGARCH、Realized Volatility、
バリュー・アット・リスク（VaR）、skewed-*t*

……………………………………

本稿は、渡部が日本銀行金融研究所シニアフェロー、佐々木が日本銀行金融研究所リサーチアソシエイトの期間に行った研究をまとめたものである。本稿を作成するに当たっては、日本銀行金融研究所のセミナー参加者、同研究所 FE（Financial Engineering）班、東京大学の大森裕浩、同大学大学院修士課程の高橋慎、一橋大学大学院博士課程の山口圭子各氏から貴重なコメントをいただいた。ただし、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。本稿では一部、東京都立大学COEプログラム「金融市場のミクロ構造と制度設計」で購入したデータを用いているが、これは渡部が東京都立大学経済学部非常勤講師であったために利用を許可された。

渡部　敏明　一橋大学経済研究所、日本銀行金融研究所
（E-mail: watanabe@ier.hit-u.ac.jp）
佐々木浩二　大東文化大学経済学部

1．はじめに

資産価格変化率もしくは収益率（以下、リターンと呼ぶ）の2次のモーメントを表すボラティリティは、ファイナンスの理論、実務両方で無視できない重要な変数である。ファイナンスの計量分析では、ボラティリティはブラック＝ショールズ・モデル（Black and Scholes［1973］）が仮定するように一定ではなく、時間を通じて確率的に変動するとの考えが一般的になっており、その変動を明示的に定式化するさまざまな時系列モデルが提案されてきた。そうしたモデルの代表的なものに、Engle［1982］によって提案されたARCH（autoregressive conditional heteroskedasticity）モデルやそれを一般化したBollerslev［1986］のGARCH（generalized ARCH）モデル、さらにそれらを拡張したモデルがある（本稿ではそうしたモデルを総称してARCH 型モデルと呼ぶ）[1]。これらのモデルでは、ボラティリティを観測されない潜在変数と考え、リターンデータを使ってモデルのパラメータを推定することにより、ボラティリティの推定値や予測値を計算する。そこで、どのモデルを使うかでボラティリティの推定値や予測値は異なる。

それに対して、モデルに依存しないボラティリティの推定量に“Realized Volatility”（以下、RVと呼ぶ）がある。これは日中の例えば5分ごとのリターンの2乗を足し合わせたもので、資産価格の日中データが利用可能になるにつれ、注目が集まっている。資産価格の日中データが利用可能でRVを計算することができるなら、まず日次ボラティリティの推定値としてRVを計算し、次に計算されたRVに何らかの時系列モデルを当てはめることによってボラティリティの予測を行うことができる。このようにRVに時系列モデルを当てはめた場合と、従来のように日次リターンを用いてARCH型モデルを推定した場合とで、どちらがボラティリティの予測パフォーマンスが高いのかを比較することは、学術的な観点からだけでなく、金融実務においても重要である。そこで、本稿では、日経平均の日次リターンとRVを用いて、日次リターンにさまざまなARCH型モデルを当てはめた場合とRVに時系列モデルを当てはめた場合とで、ボラティリティの予測パフォーマンスの比較を行った。

同様の研究はこれまでにも行われており、そこではRVを用いた方が、ARCH型モデルを用いるよりも、パフォーマンスが高いとの結果が得られている（Andersen *et al.*［2003］、Koopman *et al.*［2005］、Watanabe and Yamaguchi［2005］）。しかし、そうした先行研究では、ARCH型モデルとしてGARCHモデルのような簡単なモデルしか用いておらず、GARCHモデルにはその後さまざまな改良が加えられているので、RVを用いた方がパフォーマンスが高いと結論付けるためには、そうしたほかのARCH型モデルも含めたうえで比較を行う必要がある。そこで、本稿では、最近の改良されたARCH型モデルも取り上げて分析を行っている。具体的には、

1 ARCH 型モデルについて詳しくは、Bollerslev *et al.*［1994］、渡部［2000, 2006］を参照のこと。

GARCHモデルに加えて、Glosten *et al*.［1993］のGJRモデル、Nelson［1991］のEGARCH（exponential GARCH）モデル、Ding *et al.*［1993］のAPGARCH（asymmetric power GARCH）モデル、 Bollerslev and Mikkelsen［1996］のFIEGARCH（fractionally integrated EGARCH）モデルを用いている。株式市場では、価格が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がよりボラティリティが上昇する傾向があることが知られており、GARCHモデルではそうしたボラティリティ変動の非対称性を捉えられないのに対して、GJR、EGARCH、APGARCH、FIEGARCHモデルはすべてそれを捉えることができる。また、GARCH、GJRモデルがリターンの分散の変動を定式化するのに対して、EGARCH、FIEGARCHモデルではその対数値の変動を定式化する。さらに、APGARCHモデルではリターンの標準偏差のべき乗の変動を定式化し、そのべき乗も未知パラメータとして推定する。FIEGARCHモデルはEGARCHモデルをボラティリティが長期記憶過程に従う可能性を考慮して発展させたものである。これに対して、RVは長期記憶過程に従っていることが知られているので、その変動を表すモデルとしてよく用いられるのは、ARFIMA（autoregressive fractionally integrated moving average）モデルである[2]。本稿では、ボラティリティ変動の非対称性を捉えるために、それに前日のリターンを加えたARFIMAXモデルを用いている。

ボラティリティの予測パフォーマンスを分析する場合、ボラティリティの真の値が必要になる。しかし、ボラティリティの真の値は観測できないので、これまで代理変数としてリターンの2乗を用いることが多かった（渡部［2000］2.3.3節参照）。しかし、Andersen and Bollerslev［1998］は、リターンの2乗はボラティリティ以外の変動を含んでいるため、それをボラティリティの真の値の代理変数として用いるとARCH型モデルのボラティリティの予測パフォーマンスを過小評価してしまうことを指摘し、代わりにリターンの2乗よりも精度の高いボラティリティの推定量であるRVを代理変数として用いることを提案している。また、Hansen and Lunde［2006］は、代理変数にリターンの2乗を用いてボラティリティの予測パフォーマンスの比較を行うと、予測パフォーマンスの低いモデルを予測パフォーマンスの高いモデルとして選択してしまう可能性があることを示しており、彼らもRVを代理変数に用いることを提案している。そこで、最近では、日中データが利用可能でRVが計算できる場合には、RVを代理変数としてボラティリティの予測パフォーマンスの比較を行うようになってきており、本稿もそれに従っている。

ただし、RVはあくまでもボラティリティの推定値であり、真のボラティリティではないので、 RVに何らかのバイアスがある場合には、RVを代理変数としたボラティリティ予測の比較が正しい結果を導くとは限らない。そこで、本稿では、ボ

2 長期記憶過程やARFIMAモデルについて詳しくは、Beran［1994］、Bhardwaj and Swanson［2006］、矢島［2003］等を参照のこと。特にボラティリティの長期記憶性については、白石・高山［1998］、矢島［2003］6.6節を参照のこと。

ラティリティ予測だけでなく、バリュー・アット・リスク（VaR）による比較も行っている[3]。VaRを用いた比較では、各モデルから計算されたVaRの値を超えたリターンの比率とVaRの信頼水準とを比較するだけなので、代理変数は必要ない。ただし、VaRでは、ボラティリティだけでなく、リターンの分布も重要なので、本稿では、リターンの分布として、標準正規分布だけでなく、裾の厚いスチューデントの*t*分布やFernández and Steel［1998］によって提案された左右に歪みのあるskewed-*t*分布を用いた分析も行っている。同様にVaRを使ってARCH型モデルとRVの時系列モデルとを比較している研究に、Giot and Laurent［2004］があり、そこでは、リターンの分布にskewed-*t*分布を用いると、日次リターンにAPGARCHモデルを当てはめた場合とRVにARFIMAXモデルを当てはめた場合とで同等のパフォーマンスが得られている。しかし、そこで用いられているARCH型モデルはAPGARCHモデルだけなので、上記のようなほかのARCH 型モデルを用いた場合のVaRのパフォーマンスがどうなるかは興味深い。

日経平均の日次リターンとRVを用いて分析を行った結果、RVを真のボラティリティの代理変数としたボラティリティ予測の比較では、先行研究同様、RVにARFIMAXモデルを当てはめた場合が最もパフォーマンスが高いのに対して、VaRの比較では、日次リターンにボラティリティ変動の非対称性と長期記憶性の両方を考慮したFIEGARCHモデルを当てはめた場合が最もパフォーマンスが高いことが明らかになった。VaRにおいてFIEGARCHモデルのパフォーマンスが高いことを示したのは、本稿が初めてである。また、日経平均の日次リターンは分布の歪みの有意性が高くないため[4]、skewed-*t* 分布を用いるとVaRのパフォーマンスがかえって低下することも明らかになった。

本稿の以下の構成は次のようになっている。まず、次の2節で、本稿で用いるARCH型モデルについて解説を行う。続く3節で、RVおよびその変動を表すARFIMAXモデルについて説明する。4節で、データについて説明した後、各モデルの推定結果について説明する。5、6節では、それぞれ、ボラティリティの予測パフォーマンスとVaRのパフォーマンスに関して比較を行う。最後に7節で、本稿の結果をまとめるとともに今後の課題について述べる。

3 真のボラティリティを必要としない比較の方法として、ほかにオプション価格による比較が考えられるが、その場合、危険中立測度をどう定義するかという問題が生じる。投資家の危険中立性を仮定したうえで、オプション価格を用いて、RVとARCH型モデルの比較を行っているものに、Ubukata and Watanabe［2005］がある。

4 具体的には、分布の歪みは有意水準5%では有意であるが、1%では有意でない。詳しくは、4節を参照のこと。

2．ARCH型モデル

(1) ボラティリティ・クラスタリング

本節では、本稿で分析に用いるARCH型モデルについて簡単に説明を行う。以下、ある資産のt期のリターンR_tを、次のように、$t-1$期に予測可能な変動$E(R_t|\boldsymbol{I}_{t-1})$と予測不可能な変動$\epsilon_t$に分割する。

$$R_t = E(R_t|\boldsymbol{I}_{t-1}) + \epsilon_t\,. \tag{1}$$

ここで、$\boldsymbol{I}_{t-1}$は$t-1$期に利用可能な情報集合を表す。ボラティリティ変動モデルでは、この予測不可能な変動ϵ_tを、正の値をとるσ_tと期待値0、分散1で過去と独立かつ同一な分布に従う（independently and identically distributed; i.i.d.）確率変数z_tとの積として表す。

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t\,,\ \ \sigma_t > 0,\ \ z_t \sim \text{i.i.d.},\ E(z_t) = 0,\ Var(z_t) = 1\,. \tag{2}$$

このσ_tもしくはσ_t^2をボラティリティと呼び、ボラティリティ変動モデルでは、その変動を明示的に定式化する。ファイナンス理論ではσ_tをボラティリティと呼ぶことが多いが、本稿では以下σ_t^2のことをボラティリティと呼ぶ。

代表的なボラティリティ変動モデルであるARCH型モデルでは、t期のボラティリティσ_t^2を$t-1$期に既に値がわかっている変数だけの（撹乱項を含まないという意味で）確定的な関数として定式化する。このように定式化すると、尤度を解析的に求めることができるので、パラメータを（疑似）最尤法によって簡単に推定することができる。そのため、ARCH型モデルは資産価格の実証分析に幅広く用いられており、同時にさまざまな改良が行われている。

資産価格のボラティリティはいったん上昇（低下）すると、その後しばらくの間ボラティリティの高い（低い）日が続くことが知られている。こうした現象はボラティリティ・クラスタリング（volatility clustering）と呼ばれ、あらゆる資産価格で観測される[5]。こうした現象を捉えるために、Engle［1982］は次のようなARCHモデルを提案した[6]。

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2\,,\ \ \omega > 0,\ \ \alpha \geq 0\,. \tag{3}$$

5 ボラティリティ・クラスタリングの原因については、Granger and Machina［2006］を参照のこと。

6 これは最も簡単なARCH (1) モデルであり、一般的なARCH (q) モデルは次のように表される。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \epsilon_{t-j}^2\,,\ \ \omega > 0,\ \alpha_j \geq 0\ \ (j = 1, 2, \cdots, q)\,.$$

ここで、パラメータに非負制約を課すのは、σ_t^2の非負性を保証するためである。

その後、Bollerslev［1986］が、(3) 式の右辺にσ_{t-1}^2を加えたGARCHモデルを提案した[7]。

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2\,,\quad \omega > 0,\quad \beta, \alpha \geq 0\,. \tag{4}$$

このモデルでもσ_t^2の非負性を保証するために、パラメータに非負制約を課す。

(2) ボラティリティ変動の非対称性

株式市場では、株価が上がった日の翌日と下がった日の翌日を比べると後者の方がボラティリティがより上昇する傾向があることが知られており[8]、こうした前日に株価が上がったか下がったかによるボラティリティ変動の非対称性はARCHモデルやGARCHモデルでは捉えることができない。ボラティリティ変動の非対称性を考慮したモデルには、Glosten *et al*.［1993］によって提案されたGJRモデル、Nelson［1991］によって提案されたEGARCHモデル、Ding *et al*.［1993］によって提案されたAPGARCHモデルなどがある。

