

相関デリバティブのリスク特性や リスク管理手法に関する考察： コンポジット・オプションを例に

なかむらかずたか
中村一岳

要 旨

本稿では、複数種類の資産を原資産として持ち、その価格が、原資産価格間の相関（コリレーション）にも依存する金融派生商品（相関デリバティブ）を取り上げる。具体的には、相関デリバティブの典型例としてコンポジット・オプションを題材に選び、プライシング手法のエッセンスやリスク特性を解説するとともに、具体的な事例を基に、相関デリバティブのリスク管理手法に関する各種の論点を提供する。

キーワード：相関デリバティブ、コンポジット・オプション、ガンマ、クロス・ガンマ、クロス・ガンマ・リスク、相関変動リスク

本稿は、筆者（2003年3月まで日本銀行金融研究所研究第1課に勤務、現 UFJ銀行総合リスク管理部）が金融研究所在籍時に執筆したものである。本稿の作成に当たっては、山下司氏（パリバ証券会社東京支店金融戦略部）より有益な示唆を頂戴した。なお、本稿で示された意見やあり得べき誤りは、全て筆者本人に属し、日本銀行、金融研究所あるいはUFJ銀行の公式見解を示すものではない。

中村一岳 UFJ銀行総合リスク管理部（E-mail: Kazutaka_Nakamura@ufjbank.co.jp）

1 . はじめに

金融派生商品のうち、金利や為替レート、株価といった単一の種類の資産を原資産として持つ商品は、商品性が比較的簡単であることもあり、歴史は古く、市場での取引量も相対的に多い。これに対して、相対的に新しくかつ取引量も少ないものの、複数種類の資産を原資産として持つ、比較的複雑な派生商品が存在する。複数の原資産を持つ派生商品は、その価格が、原資産価格間の相関（コリレーション）の影響を受けるという特徴を有する。本稿では、複数の原資産を持ち、それらの相関に関するリスク（以下、相関リスク）に晒されている派生商品を、相関デリバティブ¹と称する。

相関デリバティブの相関リスクは、単一原資産の派生商品にはないリスクである²。したがって、相関デリバティブのプライシングの考え方は一般的に複雑であり、実務的にはその基本を理解しておくことが重要である。また、相関デリバティブの独特なリスク特性に応じて、リスク管理手法に関して実務的に留意すべき点が多数存在する。こうした観点から、本稿では、相関デリバティブの典型例としてコンポジット・オプションを題材に選び、そのプライシング手法のエッセンスやリスク特性を解説するとともに、具体的な事例を基に、特に、本商品を直接扱っているトレーダー・レベルでの、相関デリバティブのリスク管理手法に関する各種の論点を提供する。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、2節で、相関デリバティブの具体的な商品をいくつか紹介する。3節では、コンポジット・オプションのプライシング方法を具体的に説明する。4節では、コンポジット・オプションのリスク特性を考察し、5節では、ヒストリカル・データを用いたいくつかの分析を行う。それらを踏まえて、6節では、相関デリバティブのリスク管理手法に関して留意すべき諸点を論じる。最後に7節で、簡単な結びを述べる。

2 . 相関デリバティブの商品例³

相関デリバティブの取引ニーズとしては、他のデリバティブと同様、各種リスクのヘッジ、スペキュレーション等がある。相関デリバティブには、こうした取

1 小田 [2001] では、コリレーション・デリバティブと呼称している。なお、相関係数そのものを原資産とするデリバティブも存在するが、本稿の「相関デリバティブ」はそれとは概念が異なっている。

2 単一原資産の派生商品でも、原資産価格と、金利やボラティリティ等の間に相関を仮定するときがある。しかし、実務上、日次や週次等短い頻度で価格等の評価を行うときには、金利やボラティリティを一定値とするモデル（例：ブラック＝ショールズ・モデル）が用いられることが一般的である。

3 相関デリバティブに関しては、例えば、Brockhaus *et al.* [1999]、小田 [2001]、山下 [2001] に具体的な各種商品の記述やプライシング手法等の解説がある。

引ニーズを前提に、比較的取引量が多く、特定の名称で知られている標準的な商品から、例えば業者が特定の顧客向けに組成したような限定的な商品まで、多様な種類が存在する。以下では、相関デリバティブのうち、前者の標準的な商品をいくつか紹介する^{4, 5}。

コンポジット・オプション

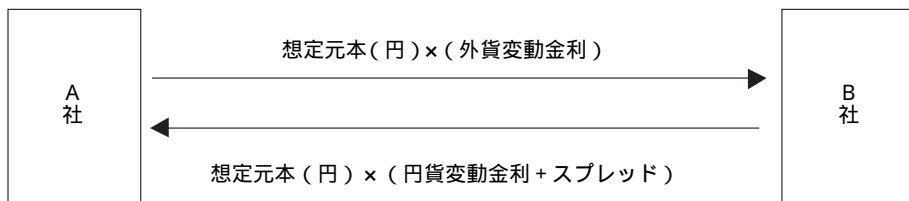
コンポジット・オプションは、外貨建て資産（債券、株式等）を原資産とし、行使価格を円貨とするオプションである。オプション満期時の外貨建て原資産価格を S 、円貨／外貨の為替レートを X 、行使価格を K とすると、コール・オプションのペイオフは $\max(SX - K, 0)$ 、プット・オプションのそれは $\max(K - SX, 0)$ となる。例えば、原資産を外貨建て債券とすると、通常の外貨建て債券オプションでは、行使価格は外貨建てのため円貨では為替レートによって変動するが、コンポジット・オプションでは、それは円貨で確定している。

クォント・オプション

クォント・オプションは、外貨建て資産を原資産とし、円貨を行使価格とする点ではコンポジット・オプションと同様であるが、円貨／外貨の為替レートが約定時に固定されている。原資産価格を S 、行使価格を K 、固定為替レートを \bar{X} とすると、コール・オプションのペイオフは $\max(S\bar{X} - K, 0)$ となる。クォント・オプションでは、為替レートが固定されているため、為替レートそのものの変動リスクはない。

ディファレンシャル・スワップ

ディファレンシャル・スワップは、円貨と外貨の変動金利を交換する金利スワップの一種で、外貨金利のキャッシュ・フローの前提となる想定元本が円貨である（下図参照）。ディファレンシャル・スワップでは、交換する金利のキャッシュ・フローが円貨で固定されているため、為替レートの変動リスクがない。



4 ここで紹介する例のほかには、リラティブ・デジタル・オプション、アウトパフォーマンス・オプション、バスケット・オプション、ハインドサイト（hindsight）・オプション等がある。

5 複数の通貨が関連する相関デリバティブについては、本稿では以下、通貨を基本的に円貨と外貨として議論を進める。

エクステンジ・オプション

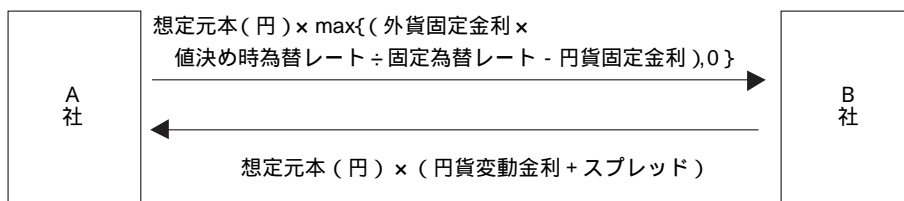
エクステンジ・オプションは、異なる資産を交換する、つまり資産間の価格差をやり取りするオプションである。資産1と引換えに資産2を得ることができるオプションの場合、それぞれの価格を S_1 、 S_2 とすると、このオプションのペイオフは $\max(S_2 - S_1, 0)$ となる。

スプレッド・オプション

スプレッド・オプションは、2つの原資産価格の差額と行使価格の大小によりペイオフが決定されるオプションである。原資産1、原資産2の価格を S_1 、 S_2 とし、その差額を $S_1 - S_2$ 、行使価格を K とすると、コール・オプションのペイオフは $\max\{(S_1 - S_2) - K, 0\}$ となる。原資産としては、異なる企業の株価、長短金利等が挙げられる。

パワー・リバース・デュアル・スワップ

パワー・リバース・デュアル・スワップは、キャッシュ・フローが下図のように決定される金利スワップである（この図のA社に当たる取引当事者がスワップを期限前解約する権利を持つ場合もある）。ここで、「固定為替レート」は約定時に決定される為替レート、「値決め時為替レート」は円貨変動金利の決定日（3ヵ月ごと、あるいは半年ごと）の為替レートである。本商品には、円貨金利、外貨金利、為替レートの変動リスクがある。



