

マリアバン解析を用いたオプションの リスク指標の数値計算について

いまむら さとる うちだ よしひこ たかはしあきひこ
今村 悟 / 内田善彦 / 高橋明彦

要 旨

本稿では、マリアバン解析とモンテカルロ法を用い、原資産価格が拡散過程に従うときのプレーンバニラ、デジタル、アジア型の各オプションのリスク指標（デルタ、ガンマ）に対する効率的計算方法を検討した。特に、Fournié et al. [1999]の方法を拡張し、プレーンバニラ・オプションのガンマなどに対してはより効率的な方法を、アジア型オプションのガンマに対しては新しい計算方法をそれぞれ考案した。また、価格の変動を記述する確率微分方程式についても、彼らが用いた例（対数正規過程）と共に、CEV（constant elasticity of variance）過程に対し、われわれの方法の有効性を検証、確認した。さらに、対数正規過程に関する既存の結果に関しても明示されていなかった証明を示した。

キーワード：マリアバン解析、リスク指標、モンテカルロ法、CEV 過程

.....
本稿は、高橋が日本銀行金融研究所の国内客員研究員として、今村が同研究生として行ってきた研究プロジェクトの成果の一部である。草稿段階において、匿名の査読者および金融研究所金融基礎研究担当FE 班の諸氏より有益な助言を得たことに感謝する。なお、本稿で示されている内容および意見は筆者たち個人に属し、日本銀行、金融研究所あるいは三井アセット信託銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

今村 悟 東京大学大学院数理科学研究科（現三井アセット信託銀行年金信託部）
内田善彦 日本銀行金融研究所
（現大阪大学経済学研究科 E-mail:uchida@econ.osaka-u.ac.jp）
高橋明彦 東京大学大学院経済学研究科

1. はじめに

派生商品の価値評価と共に、リスク管理は金融実務上極めて重要な課題である。その方法は目的に応じてさまざまであるが、トレーディングなどでは瞬時的なリスクをモニターするための“グリークス”と総称されるリスク指標が重視される。派生商品の価値はしばしば複数のパラメータの非線形関数により表現され、派生商品ポジションのリスクは、これらのパラメータの変化に対する派生商品の価値変化として把握される。その代表的な方法が、派生商品価値のパラメータに関する偏微分係数、すなわち、“グリークス”である。特に、価値を表す関数の非線形性しだい、リスクを正確に把握するために高階まで含めた偏微分の“グリークス”をモニターする場合がある。

“グリークス”のリスク指標が解析的に求まる場合は実用上問題ないが、実務で用いられるモデルでは、派生商品の価値と共にリスク指標が解析的に得られず、数値的手法が用いられることが多い。このため、効率的計算方法、すなわち高速で高精度な数値計算方法の開発が強く望まれている。

本稿では、特に“グリークス”の中でも最も重要と思われる、派生商品価値の現時点の原資産価格に関する1階の偏微分係数であるデルタ (delta, δ) と、2階の偏微分係数であるガンマ (gamma, γ) の効率的計算方法に焦点を当て考察する。なお、デルタは原資産価格の微小変化に対する派生商品価値の変化を表し、ガンマは原資産価格の微小変化に対するデルタの変化を表している。

以下では、原資産価格 X_t がリスク中立測度 (同値マルチンゲール測度)のもとで、

$$\begin{cases} dX_t = r(t)X_t dt + \sigma(X_t)dW_t, \\ X_0 = x \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $r(t) (\geq 0)$ は確定的

に従うとき、満期 T におけるペイオフ関数が ϕ で与えられるヨーロッパ型の派生商品 (オプション) を考える。具体例として、

$$\begin{aligned} \text{プレーンバニラ・オプション} & : \psi = \psi(X_T) = (X_T - K)^+ \\ \text{デジタル・オプション} & : \psi = \psi(X_T) = 1_{\{K \leq X_T \leq K'\}} \\ \text{アジア型オプション} & : \psi = \psi(\bar{X}_T) = (\frac{1}{T}\bar{X}_T - K)^+ \\ & \text{ただし、}\bar{X}_T = \int_0^T X_s ds \end{aligned}$$

を対象とする。 $\phi(X_T) = e^{-\int_0^T r(t)dt} \psi(X_T)$ とおくと、これらの派生商品価格は同値マルチンゲール測度のもとで、 $u(x) = E^x[\phi(X_T)]$ と表されるが¹⁾、この価格の初期値微分係

1) $E^x[\cdot]$ は $E[\cdot | X_0 = x]$ を表す。

数(デルタ) $u'(x) = \frac{d}{dx} E^x[\phi(X_T)]$ および2回微分係数(ガンマ) $u''(x) = \frac{d^2}{dx^2} E^x[\phi(X_T)]$ を、モンテカルロ法を用いて効率的に計算することを目標とする。

自然な方法として、小さい ϵ に対して $u(x+\epsilon)$ 、 $u(x)$ 、 $u(x-\epsilon)$ をそれぞれモンテカルロ法により生成して、

$$u'(x) = \frac{u(x+\epsilon) - u(x-\epsilon)}{2\epsilon} , \quad (2)$$

$$u''(x) = \frac{u(x+\epsilon) - 2u(x) + u(x-\epsilon)}{\epsilon^2} , \quad (3)$$

とする差分法がある。しかし、これでは ϕ の微分可能性の条件によって収束が遅い場合がある。加えて、収束値が ϵ の値に依存するため、必ずしも真値に収束するとはいえない。

次に、ペイオフ関数 ϕ を微分することにより、

$$u'(x) = E^x[\phi' \times \text{weight}] , \quad (4)$$

$$u''(x) = E^x[\phi'' \times \text{weight}] , \quad (5)$$

ただし、weightは \mathcal{F}_T -可測な確率変数

と表現する方法があるが、デジタル・オプションの場合はペイオフ関数 ϕ が微分不可能であるため用いることができない。また、プレーンバニラ・オプションの場合でもペイオフ関数 ϕ が2回微分できないためガンマについては適用できない。

これに対してFournié *et al.* [1999] は、スコロホッド積分(後述の定義1を参照)を用いて、

$$u'(x) = E^x[\phi \times \text{weight}] , \quad (6)$$

$$u''(x) = E^x[\phi \times \text{weight}] , \quad (7)$$

のタイプの表現を与えた。しかし、このままでは、モンテカルロ法を適用すると、多くの場合“weight”の部分の分散が大きく収束が悪い。そこで、彼らは次のような局所化(localization)を行い、この問題を解決している。局所化とは、 ϕ を、

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

ϕ_1 : デルタでは連続で有限個の点を除いて微分可能

ガンマでは C^1 級で有限個の点を除いて2回微分可能

ϕ_2 : コンパクトな台(support)を持つ

と分解して、 ϕ_1 に対しては微分（デルタなら1回、ガンマなら2回）して期待値をモンテカルロ法により計算し、 ϕ_2 に対してはスコロホッド積分を用いてペイオフ関数を微分せずに期待値をモンテカルロ法により計算する。このとき、 ϕ_1 部分についてはペイオフ関数を微分したときの“weight”の分散が微分しないときに比べて小さくなる。一方、 ϕ_2 部分もペイオフ関数がコンパクトな台を持つため分散が大きくなることが回避される。

本稿では、ガンマに対して ϕ 、 ϕ'' ではなく ϕ' を用いた、

$$u''(x) = E^x[\phi' \times \text{weight}] , \quad (8)$$

のタイプの公式を導出する。これにより、アジア型オプションのガンマに関して差分法より大幅に効率的なモンテカルロ法による数値計算が可能となることを示すとともに、プレーンバニラ・オプションに関して、この表現を用いた局所化が、Fournié *et al.* [1999]の方法よりも優れていることを示す。

また、Fournié *et al.* [1999]のほとんどの結果はブラック＝ショールズ・モデル（BSモデル）²のみを対象にしていたが、BSモデルの“グリークス”などの代表的なリスク指標は解析的に求められる。そこで、これらの結果を実務的にはより重要となるBSモデルを含む一般のモデルに拡張し、今まで明示されていなかった証明も示す。

この中で、ペイオフ関数 ϕ に対して $\Phi(z) = \int_0^z \phi(y) dy$ として、

$$u'(x) = E^x[\Phi \times \text{weight}] , \quad (9)$$

$$u''(x) = E^x[\phi \times \text{weight}] , \quad (10)$$

のタイプの公式も導出し、デジタル・オプションに関しては、この表現を用いたペイオフ関数の分解が有効である場合があることも示す。

最後にBSモデルとCEV（constant elasticity of variance）モデル双方の場合について実際に数値計算を行い、われわれの方法の有効性を検証・確認する。

本稿の構成は以下のとおりである。次節では準備としてマリアバン解析の基本事項などを説明し、3節ではリスク指標のデルタ、ガンマに関する主要な表現を列挙する。4節では具体的な数値計算法を解説し、5節においては数値計算例とその結果を分析する。最後に6節において結論を述べる。また、補論では3節で挙げた定理、系の証明を与える。

.....
2 原資産価格が対数正規過程に従うと仮定したモデル。

2. 準備

本節では、次節以降における主要な前提、仮定およびしばしば用いられるマリアバン解析の基本事項を概説する。マリアバン解析の詳細およびファイナンスへの他の適用例はIkeda and Watanabe [1989]、重川 [1999]、Nualart [1995]、内田・高橋 [2005]、国友・高橋 [2003]などを参照されたい。

(Ω, \mathcal{F}, P) を完備確率空間とする。 W_t を1次元ブラウン運動とし、フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}$ は W_t で生成されるフィルトレーションを拡大化 (augmentation) したものとす。 S を、

$$S := \left\{ F = f \left(\int_0^\infty h_1(t) dW_t, \dots, \int_0^\infty h_n(t) dW_t \right); n \in \mathbf{N}, h_1, \dots, h_n \in L^2(\mathbf{R}^+), f \in C_P^\infty \right\},$$

で定義する³。

以下では、 $L^2(\Omega)$ は、 Ω 上のウィナー測度に関し2乗可積分関数全体の空間を表し、 $L^2(\Omega \times \mathbf{R}^+)$ は、 $\Omega \times [0, \infty)$ 上のウィナー測度とルベグ測度の積測度に関し2乗可積分関数全体の空間を表す。

$F \in S$ に対してマリアバン微分 $\{D_t F, t \geq 0\} \in L^2(\Omega \times \mathbf{R}^+)$ を、

$$D_t F := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\int_0^\infty h_1(t) dW_t, \dots, \int_0^\infty h_n(t) dW_t \right) h_i(t), \quad (11)$$

で定義する⁴。また、 $F \in S$ に対してノルムを、

$$\|F\|_{1,2} := (E[F^2])^{\frac{1}{2}} + \left(E \left[\int_0^\infty (D_t F)^2 dt \right] \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

で定義する。このノルム $\|\cdot\|_{1,2}$ で S を完備化した空間を $\mathbb{D}^{1,2}$ で表す。 $F \in L^2(\Omega)$ に対して $\{F_n\} \subset S$ 、 $F_n \rightarrow F$ in $L^2(\Omega)$ をとると D_t は閉線形作用素であるため、 $D_t F_n$ は $L^2(\Omega \times \mathbf{R}^+)$ の意味で収束する。そこで $F \in L^2(\Omega)$ に対して $D_t F := \lim_{n \rightarrow \infty} D_t F_n \in L^2(\Omega \times \mathbf{R}^+)$ として定義する。

次に、後に用いるマリアバン微分の基本的性質を列挙する。以後、 X_t は、

$$\begin{cases} dX_t = r(t)X_t dt + \sigma(X_t)dW_t, \\ X_0 = x \end{cases}, \quad (13)$$

に従うとする。ただし、 $r(t)$ は時間だけの確定的な連続関数、 $\sigma(z)$ は2回連続微分可能、 $\sigma'(z)$ は有界、 $\sigma''(z)$ は有界でリプシッツ条件を満たすとす (z は変数。以下同様)。さらに、以下を仮定する。

³ C_P^∞ は無限回連続微分可能で、その導関数がすべて高々多項式で押さえられる関数の集合を表す。

⁴ $\partial f / \partial x_i$ は f の第 i 番目の引数に関する偏微分を表す。

仮定

$$\sigma(z) \geq \epsilon > 0. \quad (14)$$

性質1 (Nualart [1995] p. 29) ϕ を連続微分可能な関数、 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ とすると、 $\phi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ であり、

$$D_t \phi(F) = \phi'(F) D_t F. \quad (15)$$

性質2 (Nualart [1995] p. 109) X_t の “初期値 x による導関数” $Y_t := \frac{\partial}{\partial x} X_t$ は、以下の確率微分方程式を満たす。

$$\begin{cases} dY_t = r(t)Y_t dt + \sigma'(X_t)Y_t dW_t \\ Y_0 = 1 \end{cases}. \quad (16)$$

また、 Y_t の “初期値 x による導関数” $Z_t := \frac{\partial}{\partial x} Y_t$ は、

$$\begin{cases} dZ_t = r(t)Z_t dt + (\sigma''(X_t)Y_t^2 + \sigma'(X_t)Z_t) dW_t \\ Z_0 = 0 \end{cases}, \quad (17)$$

を満たす。

さらに、 $\tilde{X}_t := \int_0^t X_s ds$ とすると、 \tilde{X}_t の初期値 x による微分 $\tilde{Y}_t := \frac{\partial}{\partial x} \tilde{X}_t$ は、

$$\tilde{Y}_t = \int_0^t Y_s ds, \quad (18)$$

で与えられる。

X_T のマリアバン微分は次で得られる。

性質3 (Nualart [1995] p.109)

$$D_t X_T = Y_T Y_t^{-1} \sigma(X_t) 1_{\{t \leq T\}}. \quad (19)$$

これを $Y_T = D_t X_T \sigma(X_t)^{-1} Y_t$ ($t \leq T$) と変型し両辺に $\frac{1}{T} = \int_0^t dt$ を施すと、左辺は t によらないので、

$$Y_T = \frac{1}{T} \int_0^T D_t X_T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dt, \quad (20)$$

となる。また、(20)式の両辺を Y_T で割れば、

$$1 = Y_T^{-1} \frac{1}{T} \int_0^T D_t X_T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dt, \quad (21)$$