GJRモデルでは、以下のように、ϵ_{t-1}が負であれば1、それ以外では0になるダミー変数D_{t-1}^-を用いることによって、ボラティリティ変動の非対称性を捉える[9]。

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \epsilon_{t-1}^2,\quad \omega > 0,\quad \alpha,\ \beta, \gamma \geq 0\,. \tag{5}$$

このモデルでも、σ_t^2の値が負にならないように、パラメータに非負制約が必要となる。(5) 式は、$\epsilon_{t-1} > 0$であれば、$D_{t-1}^- = 0$なので、

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2\,, \tag{6}$$

7 これは最も簡単なGARCH（1,1）モデルであり、一般的なGARCH (p, q) モデルは次のように表せる。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \epsilon_{t-j}^2\,,$$
$$\omega > 0,\quad \beta_i, \alpha_j \geq 0\ \ (i = 1, 2, ..., p;\ j = 1, 2, ..., q\ ).$$

8 株式市場のボラティリティ変動に非対称性が存在することを最初に指摘したのはBlack［1976］である。株式市場のボラティリティ変動に非対称性が存在する原因については、Christie［1982］やWu［2001］を参照のこと。

9 これは最も簡単なGJR (1, 1) モデルであり、一般的な、GJR (p, q) モデルは次のように表される。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} (\alpha_j + \gamma_j D_{t-j}^-)\, \epsilon_{t-j}^2\,,$$
$$\omega > 0,\quad \beta_i, \alpha_j, \gamma_j \geq 0\ \ (i = 1, 2, ..., p;\ j = 1, 2, ..., q).$$

ここで、D_{t-j}^-はϵ_{t-j}が負であれば1、それ以外では0になるダミー変数。

となり、$\epsilon_{t-1}<0$であれば、$D^{-}_{t-1}=1$なので、

$$\sigma_t^2=\omega+\beta\sigma_{t-1}^2+(\alpha+\gamma)\epsilon_{t-1}^2\,, \tag{7}$$

となる。そこで、$\gamma>0$であれば、予期せず価格が上がった日の翌日よりも予期せず価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる。

Nelson［1991］の提案したEGARCHモデルでは、ボラティリティσ_t^2ではなく、その対数値 $\ln(\sigma_t^2)$の変動を次のように定式化する[10]。

$$\ln(\sigma_t^2)=\omega+\beta\{\ln(\sigma_{t-1}^2)-\omega\}+\theta z_{t-1}+\gamma\{|z_{t-1}|-E(|z_{t-1}|)\}\,. \tag{8}$$

ここで、$E(|z_{t-1}|)$は$|z_{t-1}|$の期待値を表す。このモデルは、$\ln(\sigma_t^2)$を被説明変数としているために、パラメータに非負制約を課す必要がない。また、負の値をとるような変数でも説明変数に加えることができる。そこで、z_{t-1}を説明変数に加えることにより、ボラティリティ変動の非対称性を考慮している。(8)式は、$z_{t-1}>0$であれば、

$$\ln(\sigma_t^2)=\omega+\beta\{\ln(\sigma_{t-1}^2)-\omega\}+(\gamma+\theta)|z_{t-1}|-\gamma E(|z_{t-1}|)\,, \tag{9}$$

となるのに対して、$z_{t-1}<0$であれば、

$$\ln(\sigma_t^2)=\omega+\beta\{\ln(\sigma_{t-1}^2)-\omega\}+(\gamma-\theta)|z_{t-1}|-\gamma E(|z_{t-1}|)\,, \tag{10}$$

となる。そこで、$\theta<0$であれば、予期せず価格が上がった日の翌日よりも予期せず価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる。

ボラティリティ変動の非対称性を表すモデルとしてはこれまでGJR、EGARCHモデルを用いることが多かったが、近年よく用いられるようになってきたモデルに、Ding *et al.*［1993］によって提案されたAPGARCHモデルがある[11]。このモデルは次のように表される[12]。

10 これは最も簡単なEGARCH (1, 0) モデルであり、一般的なEGARCH (p, q) モデルは次のように表される。

$$\ln(\sigma_t^2)=\omega+\sum_{i=1}^{p}\beta_i\{\ln(\sigma_{t-i}^2)-\omega\}+g(z_{t-1})+\sum_{j=1}^{q}\psi_j\, g(z_{t-j-1})\,.$$

ただし、

$$g(z_{t-j-1})=\theta z_{t-j-1}+\gamma\{|z_{t-j-1}|-E(|z_{t-j-1}|)\}\,.$$

11 APGARCHモデルの統計的性質については、Karanasos and Kim［2006］を参照のこと。

12 これは最も簡単なAPGARCH (1, 1) モデルであり、一般的なAPGARCH (p, q) モデルは　次のように表される。

$$\sigma_t^\delta=\omega+\sum_{i=1}^{p}\beta_i\,\sigma_{t-i}^\delta+\sum_{j=1}^{q}\alpha_j(|\epsilon_{t-j}|-\gamma_j\epsilon_{t-j})^\delta\,,$$

$$\omega,\delta>0,\ \alpha_j,\ \beta_i,\geq 0,\ -1<\gamma_j<1\quad(i=1,\dots,p;\,j=1,\dots,q)\,.$$

$$\sigma^{\delta}_t = \omega + \beta\sigma^{\delta}_{t-1} + \alpha(|\epsilon_{t-1}| - \gamma\epsilon_{t-1})^{\delta}, \quad \omega, \delta > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad -1 < \gamma < 1. \tag{11}$$

ARCH、GARCHモデルではσ_t^2、EGARCHモデルでは$\ln(\sigma_t^2)$の変動を定式化していたのに対して、このモデルではσ^{δ}_tの変動を定式化しており、δも未知パラメータとして推定するのが特徴である。(11)式は、$\epsilon_{t-1} > 0$であれば、

$$\sigma^{\delta}_t = \omega + \beta\sigma^{\delta}_{t-1} + \alpha(1-\gamma)^{\delta}|\epsilon_{t-1}|^{\delta}, \tag{12}$$

となり、$\epsilon_{t-1} < 0$であれば、

$$\sigma^{\delta}_t = \omega + \beta\sigma^{\delta}_{t-1} + \alpha(1+\gamma)^{\delta}|\epsilon_{t-1}|^{\delta}, \tag{13}$$

となる。そこで、$\gamma > 0$であれば、予期せず価格が上がった日の翌日よりも予期せず価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる。

　このモデルは、以下のようにほかの多くのARCH型モデルを特殊ケースとして含んでいる[13]。

- $\delta = 2$、$\beta = 0$、$\gamma = 0$：ARCHモデル
- $\delta = 2$、$\gamma = 0$：GARCHモデル
- $\delta = 2$：GJRモデル
- $\delta = 1$、$\gamma = 0$：absolute value GARCHモデル（Taylor［1986］、Schwert［1989, 1990］）

$$\sigma_t = \omega + \beta\sigma_{t-1} + \alpha|\epsilon_{t-1}|. \tag{14}$$

- $\delta = 1$：TGARCH（threshold GARCH）モデル（Zakoian［1994］）

$$\sigma_t = \omega + \beta\sigma_{t-1} + (\alpha^{+}D^{+}_{t-1}|\epsilon_{t-1}| + \alpha^{-}D^{-}_{t-1}|\epsilon_{t-1}|). \tag{15}$$

ここで、D^{+}_{t-1}はϵ_{t-1}が正であれば1、それ以外では0であるダミー変数。D^{-}_{t-1}は、これまでどおり、ϵ_{t-1}が負であれば1、それ以外では0であるダミー変数である。

- $\gamma = 0$：NGARCH（nonlinear GARCH）モデル（Higgins and Bera［1992］）

$$\sigma^{\delta}_t = \omega + \beta\sigma^{\delta}_{t-1} + \alpha|\epsilon_{t-1}|^{\delta}. \tag{16}$$

13　詳細は、Ding *et al*.［1993］Appendix Aを参照のこと。

• $\delta \to 0$、$\gamma = 0$：log-GARCHモデル（Geweke［1986］、Pantula［1986］）

$$\ln(\sigma_t) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}) + \alpha \ln(|\epsilon_{t-1}|) \ . \tag{17}$$

（3）ボラティリティ変動の長期記憶性

ある変数のk次の自己相関係数を$\rho(k)$とすると、

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| < \infty \ , \tag{18}$$

となるとき、この変数は短期記憶（short memory）過程に従うといい、

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| = \infty \ , \tag{19}$$

となるとき、この変数は長期記憶（long memory）過程に従うという。

これまでに説明したARCH型モデルでは、パラメータが定常性を満たす限り、ボラティリティは短期記憶過程に従い、ボラティリティのショックは指数的に減衰する。例えば、GARCHモデルの場合に、0期に起きた1単位のショックはt期には$(\alpha+\beta)^t$になり、ボラティリティの定常性の条件$\alpha+\beta<1$が満たされると、これは時間とともに指数的に減衰する[14]。しかし、ボラティリティの代理変数であるリターンの2乗の自己相関を計測すると、通常、ショックの減衰のスピードはそれよりも遅いことから、ボラティリティは長期記憶過程に従っている可能性がある[15]。このことを考慮に入れて、Bollerslev and Mikkelsen［1996］はEGARCHモデルを次のようなFIEGARCHモデルに拡張している[16]。

$$(1-\beta L)(1-L)^d \{\ln(\sigma_t^2) - \omega\} = g(z_{t-1}) \ . \tag{20}$$

14 EGARCHモデルの定常性の条件は、$|\beta| < 1$である。また、誤差項z_tの分布が左右対称であるとすると、GJR、APGARCHモデルの定常性の条件は、それぞれ$\alpha+\beta+\gamma/2<1$、$\beta+\alpha\{(1-\gamma)^{\delta}+(1+\gamma)^{\delta}\}/2<1$である。詳しくは、渡部［2006］を参照のこと。

15 例えば、白石・高山［1998］の図6-1参照。

16 これは、FIEGARCH $(1, d, 0)$ モデルであり、一般的なFIEGARCH (p, d, q) モデルは次のように表される。

$$(1-\sum_{i=1}^{p} \beta_i L_i)(1-L)^d \{\ln(\sigma_t^2) - \omega\} = g(z_{t-j}) + \sum_{j=1}^{q} \psi_j \, g(z_{t-j-1}) \ .$$

ただし、

$$g(z_{t-j-1}) = \theta z_{t-j-1} + \gamma\{|z_{t-j-1}| - \mathrm{E}(|z_{t-j-1}|)\} \ .$$

ただし、

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma\{\,|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)\,\}\,. \tag{21}$$

ここで、Lはラグオペレータを表し、$L^i x_t = x_{t-i}$ $(i = 0, 1, ...)$である。$(1-L)^d$ は次のように表せる。

$$(1-L)^d = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\cdots(d-k+1)}{k!}(-L)^k\,. \tag{22}$$

$d = 0$ であれば、(20)式はEGARCHモデル(8)になり、$d = 1$ であれば、ボラティリティは単位根を持ち、非定常になる。$|\beta| < 1$であるとすると、$0 < d < 1$ であれば、ボラティリティは長期記憶性を持ち、$d < 0.5$であれば定常、$d \geq 0.5$であれば非定常である。

ボラティリティの長期記憶性を考慮したモデルには、ほかにも、GARCHモデルを拡張した FIGARCHモデル（Baillie *et al.*［1996］）やAPGARCHモデルを拡張したFIAPGARCHモデル（Tse［1998］）があるが、これらのモデルは、$0 < d < 0.5$であってもリターンの分散が無限大になるという問題点があり[17]、また、ボラティリティの非負性を保証するためのパラメータの制約が複雑なので（Baillie *et al.*［1996］、Chung［1999］）、本稿では扱わない。

（4）誤差項の分布

これまで誤差項z_tの分布については何も仮定しなかったが、パラメータを最尤推定する場合には分布を仮定する必要がある。また、VaRに応用する場合には、ボラティリティの定式化だけでなく、z_tの分布も重要になる。ARCH型モデルを推定する場合、誤差項z_tの分布には標準正規分布を用いることが多い。リターンの分布は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることが古くから知られているが（Fama［1965］、Mandelbrot［1963］）、誤差項z_tが正規分布に従っていても、ボラティリティが変動するなら、リターンの尖度は3を上回る[18]。しかし、リターンの尖度の高さがボラティリティの変動だけで説明できるとは限らず、実際、先行研究では、z_t の分布に正規分布よりも尖度の高い分布を当てはめた方が当てはまりが良いとの結果が得られている。z_tの分布として正規分布以外でよく用いられるものに、スチューデントのt分布（Bollerslev［1987］）や一般化誤差分布（generalized error distribution）（Nelson［1991］）があるが、Bollerslev *et al.*［1994］やWatanabe［2000］らは両者の比較を行い、スチューデントのt分布の方が当てはまりが良いことを示している。