3. 相関デリバティブのプライシング方法

以下では、相関デリバティブのうちオプション商品のプライシング方法を解説する。一般にデリバティブのプライシングを行う場合、その価格が解析解として求められないときには数値計算手法が用いられる。しかし相関デリバティブ（オプション）では、ブラック＝ショールズ・モデル（Black and Scholes [1973]）の枠組みをほぼそのまま使う、あるいはそれに若干の修正を加えることで解析解が求められることが少なくないため、以下では解析解をベースとしたプライシング方法に焦点を当てる。

相関デリバティブ（オプション）をプライシングするための最も簡単な方法は、ブラック＝ショールズ・モデルと同様の枠組みを用いるものである。この方法は、それによって多くの種類の相関デリバティブの価格を解析解として求めることができるため、実務で多用されている（以下、BS型モデル）。

このほかのプライシング方法としては、ブラック＝ショールズ・モデルの枠組みにおける各種仮定⁶に、より現実的な変更を加えた、つまり仮定を緩和したモデル（以下、修正BS型モデル）を使う方法がある⁷。

以下では、コンポジット・オプション（コール）⁸を例にとり、プライシング方法を解説する。

（１）BS型モデル

外貨建て株式、為替レートを原資産とし、それらがともに対数正規過程に従うと仮定する。この場合、株価と為替レートの積過程を考えることにより、単一の原資産のオプションに対するブラック＝ショールズ・モデルによる価格式によく似た形を持つ価格式（解析解）を導出できる。

株価 S 、為替レート X の確率過程を次のように表す。

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu_S(t)dt + \sigma_S(t)dW_S(t), \quad (1)$$

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu_X(t)dt + \sigma_X(t)dW_X(t). \quad (2)$$

ただし、 μ_S 、 μ_X は、株価、為替レートの期待収益率、 σ_S 、 σ_X は、株価、為替レートのボラティリティ、 W_S 、 W_X は、相関 ρ_{SX} を持つ標準ブラウン運動⁹、 σ_S 、 σ_X 、 ρ_{SX} は、いずれも確定的な時間の関数とする。

ここで、 r_d 、 r_f 、 q をそれぞれ、円貨の無リスク金利、外貨の無リスク金利、株式の配当率（いずれも連続複利ベースで確定的な時間の関数で表す）とすると、リスク中立測度 Q のもとでは、

6 ブラック＝ショールズ・モデルの設定では、原資産価格が対数正規過程に従う、収益率、無リスク金利、ボラティリティはそれぞれ一定とする等の仮定がおかれている。

7 仮定を緩和すると、推定が必要なパラメータ数が増加するほか、多くの場合、価格の解析解が得られなくなり、価格の算出に数値計算手法が必要となる等、手続きが複雑になる。このため、実務上は、相関デリバティブの保有ポジションの多寡等を勘案して、プライシング・モデルを選択する。なお、修正BS型モデルの具体例は補論1.を参照。

8 本稿では、以下、外貨建て株式と為替レートを原資産とするコンポジット・オプションを主たる題材に議論を進める。また、本稿で扱うオプションは全てコールとする。

9 W_S 、 W_X はリスク中立測度 Q のもとでのブラウン運動とする。

$$\mu_S(t) = r_f(t) - q(t) - \rho_{SX}(t)\sigma_S(t)\sigma_X(t), \quad (3)$$

$$\mu_X(t) = r_d(t) - r_f(t), \quad (4)$$

という関係がある（詳細は例えばRebonato [2000] を参照）。

Q のもとでの SX の確率過程は、(1)~(4)式より、以下のように書ける。

$$\frac{d\{S(t)X(t)\}}{S(t)X(t)} = \{r_d(t) - q(t)\} dt + \sigma(t)dW(t), \quad (5)$$

$$\sigma(t)dW(t) = \sigma_S(t)dW_S(t) + \sigma_X(t)dW_X(t), \quad (6)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{\sigma_S(t)^2 + 2\rho_{SX}(t)\sigma_S(t)\sigma_X(t) + \sigma_X(t)^2}. \quad (7)$$

$\tilde{r}_d(t) = \int_0^t r_d(u)du$ 、 $\tilde{r}_f(t) = \int_0^t r_f(u)du$ 、 $\tilde{q}(t) = \int_0^t q(u)du$ 、 $\tilde{\sigma}(t) = \sqrt{(1/t)\int_0^t \sigma(u)^2 du}$ とおくと、オプション期間 T 、行使価格 K のコール・オプションの時点0での価格(PV)は、以下のように書ける。

$$\begin{aligned} PV &= E_Q[e^{-\tilde{r}_d(T)} \max\{S(T)X(T) - K, 0\}] \\ &= S(0)X(0)e^{-\tilde{q}(T)}N(\tilde{d}) - Ke^{-\tilde{r}_d(T)}N(\tilde{d} - \tilde{\sigma}(T)\sqrt{T}), \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 $\tilde{d} = [\ln(S(0)X(0)/K) + \tilde{r}_d(T) - \tilde{q}(T) + \tilde{\sigma}(T)^2 T/2] / [\tilde{\sigma}(T)\sqrt{T}]$ 、 $E_Q[\cdot]$ は、 Q に関する期待値演算子、 $N(\cdot)$ は、標準正規分布の分布関数である。

さらに、 σ_S 、 σ_X 、 ρ 、 r_d 、 q を時間によらない定数とし、 $S(0) = S$ 、 $X(0) = X$ と表記し直すと、(8)式は以下のように簡便に書ける。

$$PV = SXe^{-qT}N(d) - Ke^{-r_d T}N(d - \tilde{\sigma}\sqrt{T}), \quad (9)$$

ただし、 $d = [\ln(SX/K) + (r_d - q + \tilde{\sigma}^2/2)T] / [\tilde{\sigma}\sqrt{T}]$ 、 $\tilde{\sigma} = \sqrt{\sigma_S^2 + 2\rho\sigma_S\sigma_X + \sigma_X^2}$ である¹⁰。

(9)式から明らかであるように、コンポジット・オプションの価格は、単一の下資産のオプションについてのブラック＝ショールズ・モデルによる価格式とよく似ていることがわかる。

10 本稿では、 $\tilde{\sigma}$ を「合成ボラティリティ」と呼ぶ。

ちなみに、ブラック＝ショールズ・モデルでは、コール・オプションの価格式は、原資産価格が従う確率過程を、

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r_d - q)dt + \sigma dW(t), \quad (10)$$

として、以下のように表される。

$$PV = Se^{-qT}N(d') - Ke^{-rdT}N(d' - \sigma\sqrt{T}), \quad (11)$$

ただし、 $d' = [\ln(S/K) + (r_d - q + \sigma^2/2)T] / [\sigma\sqrt{T}]$ である。

(2) 修正BS型モデル

BS型モデルの枠組みにおける各種仮定を緩和した修正BS型モデルには、多数のバリエーションが考えられる。例えば、(1)のBS型モデルでは、無リスク金利は確定的な関数あるいは定数とおかれているが、それが確率的に変動すると仮定したモデルがある。この場合、割引債価格が対数正規過程に従うと仮定すると、コンポジット・オプションの価格の解析解が算出できる。

また、同様に、ボラティリティが確率的に変動すると仮定したモデルもある。そうしたモデルには、ボラティリティ過程や、原資産価格、為替レートとの間の相関関係を記述する方法によって、多くの種類が考えられる。例えば、ボラティリティ過程等に適切な仮定をおいたうえで、単一原資産のオプションの価格をフーリエ変換で求めるアプローチ (Heston [1993]) を使って、コンポジット・オプションの価格の解析解を得ることができる¹¹。

4 . 相関デリバティブのリスク

本節では、コンポジット・オプションを用いて、相関デリバティブの持つリスクを検討する。まず、コンポジット・オプションのリスクの特徴をみるとともに、リスクのコントロール手法に触れる。次に、バリュエーション・アット・リスク (以下、VaR) をいくつかの手法で算出し、その結果を検討する。

11 修正BS型モデルの具体例は、補論1.を参照。

(1) 相関デリバティブのリスクとそのコントロール

相関デリバティブの原資産（2つとする）の価格を S と X とし、相関デリバティブの価格が $PV = PV(S, X, \sigma_S, \sigma_X, \rho)$ で表されるとする。このとき、 PV の変動額を各リスク・ファクターのテーラー展開で近似すると、

$$\begin{aligned} \Delta PV \approx & \frac{\partial PV}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial PV}{\partial X} \Delta X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 PV}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 PV}{\partial X^2} (\Delta X)^2 + \frac{\partial^2 PV}{\partial S \partial X} \Delta S \Delta X \\ & + \frac{\partial PV}{\partial \sigma_S} \Delta \sigma_S + \frac{\partial PV}{\partial \sigma_X} \Delta \sigma_X + \frac{\partial PV}{\partial \rho} \Delta \rho, \end{aligned} \quad (12)$$