を得る。

定義1 (スコロホッド積分) (Nualart [1995] p. 35)

$$Dom(\delta) := \left\{ u : \text{確率過程} ; \left| E \left[\int_0^T \{D_t \phi\} u(t) dt \right] \right| \leq C(u) \|\phi\|_{1,2}, \forall \phi \in \mathbb{D}^{1,2} \right. \\ \left. \text{ただし、} C(u) \text{は} u \text{に依存する定数} \right\},$$

とする。 $u \in Dom(\delta)$ のスコロホッド積分 $\delta(u)$ を、任意の $\phi \in \mathbb{D}^{1,2}$ と任意の定数 $T > 0$ に対して、次を満たすものとして定義する。

$$E[\phi \delta(u)] = E \left[\int_0^T \{D_t \phi\} u(t) dt \right]. \quad (22)$$

$u(t)$ が適合過程であるときスコロホッド積分は伊藤積分と一致する。

スコロホッド積分は適合過程でなくても定義することができるが、その場合には、数値計算ができない。そこで、次の性質が重要になる。

性質4 (Nualart [1995] p. 40) u を確率過程で $u \in Dom(\delta)$ 、 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ を \mathcal{F}_T -可測な確率変数としたとき、

$$\delta(Fu) = F \delta(u) - \int_0^T \{D_t F\} u dt. \quad (23)$$

3 . リスク指標 (デルタ、ガンマ) の表現

ペイオフ関数が $\phi(X_T) (\in L^2(\Omega))$ で表される満期日 T のヨーロッパ型派生商品の価格 u は同値マルチンゲール測度を用いて、

$$u(x) = E^x[\phi(X_T)], \quad (24)$$

により表される。次に、 $\tilde{X}_t = \int_0^t X_s ds$ として、ペイオフ関数が $\phi(\tilde{X}_T)$ で表されるアジア型オプションを考える。このとき、オプションの行使が満期日 T に限られる場合の価格 u は、同様に、

$$u(x) = E^x[\phi(\tilde{X}_T)], \quad (25)$$

により表される。以下では、プレーンバニラ、デジタル、アジア型各オプションのデルタ、ガンマに関して数値計算上有用な表現を与える。なお、本節の定理、系の証明は補論にまとめた。

(1) プレーンバニラ・オプション、デジタル・オプションのデルタ

定理1 ペイオフ関数が $\phi(X_T)$ で表されるとき、デルタは、

$$u'(x) = \frac{d}{dx} u(x) = E^x[\phi'(X_T)Y_T] \quad (26)$$

$$= E^x \left[\phi(X_T) \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right] \quad (27)$$

$$= E^x \left[\Phi(X_T) \frac{1}{T^2} \left\{ \left(\int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right)^2 Y_T^{-1} - \left(\int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dt \right) Y_T^{-1} + \left(\int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right) \left(\int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t D_t Y_T dt \right) Y_T^{-2} \right\} \right]. \quad (28)$$

ただし、(26)式は、 $\phi(z)$ が連続で有限個の点を除いて微分可能である場合に限る。このとき、有限個の点を除いて導関数が定義されるので、それを $\phi'(z)$ とする。

また、 Φ は $\Phi(z) = \int_0^z \phi(y) dy$ により定義され、(28)式は $\Phi(X_T) \in L^2(\Omega)$ の場合に限る。

注意

例えば、 $\phi(z) = (z-K)^+$ のとき $\phi'(z) = 1_{\{z \geq K\}}$ ($z=K$ での値は任意なので右連続になるように選ぶ)。

なお、 $E^x[\phi' \dots]$ [(26)式]、 $E^x[\phi \dots]$ [(27)式]、 $E^x[\Phi \dots]$ [(28)式] の3種類の表現があるのは、ペイオフ関数 ϕ の微分可能性によって使い分けられるようにするためである。

系1 X_t がBSモデル、すなわち、

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t \\ X_0 = x \end{cases}, \quad (29)$$

に従うとき (ただし、 r 、 σ は定数)。

$$u'(x) = E^x \left[\phi'(X_T) \frac{1}{x} X_T \right] \quad (30)$$

$$= E^x \left[\phi(X_T) \frac{1}{x\sigma T} W_T \right] \quad (31)$$

$$= E^x \left[\Phi(X_T) \frac{1}{x\sigma^2 T^2} \frac{1}{X_T} (W_T^2 + \sigma T W_T - T) \right]. \quad (32)$$

(2) プレーンバニラ・オプション、デジタル・オプションのガンマ

定理2 ペイオフ関数が $\phi(X_T)$ で表されるときガンマは、

$$u''(x) = \frac{d^2}{dx^2} u(x) \quad (33)$$

$$= E^x \left[\phi''(X_T) Y_T^2 + \phi'(X_T) Z_T \right] \quad (34)$$

$$= E^x \left[\phi'(X_T) \left\{ \frac{1}{T} \left(\int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right) Y_T - \frac{1}{T} \int_0^T D_t Y_T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dt + Z_T \right\} \right] \quad (35)$$

$$= E^x \left[\phi(X_T) \left\{ \frac{1}{T^2} \left(\int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right)^2 - \frac{1}{T^2} \int_0^T (\sigma(X_t)^{-1} Y_t)^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T (-\sigma(X_t)^{-2} \sigma'(X_t) Y_t^2 + \sigma(X_t)^{-1} Z_t) dW_t \right\} \right]. \quad (36)$$

ただし、(34)式は $\phi(z)$ が C^1 級で有限個の点を除いて2回微分可能である場合に、(35)式は $\phi(z)$ が連続で有限個の点を除いて微分可能である場合に、それぞれ限る。

注意

$u''(x) = E^x[\Phi \dots]$ のタイプの表現は、この式を用いた具体的な数値的評価にかなりの計算時間を要し実用的でないため省略した。

また、特殊な場合を除いて(35)式の計算には Y_T のマリアバン微分 $D_t Y_T$ を求める必要がある。これは容易に計算できて、以下を得る(内田・高橋[2005])。

$$D_t Y_T = \int_t^T r(u) D_t Y_u du + \int_t^T \sigma'(X_u) D_t Y_u dW_u + \sigma'(X_t) Y_t + \int_t^T \sigma''(X_u) \sigma(X_t) Y_u^2 Y_t^{-1} dW_u. \quad (37)$$

系2 X_t がBSモデルに従うとき、

$$u''(x) = E^x \left[\phi''(X_T) \frac{1}{x^2} X_T^2 \right] \quad (38)$$

$$= E^x \left[\phi'(X_T) \frac{1}{x^2 \sigma T} (W_T X_T - \sigma T X_T) \right] \quad (39)$$

$$= E^x \left[\phi(X_T) \frac{1}{x^2 \sigma^2 T^2} (W_T^2 - \sigma T W_T - T) \right] \quad (40)$$

$$= E^x \left[\Phi(X_T) \frac{1}{x^2 \sigma^3 T^3} \frac{1}{X_T} (W_T^3 - (3T + \sigma^2 T^2) W_T) \right]. \quad (41)$$

(3) アジア型オプションのデルタ

定理3 $\tilde{X}_t = \int_0^t X_s ds$ とする。ペイオフ関数が $\phi(\tilde{X}_T)$ で表されるときデルタは、

$$u'(x) = \frac{d}{dx} E^x[\phi(\tilde{X}_T)] = E^x[\phi'(\tilde{X}_T)\tilde{Y}_T] \quad (42)$$

$$= E^x \left[\phi(\tilde{X}_T) \cdot 2\delta(\sigma(X_t)^{-1} Y_t^2 \tilde{Y}_T^{-1}) \right] \quad (43)$$

$$= E^x \left[\phi(\tilde{X}_T) \cdot 2 \left\{ \tilde{Y}_T^{-1} \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t^2 dW_t + \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t^2 \tilde{Y}_T^{-2} \left(\int_t^T D_t Y_s ds \right) dt \right\} \right]. \quad (44)$$

ただし、(42)式は $\phi(z)$ が連続で有限個の点を除いて微分可能である場合に限る。

系3 X_t がBSモデルに従うとき、

$$u'(x) = E^x \left[\phi'(\tilde{X}_T) \frac{1}{x} \tilde{X}_T \right] \quad (45)$$

$$= E^x \left[\phi(\tilde{X}_T) \left\{ \frac{2}{x\sigma} \tilde{X}_T^{-1} \int_0^t X_t dW_t + \frac{1}{x} \right\} \right]. \quad (46)$$

(4) アジア型オプションのガンマ

定理4 $\tilde{X}_t = \int_0^t X_s ds$ とする。ペイオフ関数が $\phi(\tilde{X}_T)$ で表されるときガンマは、

$$u''(x) = \frac{d^2}{dx^2} E^x[\phi(\tilde{X}_T)] \quad (47)$$

$$= E^x[\phi''(\tilde{X}_T)\tilde{Y}_T^2 + \phi'(\tilde{X}_T)\tilde{Z}_T] \quad (48)$$

$$= E^x \left[\phi'(\tilde{X}_T) \left(2 \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t^2 dW_t + \tilde{Z}_T \right) \right]. \quad (49)$$

ただし、(48)式は $\phi(z)$ が C^1 級で有限個の点を除いて2回微分可能である場合に、(49)式は $\phi(z)$ が連続で有限個の点を除いて微分可能である場合に、それぞれ限る。

系4 X_t がBSモデルに従うとき、

$$u''(x) = E^x \left[\phi''(\tilde{X}_T) \frac{1}{x^2} \tilde{X}_T^2 \right] \quad (50)$$

$$= E^x \left[\phi'(\tilde{X}_T) \frac{1}{x\sigma} \int_0^T X_t dW_t \right]. \quad (51)$$

4 . 数値計算方法

本節では、デルタ、ガンマの数値的評価に関し、前節の定理・系の各式と、以下で紹介するペイオフ関数の分解法に基づく、モンテカルロ法を用いた効率的計算法を解説する。

一般に、 \mathbf{R}^d 値確率過程 $\mathbf{X}_u(0, z)$ ($0 \leq u \leq T, z \in \mathbf{R}^d$) が確率積分方程式、

$$\mathbf{X}_u(0, z) = z + \int_0^u V_0(\mathbf{X}_s(t, z)) ds + \int_0^u V(\mathbf{X}_s(t, z)) dW_s,$$

を満たすものとして⁵、ある関数 f に対して $E[f(\mathbf{X}_T(0, z))]$ をモンテカルロ法により近似することを考える。まず、オイラー＝丸山法により時間軸を n 等分して、この確率微分方程式を離散化する。すなわち、

$$\bar{\mathbf{X}}_u = z + \int_0^u V_0(\bar{\mathbf{X}}_{\eta(s)}) ds + \int_0^u V(\bar{\mathbf{X}}_{\eta(s)}) dW_s.$$

ただし、 $\eta(s) = [ns/T]T/n$ であり、 $[y]$ は y を超えない最大の整数を表す。このとき、各独立試行を N 回実行して得られたモンテカルロ法による近似値は、

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [f(\bar{\mathbf{X}}_T)]_j,$$

で表される。ここで、 $[U]_j$ ($j = 1, \dots, N$)は確率変数 U の j 番目の独立試行の結果である。

次に、ペイオフ関数の分解法の適用を考える。ペイオフ分解法とは局所化を用いた分散減少法を差す。3節ではスコロホッド積分を用いて、

$$u'(x) = E^x[\phi \times \text{weight}],$$

$$u''(x) = E^x[\phi \times \text{weight}],$$

のタイプの表現を与えた。しかし、このままモンテカルロ法を適用すると、多くの場合、“weight”の部分の分散が大きく収束が悪い。そこで、 ϕ を、

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

ϕ_1 : デルタでは連続で有限個の点を除いて微分可能

ガンマでは C^1 級で有限個の点を除いて2回微分可能

ϕ_2 : コンパクトな台を持つ

⁵ V_0, V は確率積分方程式が一意的強い解を持つための適当な数学的条件を満たす関数とする。

と分解（局所化）したうえで、 ϕ_1 に対しては微分（デルタなら1回、ガンマなら2回）して期待値をモンテカルロ法により計算し、 ϕ_2 に対してはスコロホッフ積分を用いてペイオフ関数を微分せずに期待値をモンテカルロ法により計算する。このとき、 ϕ_1 部分についてはペイオフ関数を微分したときの“weight”の分散が微分しないときに比べて小さくなる。一方、 ϕ_2 部分もペイオフ関数がコンパクトな台を持つため分散が大きくなるのが回避される。具体的には、ペイオフ関数の形によって以下の2つのタイプがあり、デルタに関して、

$$E^x[\phi'(X_T)\cdots] = E^x[\phi_1'(X_T)\cdots] + E^x[\phi_2(X_T)\cdots], \quad (52)$$

$$E^x[\phi'(X_T)\cdots] = E^x[\phi_1(X_T)\cdots] + E^x[\Phi_2(X_T)\cdots], \quad (53)$$

あるいはガンマに関して、

$$E^x[\phi''(X_T)\cdots] = E^x[\phi_1''(X_T)\cdots] + E^x[\phi_2'(X_T)\cdots], \quad (54)$$

$$E^x[\phi''(X_T)\cdots] = E^x[\phi_1(X_T)\cdots] + E^x[\Phi_2(X_T)\cdots], \quad (55)$$

などと計算することにより、さらに収束を速めることができる。

(1) $\phi(z) = (z-K)^+$ のタイプ

前節の結果に基づき数値計算を行うと、ペイオフ関数部分の台がコンパクトでないため分散が大きくなる。そこで、デルタについては $\phi = \phi_1 + \phi_2$ を、

ϕ_1 が連続で有限個の点を除いて微分可能
 ϕ_2 がコンパクトな台を持つ

となるように決め、

$$E^x[\phi'(X_T)\cdots] = E^x[\phi_1'(X_T)\cdots] + E^x[\phi_2(X_T)\cdots], \quad (56)$$

とする。ガンマに対しては、

ϕ_1 が C^1 級で有限個の点を除き2回微分可能
 ϕ_2 が連続で有限個の点を除き微分可能
 ϕ_2' がコンパクトな台を持つ

となるように決め、

$$E^x[\phi''(X_T)\cdots] = E^x[\phi_1''(X_T)\cdots] + E^x[\phi_2'(X_T)\cdots], \quad (57)$$