17 詳しくは、Schoffer［2003］を参照のこと。
18 証明は、渡部［2000］1.4節を参照のこと。

しかし、スチューデントのt分布は（一般化誤差分布も）尖度の高さは捉えられるが、左右対称であるため、分布の歪みについては捉えることができない。そこで、その後、Lambert and Laurent［2001］、Giot and Laurent［2004］らはFernández and Steel［1998］の提案したskewed-t分布を用いている。分散を1に基準化したskewed-t分布の確率密度関数は以下のように与えられる。

$$f(z_t|\xi,v)=\begin{cases}\dfrac{2}{\xi+\frac{1}{\xi}}\,s\,g(\xi(sz_t+m)|v) & z_t<-\dfrac{m}{s}\ , \\ \dfrac{2}{\xi+\frac{1}{\xi}}\,s\,g((sz_t+m)/\xi|v) & z_t\geq-\dfrac{m}{s}\ . \end{cases} \tag{23}$$

ここで、$g(\cdot|v)$は分散を1に基準化した自由度vのt分布の確率密度関数であり、mとsはそれぞれ以下のように定義される。

$$m=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu-n}{2}\right)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right),\qquad s=\sqrt{\xi^2+\frac{1}{\xi^2}-1-m^2}\ .$$

ただし、$\Gamma(\cdot)$はガンマ関数を表す。この確率密度関数はξとvの2つのパラメータに依存する。ξは分布の歪みを表し、$\xi=1$であれば分布は左右対称、$\xi>1$ $(\xi<1)$であれば分布の右（左）裾が厚い。vは分布の裾の厚さを表し、vが低いほど分布の裾は厚い。

本稿では、z_tの分布として、標準正規分布、t分布、skewed-t分布の3つを用いる。

3. “Realized Volatility”

次に、“Realized Volatility”およびその変動のモデル化について説明する。いま、第t日の日中のn個のリターン・データ$\{r_t, r_{t+1/n},\ldots, r_{t+(n-1)/n}\}$が与えられているものとする。このとき、それらを2乗して足し合わせた、

$$RV_t=\sum_{i=0}^{n-1} r_{t+i/n}^2\ , \tag{24}$$

を第t日の“Realized Volatility”（RV）という。

ここで、資産価格の対数値$\ln P(s)$が伊藤過程

$$d\ln P(s)=\mu(s)\,ds+\sigma(s)\,dW(s)\ , \tag{25}$$

に従っているものとしよう[19]。そうすると、第t日の真のボラティリティは、

$$IV_t = \int_t^{t+1} \sigma(s)^2 ds \ , \qquad (26)$$

と定義され、これは瞬間的なボラティリティ$\sigma(s)^2$を積分したものなので、"Integrated Volatility"（IV）と呼ばれる。

（24）式で定義されるRV_tは、$n \to \infty$とすると、IV_tに確率収束するので、nが十分大きければ、RV_tはIV_tの精度の高い推定量となる。ただし、nを大きくするとRVに含まれる市場のミクロ構造に起因するノイズが大きくなることが知られている。そこで、RVの計算には、ティック・データ（値がつくたびのデータ）ではなく、5分ごとの価格を使うことが多い[20]。そこで、本稿でも、RVでの計算に5分刻みの価格を用いている。また、第t日のボラティリティを$t-1$日の終値からt日の終値までのボラティリティと定義すると、$t-1$日の終値からt日の始値までの間も考慮に入れなければならないが、その間は取引がないので、5分ごとのリターンを計算することができない。また、日本の株式市場では昼休みがあるので、その間も同様である。そこで、それら取引のない時間帯に関しては、本稿では単純に$t-1$日の終値からt日の始値までのリターンとt日の前場の終値から後場の始値までの昼休みのリターンを計算し、それらをそのまま2乗して加えることによりRVを計算した[21]。

RVは長期記憶過程に従っていることが知られているので、その変動の定式化には、ARFIMAモデルを用いることが多い（Andersen *et al.*［2003］、Giot and Laurent［2004］、Koopman *et al*.［2005］、Ubukata and Watanabe［2005］、Watanabe and Yamaguchi［2005］）[22]。本稿では、こうした長期記憶性に加えて、ボラティリティ変動の非対称性を考慮するため、Giot and Laurent［2004］に従い[23]、次のようなARFIMAX (0, d, 1)モデルを用いる[24]。

19 $W(s)$はウイナー過程である。

20 ミクロ構造ノイズを考慮したRVの計算方法や最適な時間間隔の選択方法も提案されている（Aït-Sahalia *et al*.［2005］、Bandi and Russell［2005, 2006］。

21 ほかに、夜間や昼休みのリターンの2乗は除いてRVを計算し（それを$RV_t^{(o)}$と表す）、それに日次リターンの分散と$RV_t^{(0)}$の平均との比率 $\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^2 / \sum_{t=1}^{T} RV_t^{(o)}$を掛けるという方法や、$RV_t$を$RV_t^{(o)}$、夜間のリターンの2乗、昼休みのリターンの2乗の加重平均とし、最適なウエイトを求めるという方法もある。これらの方法については、Hansen and Lunde［2005a, b］を参照のこと。これらの比率やウエイトはサンプル期間によって変わるため、以下で行っているout-of-sampleのボラティリティ予測やVaRの計算ではこれらの方法は扱いにくい。そこで、本稿ではRVの計算にこれらの方法は用いなかった。

22 そのほかのモデルには、HAR（Heterogeneous Autoregressive）モデル（Corsi［2004］）やUC（unobserved component）モデル（Barndorff-Nielsen and Shephard［2002］）などがある。

23 正確にいうと、Giot and Laurent［2004］は、

$$(1-L)^d \{\ln(RV_t) - \mu_0 - \mu_1 R_{t-1} - \mu_2 D_{t-1}^{-} R_{t-1}\} = (1+\theta L) u_t, \ u_t \sim \text{i.i.d.}, N(0, \sigma_u^2) \ ,$$

と定式化しているが、（27）式は本質的にこの式と変わらない。ただし、（27）式を用いた方が、非対称性の有無を調べるのにμ_2の推定値だけで見ればよいので、便利である。

24 次節で説明する最初の1,000個の標本を使って、SICによってARFIMAX (p, d, q)モデルの次数選択を行った結果、$p=0$、$q=1$が選択された。

$$(1-L)^d\{\ln(RV_t)-\mu_0-\mu_1|R_{t-1}|-\mu_2D_{t-1}^-|R_{t-1}|\}=(1+\theta L)u_t,\ \ u_t\sim\text{i.i.d.},N(0,\sigma_u^2). \tag{27}$$

ここで、μ_0、μ_1、μ_2、θは未知パラメータである。また、D_{t-1}^-は$R_{t-1}\geq 0$であれば0、$R_{t-1}<0$であれば1となるダミー変数である。そこで、$\ln(RV_t)$のR_{t-1}を条件とする期待値は、

$$E[\ln(RV_t)|R_{t-1}]=\begin{cases}\mu_0+\mu_1|R_{t-1}| & R_{t-1}\geq 0\ ,\\ \mu_0+(\mu_1+\mu_2)|R_{t-1}| & R_{t-1}<0\ ,\end{cases} \tag{28}$$

となる。そこで、$\mu_2>0$であれば、価格が上がった日の翌日よりも価格が下がった日の翌日の方がよりRVが上昇する。以下、(27)式をRV-ARFIMAXモデルと呼ぶ。

4．データと各モデルの推定結果

本稿の分析に用いた日次リターンは2000年1月4日から2005年12月19日までの日経平均（日経225）株価指数の日次変化率（%）である。これらは各営業日の終値の対数階差を100倍することにより算出した。

RVの計算は2000年1月4日から2005年12月19日までの日経平均の5分ごとの価格を用いて行った[25]。われわれの利用したデータベースには、前場は9:01から11:00（もしくは11:00過ぎ）まで、後場は12:31から15:00（もしくは15:00過ぎ）までの1分ごとの日経平均の価格が記録されており[26]、その中から前場については、9:01、9:05、9:10、. . . 、10:55の価格と前場の終値を、後場については12:31、12:35、12:40、. . . 、14:55の価格と後場の終値を5分ごとの価格として抽出した。大納会、大発会は前場しか取引がないので、同様に前場の価格だけ抽出した。これらの5分ごとの価格の対数階差を100倍することにより、5分ごとのリターンを計算し、それらの2乗を足し合わせることによりRVを計算した。前日の後場の終値から次の日の前場の最初の9:01までの夜間のリターンや前場の終値から後場の最初の12:31の間の昼休みのリターンは5分間のリターンではないが、既に述べたように、本稿ではそのまま2乗して加えた。

表1(a)に2000年1月4日から2005年12月19日までのすべての標本を使った場合の日経平均日次変化率の基本統計量が計算されている。平均は有意に0から乖離していないので、以後、0であるものとして分析を行う。LB(10)は1次から10次までの自己相関がすべて0であるという帰無仮説を検定するためのLjung and Box［1978］

25 これらは東京都立大学COE プログラム「金融市場のミクロ構造と制度設計」で購入したデータと日本銀行金融研究所で購入したデータ（いずれもNEEDS-TICKデータ）とを合わせて用いた。

26 東京証券取引所の取引は前場は11:00まで、後場は15:00までであるが、NEEDS-TICKデータでは実際に取引があった時刻ではなく日経平均が算出された時刻が入力されているため、11:00や15:00を越えることがある。

表1　日経平均日次変化率とRVの基本統計量（サンプル期間：2000年1月4日～2005年12月19日、サンプル数：1,468）

（a）日経平均日次変化率

平均	標準偏差	最大値	最小値	歪度	尖度	JB	LB（10）	
							変化率	変化率2乗
–0.014	1.430	7.222	–7.234	–0.131	4.727	186.55	6.03	60.63
（0.037）				（0.064）	（0.128）			

備考：1）括弧内の数値は標準誤差。
2）JB は正規性を検定するための Jarque-Bera 統計量で、臨界値は4.61（10%）、5.99（5%）、9.21（1%）。
3）LB（10）は1次から10次までの自己相関がすべて0であるという帰無仮説を検定するための Ljung-Box統計量で、Diebold［1988］の方法により分散不均一性を調整している。LB（10)の臨界値は15.99（10%）、18.31（5%）、23.21（1%）。

（b）日経平均RV

	平均	標準偏差	最大値	最小値	LB（10）
RV	1.507	1.215	20.838	0.082	951.42
	（0.032）				
ln（RV）	0.156	0.742	3.037	–2.506	2,599.51
	（0.019）				

備考：1）括弧内の数値は標準誤差。
2）LB(10）は1次から10次までの自己相関がすべて0であるという帰無仮説を検定するための Ljung-Box統計量で、Diebold［1988］の方法により分散不均一性を調整している。LB(10)の臨界値は15.99（10%）、18.31（5%）、23.21（1%）。

統計量であり、分散不均一性がある場合にこの統計量をそのまま使うと帰無仮説を過剰に棄却してしまうので、Diebold［1988］の方法により分散不均一性を調整している[27]。この統計量によると、日経平均日次変化率では有意水準10%でも帰無仮説は受容される。そこで、以後、自己相関はないものとして分析を行う。平均0で自己相関がないということは、リターンの式(1)において、$E\,(R_t|\boldsymbol{I}_{t-1}) = 0$ということである。それに対して、日経平均日次変化率の2乗では有意水準1%でも帰無仮説は棄却される。変化率の2乗$R_t^2\,(=\sigma_t^2 z_t^2)$はボラティリティ$\sigma_t^2$の代理変数であると考えられるので、このことはボラティリティに有意な自己相関があることを示している。これは2節(1)で説明したボラティリティ・クラスタリングと呼ばれる現象と整合的である。歪度は有意水準5%では0から有意に乖離しているが、有意水準1%では有意でない。これに対して、尖度は有意水準1%でも3を有意に超えている。このことは日経平均日次変化率の分布の裾が正規分布よりも厚いことを示している。2節(4)で述べたように、リターンの分布の裾が厚いことは、よく知られた事

27 渡部［2000］1.5.1節参照のこと。

実である。JBは歪度と尖度を合わせて正規性の検定を行うJarque and Bera［1987］統計量であり、有意水準1%でも正規性を棄却する。

表1(b)にはRVおよびその対数値の基本統計量が計算されている。長期記憶過程に従う変数の場合、JB統計量は過剰に正規性を棄却してしまうので（Thomakos and Wang［2003］）、ここではJB統計量および歪度、尖度は計算していない[28]。LB(10）の値はRVが951.42、その対数値が2,599.51といずれも高く、単に自己相関がないという帰無仮説が棄却されるだけでなく、非常に高い自己相関を持っていることがわかる。これは、RVが長期記憶過程に従っているという先行研究の結果と整合的である。