が得られる。ただし、ここでは、原資産価格変動は2次まで、ボラティリティと相関係数の変動はそれぞれ1次までの近似としており¹²、そのほかの金利等のリスク・ファクターの変動は無視している。

(12)式の右辺第1、2項はデルタ・リスク、第3、4項はガンマ・リスク、第6、7項はベガ・リスクをそれぞれ表している（各項の微分係数が感応度 デルタ、ガンマ、ベガ である）。これらのリスクは、単一の原資産を持つデリバティブではよく知られたものである。これに対し、第5、8項は単一原資産のデリバティブにはない、相関デリバティブに特有のリスクである。本稿では、小田 [2001] にならい、以下のように、第5項のリスクを「クロス・ガンマ・リスク」、第8項のリスクを「相関（コリレーション）変動リスク」と呼ぶ。

$$\text{クロス・ガンマ・リスク} = \frac{\partial^2 PV}{\partial S \partial X} \Delta S \Delta X, \quad (13)$$

$$\text{相関変動リスク} = \frac{\partial PV}{\partial \rho} \Delta \rho. \quad (14)$$

以下では、コンポジット・オプション（コール）を例に、各種リスクが持つ特徴を概観し、それらのコントロール手法に触れる。

イ．原資産価格の変動に関するリスク

コンポジット・オプションのガンマとクロス・ガンマは、(9)式を用いると、以下のように求められる。ここで、 $N'(\cdot)$ は標準正規分布の密度関数である。

12 原資産価格変動を2次までのテーラー展開で近似するのに対し、ボラティリティ等の変動を1次までのテーラー展開までで近似する点は、実際の市場データをみる限りでは妥当であると考えられる（詳細は、脚注24で後述）。

$$\frac{\partial^2 PV}{\partial S^2} = \frac{Xe^{-qT}}{S\tilde{\sigma}\sqrt{T}}N'(d), \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 PV}{\partial X^2} = \frac{Se^{-qT}}{X\tilde{\sigma}\sqrt{T}}N'(d), \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 PV}{\partial S\partial X} = \frac{e^{-qT}}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}N'(d) + e^{-qT}N(d). \quad (17)$$

(15)~(17)式からコンポジット・オプションでは、ガンマとクロス・ガンマの間に以下の関係があることがわかる。

$$\frac{\partial^2 PV}{\partial S\partial X} = \frac{S}{X} \frac{\partial^2 PV}{\partial S^2} + e^{-qT}N(d) = \frac{X}{S} \frac{\partial^2 PV}{\partial X^2} + e^{-qT}N(d). \quad (18)$$

さて、数値例を用いて原資産価格の変動に関するリスクを考察しよう。具体的には、コンポジット・オプションを1単位売却する一方で、原資産（株式）を購入してデルタをヘッジしたポジションを考える。市場データ等の各種設定は図表1のとおりとする¹³。

図表1 市場データ等の各種設定

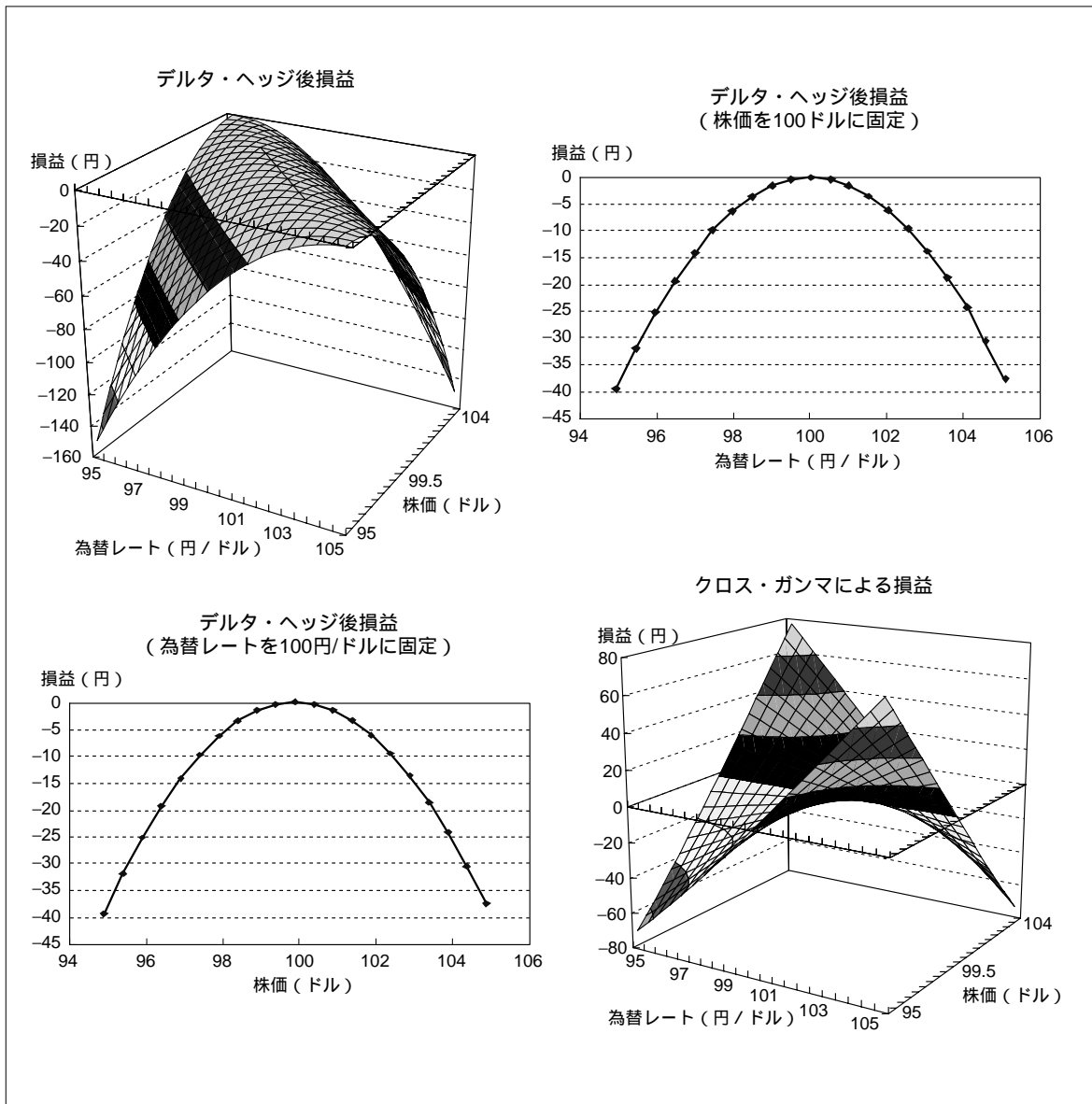
| |
|--------------------------------------|
| 行使価格：10,000円 |
| オプション期間：半年 |
| 現時点の原資産価格：100円 / ドル（為替レート）、100ドル（株価） |
| 円貨の無リスク金利、株式の配当率：いずれも0% |
| ボラティリティ：10%（為替レート）、15%（株価） |
| 株価と為替レートの相関係数：0 |

以上の条件のもと、為替レート、株価に対するポジションの損益を表したものが図表2である¹⁴。

13 以下、本節(1)では、特に指定のない限り、各種設定は図表1と同一とする。

14 図表2の左上図をみると、ここでは、コンポジット・オプションの売却によって発生するプレミアム収入を考慮していないため、このポジションからは損失のみが発生している。実際の損益はプレミアムにも依存する。

図表2 コンポジット・オプションのデルタ・ヘッジ後の損益



このうち左上図は、現時点の原資産価格でデルタ・ヘッジを行った後のコンポジット・オプションが、原資産価格の水準によってどのような損益になるのかを示したものである。具体的には、株価が S ドル、為替レートが X 円/ドルのときのコンポジット・オプションのショート・ポジションの価値を $PV(S, X)$ とすると、損益は次式で表される。

$$PV(S, X) - PV(100, 100) - \frac{\partial PV}{\partial X}_{X=100} (X-100) - \frac{\partial PV}{\partial S}_{S=100} (S-100) .$$

また、図表2の右上図、左下図は、為替レート、株価に対するガンマ・リスクによる損益を表し、それぞれ、

$$PV(100, X) - PV(100, 100) - \frac{\partial PV}{\partial X}_{X=100} (X-100) \equiv R\Gamma_X(X),$$

$$PV(S, 100) - PV(100, 100) - \frac{\partial PV}{\partial S}_{S=100} (S-100) \equiv R\Gamma_S(S),$$