として数値計算すれば収束が速くなる。具体的にはプレーンバニラ・オプションのデルタ、ガンマについて、次のようにペイオフ関数を分解した(図表1)。

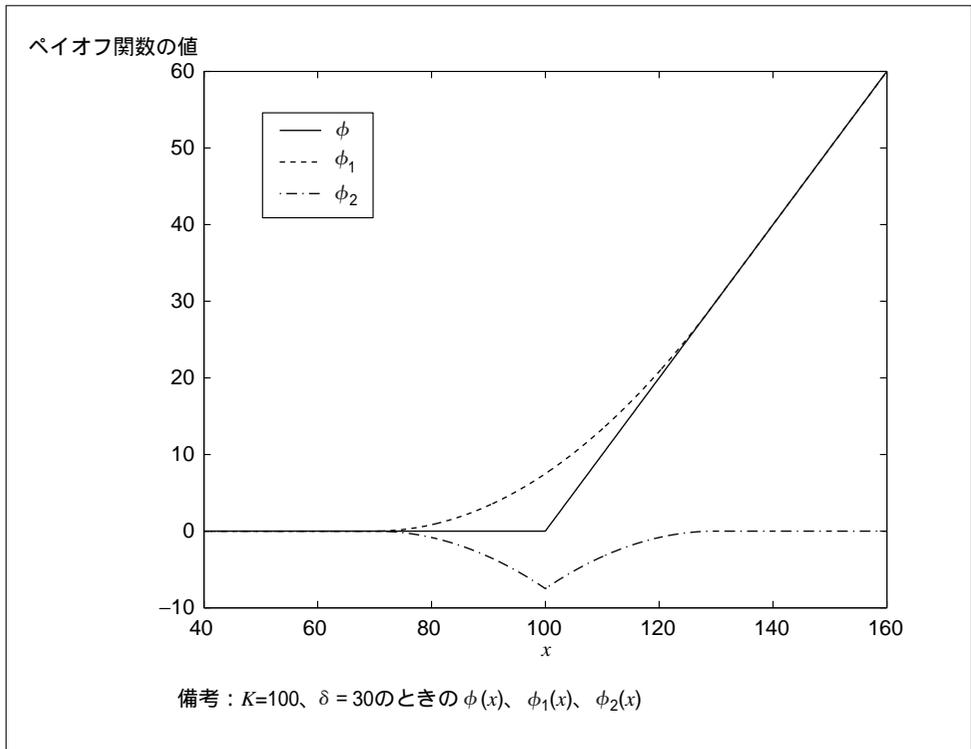
$$\phi = \phi_1 + \phi_2, \quad (58)$$

$$\phi_1(z) = \begin{cases} 0 & \text{for } z \in (-\infty, K - \Delta) \\ \frac{1}{4\Delta} (z - (K - \Delta))^2 & \text{for } z \in [K - \Delta, K + \Delta) \\ z - K & \text{for } z \in [K + \Delta, \infty) \end{cases}, \quad (59)$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } z \in (-\infty, K - \Delta) \\ -\frac{1}{4\Delta} (z - (K - \Delta))^2 & \text{for } z \in [K - \Delta, K) \\ -\frac{1}{4\Delta} (z - (K + \Delta))^2 & \text{for } z \in [K, K + \Delta) \\ 0 & \text{for } z \in [K + \Delta, \infty) \end{cases}. \quad (60)$$

また、アジア型オプションの場合は上式の z を $\frac{1}{T}\bar{z}$ に置き換えたものを用いた⁶。

図表1 $\phi(x) = (x - K)^+$ の分解



⁶ $\frac{1}{T}\bar{z}$ は原資産価格を時刻0から時刻 T の間で平均したものを示す。

(2) $\phi(z) = 1_{\{K \leq z \leq K'\}}$ のタイプ

デジタル・オプションに関しては、ペイオフ関数がコンパクトな台であるので上の方法を用いる必要はない。ただ、2種類の等式が得られているので、その被積分部分の相関係数を用いて収束を速くできる可能性がある。具体的には、デジタル・オプションのデルタ、ガンマに対して $\sigma_1^2 = \text{Var}[\phi(X_T)\cdots]$ 、 $\sigma_2^2 = \text{Var}[\Phi(X_T)\cdots]$ 、 $\sigma_{12} = \text{Cov}[\phi(X_T)\cdots, \Phi(X_T)\cdots]$ を用いて、

$$\alpha = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}, \quad (61)$$

とする。このときに、デルタ、ガンマを、

$$u'(x) = \alpha E^x[\phi(X_T)\cdots] + (1-\alpha) E^x[\Phi(X_T)\cdots], \quad (62)$$

$$u''(x) = \alpha E^x[\phi(X_T)\cdots] + (1-\alpha) E^x[\Phi(X_T)\cdots], \quad (63)$$

により求めた。ただし、(62)式の右辺の第1項は(31)式、第2項は(32)式であり、(63)式の第1項は(40)式、第2項は(41)式である。これは、

$$\phi = \phi_1 + \phi_2, \quad (64)$$

$$\phi_1(z) = \alpha\phi(z), \quad (65)$$

$$\phi_2(z) = (1-\alpha)\Phi(z), \quad (66)$$

としたものに相当し、ここで用いた α は、デルタとガンマを、それぞれ(62)式、(63)式に基づいてモンテカルロ法で求める際に、標本分散を最小にするものである。

5 . 数値計算例と結果の考察

本節では、前節で説明した数値計算法に基づきプレーンバニラ・オプション、デジタル、アジア型各オプションのデルタ、ガンマの数値例を紹介する。特に、原資産価格の確率モデルとして、BSモデルとCEVモデルを用いた。BSモデルは3節の系1で示したように、原資産価格 X が同値マルチンゲール測度のもとで、

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t \\ X_0 = x \end{cases}, \quad (67)$$

に従うモデルである。ただし、 $x = 100$ 、 $r = 0.1$ 、 $\sigma = 0.2$ とする。CEVモデルは、原資産価格 X が同値マルチンゲール測度のもとで、

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt + \sigma X_t^\gamma dW_t \\ X_0 = x \end{cases}, \quad (68)$$

に従うモデルである。ただし、 $x=100$ 、 $r=0.1$ 、 $\sigma=0.2$ 、 $\gamma=0.5$ とおく。

また、派生商品のペイオフ関数は、満期日を $T=1$ [年]として、

$$\begin{aligned} \text{プレーンバニラ・オプション} &: \phi(X_T) = (X_T - K)^+, K=100 \\ \text{デジタル・オプション} &: \phi(X_T) = 1_{\{K \leq X_T \leq K'\}}, K=100, K'=110 \\ \text{アジア型オプション} &: \phi(\tilde{X}_T) = (\frac{1}{T}\tilde{X}_T - K)^+, K=100 \end{aligned}$$

とする。

具体的な数値計算については、(67)式、(68)式の確率微分方程式をオイラー＝丸山法により離散化し、デルタ、ガンマを“差分法”(初期値の変動を $\epsilon=0.1$ とした)、3節の定理および系で導出した“ $E^x[\phi' \dots]$ ”、“ $E^x[\phi \dots]$ ”、“ $E^x[\Phi \dots]$ ”のタイプの表現、および4節で説明したペイオフ関数の分解法を利用してモンテカルル口法によるシミュレーションを実施した。ただし、1年を1,000分割した。

離散化することにより X_t が負になる確率があるが、 X_t の代わりに $\max(X_t, 0)$ を考えるものとする。また、CEVモデルにおいては $\sigma(z)$ は $z=0$ のまわりで係数条件を満たさないが、 C^∞ 関数で近似することで回避する。すなわち、 $g(z)$ を十分に小さい ϵ に対して $z \geq \epsilon$ では $g(z) = \sigma(z)$ となるような C^∞ 関数とし、その $g(z)$ を $\sigma(z)$ の代わりに用いる。なお、今回の場合、 X_0 の水準が高く、時間分割も細かくしたため、 $X_t < 0$ となることはなかった。

このように $\{X_t\}$ を離散近似して得られたものの N 個の独立試行の結果を $\{X_t^{(j)}\}_{j=1, 2, \dots, N}$ ($t = 1/1000, 2/1000, \dots, T = 1$)とする。 $\{Y_t\}$ 、 $\{Z_t\}$ などに対しても離散近似したものを $\{Y_t^{(j)}\}_{j=1, 2, \dots, N}$ 、 $\{Z_t^{(j)}\}_{j=1, 2, \dots, N}$ で表す。期待値の被積分部分を F で表すとして、 $\{X_t^{(j)}\}$ などを用いて近似したものを $F^{(j)}$ で表す⁷。このとき、パスを N 個発生させた時点での $E^x[F]$ の推定値として $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F^{(j)}$ を用いる。

それぞれの方法の推定値の収束の速さの目安として、真値 $E[F]$ に対する誤差率の標本標準偏差 ($= [1/N \sum_{j=1}^N \{(F^{(j)} - E[F]) / E[F]\}^2]^{1/2}$)を用いる。ただし $E[F]$ はBSモデルのプレーンバニラ・オプション、デジタル・オプションに対しては、解析的に得られる値を用いたが、それ以外では、最も収束が速いと思われるもの(CEVモデルにおけるデジタル・オプションのデルタ、ガンマは $E[\phi \dots]$ の表現 デルタ:(27)式、ガンマ:(36)式、CEVモデルにおけるアジア型オプションのデルタは $E[\phi' \dots]$ の表現(42)式、それ以外では4節で説明した組合せのタイプ)を用いて $F^{(j)}$ を100万回発生させたときの標本平均を真値とした。

⁷例えば(26)式であれば $F = \phi(X_T)Y_T$ 、 $F^{(j)} = \phi(X_T^{(j)})Y_T^{(j)}$ 。

N回パスを発生させたときの真値 $E[F]$ に対する推定値の比の分散は、

$$V \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F^{(j)} / E[F] \right] = \frac{1}{N} V[F^{(j)}] / E[F]^2 ,$$

である。よって、これをある所与の値に押さえたいとき、必要なパスの発生回数は誤差率の標準偏差の2乗に比例するといえる。

各方法の比較の結果は、図表2、3のとおりである。また以下では、パスの発生回数と対応する標本平均値をプロットしたグラフを挙げる。なお、各図の水平線はおのこの、真値（細実線）、真値+1%（細破線）、真値-1%（細破線）の値を示し、図に関するその他の事項は各図表に付した。以下では、各ケースについての考察を述べる。

図表2 BSモデルでの比較

	ブレンバニラ・オプション		デジタル・オプション		アジア型オプション	
	デルタ	ガンマ	デルタ	ガンマ	デルタ	ガンマ
真値	0.72575	0.016660	-0.0013350	-0.00038870	0.65168	0.029189
差分法 $\epsilon=0.1$	0.72561 (0.746)	0.016139 (18.61)	-0.0004071 (290.1)	-0.0280500 (19930)	0.65206 (0.753)	0.032063 (15.02)
$E[\phi^{\dots}]$	0.72563 (0.747)	0.016693 (2.364)	- 1	- 1	0.65211 (0.753)	0.029212 (2.423)
$E[\phi^{\dots}]$	0.72735 (2.187)	0.016744 (8.823)	-0.0013457 (2.887)	-0.00038879 (2.099)	0.65193 (2.291)	- 2
$E[\Phi^{\dots}]$	0.72670 (5.646)	0.016584 (27.15)	-0.0012956 (12.34)	-0.00038812 (2.897)	- 2	- 2
組合せ	0.72642 (0.292) $\delta=65$	0.016559 (0.566) $\delta=45$	-0.0013438 (2.876) $\alpha=0.96$	-0.00038854 (1.509) $\alpha=0.63$	0.65207 (0.410) $\delta=30$	0.029140 (0.713) $\delta=20$

備考：真値はブレンバニラとデジタルの各オプションに関しては、解析値、アジア型オプションに対しては「組合せ」による100万回に試行結果の平均値を用いた。上段は10万回の試行結果の平均値（真値に推定とは異なる乱数を用いた）。下段（ ）は10万回の試行における各試行結果の誤差率の標準偏差。組合せの δ 、 α は用いたパラメータの値。

- 1 バイオ関数が微分不可能であるため空欄。
- 2 ブレンバニラ・オプションの結果から不要であると類推されるため省略。

図表3 CEVモデルでの比較

	プレーンバニラ・オプション		デジタル・オプション		アジア型オプション	
	デルタ	ガンマ	デルタ	ガンマ	デルタ	ガンマ
真値	0.70885	0.017527	-0.0017810	-0.000402992	0.64313	0.029741
差分法 $\epsilon=0.1$	0.70844 (0.700)	0.017800 (19.23)	-0.0014025 (225.0)	-0.0244306 (19896)	0.64393 (0.726)	0.030851 (14.81)
$E[\phi' \dots]$	0.70847 (0.701)	0.017540 (2.034)	- 1	- 1	<u>0.64393</u> (0.727)	0.029738 (2.343)
$E[\phi \dots]$	0.71043 (2.089)	0.017633 (8.155)	<u>-0.0017844</u> (2.630)	<u>-0.00040296</u> (2.116)	- 3	- 2
$E[\Phi \dots]$	0.71052 (5.923)	- 4	-0.0017304 (10.88)	- 4	- 2	- 2
組合せ	<u>0.70946</u> (0.238) $\delta=65$	<u>0.017524</u> (0.549) $\delta=45$	-	-	-	<u>0.029669</u> (0.745) $\delta=20$