本稿では、ボラティリティの予測およびVaRの計算については、サンプル期間外（out-of-sample）の1期先のみを考え、以下のように行う。日経平均日次変化率、RVともサンプル数は1,468であり、このうち、まず、最初の1期から1,000期までの日経平均日次変化率とRVを使って各ARCH型モデルとRV-ARFIMAXモデルのパラメータを推定し、そのもとで1,001期のボラティリティの予測値とVaRを計算する。次に、2期から1,001期までの日経平均日次変化率を使って各モデルのパラメータを推定し、そのもとで1,002期のボラティリティの予測値とVaRを計算する。以上を繰り返し、最後に468期から1,467期までの日経平均日次変化率を使って各モデルのパラメータを推定し、そのもとで1,468期のボラティリティの予測値とVaRを計算する。これによって得られた1,001期から1,468期までのボラティリティの予測値とVaRを使ってモデルの比較を行う。

表2には、最初の1,000個のデータを使った各モデルの推定結果がまとめられている。各モデルのパラメータの推定には最尤法を用いた。詳しくは、補論を参照のこと。表2の結果からわかることは以下のとおりである。

(1) GJRモデルのγの推定値が統計的に有意な正の値、EGARCHモデルおよびFIEGARCHモデルのθの推定値が有意な負の値であることから、日経平均でも価格が上がった日の翌日よりも価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があることがわかる。ただし、APGARCHモデルだけはボラティリティ変動の非対称性を表すパラメータγが有意でない[29]。

(2) APGARCHモデルのδは標準誤差が大きく、$\delta=1$からも$\delta=2$からも有意に乖離しない。

(3) FIEGARCHモデルのdの推定値は、誤差項を正規分布にした場合以外、有意な正の値が得られており、このことはボラティリティに長期記憶性があることを示唆している。また、dの推定値は0.5を有意に下回っていないので、ボラティリティが定常かどうかはわからない。

28 JB統計量は独立で同一な系列を仮定しているので、厳密にいうと、長期記憶系列でなくても、独立で同一でなければ、漸近分布は自由度2のカイ2乗分布にならない。

29 APGARCHモデルのδは標準誤差が大きく、標本期間によって推定値が大きく変動する。そこで、δを未知パラメータとすることにより、γの標準誤差も高くなり、ボラティリティ変動の非対称性が有意に観測されなかったものと思われる。

表2　ARCH 型モデルの推定結果（サンプル期間：2000年1月4日～2004年1月26日、サンプル数：1,000）

（a）GARCH

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2,\quad \omega > 0,\ \beta, \alpha \geq 0.$$

	正規分布	t 分布	skewed-t 分布
ω	0.139	0.119	0.119
	(0.047)	(0.050)	(0.050)
β	0.890	0.903	0.903
	(0.025)	(0.027)	(0.027)
α	0.056	0.049	0.049
	(0.016)	(0.016)	(0.016)
υ		12.123	12.231
		(3.913)	(4.011)
ξ			0.987
			(0.045)
対数尤度	–1,868.71	–1,860.81	–1,860.77

（b）GJR

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \epsilon_{t-1}^2,\quad \omega > 0,\ \beta, \alpha, \gamma \geq 0.$$

	正規分布	t 分布	skewed-t 分布
ω	0.134	0.110	0.109
	(0.043)	(0.044)	(0.043)
β	0.890	0.906	0.906
	(0.024)	(0.025)	(0.026)
α	0.029	0.019	0.019
	(0.016)	(0.015)	(0.016)
γ	0.054	0.060	0.060
	(0.026)	(0.026)	(0.026)
υ		12.035	12.159
		(3.854)	(3.988)
ξ			0.983
			(0.045)
対数尤度	–1,866.28	–1,858.01	–1,857.94

（c）EGARCH

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta\{\ln(\sigma_{t-1}^2) - \omega\} + \theta z_{t-1} + \gamma\{|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|\}.$$

	正規分布	t分布	skewed-t分布
ω	0.896	0.834	0.832
	(0.083)	(0.093)	(0.093)
β	0.944	0.955	0.955
	(0.018)	(0.019)	(0.019)
θ	–0.052	–0.058	–0.058
	(0.020)	(0.021)	(0.021)
γ	0.116	0.091	0.091
	(0.034)	(0.035)	(0.034)
υ		11.409	11.473
		(3.450)	(3.487)
ξ			0.990
			(0.045)
対数尤度	–1,867.15	–1,858.53	–1,858.50

（d）APGARCH

$$\sigma_t^\delta = \omega + \beta\sigma_{t-1}^\delta + \alpha(|\epsilon_{t-1}| - \gamma\epsilon_{t-1})^\delta,\quad \delta, \omega > 0,\ \beta, \alpha \geq 0,\ -1 < \gamma < 1.$$

	正規分布	t分布	skewed-t分布
ω	0.117	0.087	0.088
	(0.053)	(0.044)	(0.042)
β	0.892	0.911	0.911
	(0.025)	(0.027)	(0.026)
α	0.056	0.047	0.047
	(0.019)	(0.018)	(0.018)
γ	0.309	0.478	0.470
	(0.205)	(0.338)	(0.332)
δ	1.716	1.532	1.551
	(0.701)	(0.639)	(0.631)
υ		11.777	11.892
		(3.653)	(3.728)
ξ			0.985
			(0.045)
対数尤度	–1,866.21	–1,857.81	–1,857.75

備考：括弧内の数値は標準誤差。

表2 （続き）

（e）FIEGARCH

$$(1-\beta L)(1-L)^d\{\ln(\sigma_t^2)-\omega\}$$
$$=\theta z_{t-1}+\gamma\{|z_{t-1}|-E|z_{t-1}|\}\ .$$

	正規分布	t分布	skewed-t分布
ω	0.889	0.690	0.687
	(0.136)	(0.197)	(0.200)
β	0.905	0.889	0.888
	(0.041)	(0.062)	(0.062)
θ	–0.035	–0.038	–0.038
	(0.018)	(0.017)	(0.016)
γ	0.098	0.068	0.068
	(0.029)	(0.028)	(0.028)
d	0.243	0.342	0.342
	(0.151)	(0.172)	(0.173)
υ		11.345	11.429
		(3.311)	(3.441)
ξ			0.988
			(0.045)
対数尤度	–1,865.86	–1,856.79	–1,856.76

備考：括弧内の数値は標準誤差。

(4) 帰無仮説を誤差項の分布が標準正規分布である、対立仮説をt分布であるとして尤度比検定を行うと、すべてのモデルで帰無仮説が棄却されるのに対して、帰無仮説を誤差項の分布がt分布である、対立仮説をskewed-t分布であるとして尤度比検定を行うと、すべてのモデルで帰無仮説が受容される。

表3には、同じく最初の1,000個のデータを使ったRV-ARFIMAXモデルの推定結果が示されている。(a)に示されているdの推定値は有意に0を上回っているので、RVは長期記憶過程に従っていることがわかる。また、dの推定値は0.5を有意に下回っていないので、RVが定常かどうかはわからない。この結果は、FIEGARCHモデルのdの推定結果と整合的である。μ_1が有意でないのに対してμ_2の推定値が有意な正の値になっていることも注目に値する。これは前日に価格が上がった場合にはRVには影響を与えず、下がった場合だけ影響を与え、下がれば下がるほどRVが上昇することを示している。(b)にはRV-ARFIMAXモデルの残差の基本統計量が計算されている。LB(10)統計量の値から、有意な自己相関は残っていないことがわかる。分布に関しては、歪度が有意な正の値であるとともに、尖度も有意に3を上回っている。JB統計量からも正規性は棄却される。したがって、RV-ARFIMAXモデル(27)式の誤差項 u_t は正規分布に従っていない可能性が高いが、本稿では、先行研究に従い、以下それを正規分布で近似して分析を行う。

表3　RV-ARFIMAXモデルの推定結果（サンプル期間：2000年1月4日～2004年1月26日、サンプル数：1,000）

（a）RV-ARFIMAXモデルのパラメータの推定結果

$$(1-L)^d\{\ln(RV_t)-\mu_0-\mu_1|R_{t-1}|-\mu_2 D^-_{t-1}|R_{t-1}|\}=(1+\theta L)u_t\ ,\ u_t\sim\text{i.i.d.}N(0,\sigma_u^2)\,.$$

d	μ_0	μ_1	μ_2	θ	σ_u^2
0.473	0.292	0.001	0.050	–0.188	0.193
(0.055)	(0.174)	(0.019)	(0.017)	(0.069)	(0.010)

備考：括弧内の数値は標準誤差。

（b）残差 $\hat{u}_t$ の基本統計量

平均	標準偏差	最大値	最小値	歪度	尖度	JB	LB（10）
0.004	0.440	2.186	–1.272	0.291	3.823	42.32	8.85
(0.014)				(0.077)	(0.155)		

備考：1）括弧内の数値は標準誤差。
　　　2）JBは正規性を検定するためのJarque-Bera統計量で、臨界値は4.61（10%）、5.99（5%）、9.21（1%）。
　　　3）LB（10）は1次から10次までの自己相関がすべて0であるという帰無仮説を検定するためのLjung-Box統計量で、Diebold［1988］の方法により分散不均一性を調整している。LB（10）の臨界値は15.99（10%）、18.31（5%）、23.21（1%）。

5．ボラティリティ予測

本節では、ボラティリティ予測のパフォーマンス比較を行う。ARCH型モデルでは、t期のボラティリティを$t-1$期に値のわかる変数だけの（誤差項を含まないという意味で）確定的な関数として表すので、パラメータの値と$t-1$期までの情報が与えられればt期のボラティリティの予測値は簡単に計算できる。それに対して、RV-ARFIMAXモデル（27）式は誤差項u_tを含み、かつRV_tではなくその対数値の変動を定式化しているので、それを用いてボラティリティの予測値を計算するにはu_tの分布を仮定する必要がある。前節の結果からu_tは正規分布に従っていない可能性が高いが、本稿では、Giot and Laurent［2003］、Koopman *et al*.［2005］等の先行研究に従い、正規分布を仮定する。そうすると、対数正規分布の性質より、$t-1$期におけるt期のボラティリティの予測値は$t-1$期におけるt期のRVの予測値$\widehat{RV}_{t|t-1}$として次のように計算できる。

$$\widehat{RV}_{t|t-1}$$
$$= \exp\left[\mu_0 + (\mu_1+\mu_2 D^-_{t-1})\,|R_{t-1}| - \sum_{k=1}^{t-1}\frac{d(d-1)\cdots(d-k+1)}{k}(-1)^k\right.$$
$$\left.\left\{1\mathrm{n}(RV_{t-k}) - \mu_0 - (\mu_1+\mu_2 D^-_{t-k-1})\,|R_{t-k-1}|\right\} + \theta\hat{u}_{t-1} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2_u\right]. \quad (29)$$

ここで、$\hat{u}_t$は(27)式の残差、$\hat{\sigma}^2_u$は残差分散を表す[30]。

以上のように計算されたボラティリティの予測値のパフォーマンス比較を行うためには、ボラティリティの真の値が必要であるが、ボラティリティの真の値は観測できないので、その代理変数としてこれまでよく用いられていたのは、R_t（もしくはそれから平均と自己相関を除去した$\hat{\epsilon}_t$）の2乗であった（渡部［2000］2.3.3節）。本稿のように、(1)式において$E(R_t|\boldsymbol{I}_{t-1})=0$と仮定すると、$R^2_t=\epsilon^2_t=\sigma^2_t z^2_t$となり、$R^2_t$（もしくは$\hat{\epsilon}^2_t$）はボラティリティ$\sigma^2_t$だけでなく、$z^2_t$にも依存する。Andersen and Bollerslev［1998］は、このz^2_tの変動が大きいため、真のボラティリティの代理変数としてR^2_t（もしくは$\hat{\epsilon}^2_t$）を用いると、ボラティリティの予測パフォーマンスを正しく評価できないことを指摘している。彼らは、R^2_t（もしくは$\hat{\epsilon}^2_t$）の代わりにRVを用いることを提案しており、RVを用いるとARCH型モデルの予測パフォーマンスが上昇することを示している。また、Hansen and Lunde［2006］は、真のボラティリティの代理変数としてR^2_t（もしくは$\hat{\epsilon}^2_t$）を用いると、ボラティリティの予測パフォーマンスが悪いモデルを良いモデルとして選択してしまう可能性があることを示しており、彼らもR^2_t（もしくは$\hat{\epsilon}^2_t$）ではなく、RVを用いることを提案している。そこで、本稿でも真のボラティリティの代理変数にRVを用いてボラティリティの予測パフォーマンスの比較を行う。