によって求めた¹⁵。右上図、左下図からは、ガンマ・リスクによる損益がゼロまたは負値となることがわかる。

一方、図表2の右下図は、クロス・ガンマ・リスクによる損益を表し、

$$\begin{aligned} & PV(S, X) - PV(100, 100) - \frac{\partial PV}{\partial X}_{X=100} (X-100) - \frac{\partial PV}{\partial S}_{S=100} (S-100) - R\Gamma_X(X) - R\Gamma_S(S) \\ & = PV(S, X) - PV(100, X) - PV(S, 100) + PV(100, 100) \equiv RC\Gamma_{S,X}(S, X), \end{aligned}$$

という関係を用いて求めた¹⁶。右下図からは、クロス・ガンマ・リスクによる損益は、ガンマ・リスクによる損益とは異なり、正值にも負値にもなり得ることがみてとれる。

以上のことから、この例で挙げたコンポジット・オプションのショート・ポジションでは、ガンマ・リスクとクロス・ガンマ・リスクに以下のような傾向があることがわかる。

ガンマ・リスク……原資産である株価（ドル）と為替レート（円／ドル）が現時点からいずれの方向に動いても損失が発生する。

クロス・ガンマ・リスク……株価（ドル）と為替レート（円／ドル）が現時点から同方向（株価上昇 下落 + ドル上昇 下落）に変動すると、損失が発生する一方、原資産価格が逆方向に変動すると収益が得られる。

15 ガンマ・リスクは、通常は、(12)式の右辺第3、4項のように、原資産価格に対する2次の感応度に関するリスクを指す。一方、 $R\Gamma_X(X)$ 、 $R\Gamma_S(S)$ は原資産価格に対するより高次の感応度に関するリスクも含んでおり、いわば広義のガンマ・リスクである。本稿ではこの広義のガンマ・リスクと原資産価格に対する2次の感応度に関するリスクであるガンマ・リスクとを区別せず、「ガンマ・リスク」と呼ぶ。

16 $RC\Gamma_{S,X}(S, X)$ は、(13)式で定義されるクロス・ガンマ・リスクのみならず、2つの原資産価格に対するより高次の感応度に関するリスクも含んでいるが、本稿では前脚注と同様に、これらを区別することなく「クロス・ガンマ・リスク」と呼ぶ。

つまり、原資産価格が現時点から同方向に動くと、ガンマ・リスクとクロス・ガンマ・リスクが同時に損失を発生させるため、損失のインパクトが大きくなる。これは単一原資産のオプションではみられない特徴であり、コンポジット・オプションあるいは相関デリバティブのリスクを計測し管理する際にはこの点を念頭においておく必要があるといえる。

次に、コンポジット・オプションのガンマとクロス・ガンマの特徴を確認する。コンポジット・オプション（ロング・ポジション）の為替レートに対するガンマをプロットしたものが図表3である。図表3では、右上図から時計回りに、為替レート、株価、合成ボラティリティ（ $\tilde{\sigma}$ （9）式参照）およびオプション期間を横軸として、為替レートに対するガンマを示している。同様に、為替レートおよび株価に対するクロス・ガンマをプロットしたものが図表4である。

さて、コンポジット・オプションのガンマは、原資産価格がアット・ザ・マネー¹⁷付近で最大となる、合成ボラティリティがゼロから大きくなるにつれ、上昇した後低下する、オプション期間がゼロから長くなるにつれ、上昇した後低下する（ただし、ガンマは、原資産価格が行使価格に等しいときは、合成ボラティリティあるいはオプション期間がゼロになると発散し、合成ボラティリティが大きくなる、あるいはオプション期間が長くなると低下する）¹⁸。これらの傾向は、単一原資産のオプションのガンマのそれと同様である。

17 以下では、アット・ザ・マネーをATM、アウト・オブ・ザ・マネーをOTMと表記する。
18 (16)式から、

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 PV}{\partial X^2} \right) = \frac{-Se^{-qT}N'(d)}{X\tilde{\sigma}\sqrt{T}} \left\{ \frac{1}{X} + \frac{\ln(SX/K) + (r_d - q + \tilde{\sigma}^2/2)T}{X\tilde{\sigma}^2 T} \right\}, \quad (a)$$

となる。 $SX = Ke^{-(r_d - q + 3\tilde{\sigma}^2/2)T}$ のとき、(a)式はゼロとなり、ガンマは最大値をとる。 $e^{-(r_d - q + 3\tilde{\sigma}^2/2)T}$ は通常は1に近い値をとるので、ガンマはATM近辺で最大となる。

同様に、

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\sigma}} \left(\frac{\partial^2 PV}{\partial X^2} \right) = \frac{-Se^{-qT}N'(d)}{X\tilde{\sigma}\sqrt{T}} \left[\frac{1}{\tilde{\sigma}} + \frac{(\tilde{\sigma}^4/4)T^2 - \{\ln(SX/K) + (r_d - q)T\}^2}{\tilde{\sigma}^3 T} \right], \quad (b)$$

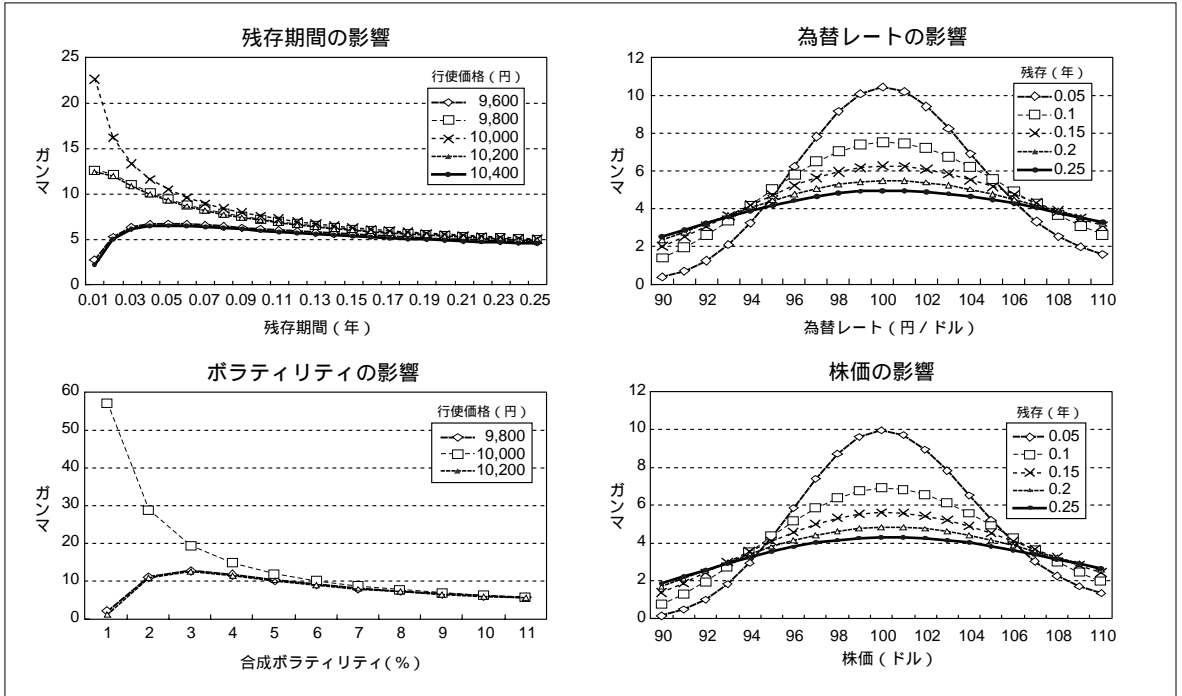
である。簡単な計算の結果、 $|\ln(SX/K) + (r_d - q)T| < \{\tilde{\sigma}^2 T + (\tilde{\sigma}^4/4)T^2\}^{1/2}$ が成立するか否かで、(b)式の符号が決まる。なお、ガンマは、 $\tilde{\sigma} \rightarrow 0$ の極限で、 $SX \neq Ke^{-(r_d - q)T}$ のときはゼロ、 $SX = Ke^{-(r_d - q)T}$ のときは無限大となる。例えば、図表3左下図（原資産価格=10,000円）では、行使価格が10,000円のときに、 $\tilde{\sigma}$ が小さくなるにつれ、ガンマが無限大に近づく傾向がみとれる（ $r_d = q = 0$ なので、 $SX = K$ である）、行使価格が9,800円、10,200円のときは、 $\tilde{\sigma}$ が小さくなるとゼロに近づく傾向が明確になる。