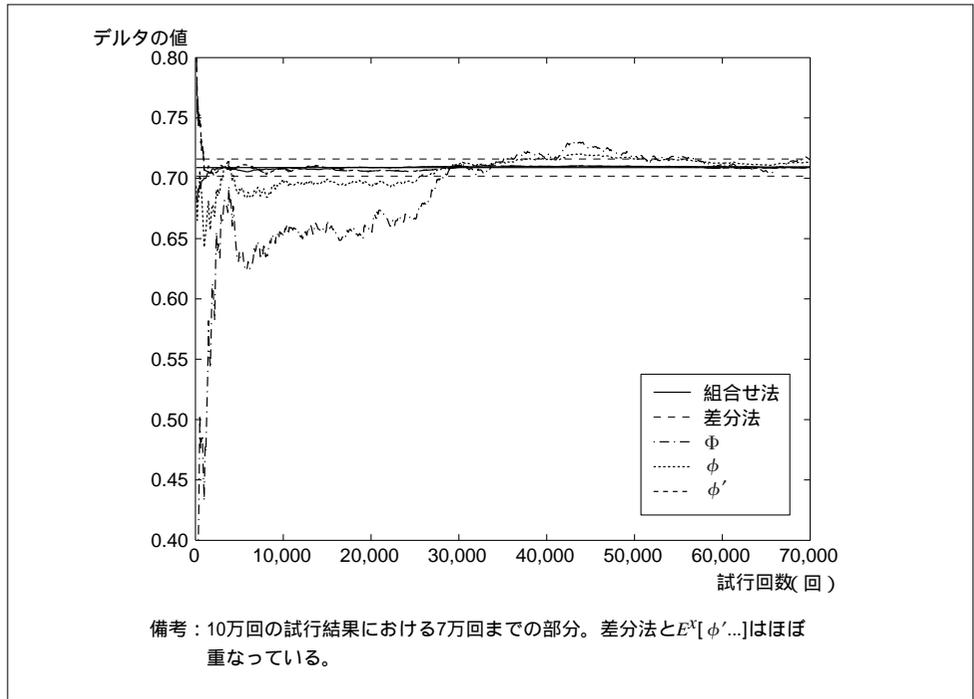
備考：真値は一番速い計算法（表で下線を付けたもの）による10万回に試行結果の平均値を用いた。上段は10万回の試行結果の平均値（真値の推定とは異なる乱数を用いた）。下段（ ）は10万回の試行における各試行結果の誤差率の標準偏差。組合せの δ は用いたパラメータの値。

- 1 ペイオフ関数が微分不可能であるため空欄。
- 2 プレーンバニラ・オプションの結果から不要であると類推されるため省略。
- 3 5節(5)「アジア型オプションのデルタ」参照。
- 4 3節定理2の注意参照。

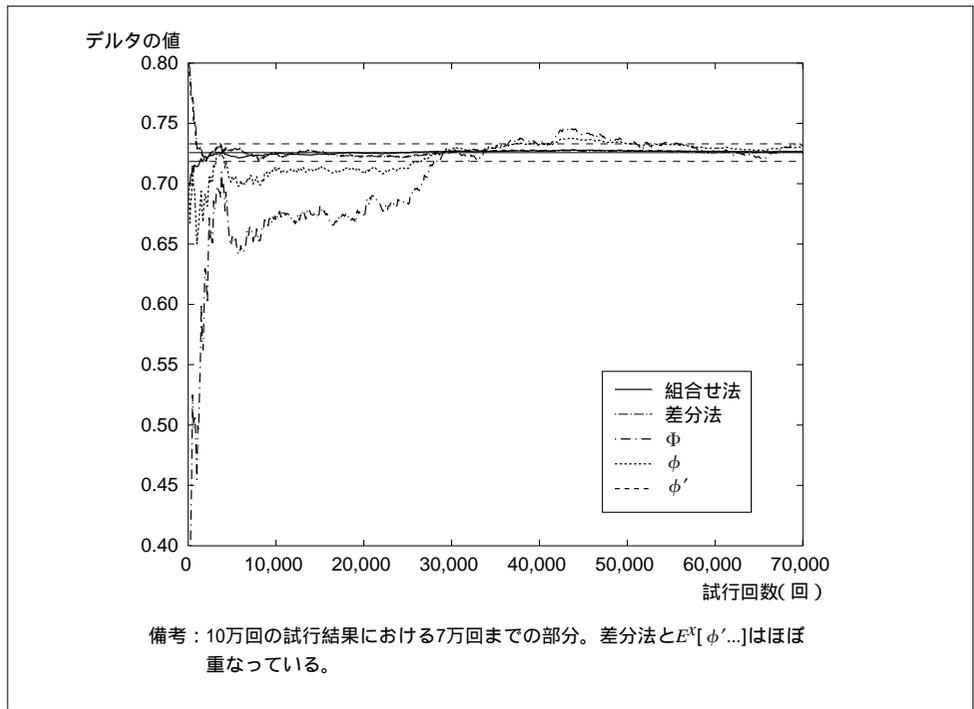
(1) プレーンバニラ・オプションのデルタ（図表4、5）

BSモデル、CEVモデル共に、ペイオフ関数を微分した $u'(x)=E^x[\phi'(X_T)\dots]$ ((26)式)の表現を用いた計算と差分法による計算とではほとんど同じ結果になっている。さらに、ペイオフ関数の微分回数が減り $u'(x)=E^x[\phi(X_T)\dots]$ ((27)式)、 $u'(x)=E^x[\Phi(X_T)\dots]$ ((28)式)となるに従い、収束が遅くなっている。また、Fournié *et al.* [1999] がBSモデルで提唱した局所化が、CEVモデルにおいても誤差率の標準偏差を減らし収束を速くするのに有効であることがわかった。

図表4 プレーンバニラ・オプションのデルタ（BSモデル）



図表5 プレーンバニラ・オプションのデルタ（CEVモデル）

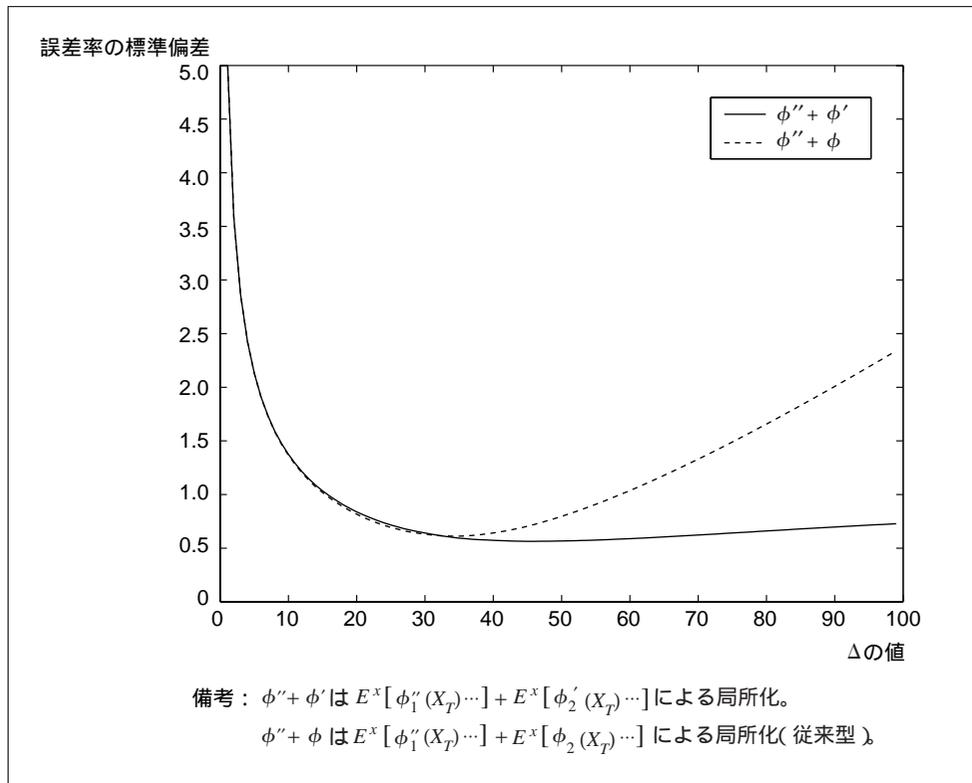


(2) プレーンバニラ・オプションのガンマ (図表6、7、8)

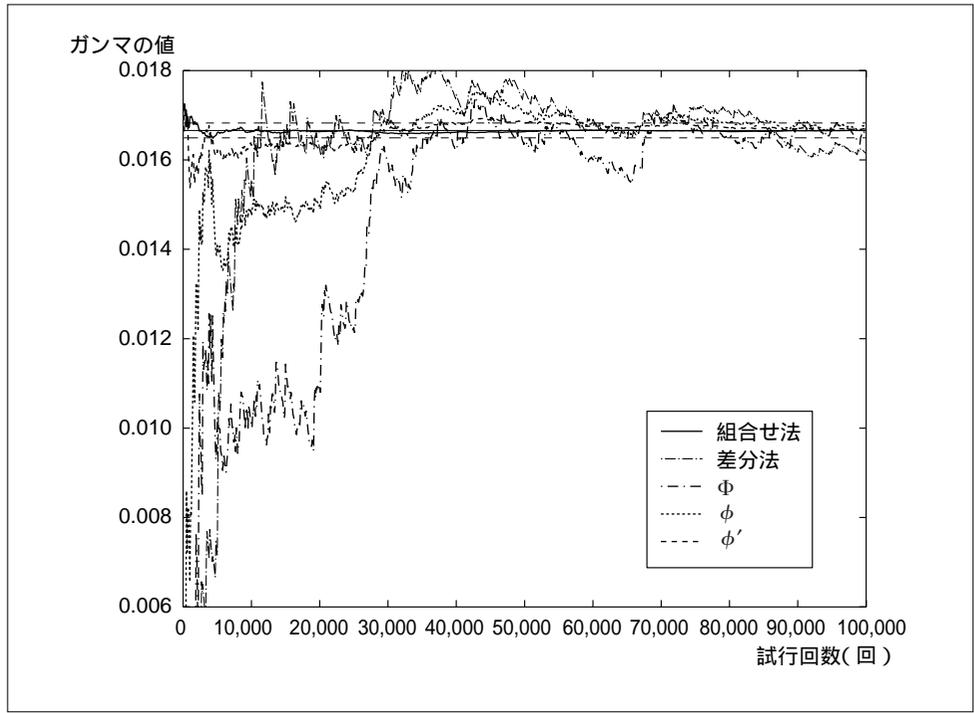
差分法では収束が非常に遅く、3節の結果に基づく $E^x[\phi'(X_T)\dots]$ ((35)式)や $E^x[\phi(X_T)\dots]$ ((36)式)のタイプが有効であることがわかる。局所化に関しては、新しく示した $E^x[\phi'(X_T)\dots]$ ((35)式)のタイプの表現を用い、 $E^x[\phi''(X_T)\dots]$ ((34)式)と $E^x[\phi'(X_T)\dots]$ ((35)式)を組み合わせる方法を採用したが、Fournié *et al.* [1999]の提唱した $E^x[\phi''(X_T)\dots]$ ((34)式)と $E^x[\phi(X_T)\dots]$ ((36)式)を組み合わせる方法と比較する必要がある。

局所化の際、ペイオフ関数を分解する関数の形を事前に決めるが、例えば(59)式と(60)式に分解する場合、 ϕ_2 の台の幅を表すパラメータ Δ を決める必要がある。そこで、パラメータ Δ に対して誤差率の標準偏差を調べた(図表6)。グラフから、Fournié *et al.* [1999]の方法、新しい方法共に Δ が小さいときには局所化の効果が現れずに誤差率が大きくなっていることがわかる。また、 Δ が大きい場合は、新しい方法がFournié *et al.* [1999]の方法に比べて誤差率が小さく Δ に対して安定的であることがわかる。これは、 $E^x[\phi'(X_T)\dots]$ ((35)式)と $E^x[\phi(X_T)\dots]$ ((36)式)を比べたとき $E^x[\phi'(X_T)\dots]$ の方が誤差率が小さく、その分パラメータ Δ が大きくなっても、それほど全体の誤差率が大きくならないためであると思われる。

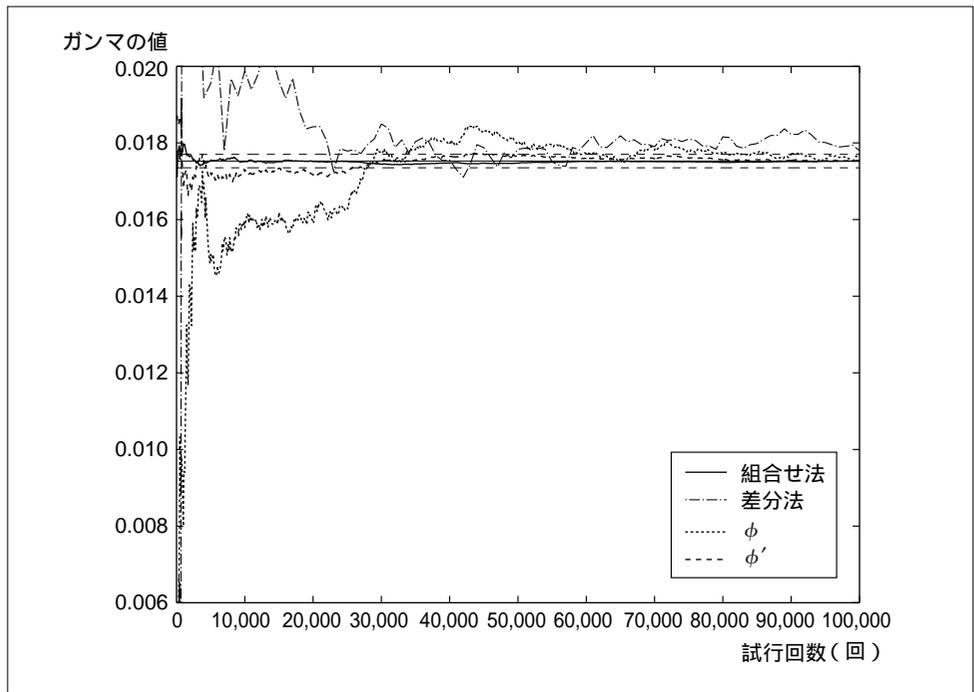
図表6 局所化の比較



図表7 プレーンバニラ・オプションのガンマ (BSモデル)



図表8 プレーンバニラ・オプションのガンマ (CEVモデル)



(3) デジタル・オプションのデルタ (図表9、10)

BSモデル、CEVモデル共に差分法では10万回程度の計算回数では収束はみられなかった。これに対し、3節の $E^x[\phi(X_T)\dots]$ ((27)式)を用いた計算はより速く収束している。ペイオフ関数の分解法に関しては、次に述べるガンマほどの効果はみられなかった。これは、2つの公式を用いたシミュレーションの誤差率の分散の差が大きいため、分散を最小にする α が0.96程度と1に非常に近くなり $E^x[\phi(X_T)\dots]$ のみを用いた計算と大差がないためである。