ボラティリティ予測のパフォーマンスを測る指標には、先行研究に従い、以下のRMSE（root mean squared error）、RMSPE（root mean squared parcentage error）、MAE（mean absolute error）、MAPE（mean absolute parcentage error）を用いる。

30 Xの対数値$Y=\ln(X)$が正規分布に従う場合に、Xは対数正規分布に従うという。Yが平均μ、分散σ^2の正規分布に従うとすると、$X=\exp(Y)$の期待値は次のように表せる。

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dy=\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(y-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right]dy.$$

ここで、$(1/\sqrt{2\pi\sigma^2})\exp[-(y-\mu-\sigma^2)^2/(2\sigma^2)]$は平均$\mu+\sigma^2$、分散$\sigma^2$の正規分布の確率密度関数なので、最後の積分は1である。したがって、

$$E[X]=\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right).$$

この式に、

$$\mu \approx \mu_0 + (\mu_1+\mu_2 D^-_{t-1})\,|R_{t-1}| + \sum_{k=1}^{t-1}\frac{d(d-1)\cdots(d-k+1)}{k}(-1)^k$$
$$\left\{1\mathrm{n}\,RV_{t-k} - \mu_0 - (\mu_1+\mu_2 D^-_{t-1})\,|R_{t-k-1}|\right\} + \theta\hat{u}_{t-1},$$
$$\sigma^2 \approx \hat{\sigma}^2_u,$$

を代入すると、(29)式が得られる。

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{468}\sum_{t=1,001}^{1,468}\left(RV_t - \hat{\sigma}^2_{t|t-1}\right)^2} \quad ,$$

$$\mathrm{RMSPE} = \sqrt{\frac{1}{468}\sum_{t=1,001}^{1,468}\left(\frac{RV_t - \hat{\sigma}^2_{t|t-1}}{RV_t}\right)^2} \quad ,$$

$$\mathrm{MAE} = \frac{1}{468}\sum_{t=1,001}^{1,468}\left|RV_t - \hat{\sigma}^2_{t|t-1}\right| \quad ,$$

$$\mathrm{MAPE} = \frac{1}{468}\sum_{t=1,001}^{1,468}\left|\frac{RV_t - \hat{\sigma}^2_{t|t-1}}{RV_t}\right| \quad .$$

ここで、$\hat{\sigma}^2_{t|t-1}$は各モデルによる$t-1$期におけるt期のボラティリティσ^2_tの予測値を表し、RV-ARFIMAXモデルの$\hat{\sigma}^2_{t|t-1}$は(29)式で計算される$\widehat{RV}_{t|t-1}$とする。

これらの指標をすべてのモデルについて計算したものが表4(a)である。RV-ARFIMAXモデルですべての指標が最小になっており、このことは、RVを真のボラティリティの代理変数とするボラティリティ予測では、日次リターンを用いてARCH 型モデルを推定するよりも、直接RVを用いてRV-ARFIMAXモデルを推定した方がパフォーマンスが良いことを示している。これは先行研究の結果と整合的である。ARCH型モデルの中では、ボラティリティ変動の非対称性を考慮しないGARCHモデルが最もパフォーマンスが悪く、ボラティリティ変動の非対称性と長期記憶性を両方考慮したFIEGARCHモデルが最もパフォーマンスが良い。GJR、EGARCH、APGARCHモデルの間では差は小さいが、GJRモデルが最もパフォーマンスが悪く、EGARCHモデルが最もパフォーマンスが良い。リターンの分布によるパフォーマンスの違いはほとんど観測されない。

表4(b)では、真のボラティリティの代理変数であるRV_tを被説明変数、各モデルによるボラティリティの1期先予測値$\hat{\sigma}^2_{t|t-1}$を説明変数とした次のような回帰を行っている。

$$RV_t = a + b\,\hat{\sigma}^2_{t|t-1} + \eta_t \ . \tag{30}$$

ここで、η_tは誤差項を表す。このように、実現値を被説明変数、予測値を説明変数とする回帰は、Mincer-Zarnowitz［1969］回帰と呼ばれ、a = 0、b = 1であれば、この予測値は不偏性を満たす。表4(b)に示されているF値は帰無仮説H_0: a = 0、b = 1を検定するためのもので、それによると、帰無仮説は、RV-ARFIMAXモデルだけが有意水準5%で棄却されないが、それ以外のモデルではすべて有意水準1%でも棄却される。このことから、日次リターンにARCH型モデルを当てはめてボラティリティを予測すると、有意なバイアスが生じることがわかる。しかし、これはあくまでもRVに対するバイアスであり、RV自体が真のボラティリティに対してバイアスを持っている可能性もあるので、真のボラティリティに対してバイアスを持ってい

表4　ボラティリティ予測

(a) RMSE, RMSPE, MAE, MAPE

	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE
RV-ARFIMAX	0.500	0.860	0.354	0.589
GARCH-*n*	0.754	1.680	0.619	1.213
GARCH-*t*	0.751	1.657	0.612	1.192
GARCH-*st*	0.750	1.654	0.612	1.191
GJR-*n*	0.765	1.605	0.608	1.153
GJR-*t*	0.761	1.605	0.605	1.150
GJR-*st*	0.759	1.602	0.604	1.149
EGARCH-*n*	0.733	1.523	0.584	1.095
EGARCH-*t*	0.716	1.482	0.567	1.060
EGARCH-*st*	0.735	1.536	0.586	1.103
APGARCH-*n*	0.752	1.560	0.596	1.123
APGARCH-*t*	0.745	1.557	0.592	1.116
APGARCH-*st*	0.745	1.557	0.591	1.117
FIEGARCH-*n*	0.670	1.328	0.515	0.945
FIEGARCH-*t*	0.676	1.367	0.524	0.971
FIEGARCH-*st*	0.675	1.364	0.523	0.969

備考：GARCH、GJR、EGARCH、APGARCH、FIEGARCHの後の-*n*, -*t*, -*st*は、(2)式のz_tの分布に、それぞれ、標準正規分布、分散を1に基準化した*t*分布、skewed-*t*分布を仮定していることを表している。

(b) Mincer-Zarnowitz 回帰

$$RV_t = a + b\hat{\sigma}^2_{t|t-1} + \eta_t \, .$$

	a	b	F値	R^2
RV-ARFIMAX	0.102	0.862	2.90	0.319
	(0.053)	(0.058)		
GARCH-*n*	0.111	0.540	299.01	0.315
	(0.053)	(0.037)		
GARCH-*t*	0.134	0.529	284.98	0.301
	(0.053)	(0.037)		
GARCH-*st*	0.132	0.530	283.63	0.302
	(0.053)	(0.037)		
GJR-*n*	0.178	0.496	331.31	0.334
	(0.047)	(0.032)		
GJR-*t*	0.184	0.495	316.54	0.324
	(0.048)	(0.033)		
GJR-*st*	0.182	0.497	314.51	0.325
	(0.048)	(0.033)		
EGARCH-*n*	0.170	0.516	284.00	0.332
	(0.048)	(0.034)		
EGARCH-*t*	0.185	0.516	249.21	0.318
	(0.048)	(0.035)		
EGARCH-*st*	0.175	0.512	276.01	0.319
	(0.049)	(0.035)		
APGARCH-*n*	0.184	0.498	311.94	0.333
	(0.047)	(0.033)		
APGARCH-*t*	0.188	0.500	292.69	0.322
	(0.048)	(0.034)		
APGARCH-*st*	0.187	0.501	292.46	0.323
	(0.048)	(0.034)		
FIEGARCH-*n*	0.207	0.529	195.33	0.327
	(0.046)	(0.035)		
FIEGARCH-*t*	0.204	0.527	197.25	0.318
	(0.047)	(0.036)		
FIEGARCH-*st*	0.203	0.529	196.08	0.318
	(0.047)	(0.036)		

備考：GARCH、GJR、EGARCH、APGARCH、FIEGARCHの後の-*n*, -*t*, -*st*は、(2)式のz_tの分布に、それぞれ、標準正規分布、分散を1に基準化した*t*分布、skewed-*t*分布を仮定していることを表している。括弧内の数値は標準誤差。F値はボラティリティの予測値の不偏性（H_0：$a = b = 1$）を検定するためのもので、臨界値は2.31(10%)、3.01(5%)、4.65(1%)。

るかどうかはこの結果だけからは判断できない。表4（a）のRMSE、RMSPE、MAE、MAPEによる比較では、RV-ARFIMAXモデルが最もパフォーマンスが良かったが、表4（b）には回帰式（30）の決定係数R^2が計算されており、それによると、必ずしもRV-ARFIMAXが最もフィットが良いわけではなく、いくつかのARCH型モデルのR^2はRV-ARFIMAXモデルのそれを上回っている。これは、Mincer-Zarnowitz回帰によって$a + b\hat{\sigma}^2_{t|t-1}$といった形でバイアスを修正すると、ARCH 型モデルでもRVの変動をRV-ARFIMAXモデルと同程度かそれ以上に説明できるようになることを示している。Koopman *et al*.［2005］でも同様の結果が得られている[31]。

RVの対数値$\ln(RV_t)$の予測に関しても同様な分析を行ったが、結果は定性的にはほとんど変わらなかったので、省略する[32]。

6．バリュー・アット・リスク

次に、バリュー・アット・リスク（VaR）による比較を行う。ARCH型モデルの場合、$t-1$期におけるt期のボラティリティの予測値$\hat{\sigma}^2_{t|t-1}$は簡単に計算できる。そこで、基準化した誤差項$z_t\ (=\epsilon_t/\sigma_t)$の累積分布関数$F(z_t)$が与えられると、確率$\alpha$に対応するVaRを求めるには、ロング・ポジションの場合、

$$F\left(\frac{\mathrm{VaR}_t^{(l)}(\alpha)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{t|t-1}}}\right)=\alpha\quad,$$

となる$\mathrm{VaR}_t^{(l)}(\alpha)$を求めればよく、ショート・ポジションの場合には、

$$F\left(\frac{\mathrm{VaR}_t^{(s)}(\alpha)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{t|t-1}}}\right)=1-\alpha\quad,$$

となる$\mathrm{VaR}_t^{(s)}(\alpha)$を求めればよい[33]。

これに対して、RV-ARFIMAXモデルを用いてVaRを計算する場合には工夫が必要である。本稿では、Giot and Laurent［2004］に従い、以下のようにVaRを計算する。まず、（27）式の誤差項u_tの分布に正規分布を仮定することにより、（29）式よりRVの予測値$RV_{t|t-1}$を計算する。次に、$v_t = \ln(\sigma_t^2) - \ln(\widehat{RV}_{t|t-1})$と定義し、平均0、分散1の確率変数$\omega_t$を使って$\exp(v_t/2)z_t = \sigma\omega_t$と表すことにより、$R_t$を次のように表す。

31 Koopman *et al*.［2005］では、GARCHモデルのR^2はARFIMA-RVモデルを下回っているものの、GARCHモデル（4）式の説明変数にRV_{t-1}を加えたGARCH-RVモデルのR^2はARFIMA-RVモデルを上回っている。

32 ただし、Mincer-Zarnowitz回帰の決定係数R^2は、RVの予測では、いくつかのARCH 型モデルがRV-ARFIMAXモデルを上回ったのに対して、RVの対数値の予測では、RV-ARFIMAXモデルが最大になった。

33 skewed-*t* 分布の累積分布関数については、Lambert and Laurent［2001］を参照のこと。

$$R_t = \sigma_t z_t = \sqrt{\widehat{RV}_{t|t-1}}\ \exp(v_t/2)\, z_t = \sqrt{\sigma^2 \widehat{RV}_{t|t-1}}\,\omega_t \ . \tag{31}$$

Giot and Laurent［2004］は、このω_tの分布として標準正規分布と分散を1に基準化したskewed-t分布を用いているが、本稿ではさらに分散を1に基準化したt分布も用いる。ω_tの累積分布関数$F(\omega_t)$が与えられれば、ロング・ポジションでは、

$$F\left(\frac{\mathrm{VaR}_t^{(l)}(\alpha)}{\sqrt{\sigma^2 \widehat{RV}_{t|t-1}}}\right) = \alpha\ ,$$

となる$\mathrm{VaR}_t^{(l)}(\alpha)$を求めればよく、ショート・ポジションでは、

$$F\left(\frac{\mathrm{VaR}_t^{(s)}(\alpha)}{\sqrt{\sigma^2 \widehat{RV}_{t|t-1}}}\right) = 1-\alpha\ ,$$

となる$\mathrm{VaR}_t^{(s)}(\alpha)$を求めればよい。ただし、$\sigma$および$t$分布の自由度$v$、skewed-$t$ 分布のvと ξ には最尤推定値を用いる。

表5には、σと、t分布の自由度v、skewed-t分布のv、ξの最尤推定値が示されている。ω_tに正規分布を当てはめた場合とt分布を当てはめた場合の対数尤度より、t分布の方がフィットが良いことがわかる。それに対して、skewed-t分布のξが1から有意に乖離していないことと、t分布とskewed-t分布の対数尤度から、ω_tの分布には有意な歪みはないことがわかる。