さらに、

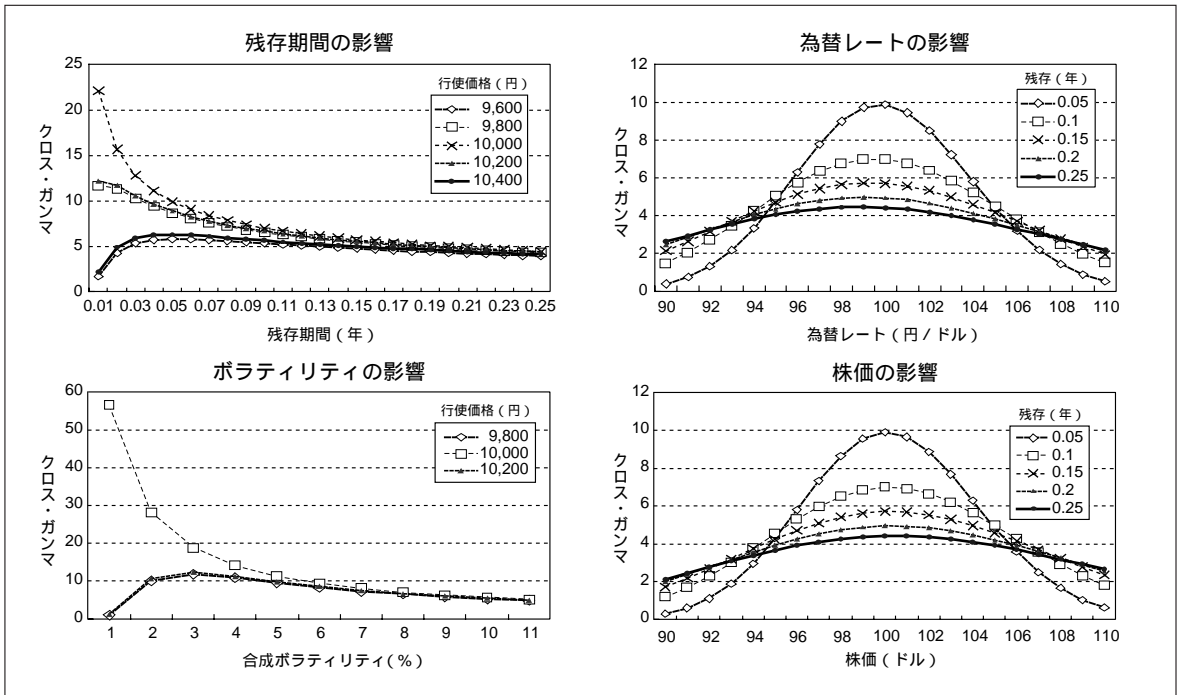
$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial^2 PV}{\partial X^2} \right) = \frac{-Se^{-qT}N'(d)}{X\tilde{\sigma}\sqrt{T}} \left[q + \frac{1}{2T} + \frac{(r_d - q + \tilde{\sigma}^2/2)^2 T^2 - \{\ln(SX/K)\}^2}{2\tilde{\sigma}^2 T^2} \right], \quad (c)$$

が得られる。簡単な計算の結果、 $|\ln(SX/K)| < \{2q\tilde{\sigma}^2 T^2 + \tilde{\sigma}^2 T + (r_d - q + \tilde{\sigma}^2/2)^2 T^2\}^{1/2}$ が成立するか否かで、(c)式の符号が決まる。なお、ガンマは、 $T \rightarrow 0$ の極限で、 $SX \neq K$ のときはゼロ、 $SX = K$ のときは無限大となる。例えば、図表3左上図（原資産価格=10,000円）では、行使価格が10,000円のときに、オプション期間が短くなるにつれ、ガンマが無限大に近づく傾向がみとれる（行使価格が9,800円、10,200円のときは、オプション期間がさらに短くなるとゼロに近づく傾向が明確になる）。

図表3 コンボジット・オプションの為替に対するガンマ



図表4 コンボジット・オプションのクロス・ガンマ



また、クロス・ガンマに関しては、図表4と図表3との比較から、ガンマによく似た特徴を持つことがわかる^{19, 20}。

次に、コンビジット・オプションの原資産価格変動に関するリスクのコントロール手法を考える。図表2左上図のように、原資産価格である株価（ドル）と為替レート（円／ドル）が同方向（株価上昇＜下落＞＋ドル上昇＜下落＞）に変動した場合には、相対的な損失のインパクトが大きい一方、原資産価格が逆方向に変動する場合には、損失のインパクトは小さい。こうしたインパクトの非対称性は、このオプションが複数の原資産を持つことに基づくものである。つまり、クロス・ガンマ・リスクが損益の水準に影響を与えている。

一般に、金融商品が持つ市場リスクをコントロールする方法としては、実務上は、ダイナミック・ヘッジ、スタティック・ヘッジ、当該金融商品の反対取引が用いられる。のダイナミック・ヘッジは、金融商品のデルタ（原資産価格の変動に伴い値が変動する）が常にゼロとなるように原資産の取引を随時加えていくというヘッジ手法である。のスタティック・ヘッジは、流動性の高いプレーンな金融商品を合成して、保有ポジションのうち、例えばトレーディングの対象としないリスク・ファクターを、それに関する反対ポジションをつくることによってヘッジする手法である。スタティック・ヘッジやダイナミック・ヘッジ以外では、のポジションの反対売買でリスクを除去できる²¹。しかし、反対売買を行うと、取引コストが発生するほか収益機会自体が喪失する。

オプション商品のトレーディング（ガンマ・トレーディング等）では、ダイナミック・ヘッジでデルタをゼロにしつつ、ガンマ等をトレードするのが一般的である。

19 例えば、クロス・ガンマを X で微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 PV}{\partial S \partial X} \right) = \frac{e^{-qT} N'(d)}{X \bar{\sigma} \sqrt{T}} \left\{ 1 - \frac{\ln(SX/K) + (r_d - q + \bar{\sigma}^2/2)T}{\bar{\sigma}^2 T} \right\}, \quad (d)$$

となる。 $SX = Ke^{-(r_d - q + \bar{\sigma}^2/2)T}$ のときに、(d)式はゼロとなり、クロス・ガンマは最大値をとることがわかる。 $e^{-(r_d - q + \bar{\sigma}^2/2)T}$ は通常は1に近い値をとるので、クロス・ガンマはガンマと同様にATM近辺で最大となる。

20 図表3、4で、クロス・ガンマとガンマがほぼ同様の水準を示しているのは、ここでの設定では、株価 S と為替レート X の比率がほぼ1であるためである（ S と X の比率が1から乖離すると、クロス・ガンマとガンマの格差は大きくなる）。これは、次式((18)式)を考えると明らかである。

$$\frac{\partial^2 PV}{\partial S \partial X} = \frac{X}{S} \frac{\partial^2 PV}{\partial X^2} + e^{-qT} N(d).$$

ここでの設定では、右辺第1項にある S/X は、図表3、4のレンジでは概ね1となる。一方、同第2項は1より小さい。したがって、特に $\partial^2 PV / \partial X^2$ の水準が大きいとき、

$$\frac{\partial^2 PV}{\partial S \partial X} \approx \frac{\partial^2 PV}{\partial X^2},$$

という関係が得られる。

21 取引相手がデフォルトする可能性があるので、カウンターパーティ・リスクは存在する。

本稿で扱っている相関デリバティブの場合でも、ダイナミック・ヘッジでデルタをヘッジしつつ、ガンマ等のトレーディングを行うことが可能である。

ガンマ・リスクとクロス・ガンマ・リスクのコントロール例として、コンポジット・オプション（ATM）のショート・ポジション1単位に対して、それぞれ株式と為替レートを原資産とする2種類のプレーンなコール・オプション（ATM）のロング・ポジションを組み合わせたポートフォリオを挙げる（いずれのオプションもデルタ・ヘッジ後）。図表5は、現時点から2週間後のこのポートフォリオの損益を表したものである。ここで、ポートフォリオAは、コンポジット・オプションの2つのガンマが現時点でいずれもゼロとなるように株式、為替レートの両オプションを購入したポートフォリオを示し、ポートフォリオBは、その2倍の額のオプションを購入したポートフォリオを示している。

ポートフォリオA（図表5左図）では、デルタ・ヘッジのみの損益（括弧内の値）と比べ、株価と為替レートが同方向に変動するとき損失が減少し、それらが逆方向に変動するときには収益が増加するという傾向がある。つまり、株式と為替レートを原資産とする2つのオプションで、コンポジット・オプションのガンマ・リスクは削減できたが、クロス・ガンマ・リスクは削減できていない。一方、ポートフォリオB（図表5右図）では、ポートフォリオAに比べて、株価と為替レートが同方向に変動するときには、損失がより小さくなっているほか、それらの原資産