(4) デジタル・オプションのガンマ (図表11、12)

デジタル・オプションのデルタと同様に、差分法では収束がみられず、また、 $E^x[\phi(X_T)\dots]$ ((36)式)に基づく計算法は有効である。BSモデルにおけるペイオフ関数の分解法については、デルタとは異なり、ある程度有効であるといえる。なお、最適な α は0.63程度、相関係数は-0.22程度であった。他のオプションに対してもこの方法を用いたが、デジタル・オプションのガンマのみで有効であった。他のオプションでは、デジタル・オプションのデルタの場合と同様に、2つの公式を用いたシミュレーションの誤差率の分散の差が大きいため、最適な α を求めても1に非常に近い値になってしまうためであると思われる。

(5) アジア型・オプションのデルタ (図表13、14)

ブレンバニラ・オプションのデルタと類似した結果となった。これは、ペイオフ関数が共通であるためである。なお、CEVモデルにおける局所化の数値計算は省略した。これは、 $E^x[\phi(\tilde{X}_T)\dots]$ ((44)式)の計算には、パスごとに2重積分を数値的に求める必要があり、パス1回の計算に時間分割数の2乗のオーダーの時間を要し、実用に堪えないためである。

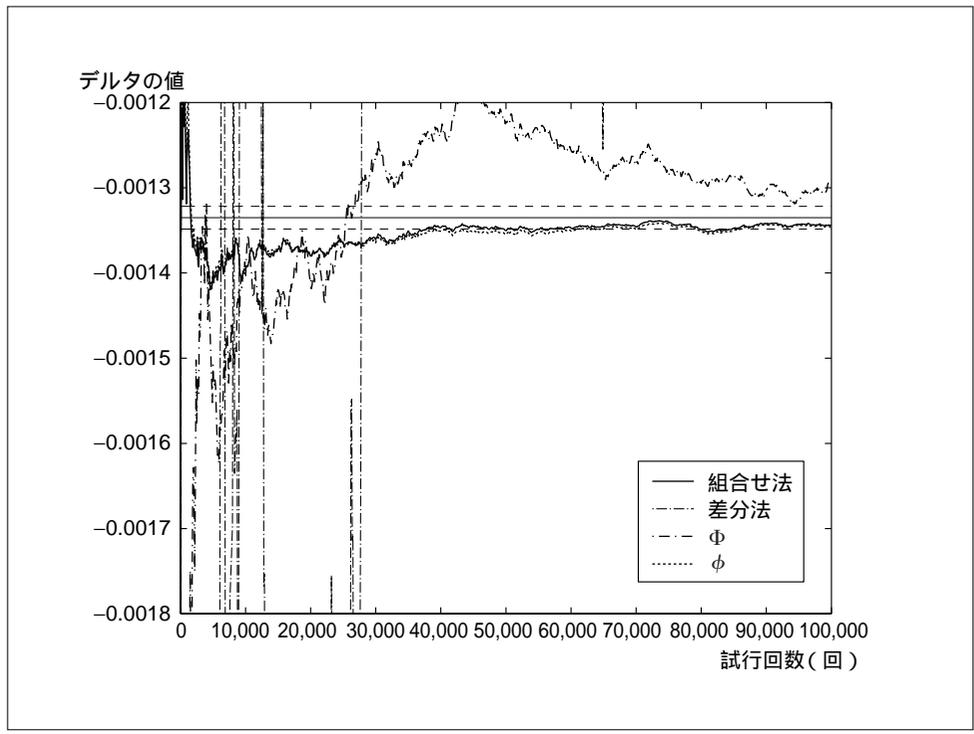
(6) アジア型・オプションのガンマ (図表15、16)

新しく示した $E^x[\phi'(\tilde{X}_T)\dots]$ ((48)式)の表現を用いることにより、差分法に比して収束が大幅に速くなった。また、局所化を用い、 $E^x[\phi''(\tilde{X}_T)\dots]$ ((47)式)のタイプの公式と組み合わせることにより、さらに速くなることがわかった。

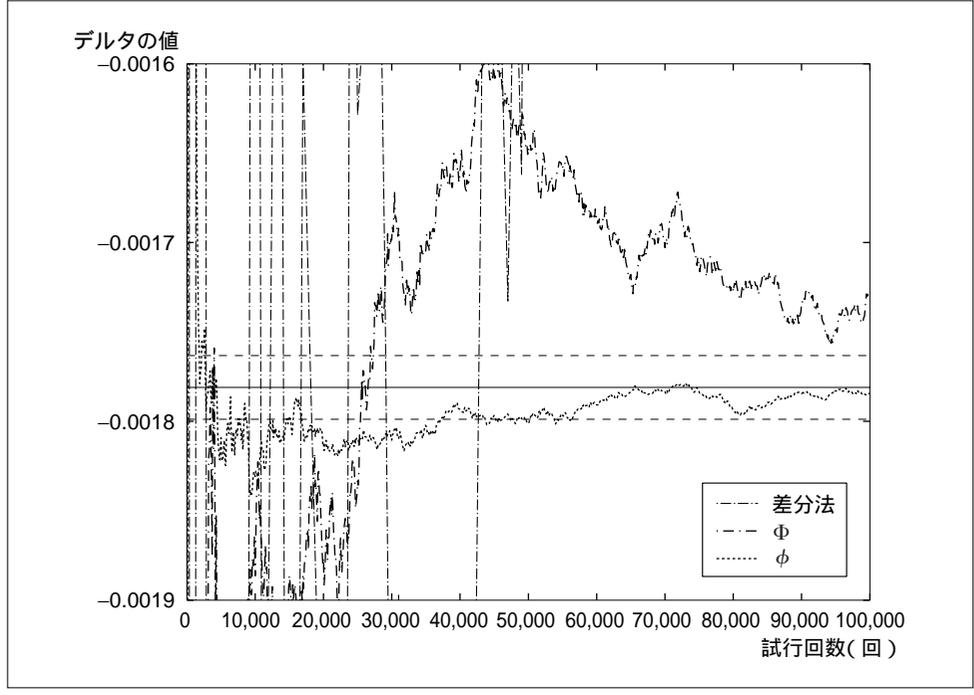
(7) 時間分割数と収束 (図表17~20)

ブレンバニラ・オプションとアジア型オプションのガンマに対してモンテカルロ法における時間分割数と収束の関係を調べ、新しい数値計算法、特に組合せ法が極めて効率的であることを示した。

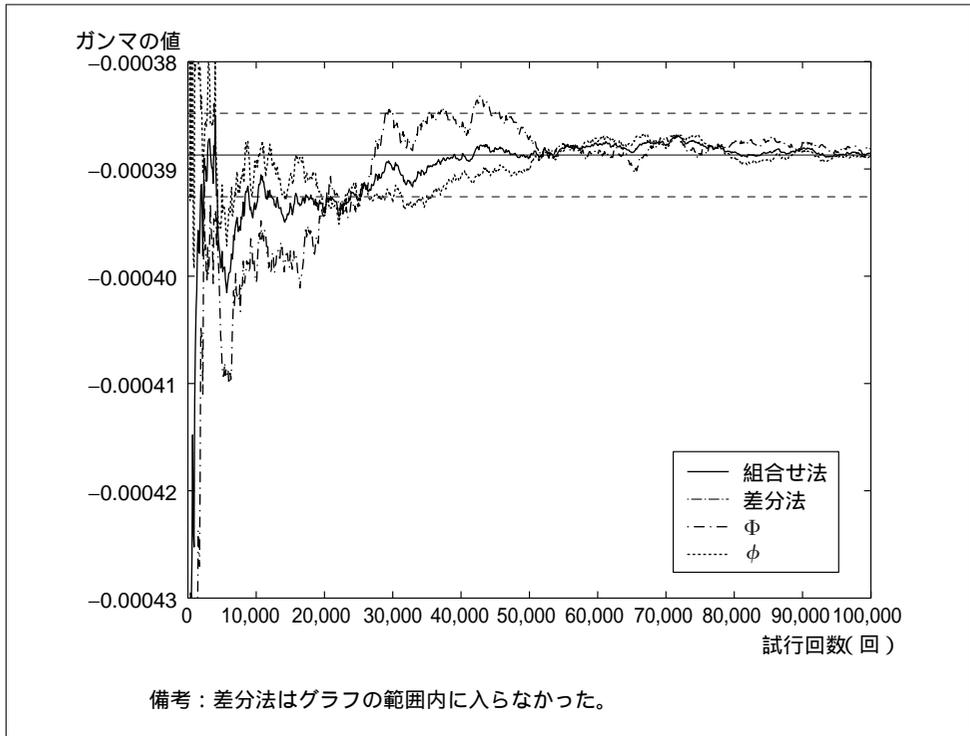
図表9 デジタル・オプションのデルタ (BSモデル)



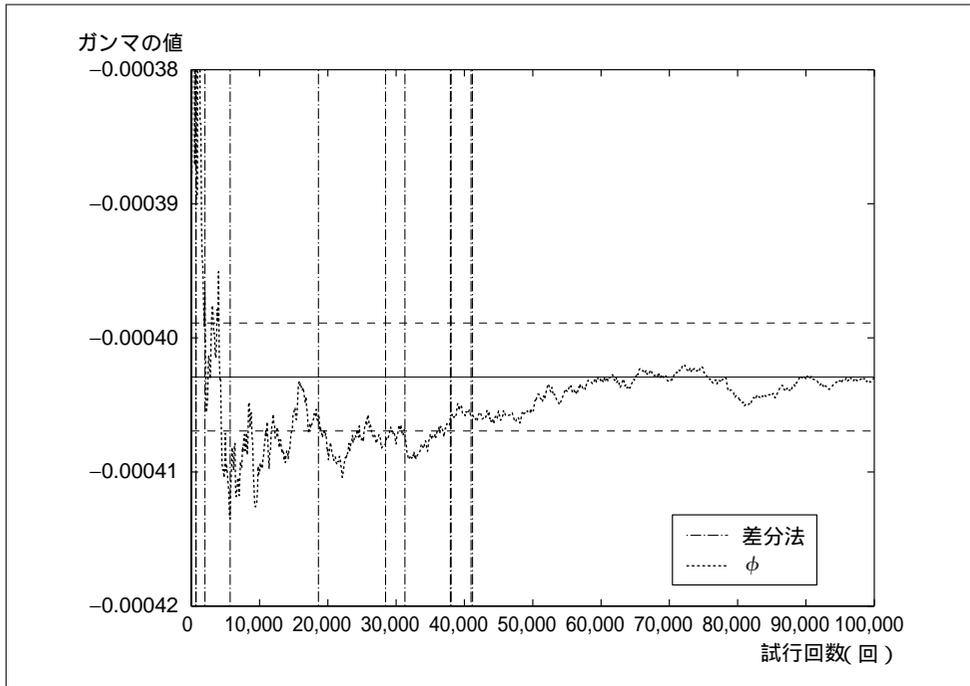
図表10 デジタル・オプションのデルタ (CEVモデル)



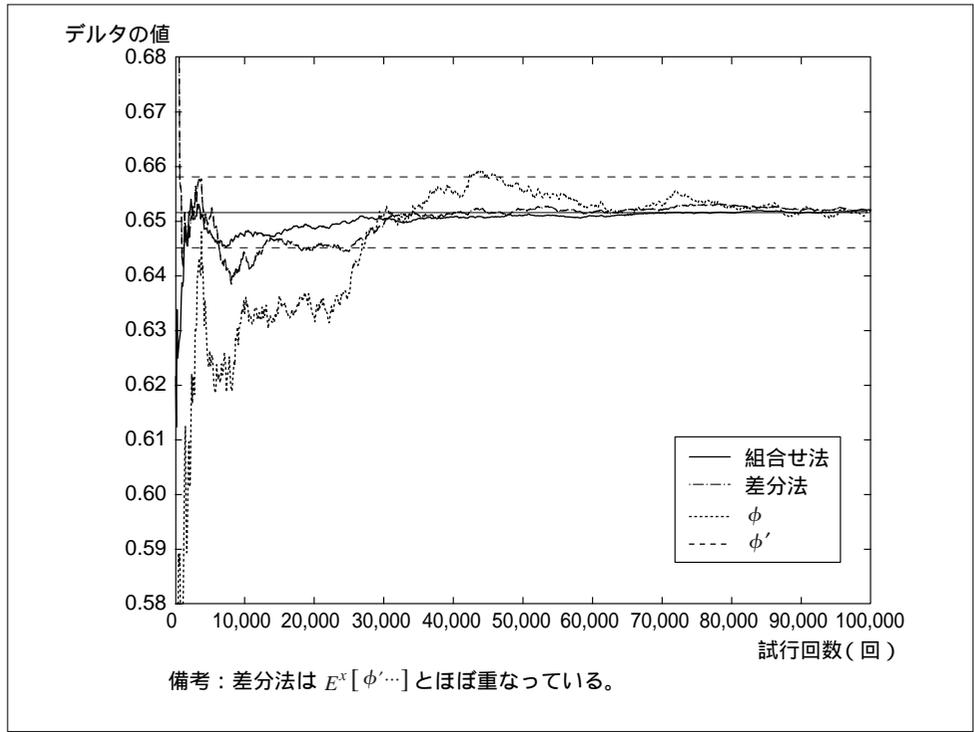
図表11 デジタル・オプションのガンマ (BSモデル)