以上の方法で、各モデルからロング・ポジション、ショート・ポジションそれぞれで、10%、5%、1%に対応するVaRの値を計算した。表6（a）のロング（ショート）ポジションには、リターンの実現値がVaRの値を下（上）回った回数をサンプル数

表5　ω_tの分布の推定結果

$$R_t = \sqrt{\sigma^2 RV_{t|t-1}}\,\omega_t\ .$$

ω_t ～ i.i.d. N(0, 1)
ω_t ～ i.i.d. standardized-t (v)
ω_t ～ i.i.d. standardized skewed-t (v, ξ)

	正規分布	t分布	skewed-t分布
σ	1.186	1.186	1.185
	(0.027)	(0.030)	(0.030)
v		15.120	15.466
		(5.964)	(6.283)
ξ			0.980
			(0.045)
対数尤度	–1,590.47	–1,585.43	–1,585.33

備考：括弧内の数値は標準誤差。

468で割ったVaR超過比率（%）が示されている。この比率を用いて、Kupiec［1995］の尤度比検定を行った。これは、あるVaRの値のもとでの真の超過比率をfとしたときに、帰無仮説$H_0 : f = \alpha$を対立仮説$H_1 : f \neq \alpha$のもとで尤度比検定するものである。T'個のリターンの中でN個がロング（ショート）ポジションのVaRの値を下（上）回っていたとすると、尤度比検定統計量は、

$$LR = 2\left\{\ln((N/T')^N(1-N/T')^{T'-N}) - \ln(\alpha^N(1-\alpha)^{T'-N})\right\}, \qquad (32)$$

となり、帰無仮説が正しいとすると、これは漸近的に自由度1のカイ2乗分布に従う[34]。

表6（b）にはこの尤度比検定統計量のp値が示されており、例えば、それが0.05を超えていれば、有意水準5%で帰無仮説は受容される。GARCH、GJR、EGARCH、APGARCHモデルでは誤差項z_tの分布が標準正規分布、t分布、skewed-t分布いずれの場合も、p値が0.05を下回る箇所があり、VaRが正しく計算されていないことがわかる。RV-ARFIMAXモデルでも、同様に、（31）式のω_tの分布がいずれの場合も、p値が0.05を下回る箇所がある。それに対して、FIEGARCHモデルでは、z_tの分布を標準正規分布もしくはt分布にすると、ロング・ポジション、ショート・ポジション、またすべての確率で、p値が0.05を超えている。FIEGARCHモデルでも、ω_tの分布をskewed-t分布にすると、p値が0.05を下回る箇所が出てくるが、これは誤差項z_tの分布に有意な歪みがないにもかかわらず、歪みを表すパラメータξを導入して推定しているためであると考えられる。

Engle and Manganelli［2004］はVaRが正しく計算されているかどうかを検定するための動的分位（dynamic quantile）検定と呼ばれる別の方法を提案している。$I(\cdot)$を括弧の中の条件が満たされれば1、そうでなければ0となる指示関数（indicator function）とし、$\mathrm{Hit}_t^{(l)}(\alpha) = I(R_t < \mathrm{VaR}_t^{(l)}(\alpha)) - \alpha$、$\mathrm{Hit}_t^{(s)}(\alpha) = I(R_t > \mathrm{VaR}_t^{(s)}(\alpha)) - \alpha$と定義する。このとき、ロング・ポジションのVaRが正しく計算されているなら、次の2つの性質が満たされるはずである。

- $A1: E(\mathrm{Hit}_t^{(l)}(\alpha)) = 0$
- $A2: \mathrm{Hit}_t^{(l)}(\alpha)$が $t-1$期の情報集合と無相関

ショート・ポジションのVaRについても同様である。Engle and Manganelli［1999］の動的分位検定では、これら2つの仮説を同時に検定する。以下、$\mathrm{Hit}_t^{(l)}(\alpha)$あるいは$\mathrm{Hit}_t^{(s)}(\alpha)$のサンプル数を$T'$とし、ロング・ポジションの場合には、$\mathrm{Hit}_{m,n} = [\mathrm{Hit}_m^{(l)}(\alpha), \ldots, \mathrm{Hit}_n^{(l)}(\alpha)]'$、ショート・ポジションの場合には、$\mathrm{Hit}_{m,n} = [\mathrm{Hit}_m^{(s)}(\alpha), \ldots, \mathrm{Hit}_n^{(s)}(\alpha)]'$ $(1 \leq m \leq n \leq T')$として以下の回帰を行う。

34 ただし、そのためには、VaRの値を超える確率が各期各期独立であるという仮定が必要で、そうでない場合には、LR統計量の漸近分布は自由度1のカイ2乗分布にならない。

表6　バリュー・アット・リスク

（a）VaR超過比率（%）

	ロング・ポジション			ショート・ポジション		
	10%	5%	1%	10%	5%	1%
RV-ARFIMAX-*n*	10.897	7.479	2.778	15.598	8.974	3.632
RV-ARFIMAX-*t*	8.761	3.632	0.641	11.538	5.556	0.000
RV-ARFIMAX-*st*	8.761	3.632	0.641	14.103	7.479	1.068
GARCH-*n*	6.197	2.991	0.855	9.402	4.060	0.427
GARCH-*t*	6.624	3.205	0.855	10.684	4.487	0.214
GARCH-*st*	6.624	3.205	0.855	12.607	5.983	0.855
GJR-*n*	5.983	2.778	0.855	10.043	4.274	0.427
GJR-*t*	6.838	2.991	0.855	10.470	4.487	0.214
GJR-*st*	6.410	2.778	0.855	12.179	6.197	1.068
EGARCH-*n*	6.624	3.419	0.855	9.615	4.487	0.427
EGARCH-*t*	7.265	4.274	0.855	10.897	5.556	0.214
EGARCH-*st*	6.624	3.632	0.855	11.966	7.265	1.068
APGARCH-*n*	5.983	2.991	0.855	10.043	4.487	0.427
APGARCH-*t*	6.838	3.419	0.855	10.470	4.701	0.214
APGARCH-*st*	6.410	3.205	0.855	12.393	7.051	1.282
FIEGARCH-*n*	8.120	3.632	0.855	10.684	6.410	1.282
FIEGARCH-*t*	8.120	3.632	0.855	11.538	6.624	0.641
FIEGARCH-*st*	8.120	3.632	0.641	13.675	8.120	2.137

（b）Kupiec［1995］の尤度比検定の*p*値

	ロング・ポジション			ショート・ポジション		
	10%	5%	1%	10%	5%	1%
RV-ARFIMA-*n*	0.523	0.021	0.002	0.000	0.000	0.000
RV-ARFIMA-*t*	0.362	0.154	0.403	0.278	0.588	0.000
RV-ARFIMA-*st*	0.362	0.154	0.403	0.005	0.021	0.883
GARCH-*n*	0.003	0.032	0.746	0.663	0.335	0.160
GARCH-*t*	0.010	0.057	0.746	0.625	0.605	0.038
GARCH-*st*	0.010	0.057	0.746	0.070	0.343	0.746
GJR-*n*	0.002	0.016	0.746	0.975	0.460	0.160
GJR-*t*	0.016	0.032	0.746	0.736	0.605	0.038
GJR-*st*	0.006	0.016	0.746	0.127	0.251	0.883
EGARCH-*n*	0.010	0.097	0.746	0.780	0.605	0.160
EGARCH-*t*	0.039	0.460	0.746	0.523	0.588	0.038
EGARCH-*st*	0.010	0.154	0.746	0.168	0.035	0.883
APGARCH-*n*	0.002	0.032	0.746	0.975	0.605	0.160
APGARCH-*t*	0.016	0.097	0.746	0.736	0.764	0.038
APGARCH-*st*	0.006	0.057	0.746	0.095	0.054	0.557
FIEGARCH-*n*	0.162	0.154	0.746	0.625	0.179	0.557
FIEGARCH-*t*	0.162	0.154	0.746	0.278	0.124	0.403
FIEGARCH-*st*	0.162	0.154	0.403	0.012	0.004	0.032

備考：RV-ARFIMAXの後の-*n*、-*t*、-*st* は、(31)式の ω_t の分布に、それぞれ、標準正規分布、分散を1に基準化した*t*分布、skewed-*t*分布を仮定していることを表している。また、GARCH、GJR、EGARCH、APGARCH、FIEGARCH の後の-*n*, -*t*, -*st* は、(2)式のz_t の分布に、それぞれ、標準正規分布、分散を1に基準化した*t* 分布、skewed-*t* 分布を仮定していることを表している。

表6 （続き）

（c）Engle and Manganelli［1999］の動的分位検定のp値

	ロング・ポジション			ショート・ポジション		
	10%	5%	1%	10%	5%	1%
RV-ARFIMA-*n*	0.117	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
RV-ARFIMA-*t*	0.844	0.212	0.998	0.061	0.006	0.000
RV-ARFIMA-*st*	0.838	0.213	0.998	0.017	0.000	0.991
GARCH-*n*	0.085	0.510	0.989	0.011	0.008	0.962
GARCH-*t*	0.165	0.682	0.987	0.018	0.001	0.840
GARCH-*st*	0.163	0.682	0.987	0.005	0.000	0.801
GJR-*n*	0.174	0.390	0.997	0.004	0.004	0.963
GJR-*t*	0.130	0.494	0.997	0.005	0.008	0.849
GJR-*st*	0.234	0.387	0.997	0.000	0.000	0.702
EGARCH-*n*	0.171	0.533	0.999	0.005	0.000	0.965
EGARCH-*t*	0.597	0.476	0.998	0.000	0.000	0.000
EGARCH-*st*	0.330	0.222	0.998	0.003	0.000	0.647
APGARCH-*n*	0.176	0.498	0.999	0.004	0.000	0.965
APGARCH-*t*	0.334	0.784	0.999	0.005	0.000	0.851
APGARCH-*st*	0.234	0.653	0.999	0.001	0.000	0.556
FIEGARCH-*n*	0.895	0.688	0.999	0.022	0.000	0.534
FIEGARCH-*t*	0.910	0.685	0.999	0.018	0.000	0.969
FIEGARCH-*st*	0.909	0.685	0.999	0.001	0.000	0.000

備考：RV-ARFIMAXの後の-*n*、-*t*、-*st*は、(31)式の ω_t の分布に、それぞれ、標準正規分布、分散を1に基準化した*t*分布、skewed-*t*分布を仮定していることを表している。また、GARCH、GJR、EGARCH、APGARCH、FIEGARCH の後の-*n*、-*t*、-*st*は、(2)式のz_t の分布に、それぞれ、標準正規分布、分散を1に基準化した*t* 分布、skewed-*t* 分布を仮定していることを表している。

$$\mathrm{Hit}_{q+1,T'}=X\lambda+\nu\,. \tag{33}$$

ここで、Xは$(T'-q)\times k$の説明変数行列で、第1列はすべて1であり、第2列から第$q+1$列まではそれぞれ$\mathrm{Hit}_{q,T'-1},\ldots,\mathrm{Hit}_{1,T'-q}$、残りの列にはほかの説明変数が入る。また、$\nu$は$(T'-q)\times 1$の誤差ベクトルである。このとき、上記A1、A2の帰無仮説がどちらも正しいとすると、動的分位統計量

$$DQ=\frac{\hat{\lambda}'X'X\hat{\lambda}}{\alpha(1-\alpha)}\,, \tag{34}$$

は漸近的に自由度kのχ^2分布に従う。ただし、$\hat{\lambda}$は、回帰式(33)のλの最小2乗推定量である。本稿では、Giot and Laurent［2004］に従い、$k=7$、$q=5$とし、Xの最後の1列は、ロング・ポジションの場合は、$[\mathrm{VaR}^{(l)}_{q+1}(\alpha),\ldots,\mathrm{VaR}^{(l)}_{T'}(\alpha)]'$、ショート・ポジションの場合は、$[\mathrm{VaR}^{(s)}_{q+1}(\alpha),\ldots,\mathrm{VaR}^{(s)}_{T'}(\alpha)]'$とした。

表6(c)には動的分位統計量(34)のp値が示されている。それによると、今度は、FIEGARCH-*n*、FIEGARCH-*t*モデルでもショート・ポジションの10%と5%で、p値

が0.05を下回っている[35]。しかし、ショート・ポジションの10%と5%では、ほかのモデルでもp値が0.05を下回っている。唯一、RV-ARFIMA-tモデルで、ショート・ポジションの10%においてp値が0.05を上回っているが、ショート・ポジションの1%においてp値が0.05を下回っているので、FIEGARCH-n、FIEGARCH-tモデルと比べてパフォーマンスが上回っているとはいえない。FIEGARCH-stモデルでは、ショート・ポジションの10%と5%に加え、1%でもp値が0.05を下回っており、FIEGARCH-n、FIEGARCH-tモデルと比べてやはりパフォーマンスは低下している。