図表5 ポートフォリオA、Bの損益

| | | 損益（ポートフォリオA） | | | | |
|-------------------|------|--------------|-------|-------|--------|-------|
| | | 株価 | | | | |
| | | 95 | 97.5 | 100 | 102.5 | 105 |
| 為替 レ ー ト | 95 | -75 | -39 | -1 | 38 | 77 |
| | | (-134) | (-69) | (-21) | (9) | (21) |
| | 97.5 | -39 | -20 | 0 | 20 | 39 |
| | | (-69) | (-20) | (10) | (21) | (12) |
| | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | (-21) | (10) | (21) | (11) | (-18) |
| 102.5 | 40 | 20 | 0 | -20 | -39 | |
| | (9) | (21) | (11) | (-19) | (-67) | |
| 105 | 80 | 39 | -1 | -40 | -76 | |
| | (21) | (12) | (-18) | (-67) | (-133) | |

| | | 損益（ポートフォリオB） | | | | |
|-------------------|------|--------------|-------|-------|--------|-------|
| | | 株価 | | | | |
| | | 95 | 97.5 | 100 | 102.5 | 105 |
| 為替 レ ー ト | 95 | -16 | -9 | 19 | 68 | 134 |
| | | (-134) | (-69) | (-21) | (9) | (21) |
| | 97.5 | -9 | -20 | -10 | 20 | 67 |
| | | (-69) | (-20) | (10) | (21) | (12) |
| | 100 | 20 | -10 | -21 | -11 | 18 |
| | | (-21) | (10) | (21) | (11) | (-18) |
| 102.5 | 71 | 20 | -11 | -21 | -10 | |
| | (9) | (21) | (11) | (-19) | (-67) | |
| 105 | 140 | 67 | 15 | -13 | -19 | |
| | (21) | (12) | (-18) | (-67) | (-133) | |

備考：1. オプション期間...半年、行使価格...コンポジット・オプション10,000円、株式オプション100ドル、為替オプション100円/ドル

2. ()内はデルタのみヘッジした場合の損益
3. 単位は、株価...ドル、為替レート...円/ドル、損益...円
4. 色付き部分が損失を表す

価格が逆方向に変動するときは、より大きな収益が得られている。つまりポートフォリオBでは、単一原資産のオプションの購入額を増やしたことで、クロス・ガンマ・リスクもかなり削減できたことになる。ただし、2種類のコール・オプションのロング・ポジションは時間経過に伴って価値が低下するため²²、単にこのポジションの額を多くすればよいというわけではない。実際、2週間後の株価、為替レートが現時点（株価100ドル、為替レート100円/ドル）のそれに相対的に近いときは、ポートフォリオBではポートフォリオAに比べて損失が発生もしくは拡大している。

このように、コンポジット・オプションの場合、株式と為替レートを原資産とする2種類のコール・オプションによって、ある程度リスクをコントロールすることが可能である。実務では、いったん、ポートフォリオAのようなスタティック・ヘッジを行った後は、時間の経過による原資産価格の変動に応じて、これら2種類のコール・オプションのポジションを追加的に変えることでリスクをコントロールするというのが、基本的なヘッジの手順である。

ロ． 相関変動リスクとベガ・リスク

コンポジット・オプションでは、株価、為替レートのボラティリティおよび相関係数は、 $\tilde{\sigma} (= \sqrt{\sigma_S^2 + 2\rho\sigma_S\sigma_X + \sigma_X^2})$ を通じてオプション価格に影響を与える。 ρ 、 σ_S 、 σ_X に対するオプション価格の感応度は、それぞれ以下のとおりとなる。

$$\frac{\partial PV}{\partial \rho} = \frac{\partial PV}{\partial \tilde{\sigma}} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \rho} = SXe^{-qT} \sqrt{T} N'(d) \frac{\sigma_S \sigma_X}{\tilde{\sigma}}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial PV}{\partial \sigma_S} = \frac{\partial PV}{\partial \tilde{\sigma}} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \sigma_S} = SXe^{-qT} \sqrt{T} N'(d) \frac{\sigma_S + \rho \sigma_X}{\tilde{\sigma}}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial PV}{\partial \sigma_X} = \frac{\partial PV}{\partial \tilde{\sigma}} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \sigma_X} = SXe^{-qT} \sqrt{T} N'(d) \frac{\sigma_X + \rho \sigma_S}{\tilde{\sigma}}. \quad (21)$$

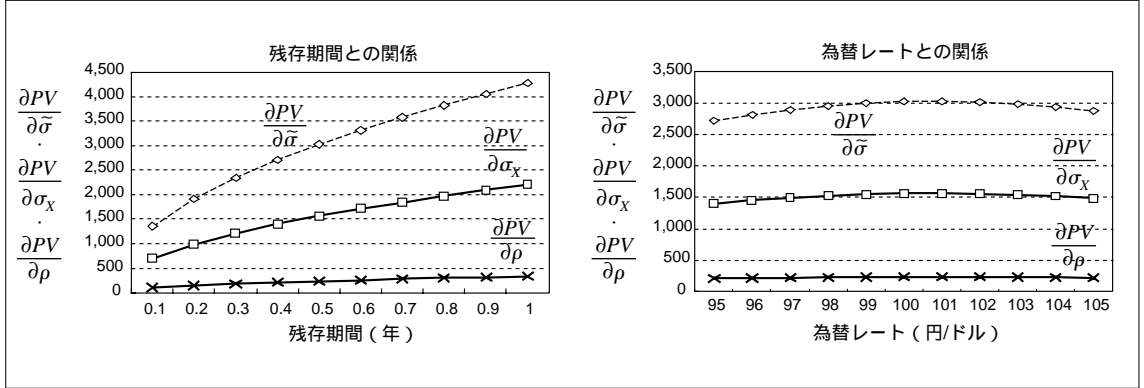
(19)~(21)式の導出で出てくる $\partial PV / \partial \tilde{\sigma} (= SXe^{-qT} \sqrt{T} N'(d))$ は単一原資産のオプションのベガに相当する。 $\partial PV / \partial \tilde{\sigma}$ 、 $\partial PV / \partial \rho$ 、 $\partial PV / \partial \sigma_S$ および $\partial PV / \partial \sigma_X$ は、原資産価格に対してはATM付近で最大となる。また、オプション期間に対しては、基

22 なお、コンポジット・オプションのロング・ポジションでは、 $\partial PV / \partial T$ は、

$$\frac{\partial PV}{\partial T} = \frac{SXN'(d)\tilde{\sigma}e^{-qT}}{2\sqrt{T}} - qSXN(d)e^{-qT} + rKe^{-rT}N(d - \tilde{\sigma}\sqrt{T}), \quad (e)$$

となる。 q がそれほど大きくなければ、(e)式は正值となり、期間が経過し T が短くなると、オプション価値は減少する。単一原資産のオプションも同様の性質を持つ。

図表6 オプション期間、為替レートと $\partial PV / \partial \tilde{\sigma}$ 、 $\partial PV / \partial \rho$ 、 $\partial PV / \partial \sigma_X$



本的には、これらは単調に増加する²³。

図表6に $\partial PV / \partial \tilde{\sigma}$ 、 $\partial PV / \partial \sigma_X$ 、 $\partial PV / \partial \rho$ とオプション期間、為替レートとの関係をプロットした²⁴。右図から、 $\partial PV / \partial \tilde{\sigma}$ 、 $\partial PV / \partial \sigma_X$ 、 $\partial PV / \partial \rho$ は ATM である為替レート 100 円の付近で最大となることがわかる。

次に、図表7に $\partial PV / \partial \tilde{\sigma}$ 、 $\partial PV / \partial \sigma_X$ と為替レートのボラティリティ (σ_X) の関係をプロットした。これをみると、 $\partial PV / \partial \tilde{\sigma}$ (左図) は為替レートのボラティリティの水準にはそれほど依存していないのに対し、 $\partial PV / \partial \sigma_X$ (右図) は、 $\partial \tilde{\sigma} / \partial \sigma_X$ の影響から為替レートのボラティリティに対する感応度が大きいことがわかる((21)式参照)。

23 $\partial PV / \partial \tilde{\sigma}$ を X で微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial PV}{\partial \tilde{\sigma}} \right) = SX e^{-qT} \sqrt{T} N'(d) \left\{ 1 - \frac{\ln(SX/K) + (r_d - q + \tilde{\sigma}^2/2)T}{\tilde{\sigma}^2 T} \right\}, \quad (f)$$