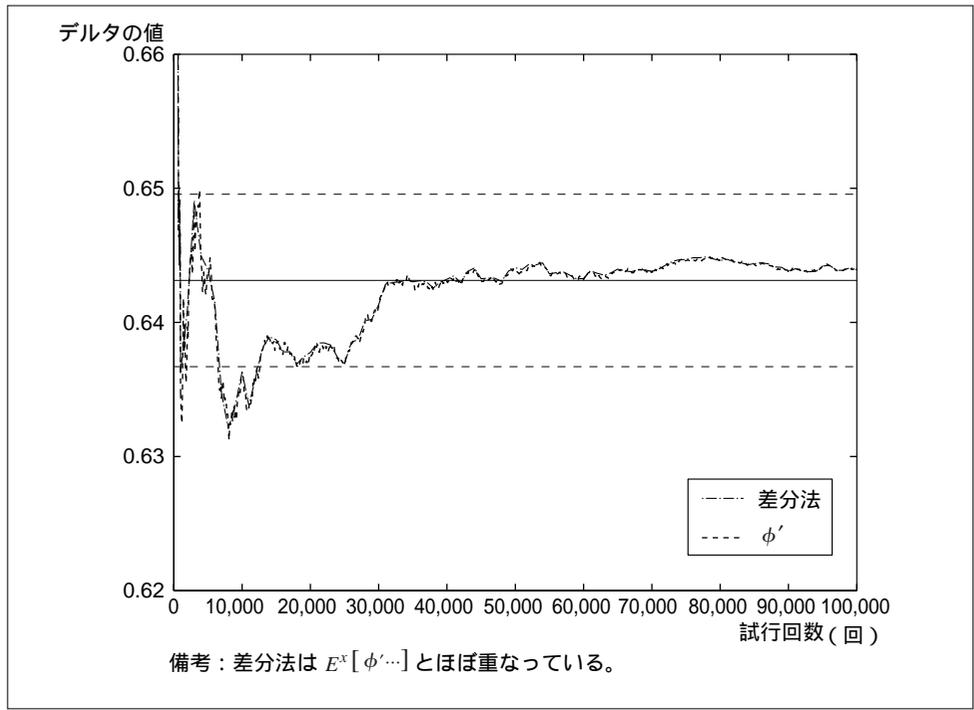
図表12 デジタル・オプションのガンマ (CEVモデル)



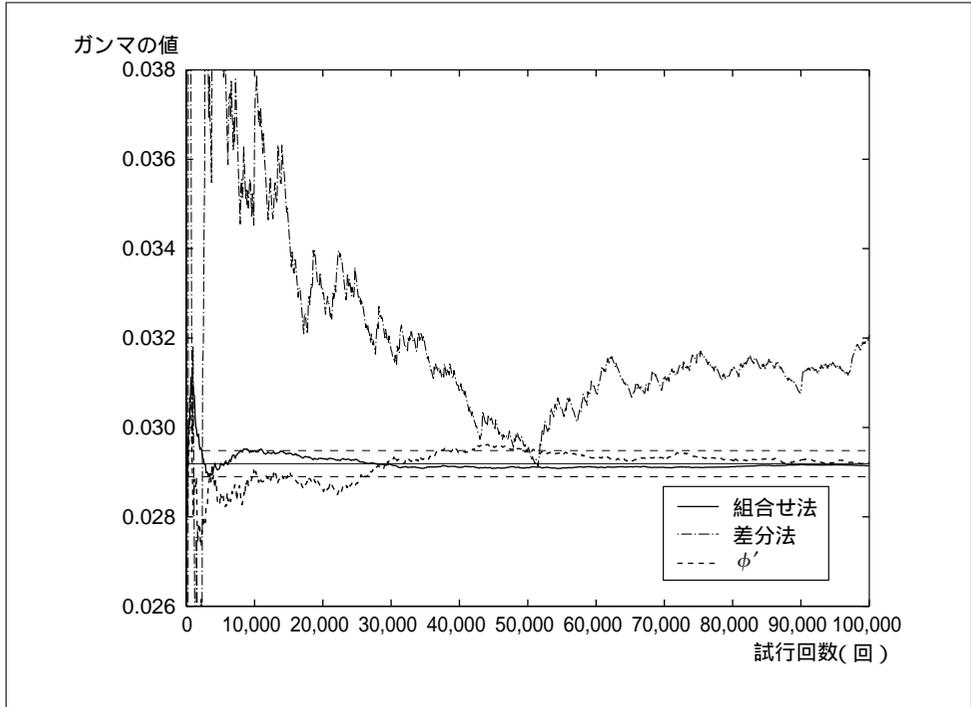
図表13 アジア型オプションのデルタ (BSモデル)



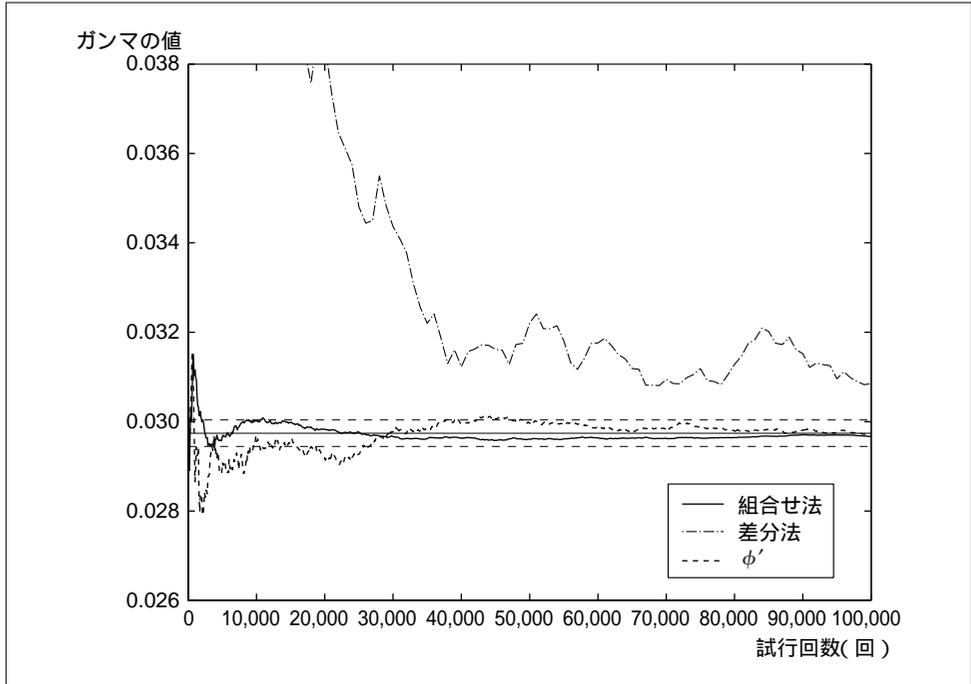
図表14 アジア型オプションのデルタ (CEVモデル)



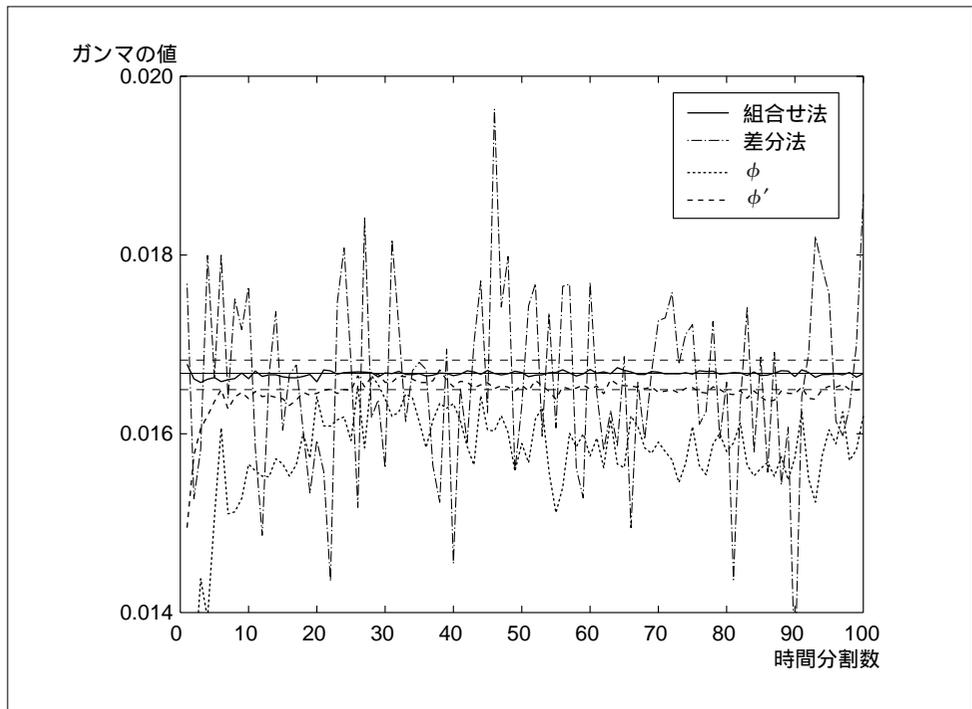
図表15 アジア型オプションのガンマ (BSモデル)



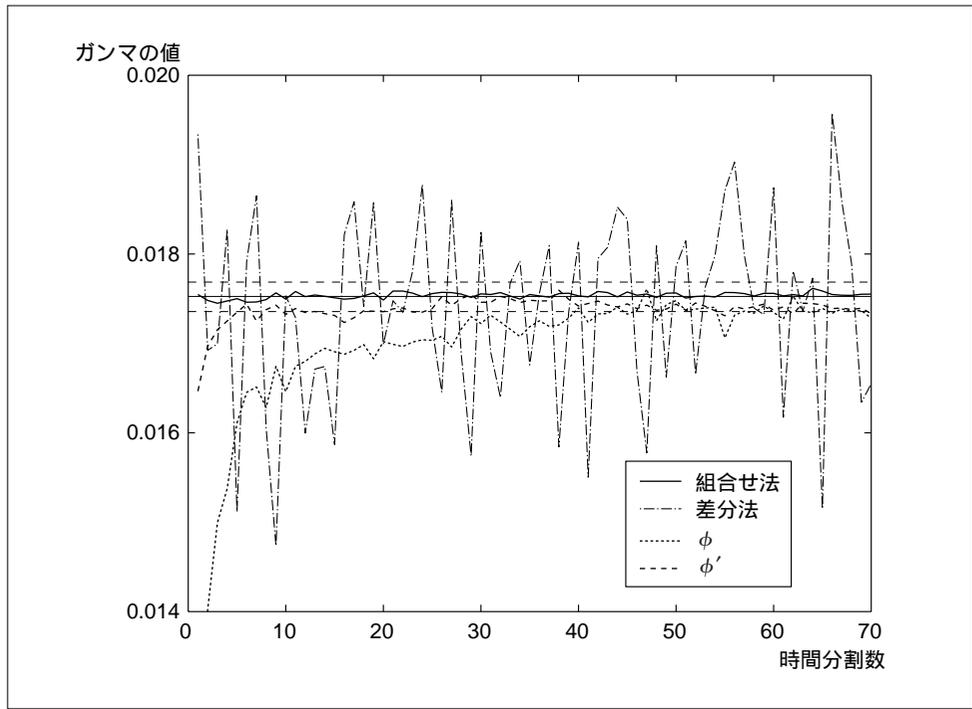
図表16 アジア型オプションのガンマ (CEVモデル)



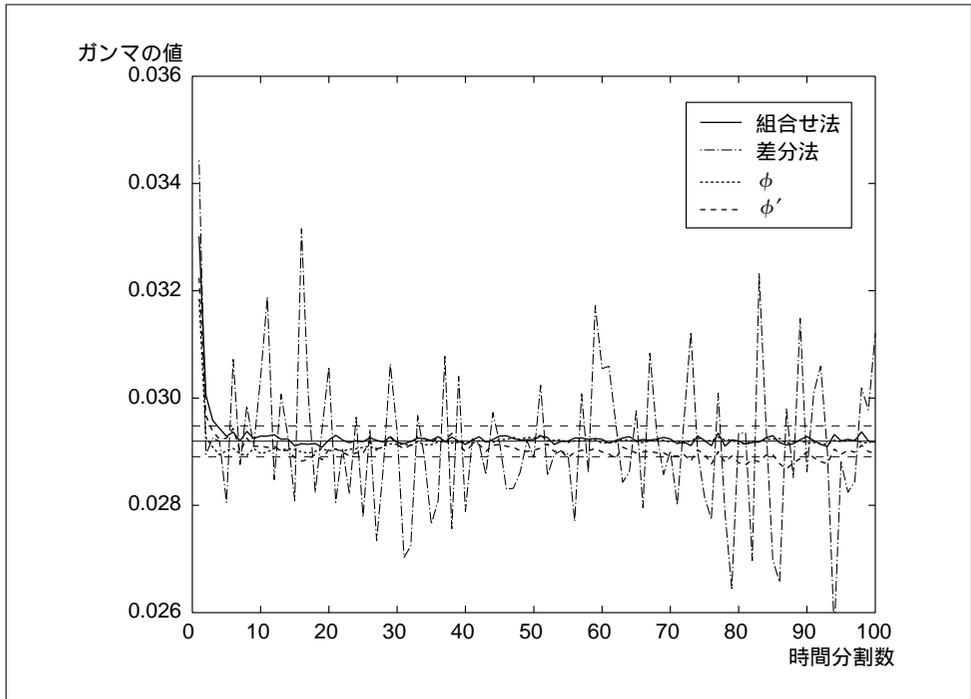
図表17 時間分割数と収束 プレーンバニラ・オプションのガンマ (BSモデル)



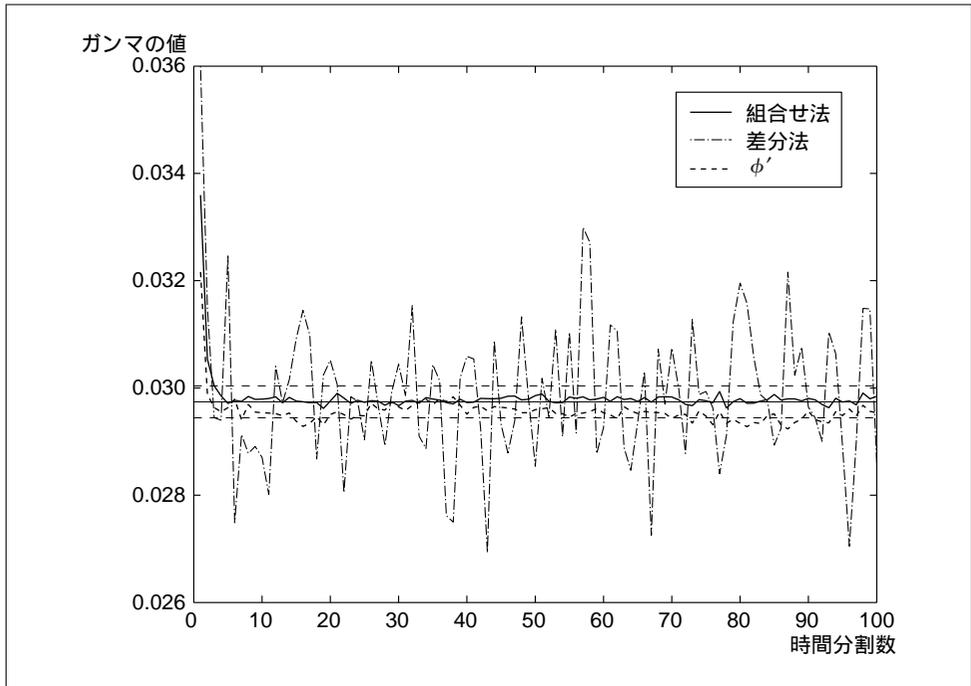
図表18 時間分割数と収束 プレーンバニラ・オプションのガンマ(CEVモデル)