7．まとめと今後の発展

本稿では、RVをARFIMAXモデルで定式化した場合と日次リターンをさまざまなARCH型モデルで定式化した場合とで、ボラティリティの予測パフォーマンスとVaRのパフォーマンスを比較した。主な結論は以下のとおりである。RVを真のボラティリティの代理変数としたボラティリティ予測の比較では、ARCH型モデルの中では、ボラティリティ変動を考慮しないGARCHモデルが最もパフォーマンスが低く、ボラティリティ変動の非対称性と長期記憶性を考慮したFIEGARCHモデルが最もパフォーマンスが高い。しかし、RV-ARFIMAXモデルと比べるといずれのARCH型モデルもパフォーマンスは低い。それに対して、VaRによる比較では、FIEGARCHモデルが最もパフォーマンスが高く、RV-ARFIMAXをも上回る。また、日経平均の日次リターンの分布には有意な歪みが観測されないため、skewed-t分布を用いるとVaRのパフォーマンスが低下する。

ボラティリティ予測でRVを使ったモデルのパフォーマンスが高いことはほかの研究でも示されているが、VaRでFIEGARCHモデルのパフォーマンスが高いことを示したのは本研究が初めてである[36]。そこで、ほかのサンプル期間やほかの資産でも同様な結果が得られるかどうか分析する必要がある。また、本稿では、RVの変動を表すモデルとしてARFIMAXモデルだけを取り上げたが、ほかにもいくつかモデルが提案されているので、そうしたモデルを用いた分析も必要である。本稿では簡単化のため、$\sigma_t^2 = \widehat{RV}_{t|t-1}$として$R_t\ (z_t)$の予測分布を推定しているが、$R_t$と$RV_t$を同時にモデル化することにより、$\sigma_t^2$の予測誤差も考慮に入れて$R_t$の予測分布を推定することは今後の重要な研究課題である。さらに、ボラティリティ変動モデルにはARCH型モデルのほかに確率的ボラティリティ変動モデルがある[37]。このモデルは

35 尤度比検定では受容されるのに、動的分位検定では棄却されるということは、帰無仮説A2に原因がある可能性が高い。

36 大塚［2006］はTOPIXを用いてFIEGARCHモデルを推定し、ボラティリティの予測パフォーマンスが高いことを示している。ただし、そこではボラティリティの代理変数としてRVではなく、リターンの2乗を用いている。

37 確率的ボラティリティ変動モデルやその推定法について詳しくは、Ghysels *et al.*［1996］、渡部［2000, 2005a,b］を参照のこと。

推定に最尤法以外の方法が必要になるので、本稿では取り上げなかったが、このモデルも含めた比較は重要である。最後に、ボラティリティはVaRだけでなく、オプション価格においても重要な変数なので、オプション価格を用いた比較[38]やオプション価格から計算されるインプライド・ボラティリティとの比較も重要である[39]。

38 日経平均オプション価格を用いて、ARCH型モデルのパフォーマンスの比較を行ったものに三井・渡部［2003］、渡部［2003］があり、RVのパフォーマンスを分析したものにUbukata and Watanabe［2005］がある。

39 RVとインプライド・ボラティリティとの比較を行ったものに、Blair *et al.*［2001］、Koopman *et al.*［2005］がある。

補論A. GARCH、GJR、EGARCH、APGARCHモデルの推定法

GARCH、GJR、EGARCH、APGARCHモデルのパラメータは、最尤法により簡単に推定することができる[40]。ここでは、(1)式で$E\,(R_t|\,\boldsymbol{I}_{t-1}) = 0$としたGARCHモデル

$$R_t = \epsilon_t,\quad \epsilon_t = \sigma_t z_t,\quad \sigma_t > 0,\quad z_t \sim \text{i.i.d.},\ E\,(z_t) = 0,\ Var\,(z_t) = 1, \tag{A-1}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2,\quad \omega > 0,\ \beta, \alpha \geq 0, \tag{A-2}$$

について説明するが、GJR、EGARCH、APGARCHモデルの推定も同様にして行うことができる[41]。

上記GARCHモデルの未知パラメータは、z_tの分布を標準正規分布にしたときには(ω,β,α)であり、t分布にしたときには自由度v、skewed-t分布にしたときにはさらにξが加わる。以下ではz_tの確率密度関数を$f\,(z_t)$で表し、未知パラメータをまとめてθで表す。未知パラメータθにある値が与えられたときに、それを条件とする観測値$\{R_t\}_{t=1}^{T}=\{\epsilon_t\}_{t=1}^{T}$の条件付き密度$g(\{\epsilon_t\}_{t=1}^{T}|\,\theta)$のことを尤度と呼び、$L$で表す。また、尤度を$\theta$の関数と考えたものを尤度関数と呼び、$L(\theta)$で表す。GARCHモデルの最尤推定で通常使うのは、厳密な尤度$g(\{\epsilon_t\}_{t=1}^{T}|\,\theta)$ではなく、条件の中に$\sigma_0^2$と$\epsilon_0^2$を加えた$g(\{\epsilon_t\}_{t=1}^{T}|\,\sigma_0^2,\ \epsilon_0^2, \theta)$である。以下では、条件の中の$\theta$は省略する。このように修正された尤度は次のように表すことができる。

$$L = g(\epsilon_1|\,\sigma_0^2, \epsilon_0^2)\prod_{s=2}^{T} g(\epsilon_s|\,\{\epsilon_t\}_{t=1}^{s-1}, \sigma_0^2, \epsilon_0^2)\,. \tag{A-3}$$

GARCHモデルでは、ω,β,αとσ_0^2、ϵ_0^2の値が与えられると、(A-2)式よりσ_1^2が計算できる。これは、尤度(A-3)の右辺の第1項$g(\epsilon_t\,|\sigma_0^2,\ \epsilon_0^2)$の分散である。平均は0なので、$z_t$の確率密度関数$f\,(z_t)$が与えられると、$g(\epsilon_t\,|\sigma_0^2,\ \epsilon_0^2)$の値は次の式によって計算できる。

$$g(\epsilon_1|\,\sigma_0^2, \epsilon_0^2) = \frac{1}{\sigma_1}\, f\left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1}\right). \tag{A-4}$$

例えば、z_tが標準正規分布に従う場合には、

$$g(\epsilon_1|\,\sigma_0^2, \epsilon_0^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\exp\left(-\frac{\epsilon_1^2}{2\sigma_1^2}\right).$$

40 ARCH 型モデルのパラメータの最尤法以外の推定法には、最小距離(minimum distance)推定量(Baillie and Chung[2001]、Kristensen and Linton[2006])やマルコフ連鎖モンテカルロ法を用いたベイズ推定法がある(Bauwens and Lubrano[1998]、Nakatsuma[2000]、三井・渡部[2003])。

41 (A-1)、(A-2)式はGARCH(1,1)モデルである。一般的なGARCH(p, q)モデルや$E\,(R_t|\,\boldsymbol{I}_{t-1}) \neq 0$の場合の最尤推定については、渡部[2000, 2006]を参照のこと。

となる。さらに、ϵ_1の値が与えられると、(A-2) 式より、今度はσ_2^2が計算できる。これは、$g(\epsilon_2|\epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2)$の分散である。平均は0なので、$g(\epsilon_2|\epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2)$の値は次の式によって計算できる。

$$g(\epsilon_2|\epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2) = \frac{1}{\sigma_2} f\left(\frac{\epsilon_2}{\sigma_2}\right). \tag{A-5}$$

これを繰り返すと、(A-3) 式の右辺の条件付き密度がすべて求まり、尤度を以下のように計算できる。

$$L = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sigma_t} f\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma_t}\right). \tag{A-6}$$

ここで、右辺のσ_tは、既に述べたように、ϵ_0^2、σ_0^2からスタートして、(A-2) 式によって逐次的に計算される。ϵ_0^2、σ_0^2の値には、通常、$(1/T)\sum_{t=1}^{T}\epsilon_t^2$が用いられる (Bollerslev [1986])。

このようにして計算される尤度を最大化するパラメータの値をその推定値として選択すればよい。実際に尤度の最大化を行うときには、尤度ではなく、(A-6) 式の対数をとった対数尤度

$$\ln L = \sum_{t=1}^{T}\left\{-\ln(\sigma_t) + \ln f\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma_t}\right)\right\}, \tag{A-7}$$

を用いる[42]。

42 ARCH型モデルのパラメータの最尤推定量の漸近的な性質については、Straumann [2005] を参照のこと。ただし、EGARCH、APGARCHモデルのパラメータの最尤推定量の漸近正規性は厳密には明らかにされていない。

補論B. FIEGARCHモデルの推定法

FIEGARCHモデル

$$(1-\beta L)(1-L)^d\{\ln(\sigma_t^2)-\omega\}=g(z_{t-1}), \tag{B-1}$$

$$g(z_{t-1})=\theta z_{t-1}+\gamma\{|z_{t-1}|-E|z_{t-1}|\},$$

の推定にはTaylor［2001］によって提案されている方法を用いた。

（B-1）式の左辺の$(1-L)^d$は、

$$(1-L)^d=1-\sum_{j=1}^{\infty}a_jL^j,\ a_1=d,\ a_j=\frac{j-d-1}{j}a_j-1\quad(j\geq 2), \tag{B-2}$$

であり、それに$(1-\beta L)$を掛けた$(1-\beta L)(1-L)^d$は次のように表せる。

$$(1-\beta L)(1-L)^d=1-\sum_{j=1}^{\infty}b_jL^j,\ b_1=d+\beta,\ b_j=a_j-\beta a_{j-1}\quad(j\geq 2)\ . \tag{B-3}$$

そこで、$\ln(\sigma_0^2)=\ln(\sigma_{-1}^2)=\cdots$をすべてその無条件期待値$\omega$とし、$g(z_0)$もその無条件期待値0であるとすると、$\ln(\sigma_1^2)$は以下のように計算できる。

$$\ln(\sigma_1^2)=\omega+\sum_{j=1}^{\infty}b_j\{\ln(\sigma_{1-j}^2)-\omega\}+g(z_0)=\omega\ . \tag{B-4}$$

次に、ϵ_1が与えられると、（B-4）式で計算された$\sigma_1^2(=\exp[\ln(\sigma_1^2)])$を使って$z_1(=\epsilon_1/\sigma_1)$を計算できるので、それを使って$\ln(\sigma_2^2)$を以下のように計算できる。

$$\ln(\sigma_2^2)=\omega+\sum_{j=1}^{\infty}b_j\{\ln(\sigma_{2-j}^2)-\omega\}+g(z_1)=\omega+b_1\{\ln(\sigma_1^2)-\omega\}+g(z_1)\,. \tag{B-5}$$

以上を繰り返すことにより、$(\sigma_1^2,\ldots,\sigma_T^2)$を計算できるので、それらを使って（A-7）式より対数尤度を計算できる。そこで、その対数尤度を最大化するパラメータを求めて推定値とすればよい。

FIEGARCHモデルを提案したBollerslev and Mikkelsen［1996］は、（B-1）式を次のようにMAモデルに変更して推定している。

$$\ln(\sigma_t^2)=\omega+(1-\phi L)^{-1}(1-L)^{-d}g(z_{t-1}). \tag{B-6}$$

Taylor［2001］は、ARモデルを使った方がL^jの係数が早く0に収束することから、MAモデル（B-6）ではなく、ARモデル（B-1）を使うことを提案しており、本稿でもそれに従った[43]。

43 MAモデル（B-6）を使った推定も行ったが、パラメータの推定値はほとんど変わらなかった。

補論C. RV-ARFIMAXモデルの推定法

RV-ARFIMAXモデル

$$(1-L)^d\{\ln(RV_t)-\mu_0-\mu_1|R_{t-1}|-\mu_2 D^-_{t-1}|R_{t-1}|\}=(1+\theta L)u_t,\ u_t\text{~i.i.d. } N(0,\sigma_u^2)\ ,\tag{C-1}$$

の推定にはBeran［1995］によって提案された近似最尤法（approximate maximum likelihood method）を用いた。

RV-ARFIMAXモデル（C-1）は次のように次数無限大のARモデルとして表せる。

$$(1+\theta L)^{-1}(1-L)^d=\{\ln(RV_t)-\mu_0-\mu_1|R_{t-1}|-\mu_2 D^-_{t-1}|R_{t-1}|\}=u_t\ .\tag{C-2}$$

ここで、左辺の$(1+\theta L)^{-1}(1-L)^d$は次のように表せる。

$$(1+\theta L)^{-1}(1-L)^d=1-\sum_{j=1}^{\infty}\phi_j L^j,\ \phi_1=d+\theta,\ \phi_j=a_j-\theta\phi_{j-1}\quad(j\geq 2)\ .\tag{C-3}$$