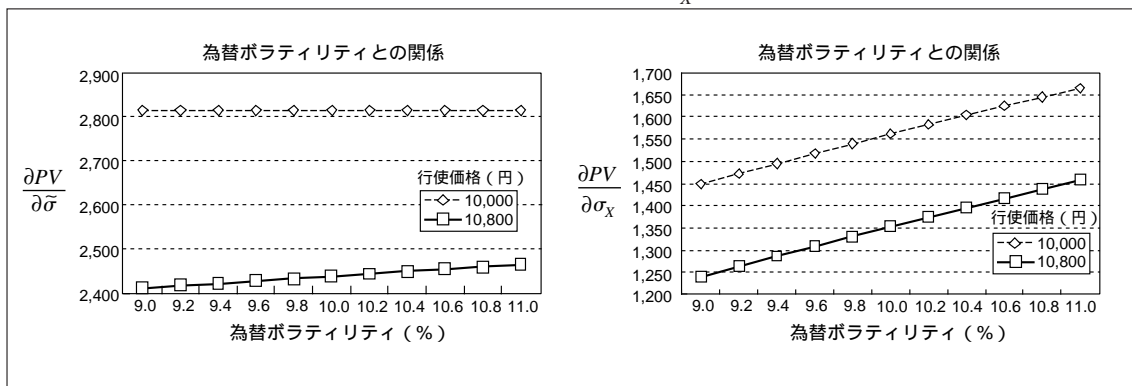
となる。 $SX = Ke^{-(r_d - q - \tilde{\sigma}^2/2)T}$ のときに、(f)式はゼロとなり、 $\partial PV / \partial \tilde{\sigma}$ は最大値をとる。
また、 $\partial PV / \partial \tilde{\sigma}$ を T で微分すると、(g)式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial PV}{\partial \tilde{\sigma}} \right) = SX e^{-qT} \sqrt{T} N'(d) \left[-q + \frac{1}{2T} - \frac{(r_d - q + \tilde{\sigma}^2/2)^2 T^2 - \{\ln(SX/K)\}^2}{2\tilde{\sigma}^2 T^2} \right], \quad (g)$$

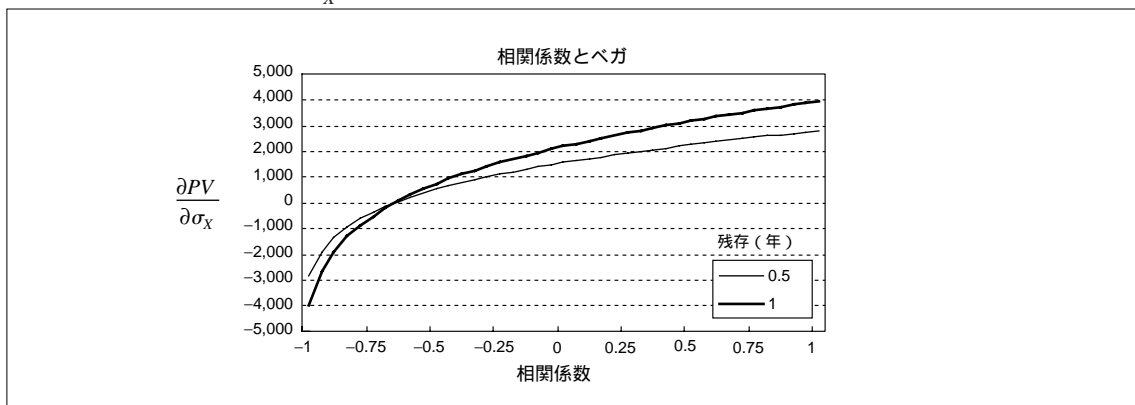
$\{\ln(SX/K)\}^2 > 2q\tilde{\sigma}^2 T^2 + (r_d - q + \tilde{\sigma}^2/2)^2 T^2 - \tilde{\sigma}^2 T$ が成立するか否かで、(g)式の符号が決まる。ただし、パラメータに実務上使用される水準を想定すると、(g)式は正值になる。

24 図表6の $\partial PV / \partial \sigma_X$ 等は、図表3の $\partial^2 PV / \partial X^2$ と比較して、水準がかなり大きい。しかし、(12)式から明らかのように、 $\partial PV / \partial \sigma_X$ 、 $\partial^2 PV / \partial X^2$ の ΔPV に与える影響は、それぞれが $\Delta \sigma_X$ 、 $(\Delta X)^2$ の大きさにも依存するので、必ずしも前者が大きいわけではない。例えば、オプション期間0.2年、為替レート100円/ドル、同ボラティリティが10%のときの、 $\partial PV / \partial \sigma_X$ 、 $\partial^2 PV / \partial X^2$ は、それぞれ、989 (図表6) 4.94 (図表3) であるが、 $\Delta \sigma_X = \sigma_X r_\sigma$ 、 $\Delta X = X r_X$ (r_σ 、 r_X は、それぞれ σ_X 、 X の変化率) とすると、テーラー近似における $\partial PV / \partial \sigma_X$ 、 $\partial^2 PV / \partial X^2$ による損益変動は、それぞれ、 $98.9 r_\sigma$ 、 $24,700 r_X^2$ となり、 r_σ が r_X に比べて非常に大きくない限りは、後者の方が大きい。

図表7 為替レートのボラティリティと $\partial PV/\partial \tilde{\sigma}$ 、 $\partial PV/\partial \sigma_X$



図表8 相関係数と $\partial PV/\partial \sigma_X$



また、相関係数は、(20)~(21)式から明らかのように $\partial PV/\partial \sigma_s$ 、 $\partial PV/\partial \sigma_X$ にも影響を与える。図表8に相関係数と $\partial PV/\partial \sigma_X$ の関係を示した。ベガは相関係数の水準によって、符号や絶対値の水準が大きく異なることがみてとれる。

さて、単一の下資産を持つオプションのトレーディングでは、ベガ・リスクをヘッジする場合に、ポートフォリオ内で、同一の下資産を持つ全てのポジションのベガの和をゼロとするヘッジ戦略が用いられることが多い。一方、相関デリバティブのベガ・リスクと相関変動リスクについては、相関デリバティブの流動性の低さから、ヘッジのために、同じ下資産を有する相関デリバティブを市場から見出すことが難しい場合がある。このため、これらのリスクはそのままリスクとして保有しつつ、必要に応じて、例えば類似の下資産を持つ、何らかの相関デリバティブを組み合わせる等によって、それらのリスクの総和をコントロールすることが試みられる。

(2) 相関デリバティブのVaRの算出

一般に、オプションやオプションを含むポートフォリオのリスク量 (VaR) の算出には、オプション価格やポートフォリオの時価が原資産価格等のリスク・ファクターのテーラー展開で近似できることを前提とした、感応度を用いる各種方法、モンテカルロ法等の価格のフル・バリユエーションを用いる手法等が用いられる。相関デリバティブでも、その多くがオプション性を有しているため、そのVaRの算出には基本的にこれらの手法が用いることが考えられる。

オプションのVaRを計測する場合、単一の原資産を持つオプションであれば、リスク評価期間が十分短いという前提のもとでは、感応度を用いる方法も近似としては実務的に有用であることが知られている。しかし、複数の原資産を有する相関デリバティブ (オプション) では、商品性が相対的に複雑であるだけに、リスク評価期間が十分短いという前提をおいたとしても、近似としての手法の有用性は、単一原資産のオプションの場合に比べて劣後すると考えられる。以下では、この観点から、相関デリバティブのVaRの算出手法を検討する。具体的には、ガンマ・クロス・ガンマ等の感応度を用いてVaRを算出する一般的な方法を概説した後、コンポジット・オプションを例にとり、感応度を用いる方法によるVaRと、モンテカルロ法によって算出したVaRとの比較を行う。

イ. 感応度を用いたVaRの算出方法

資産1、資産2を原資産として持つ金融商品からなるポートフォリオの価値をPVとする。原資産価格を X_1 、 X_2 とし、それらに関する2次までのテーラー近似を用いると、(12)式から次の関係を得る (ここでは、相関係数、ボラティリティは不変とする)。

$$\begin{aligned} \Delta PV \approx & \frac{\partial PV}{\partial X_1} \Delta X_1 + \frac{\partial PV}{\partial X_2} \Delta X_2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 PV}{\partial X_1^2} (\Delta X_1)^2 + \frac{\partial^2 PV}{\partial X_1 \partial X_2} \Delta X_1 \Delta X_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 PV}{\partial X_2^2} (\Delta X_2)^2 . \end{aligned} \quad (22)$$

リスク評価期間 t が十分短く、 ΔX_1 と ΔX_2 が、それぞれ平均0、標準偏差 $\sigma_1 X_1 \sqrt{t}$ 、 $\sigma_2 X_2 \sqrt{t}$ の正規分布に従い、それらの相関係数が ρ であると仮定する。

オプション性がそれほど大きくないポートフォリオでは、ガンマとクロス・ガンマが相対的に小さいので、これらの効果を捨象し、99パーセンタイルのVaRを(23)式のように近似的に算出する。

$$\begin{aligned} VaR_{\text{delta}} &= 2.33 \sqrt{V[\Delta PV]} \\ &= 2.33 \sqrt{\left(\frac{\partial PV}{\partial X_1} \right)^2 \sigma_1^2 X_1^2 t + 2 \left(\frac{\partial PV}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial PV}{\partial X_2} \right) \rho \sigma_1 \sigma_2 X_1 X_2 t + \left(\frac{\partial PV}{\partial X_2} \right)^2 \sigma_2^2 X_2^2 t} , \end{aligned} \quad (23)$$