図表19 時間分割数と収束 アジア型オプションのガンマ (BSモデル)



図表20 時間分割数と収束 アジア型オプションのガンマ (CEVモデル)



6 . おわりに

本稿では、ガンマに対して ϕ 、 ϕ'' ではなく ϕ' を用いた、

$$u''(x) = E^x[\phi' \times \text{weight}] , \quad (69)$$

のタイプの公式を導出した。これにより、アジア型オプションのガンマに関しては、差分法より大幅に効率的なモンテカルロ法による数値計算が可能となった。さらに、プレーンバニラ・オプションに関しては、この表現を用いた局所化が、Fournié *et al.* [1999] の方法よりも優れていることを示した。

また、Fournié *et al.* [1999] の結果を実務的にはより重要となるBSモデルを含む一般のモデルに拡張し、今まで明示されていなかった証明も示した。

この中で、ペイオフ関数 ϕ に対して、

$$u'(x) = E^x[\Phi \times \text{weight}] , \quad (70)$$

$$u''(x) = E^x[\Phi \times \text{weight}] , \quad (71)$$

のタイプの公式も導出した。デジタル・オプションに関しては、ペイオフ関数がコンパクトな台であるため局所化する必要はないが、この表現を用いたペイオフ関数の分解が有効である場合があることも示した。

最後にBSモデルとCEVモデルを用いて数値例を計算し、われわれの方法の有効性を検証・確認した。ここでは、プレーンバニラ・オプションとアジア型オプションのガンマに対してモンテカルロ法における時間分割数と各計算法の収束の関係も調べ、新しい数値計算法が効率的であることを示した。

補論．定理の証明

(1) 定理1 (プレーンバニラ・オプション、デジタル・オプションのデルタ) の証明

まず、 $\phi \in C_0^\infty := \{\text{コンパクトな台の上の } C^\infty \text{関数}\}$ で示す。一般の $\phi \in L^2$ に対しては後で示す。

(i) $\phi \in C_0^\infty$ のとき、

$$\frac{1}{h} \{ \phi(X_T^{x+h}) - \phi(X_T^x) \} \rightarrow \phi'(X_T^x) Y_T^x \quad a.s.(h \rightarrow 0), \quad (\text{A-1})$$

である。ただし、 X_T^x, X_T^{x+h} はそれぞれ $X_0 = x, x+h$ のときの X_T を表す。 Y_T^x も同様である。

今、 $\phi \in C_0^\infty$ より ϕ' が有界なので、左辺はある $M > 0$ を用いて、

$$\frac{1}{h} \{ \phi(X_T^{x+h}) - \phi(X_T^x) \} \leq M \left| \frac{X_T^{x+h} - X_T^x}{h} \right|, \quad (\text{A-2})$$

と評価することができる。さらに、右辺は一樣可積分である (例えば、Protter [2004] p. 301 の定理37) よって、

$$u'(x) = E \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(X_T^{x+h}) - \phi(X_T^x)}{h} \right] = E^x [\phi'(X_T) Y_T]. \quad (\text{A-3})$$

これで (26) 式が示された。

以下の証明は次のステップを踏んでいることに注意するとよい。

(20) 式または (21) 式を代入して $D_t X_T$ を作る。

$D_t = (\phi(X_T)) = \phi'(X_T) D_t X_T$ より、定義1 [スコロホッド積分] を用いてペイオフ関数の微分を1回減らす。

スコロホッド積分 $\delta(\dots)$ 内を適合過程の部分 u と \mathcal{F}_T -可測な部分 F に分けて、性質4を用いる。

$\rightarrow \delta(u)$ に相当する部分は u が適合過程なので伊藤積分に置き換わる。

この方針は他の定理の証明においても同様である。

(20) 式を代入するとスコロホッド積分の定義より、

$$((\text{A-3}) \text{ 式の右辺}) = E^x \left[\phi'(X_T) \frac{1}{T} \int_0^T D_t X_T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dt \right] \quad (\text{A-4})$$

$$= E^x \left[\phi(X_T) \frac{1}{T} \delta(\sigma(X_t)^{-1} Y_t) \right]. \quad (\text{A-5})$$

$\delta(\dots)$ 内は適合過程であるので、

$$((A-5)式) = E^x \left[\phi(X_T) - \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right]. \quad (A-6)$$

これで(27)式が示された。さらに、(21)式を $E^x[\cdot]$ 内に入れれば

$$((A-6)式) = E^x \left[\phi(X_T) - \frac{1}{T^2} \left\{ \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right\} Y_T^{-1} \int_0^T D_t X_T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dt \right]. \quad (A-7)$$

スコロホッド積分の定義を用いれば、

$$((A-7)式) = E^x \left[\Phi(X_T) - \frac{1}{T^2} \delta \left\{ \left(\int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right) \sigma(X_t)^{-1} Y_t Y_T^{-1} \right\} \right]. \quad (A-8)$$

性質4より、

$$\begin{aligned} \delta(\dots) &= \delta(\sigma(X_t)^{-1} Y_t) \left(\int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right) Y_T^{-1} \\ &\quad - \int_0^T D_t (Y_T^{-1} \delta(\sigma(X_t)^{-1} Y_t)) \sigma(X_t)^{-1} Y_t dt \end{aligned} \quad (A-9)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right)^2 Y_T^{-1} - \int_0^T D_t (Y_T^{-1}) \delta(\sigma(X_t)^{-1} Y_t) \sigma(X_t)^{-1} Y_t dt \\ &\quad - \int_0^T D_t (\delta(\sigma(X_t)^{-1} Y_t)) Y_T^{-1} \sigma(X_t)^{-1} Y_t dt. \end{aligned} \quad (A-10)$$

2つめの等式は積の微分を用いた。 $D_t \delta(\sigma(X_t)^{-1} Y_t)$ は $\sigma(X_t)^{-1} Y_t$ が適合過程であるのでスコロホッド積分とマリアバン微分が打ち消し合い $\sigma(X_t)^{-1} Y_t$ となる。また、 $D_t (Y_T^{-1})$ は合成関数の微分により $-Y_T^{-2} D_t Y_T$ となるので、

$$\begin{aligned} ((A-10)式) &= \left(\int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right)^2 Y_T^{-1} + \int_0^T Y_T^{-2} D_t Y_T \delta(\sigma(X_t)^{-1} Y_t) \sigma(X_t)^{-1} Y_t dt \\ &\quad - \int_0^T Y_T^{-1} (\sigma(X_t)^{-1} Y_t)^2 dt. \end{aligned} \quad (A-11)$$

第2項で $\sigma(X_t)^{-1} Y_t$ が適合過程であるので $\delta(\sigma(X_t)^{-1} Y_t)$ は伊藤積分に置き換えられる。さらに、それは t によらないので t での積分の外に出せる。また、 Y_T も t によらないので積分の外に出せるので、

$$\begin{aligned} ((A-11)式) &= \left(\int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right)^2 Y_T^{-1} + Y_T^{-2} \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \int_0^T D_t Y_T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dt \\ &\quad - Y_T^{-1} \int_0^T (\sigma(X_t)^{-1} Y_t)^2 dt. \end{aligned} \quad (A-12)$$

これを、(A-8)式の $\delta(\dots)$ に代入すれば(28)式を得る。

(ii) $\phi(X_T) \in L^2(\Omega)$ のとき、

まず ϕ が連続で有限個の点を除いて微分可能なときに (26) 式が成立することを示す。

ϕ に対して有限個の点を除いて ϕ' が定義できる。除外した点に対しては (微分が右側微分か左側微分と等しいとするなどして) 適当にとることで \mathbf{R} 全体で ϕ' が定義できる。

$\{\phi_n\} \subset C_0^\infty$ を、 $\phi_n(X_T) \rightarrow \phi(X_T)$ in $L^2(\Omega)$ となるようにとる。とくに ϕ' が有限個の点を除いて連続であるので、 $|\phi'_n(x) - \phi'(x)| \downarrow 0 \quad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{\phi' \text{ の不連続点}\}$ と単調に収束するようにとって $|\phi'_n(X_T) - \phi'(X_T)| \downarrow 0$ in $L^2(\Omega)$ とできる。 $u_n(x) := E^x[\phi_n(X_T)]$ とすると (i) の議論から $u'_n(x) = E^x[\phi'_n(X_T)Y_T]$ である。

ここで $v(x) := E^x[\phi'(X_T)Y_T]$ とする。このとき、 ϕ_n のとり方から $u_n(x) \rightarrow u(x)$ が成立する。また、 ϕ'_n は単調に収束するようにとっているため単調収束定理により $u'_n \rightarrow v(x)$ が成立する。

また、コーシー = シュワルツ の不等式により、

$$|u'_n(x) - v(x)|^2 \leq E^x[\{\phi'_n(X_T) - \phi'(X_T)\}^2] E^x[(Y_T)^2], \quad (\text{A-13})$$

とできる。 $\xi_n(x) := E^x[\{\phi'_n(X_T) - \phi'(X_T)\}^2]$ 、 $\psi(x) := E^x[(Y_T)^2]$ とおく。 $\psi(x)$ は明らかに n によらないが、 x に関する連続性から任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbf{R}$ に対して、 x にもよらないある定数 M で押えられる。 $\xi_n(x)$ は \hat{x}_n が存在して $\sup_{x \in K} \xi_n(x) = \xi_n(\hat{x}_n)$ とすることができるので、結局、

$$\sup_{x \in K} |u'_n(x) - v(x)|^2 \leq M \xi_n(\hat{x}_n), \quad (\text{A-14})$$

となる。 $\{\hat{x}_n\}$ はコンパクト集合 K 内の点列なのでその部分列は収束する。そこで、その部分列を新しく $\{\hat{x}_n\}$ とし、その収束先を \hat{x} で表す。このとき、 $\phi'_n \rightarrow \phi'$ in $L^2(\Omega)$ より、任意の $\epsilon > 0$ に対して $n_0(\hat{x})$ が存在して、

$$n \geq n_0(\hat{x}) \Rightarrow E[\{\phi'_n(X_T^{\hat{x}}) - \phi'(X_T^{\hat{x}})\}^2] < \epsilon, \quad (\text{A-15})$$

とすることができる。 \hat{x} は \sup となるようにとったので、

$$\xi_n(x) \leq E[\{\phi'_n(X_T^{\hat{x}}) - \phi'(X_T^{\hat{x}})\}^2]. \quad (\text{A-16})$$

また、有限個の点を除いて $|\phi'_n(x) - \phi'(x)| \downarrow 0$ となるようにとったので、 $n \geq n_0(\hat{x})$ のとき、

$$((\text{A-16}) \text{ 式の右辺}) \leq E[\{\phi'_{n_0(\hat{x})}(X_T^{\hat{x}}) - \phi'(X_T^{\hat{x}})\}^2]. \quad (\text{A-17})$$

$\{\hat{x}_n\}$ は収束するように部分列をとり直しているので、

$$(A-17) \text{式の右辺} \rightarrow E[\{\phi'_{n_0(\hat{x})}(X_T^{\hat{x}}) - \phi'(X_T^{\hat{x}})\}^2] \quad (A-18)$$

$$< \epsilon . \quad (A-19)$$

よって0に収束する。

以上より、任意のコンパクト集合 K に対して、

$$\begin{aligned} u_n(x) &\rightarrow u(x) \quad \forall x \in K \quad (n \rightarrow \infty) \\ u'_n(x) &\rightarrow v(x) \quad (n \rightarrow \infty) \text{が} K \text{上一様収束} \end{aligned}$$

がいえた。よって K 上で $u'(x)$ が存在して $u'(x) = v(x)$ が成立する。 K は任意であったので、結局 $x \in \mathbf{R}$ で $u'(x)$ が存在して $u'(x) = v(x) = E^x[\phi'(X_T) Y_T]$ となる。

(27)式については $\phi(x) = \phi^+(x) - \phi^-(x)$ と正負に分け、 $\{\phi_n^+\} \subset C_0^\infty$ 、 $\{\phi_n^-\} \subset C_0^\infty$ を $\phi_n^+ \uparrow \phi^+$ 、 $\phi_n^- \uparrow \phi^-$ となるようにとれば同様の議論を行うことができる。(28)式についても $\Phi(X_T) \in L^2(\Omega)$ のとき $\Phi(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x)$ と正負に分け、 $\phi_n \rightarrow \phi$ 、 $\Phi_n^+ \uparrow \Phi^+$ 、 $\Phi_n^- \uparrow \Phi^-$ ととればよい。

(2) 定理2 (プレーンバニラ・オプション、デジタル・オプションのガンマ) の証明

(i) $\phi \in C_0^\infty$ のとき、

定理1と同様に微分と期待値の順序交換が可能であるので、

$$u''(x) = E^x[\phi''(X_T) Y_T^2] + E^x[\phi'(X_T) Z_T] \quad (A-20)$$

$$= E^x \left[\phi''(X_T) Y_T \frac{1}{T} \int_0^T D_t X_T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dt \right] + E^x[\phi'(X_T) Z_T] \quad (A-21)$$

$$= E^x \left[\phi'(X_T) \frac{1}{T} \delta(Y_T \sigma(X_t)^{-1} Y_t) \right] + E^x[\phi'(X_T) Z_T] , \quad (A-22)$$

性質4より、

$$\delta(\dots) = \delta(\sigma(X_t)^{-1} Y_t) Y_T - \int_0^T D_t Y_T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dt \quad (A-23)$$

$$= Y_T \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t - \int_0^T D_t Y_T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dt . \quad (A-24)$$