ただし、a_jは（B-2）式で定義したものである。

ここで、$y_t=\ln(RV_t)-\mu_0-\mu_1|R_{t-1}|-\mu_2 D^-_{t-1}|R_{t-1}|$と定義し、$(y_0, y_{-1},\ldots)$をすべてその無条件期待値0とすると、（C-2）と（C-3）式より、$(u_1,\ldots,u_T)$を計算できる。（C-1）の仮定より、この$(u_1,\ldots,u_T)$は互いに独立な平均0、分散σ_u^2の正規分布に従うので、対数尤度は次のように計算できる。

$$\ln L=-\frac{T}{2}\ln(2\pi\sigma_u^2)-\frac{1}{2\sigma_u^2}\sum_{t=1}^{T}u_t^2\ .\tag{C-4}$$

この式の右辺で$(d,\mu_0,\mu_1,\mu_2,\theta)$に依存するのは$\Sigma_{t=1}^T u_t^2$だけなので、まず、$\Sigma_{t=1}^T u_t^2$を最小化する$(d,\mu_0,\mu_1,\mu_2,\theta)$を求め、次に、そのもとで$(u_1,\ldots,u_T)$を計算すれば、$\sigma_u^2$はその標本分散$(1/T)\Sigma_{t=1}^T u_t^2$として推定できる。

参考文献

大塚芳宏、「Heterogeneousモデルによる市場のボラティリティ構造分析と予測力の比較」、千葉大学社会科学研究科修士論文、2006年

白石典義・高山俊則、「株式収益率ボラティリティの長期依存性とロングメモリー・モデル」、『ジャフィー・ジャーナル』、1998年、123〜150頁

三井秀俊・渡部敏明、「ベイズ推定法によるGARCHオプション価格付けモデルの分析」、『日本統計学会誌』第33巻第3号、2003年、307〜324頁

矢島美寛、「長期記憶をもつ時系列モデル」、刈屋武昭・矢島美寛・田中勝人・竹内 啓著『経済時系列の統計その数理的基礎』第Ⅱ部、岩波書店、2003年、103〜202頁

渡部敏明、『ボラティリティ変動モデル』、朝倉書店、2000年

———、「日経225オプションデータを使ったGARCH オプション価格付けモデルの検証」、『金融研究』第22巻別冊第2号、2003年、1〜34頁

———、「マルチ・ムーブ・サンプラーを用いた確率的ボラティリティ変動モデルのベイズ推定法」、和合 肇編『マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いた応用計量分析』第9章、東洋経済新報社、2005年a、259〜294頁

———、「確率的ボラティリティ変動モデル：分析法とモデルの発展」、日本大学経済学部経済科学研究所『紀要』第35号、2005年b、111〜133頁

———、「ARCHモデル」、縄田和満・蓑谷千凰彦・和合 肇編『計量経済学ハンドブック』16.4節、朝倉書店、近刊、2006年

Aït-Sahalia, Yacine, Per A. Mykland, and Lan Zhang, “How Often to Sample a Continuoustime Process in the Presence of Market Microstructure Noise,” *Review of Financial Studies*, 18 (2), 2005, pp. 351-416.

Andersen, Torben G., and Tim Bollerslev, “Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts,” *International Economic Review*, 39 (4), 1998, pp. 885-905.

———, and ———, Francis X. Diebold, and Paul Labys, “ Modeling and Forecasting Realized Volatility,” *Econometrica*, 71 (2), 2003, pp. 579-625.

Baillie, Richard T., Tim Bollerslev, and Hans Ole Mikkelsen, “Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 74 (1), 1996, pp. 3-30.

———, and Huimin Chung, “Estimation of GARCH Models from the Autocorrelations of the Squares of a Process,” *Journal of Time Series Analysis*, 22 (6), 2001, pp. 631-650.

Bandi, Federico M., and Jeffrey R. Russell, “Microstructure Noise, Realized Variance, and Optimal Sampling,” Working Paper, Graduate School of Business, University of Chicago, 2005.

———, and ———, “Separating Microstructure Noise from Volatility,” *Journal of Financial Economics*, 79 (3), 2006, pp. 655-692.

Barndorff-Nielsen, Ole. E., and Neil Shephard, “Econometric Analysis of Realized Volatility and its Use in Estimating Stochastic Volatility Models,” *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 64 (2), 2002, pp. 253-280.

Bauwens, Luc, and Michel Lubrano, “Bayesian Inference on GARCH Models using the Gibbs Sampler,” *Econometrics Journal*, 1 (1), 1998, pp. C23-C46.

Beran, Jan, *Statistics for long-memory processes*, Chapman & Hall, 1994.

———, “Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter for Invertible Short and Long Memory Autoregressive Integrated Moving Average Models,” *Journal of the Royal Statistical Society*, B57, 1995, pp. 659-672.

Bhardwaj, Geetesh, and Norman R. Swanson,“An Empirical Investigation of the Usefulness of ARFIMA Models for Predicting Macroeconomic and Financial Time Series,” *Journal of Econometrics*, 131 (1-2), 2006, pp. 539-578.

Black, Fischer, “Studies of Stock Market Volatility Changes,” *1976 Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, 1976, pp. 177-181.

———, and Myron Scholes, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81 (3), 1973, pp. 637-654.

Blair, Bevan J., Ser-Huang Poon, and Stephen J. Taylor, “Forecasting S&P 100 Volatility: The Incremental Information Content of Implied Volatilities and High-frequency Index Returns,” *Journal of Econometrics*, 105 (1), 2001, pp. 5-26.

Bollerslev, Tim, “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31 (3), 1986, pp. 307-327.

———, “A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prives and Rate of Return,” *Review of Economics and Statistics*, 69 (3), 1987, pp. 542-547.

———, Robert F. Engle, and Daniel B. Nelson, “ARCH Models,” in Robert F. Engle and Dan McFadden, eds. *The Handbook of Econometrics 4*, Elsevier, 1994, pp. 2959-3038.

———, and Hans O. Mikkelsen, “Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility,” *Journal of Econometrics*, 73 (1), 1996, pp. 151-184.

Christie, A. Andrew, “The Stochastic Behavior of Common Stock Variances: Value, Leverage, and Interest Rate Effects,” *Journal of Financial Economics*, 10 (4), 1982, pp. 407-432.

Chung, Ching-Fan, “Estimating the Fractionally Integrated GARCH Model,” Working Paper, Institute of Economics, Academia Sinica, 1999.

Corsi, Fulvio, “A Simple Long Memory Model of Realized Volatility,” Working Paper, Institute of Finance, University of Lugano, 2004.

Diebold, Francis, *Empirical Modeling of Exchange Rate Dynamics*, 1988, Springer-Verlag.

Ding, Zhuanxin, Clive W. J. Granger, and Robert F. Engle, “A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model,” *Journal of Empirical Finance*, 1 (1), 1993, pp. 83-106.

Engle, Robert. F., “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation,” *Econometrica*, 50 (4), 1982, pp. 987-1007.

———, and Simone Manganelli, “CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles,” *Journal of Business & Economic Statistics*, 22 (4), 2004, pp. 367-381.

Fama, Engene F., “The Behavior of Stock Market Prices,” *Journal of Business*, 38 (1), 1965, pp. 34-105.

Fernández, Carmen, and Mark F. J. Steel, “On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness,” *Journal of the American Statistical Association*, 93 (441), 1998, pp. 359-371.

Geweke, John, “Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment,” *Econometric Reviews*, 5, 1986, pp. 57-61.

Ghysels, Eric, Andrew C. Harvey, and Eric Renault, “Stochastic volatility,” G. S. Maddala and C. R. Rao, eds., in *Handbook of Statistics 14: Statistical Methods in Finance*, Elsevier, 1996, pp. 119-191.

Giot, Pierre, and Sébastien, Laurent, “Modelling Daily Value-at-Risk Using Realized Volatility and ARCH Type Models,” *Journal of Empirical Finance*, 11 (3), 2004, pp. 379-398.

Glosten, Lawrence R., Ravi Jagannathan, and David E. Runkle, “On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks,” *Journal of Finance*, 48 (5), 1993, pp. 1779-1801.

Granger, Clive W. J., and Mark J. Machina, “Structural Attribution of Observed Volatility Clustering,” *Journal of Econometrics*, 2006, forthcoming.

Hansen, Peter R., and Asger Lunde, “A Realized Variance for the Whole Day Based on Intermittent High-frequency Data,” *Journal of Financial Econometrics*, 3 (4), 2005a, pp. 525-554.

———, and ———, “A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH (1,1)?” *Journal of Applied Econometrics*, 20 (7), 2005b, pp. 873-889.

——— , and ———, “Consistent Ranking of Volatility Models,” *Journal of Econometrics*, 131 (1-2), 2006, pp. 97-121.

Higgins, Matthew L., and Anil K. Bera, “A Class of Nonlinear ARCH Models,” *International Economic Review*, 33 (1), 1992, pp. 137-158.

Jarque, Carlos M., and Anil K. Bera, “Test for Normality of Observations and Regression Residuals,” *International Statistical Review*, 55 (2), 1987, pp. 163-172.

Karanasos, Menelaos, and Jinki Kim, “A Re-examination of the Asymmetric Power ARCH Model,” *Journal of Empirical Finance*, 13 (1), 2006, pp. 113-128.

Koopman, Siem Jan, Borus Jungbacker, and Eugenie Hol, “Forecasting Daily Variability of the S&P 100 Stock Index using Historical, Realized and Implied Volatility Measurements,” *Journal of Empirical Finance*, 12 (3), 2005, pp. 445-475.

Kristensen, Dennis, and Oliver Linton, “A Closed-form Estimator for the GARCH (1,1)-model,” *Econometric Theory*, 22, 2006, pp. 323-337.

Kupiec, Paul, “Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models,” *Journal of Derivatives*, 3 (2), 1995, pp. 73-84.

Lambert, Philippe, and Sébastien Laurent, “Modelling Financial Time Series using GARCH-type Models and a Skewed Student Distributions for the Innovations,” Discussion Paper 0125, Institute de Statistique, Université Catholique de Louvain, 2001.

Ljung, G. M., and G. E. P. Box, “On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models,” *Biometrika*, 65 (2), 1978, pp. 297-303.

Mandelbrot, Benoit, “The Variation of Certain Speculative Prices,” *Journal of Business*, 36 (3), 1963, pp. 394-419.

Mincer, Jacob, and Victor Zarnowitz, “The Evaluation of Economic Forecasts,” Jacob Mincer eds., *Economic Forecasts and Expectations*, 1969, National Bureau of Economic Research.

Nakatsuma, Teruo, “Bayesian Analysis of ARMA-GARCH Models: A Markov Chain Sampling Approach,” *Journal of Econometrics*, 95 (1), 2000, pp. 57-69.

Nelson, Daniel B., “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach,” *Econometrica*, 1991, 59 (2), pp. 347-370.

Pantula, Sastry G., “Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment,” *Econometric Reviews*, 5, 1986, pp. 71-74.

Schoffer, Olaf, “HY-A-PARCH: A Stationary A-PARCH Model with Long Memory,” Technical Report 4003, Fachbereich Statistik, Universität Dortmunt, 2003.

Schwert, G. William, “Why Does Stock Market Volatility Change over Time?” *Journal of Finance*, 44 (5), 1989, pp. 1115-1153.

———, “Stock Volatility and the Crash of’87,” *Review of Financial Studies*, 3 (1), 1990, pp. 77-102.

Straumann, Daniel, *Estimation in Conditionally Heteroscedastic Time Series Models*, 2005, Springer.

Taylor, Stephen J., *Modeling Financial Time Series*, 1986, John Wiley and Sons.

———, “Consequences for Option Pricing for a Long Memory in Volatility,” Working Paper 2001/017, Lancaster University Management School, 2001.

Thomakos, Dimitrios D., and Tao Wang, “Realized Volatility in the Futures Markets,” *Journal of Empirical Finance*, 10 (3), 2003, pp. 321-353.

Tse, Yiu Kuen., “The Conditional Heteroskedasticity of the Yen-Dollar Exchange Rate,” *Journal of Applied Econometrics*, 13 (1), 1998, pp. 49-55.

Ubukata, Masato, and Toshiaki, Watanabe, “ Pricing Nikkei 225 Options using Realized Volatility,” mimeo, 2005.

Watanabe, Toshiaki, “Excess Kurtosis of Conditional Distribution for Daily Stock Returns: The Case of Japan,” *Applied Economics Letters*, 7 (6), 2000, pp. 353-355.

——— , and Keiko Yamaguchi, “Measuring, Modeling and Forecasting Realized Volatility in the Nikkei 225 Stock Index Futures Market,” mimeo, 2005.

Wu, Guojun, “The Determinants of Asymmetric Volatility,” *Review of Financial Studies*, 14 (3), 2001, pp. 837-859.

Zakoian, Jean-Michel, “Threshold Heteroskedasticity Models,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18 (5), 1994, pp. 931-955.