これを、(A-22)式の $\delta(\dots)$ に代入すれば(35)式を得る。

定理1の(27)式の結果を用いれば⁸、

$$u''(x) = \frac{d}{dx} E^x \left[\phi(X_T) \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right] \quad (\text{A-25})$$

$$\begin{aligned} &= E^x \left[\phi'(X_T) Y_T \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right] \\ &+ E^x \left[\phi(X_T) \frac{1}{T} \int_0^T (-\sigma(X_t)^{-2} \sigma'(X_t) Y_t^2 + \sigma(X_t)^{-1} Z_t) dW_t \right]. \end{aligned} \quad (\text{A-26})$$

第1項の $E^x[\phi'(X_T) \dots]$ は(20)式を代入してスコロホッド積分の定義を用いれば、

$$E^x[\phi'(X_T) \dots] = E^x \left[\phi'(X_T) \frac{1}{T} \int_0^T D_t X_T \sigma(X_T)^{-1} Y_t dt \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right] \quad (\text{A-27})$$

$$= E^x \left[\phi(X_T) \frac{1}{T^2} \delta \left(\sigma(X_t)^{-1} Y_t \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right) \right] \quad (\text{A-28})$$

$$\begin{aligned} &= E^x \left[\phi(X_T) \frac{1}{T^2} \left\{ \delta(\sigma(X_t)^{-1} Y_t) \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^T D_t \left(\int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right) \sigma(X_t)^{-1} Y_t dt \right\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A-29})$$

$\sigma(X_t)^{-1} Y_t$ は適合過程であるので、 $\delta(\sigma(X_t)^{-1} Y_t)$ は伊藤積分に置き換えられる。また、 $D_t(\int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t)$ は $\sigma(X_t)^{-1} Y_t$ になるので、

$$((\text{A-29}) \text{式}) = E^x \left[\phi(X_T) \frac{1}{T^2} \left\{ \left(\int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t \right)^2 - \int_0^T (\sigma(X_t)^{-1} Y_t)^2 dt \right\} \right]. \quad (\text{A-30})$$

これを(A-26)式の第1項に代入すれば主張を得る。

⁸ (A-25)式から(A-26)式へ変形する際、 $\frac{d}{dx} \int_0^T \dots dW_t = \int_0^T \frac{d}{dx} \dots dW_t$ といった確率積分に対する微分と積分の順序交換を行っている点に注意。ここでは $r(\cdot)$ が時刻だけに依存する連続な確定的関数であること、 $\sigma(\cdot)$ が2回連続微分可能であること、 $\sigma'(\cdot)$ が有界であること $\sigma''(\cdot)$ が有界で、リプシッツ条件を満たすこと、および仮定により $\sigma^{-1}(\cdot)$ が有界であること、から順序交換が可能であることを示すことができる。詳しくはIkeda and Watanabe [1989] pp. 254-263 命題2.2、Protter [2004] pp. 301-310 定理39などが参考になる。

(ii) $\phi(X_T) \in L^2(\Omega)$ のとき、

(34)式は ϕ が C^1 級で有限個の点を除いて2回微分可能であるとき、 $\{\phi_n\} \subset C_0^\infty$ を $\phi_n(X_T) \rightarrow \phi(X_T)$ 、 $\phi_n''(X_T) \rightarrow \phi''(X_T)$ in $L^2(\Omega)$ 、 $|\phi_n''(x) - \phi''(x)| \downarrow 0 \quad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{\phi'' \text{の不連続点}\}$ となるようにとれば定理1の(ii)と同様の議論ができる。(35)式、(36)式はそれぞれ定理1の(26)式、(27)式と同じである。

系2の証明

(38)式、(39)式、(40)式はそれぞれ(34)式、(35)式、(36)式に $r(t) = r$ 、 $\sigma(X_t) = \sigma X_t$ を代入すれば得られる。

次に、BSモデルの場合に限定して直接(41)式を導出する((41)式に相当する表現の一般型の導出は煩雑であることから定理2では省略している)。(21)式はBSモデルのとき $1 = (1/\sigma T)(1/X_T) \int_0^T D_t X_T dt$ となるので、(40)式の $E^x[\cdot]$ の中に代入すれば、

$$u''(x) = E^x \left[\phi(X_T) \frac{1}{x^2 \sigma^3 T^3} \cdot \frac{1}{X_T} \int_0^T D_t X_T dt (W_T^2 - \sigma T W_T - T) \right] \quad (\text{A-31})$$

$$= E^x \left[\Phi(X_T) \frac{1}{x^2 \sigma^3 T^3} \cdot \delta \left(\frac{1}{X_T} (W_T^2 - \sigma T W_T - T) \right) \right], \quad (\text{A-32})$$

$$\delta(\dots) = \delta(W_T^2 - \sigma T W_T - T) \frac{1}{X_T} - \int_0^T D_t \left(\frac{1}{X_T} \right) (W_T^2 - \sigma T W_T - T) dt \quad (\text{A-33})$$

ここで、 $\delta(W_T^2) = W_T^3 - 2T W_T$ 、 $\delta(W_T) = W_T^2 - T$ 、 $\delta(1) = W_T$ 、 $D_t(1/X_T) = -D_t X_T / X_T^2 = -\sigma / X_T$ を代入すれば⁹、

$$((\text{A-33}) \text{式の右辺}) = \frac{1}{X_T} (W_T^3 - (3T + \sigma^2 T^2) W_T), \quad (\text{A-34})$$

となり(41)式を得る。

(3) 定理3 (アジア型オプションのデルタ) の証明

前の定理の証明と同じ方針で証明したいが、 $\bar{X}_T = \int_0^T X_s ds$ であるため(19)式や(20)式は使うことができない。そこで、定理3の証明をする前に次の補題を示す。

⁹ 性質4を用いると、 $\delta(W_T^2) = W_T^2 \delta(1) - \int_0^T D_t (W_T^2) \cdot 1 dt = W_T^3 - 2W_T \int_0^T D_t W_T dt = W_T^3 - 2T W_T$ 。同様に $\delta(W_T) = W_T \delta(1) - \int_0^T D_t (W_T) dt = W_T^2 - T$ 。なお、 $\delta(1) = W_T$ 、 $D_t W_T = 1$ については、例えば内田・高橋 [2005] を参照。

補題5

$$D_t \tilde{X}_T = \sigma(X_t) Y_t^{-1} (\tilde{Y}_T - \tilde{Y}_t) , \quad (\text{A-35})$$

$$\tilde{Y}_T^2 = 2 \int_0^T D_t \tilde{X}_T \sigma(X_t)^{-1} Y_t^2 dt . \quad (\text{A-36})$$

補題の証明

$$D_t X_s = \sigma(X_t) Y_t^{-1} Y_s 1_{\{t \leq s\}} , \quad (\text{A-37})$$

であるので、両辺の $\int_0^T \cdot ds$ をとると、

$$D_t \left(\int_0^T X_s ds \right) = \sigma(X_t) Y_t^{-1} \int_t^T Y_s ds . \quad (\text{A-38})$$

\tilde{X} 、 \tilde{Y} を用いて表せば、

$$D_t \tilde{X}_T = \sigma(X_t) Y_t^{-1} (\tilde{Y}_T - \tilde{Y}_t) . \quad (\text{A-39})$$

これは、(A-35)式に一致する。これを(A-36)式の右辺の $D_t \tilde{X}_T$ に代入すれば

$$((\text{A-36})\text{式の右辺}) = 2 \int_0^T \sigma(X_t) Y_t^{-1} (\tilde{Y}_T - \tilde{Y}_t) \sigma(X_t)^{-1} Y_t^2 dt \quad (\text{A-40})$$

$$= 2 \int_0^T (\tilde{Y}_T - \tilde{Y}_t) Y_t dt \quad (\text{A-41})$$

$$= 2 \tilde{Y}_T \int_0^T Y_t dt - 2 \int_0^T \tilde{Y}_t Y_t dt \quad (\text{A-42})$$

$$= 2 \tilde{Y}_T^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \tilde{Y}_T^2 = \tilde{Y}_T^2 .$$

定理3の証明

$\phi \in C_0^\infty$ で示す。一般の $\phi(\tilde{X}_T) \in L^2(\Omega)$ のときは定理1での議論と同じである。

$\phi \in C_0^\infty$ のときは $\frac{\partial}{\partial x}$ を E^x の中に入れられるので、(42)式が成立する。(43)式は、補題5、スコロホッド積分の定義より、

$$u'(x) = E^x [\phi'(\tilde{X}_T) \tilde{Y}_T] \quad (\text{A-43})$$

$$= E^x \left[\phi'(\tilde{X}_T) \tilde{Y}_T^{-1} \cdot 2 \int_0^T D_t \tilde{X}_T \sigma(X_t)^{-1} Y_t^2 dt \right] \quad (\text{A-44})$$

$$= E^x \left[\phi(\tilde{X}_T) \cdot 2 \delta(\tilde{Y}_T^{-1} \sigma(X_t)^{-1} Y_t^2) \right] . \quad (\text{A-45})$$

性質4を用いると、

$$\delta(\dots) = \tilde{Y}_T^{-1} \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t^2 dW_t - \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t^2 D_t \tilde{Y}_T^{-1} dt \quad (\text{A-46})$$

$$= \tilde{Y}_T^{-1} \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t^2 dW_t + \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} \tilde{Y}_t^2 Y_T^{-2} \left(\int_t^T D_s Y_s ds \right) dt. \quad (\text{A-47})$$

これを(A-45)式に代入すれば(44)式を得る。BSモデルでは $\sigma(X_t) = \sigma X_t$ 、 $Y_t = X_t/x$ 、 $\tilde{Y}_T = \tilde{X}_T/x$ を(A-45)式に代入すれば、

$$u'(x) = E^x \left[\phi(\tilde{X}_T) \frac{1}{x\sigma} \delta(2X_T \tilde{X}_T^{-1}) \right], \quad (\text{A-48})$$

を得る。 $\delta(\dots)$ 内は性質4を用いると、

$$\delta(\dots) = 2 \delta(X_t) \tilde{X}_T^{-1} - 2 \int_0^T X_t D_t \left(\frac{1}{\tilde{X}_T} \right) dt \quad (\text{A-49})$$

$$= 2 \tilde{X}_T^{-1} \int_0^T X_t dW_t + 2 \int_0^T X_t \tilde{X}_T^{-2} D_t \tilde{X}_T dt. \quad (\text{A-50})$$

補題5の(A-35)式を用いて $\sigma(X_t) = \sigma X_t$ 、 $\tilde{Y}_t = \tilde{X}_t/x$ 、 $\tilde{Y}_T = \tilde{X}_T/x$ を代入すれば、

$$((\text{A-50})\text{式の第2項}) = 2 \int_0^T X_t \tilde{X}_T^{-2} (\tilde{Y}_T - \tilde{Y}_t) Y_t^{-1} \sigma(X_t) dt \quad (\text{A-51})$$

$$= 2 \int_0^T X_t \tilde{X}_T^{-2} (\tilde{X}_T - \tilde{X}_t) X_t^{-1} \sigma X_t dt \quad (\text{A-52})$$

$$= 2 \sigma \left\{ \tilde{X}_T^{-1} \int_0^T X_t dt - X_T^{-2} \int_0^T \tilde{X}_t X_t dt \right\} \quad (\text{A-53})$$

$$= 2 \sigma \left\{ \tilde{X}_T^{-1} \cdot \tilde{X}_T + \tilde{X}_T^{-2} \cdot \frac{1}{2} \tilde{X}_T^2 \right\} = 2 \sigma \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \sigma. \quad (\text{A-54})$$

これを(A-50)式に代入すれば(46)式を得る。

(4) 定理4 (アジア型オプションのガンマ) の証明

$\phi \in C_0^\infty$ で示す。一般の $\phi(\tilde{X}_T) \in L^2(\Omega)$ のときは定理2での議論と同じである。

$\phi \in C_0^\infty$ のときは $\frac{\partial}{\partial x}$ と E^x の順序を交換できるので、(48)式が成立する。(48)式に補題5の(A-36)式を代入するとスコロホッド積分の定義より、

$$u''(x) = E^x \left[\phi''(\tilde{X}_T) \cdot 2 \int_0^T D_t \tilde{X}_T \sigma(X_t)^{-1} Y_t^2 dt \right] + E^x \left[\phi'(\tilde{X}_T) \tilde{Z}_T \right]. \quad (\text{A-55})$$

$$= E^x \left[\phi'(\tilde{X}_T) \{ \delta(2\sigma(X_t)^{-1} Y_t^2) + \tilde{Z}_T \} \right]. \quad (\text{A-56})$$

$\delta(\dots)$ 内は適合過程であるので、スコロホッド積分は伊藤積分に置き換えられ、

$$((\text{A-56}) \text{ 式}) = E^x \left[\phi'(\tilde{X}_T) \left\{ 2 \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t^2 dW_t + \tilde{Z}_T \right\} \right]. \quad (\text{A-57})$$

BSモデルでは、これに $\tilde{Z}_T = 0$ 、 $\sigma(X_t) = \sigma X_t$ 、 $Y_t = X_t/x$ を代入すれば、

$$((\text{A-57}) \text{ 式}) = E^x \left[\phi'(\tilde{X}_T) \cdot \frac{2}{x^2 \sigma} \int_0^T X_t dW_t \right]. \quad (\text{A-58})$$

参考文献

- 内田善彦、高橋明彦、「マリアバン解析に関する基礎的事項」、IMES Discussion Paper、日本銀行金融研究所、2005年、forthcoming
- 国友直人、高橋明彦、『数理ファイナンスの基礎 マリアバン解析と漸近展開の応用』、東洋経済新報社、2003年
- 重川一郎、『確率解析』、岩波書店、1999年
- Fournié, Eric, Jean-Michel Lasry, Jérôme Lebuchoux, Pierre-Louis Lions, and Nizar Touzi, “Application of Malliavin calculus to Monte Carlo Method in Finance,” *Finance and Stochastics* 3, 1999, pp. 391-412.
- Ikeda, Nobuyuki, and Shinzo Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, 2nd ed., 1989, Kodansha/North-Holland.
- Nualart, David, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, 1995, Springer-Verlag.
- Protter, Philip E., *Stochastic Integration and Differential Equations 2nd ed.*, 2004, Springer-Verlag.