ただし、2.33は標準正規分布の片側99パーセントの信頼係数、 $V[\Delta PV]$ は ΔPV の分散である。

オプションを含むポートフォリオでは、ガンマやクロス・ガンマの影響を無視できなくなる。ポートフォリオに相関デリバティブが含まれないときは、実務的には、VaR算出の際、クロス・ガンマを無視できるとしたうえで、ガンマ・リスクを次の(24)式から求め、(23)式に加算するという方法が用いられることがある。

$$-\frac{1}{2}\min\left\{0, \frac{\partial^2 PV}{\partial X_1^2}\right\}(2.33\sigma_1\sqrt{t}X_1)^2 - \frac{1}{2}\min\left\{0, \frac{\partial^2 PV}{\partial X_2^2}\right\}(2.33\sigma_2\sqrt{t}X_2)^2, \quad (24)$$

ここで、 $-\min\{0, \cdot\}$ は、ネガティブ・ガンマのみを勘案するための操作である。

相関デリバティブの場合には、クロス・ガンマの影響を無視できないので、(24)式の考え方を応用し、以下の(25)式でVaRを求めることが考えられる。ここでは、(25)式によるVaRの算出方法を「ガンマ・プラス法」と呼ぶ。

$$\begin{aligned} VaR_{Gamma+} = \\ VaR_{delta} - \frac{1}{2}\min\left\{0, \frac{\partial^2 PV}{\partial X_1^2}\right\}(2.33\sigma_1\sqrt{t}X_1)^2 - \frac{1}{2}\min\left\{0, \frac{\partial^2 PV}{\partial X_2^2}\right\}(2.33\sigma_2\sqrt{t}X_2)^2 \\ - \min\left\{\frac{\partial^2 PV}{\partial X_1\partial X_2}, -\frac{\partial^2 PV}{\partial X_1\partial X_2}\right\}(2.33\sigma_1\sqrt{t}X_1)(2.33\sigma_2\sqrt{t}X_2). \end{aligned} \quad (25)$$

さて、「ガンマ・プラス法」は、1%の確率で起こる大きな変動が X_1 、 X_2 の両者に同時に発生することを仮定していることになる。このため、「ガンマ・プラス法」では、VaRが過大に算出される傾向があるという欠点を持つ。そこで、(22)式から $V[\Delta PV]$ を、

$$\begin{aligned} V[\Delta PV] = & \sum_i^2 \sum_j^2 \frac{\partial PV}{\partial X_i} \frac{\partial PV}{\partial X_j} C[\Delta X_i, \Delta X_j] \\ & + \frac{1}{2} \sum_k^2 \sum_j^2 \sum_i^2 \frac{\partial PV}{\partial X_k} \frac{\partial^2 PV}{\partial X_i \partial X_j} C[\Delta X_k, \Delta X_i \Delta X_j] \\ & + \frac{1}{4} \sum_l^2 \sum_k^2 \sum_j^2 \sum_i^2 \frac{\partial^2 PV}{\partial X_k \partial X_l} \frac{\partial^2 PV}{\partial X_i \partial X_j} C[\Delta X_k \Delta X_l, \Delta X_i \Delta X_j], \end{aligned} \quad (26)$$

と求め($C[\cdot]$ は共分散を表す)、 ΔPV の分布が正規分布に従うと仮定し、 $2.33\sqrt{V[\Delta PV]}$ をVaRとする方法もある。 $V[\Delta PV]$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 V[\Delta PV] = & \left(\frac{\partial PV}{\partial X_1} \right)^2 \sigma_1^2 X_1^2 t + \left(\frac{\partial PV}{\partial X_2} \right)^2 \sigma_2^2 X_2^2 t + 2 \left(\frac{\partial PV}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial PV}{\partial X_2} \right) \rho \sigma_1 \sigma_2 X_1 X_2 t \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 PV}{\partial X_1^2} \right)^2 \sigma_1^4 X_1^4 t^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 PV}{\partial X_2^2} \right)^2 \sigma_2^4 X_2^4 t^2 \\
 & + \left(\frac{\partial^2 PV}{\partial X_1 \partial X_2} \right)^2 (1 + \rho^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2 X_1^2 X_2^2 t^2 + 2 \frac{\partial^2 PV}{\partial X_1^2} \frac{\partial^2 PV}{\partial X_1 \partial X_2} \rho \sigma_1^3 \sigma_2 X_1^3 X_2 t^2 \\
 & + 2 \frac{\partial^2 PV}{\partial X_2^2} \frac{\partial^2 PV}{\partial X_1 \partial X_2} \rho \sigma_1 \sigma_2^3 X_1 X_2^3 t^2 + \frac{\partial^2 PV}{\partial X_1^2} \frac{\partial^2 PV}{\partial X_2^2} \rho^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 X_1^2 X_2^2 t^2.
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

(27)式でVaRを求める方法を、ここでは、「デルタ・ガンマ法」と呼ぶ。なお、デルタ・ガンマ法については、補論2.で詳細を説明する。

ただし、ある原資産価格 X_1 に対するガンマ・リスク ($0.5 \cdot (\partial^2 PV / \partial X_1^2) \cdot (\Delta X_1)^2$) は、原資産価格変動 (ΔX_1) の方向によらず、ガンマ ($\partial^2 PV / \partial X_1^2$) の符号に従って正値か負値かいずれかにしかならない。このため、ポートフォリオにオプション性を持つポジションが多く含まれるときには、 ΔPV の分布が正規分布に従うという仮定は妥当ではなくなる。また、ポートフォリオに期間が短いオプションが含まれると、ガンマの原資産価格に対する感応度を無視できなくなる。その場合、仮にデルタ・ガンマ法を拡張し、原資産価格に関する3次以上のテーラー近似を使うとすると、(26)式あるいは(27)式に該当する $V[\Delta PV]$ の数式は一層複雑になるだけでなく、どの程度までの高次の項が必要であるかを別途評価する必要性が生じる。

□ . 数値例

ここでは、ガンマ・プラス法、デルタ・ガンマ法およびモンテカルロ法（詳細は補論2.を参照）によって算出したVaRを比較する。コンボジット・オプショ

図表9 市場データ等の各種設定

| | |
|-----------|--|
| VaR算出条件 | <ul style="list-style-type: none"> ・ リスク評価期間：10日（1年 = 250営業日） ・ 信頼水準：99パーセンタイル ・ モンテカルロ法の試行回数：10,000回 |
| 市場データ | <ul style="list-style-type: none"> ・ 為替レート（同ボラティリティ）：100円 / ドル（10%） ・ 外貨建て株式（同ボラティリティ）：100ドル（15%） ・ 円貨の無リスク金利：0% ・ 外貨建て株式の配当率：0% |
| ポートフォリオ構成 | <ul style="list-style-type: none"> ・ コンボジット・オプション（コール）の1単位の売却（デルタ・ヘッジ後） |
| オプション条件 | <ul style="list-style-type: none"> ・ オプション期間：2週間、半年 |

ンを対象とし、価格計算にはBS型モデルを使用する。設定は図表9のとおりである。

以上の設定のもとで3つの手法によるVaRを算出し、図表10に示した。

図表10をみると、モンテカルロ法で算出されたVaRに比べ、ガンマ・プラス法によるVaRは全般的に過大に算出されていることがわかる。特に相関係数が小さいときに、その傾向が大きい。そうした傾向がみられるのは、(25)式から明らかなように、ガンマ・プラス法が、1%の確率で起こる大きな変動が全ての原資産価格で同時に発生することを仮定していることが背景にある。また、3つのポートフォリオの中では、ガンマとクロス・ガンマの値が相対的に大きい「オプション期間2週間、ATM」のポートフォリオにおいて、ガンマ・プラス法によるVaRは全般的に過大に算出されている。これは、(25)式からわかるように、ガンマ・プラス法がガンマの値そのものをリスク量の算出に用いているため、ガンマやクロス・ガンマが大きいポートフォリオほどリスクが高めに算出されることによるものである。

一方、デルタ・ガンマ法で算出されたVaRは、モンテカルロ法によるVaRに比べて、過小に算出されている。これは、 ΔPV の分布が正規分布に従うと仮定しているため、実際の分布が持つ(正規分布対比での)ファット・テール性を捕捉できていないためであると考えられる。また、両手法によるVaRの比率をみると、比較的

図表10 ポートフォリオのVaR

| 相関係数 | オプション期間半年、ATM | | | オプション期間2週間、ATM | | | オプション期間2週間、OTM | | |
|-------|---------------|---------------|--------------|----------------|-----------------|---------------|----------------|---------------|---------------|
| | モンテカルロ法 | ガンマ・プラス法 | デルタ・ガンマ法 | モンテカルロ法 | ガンマ・プラス法 | デルタ・ガンマ法 | モンテカルロ法 | ガンマ・プラス法 | デルタ・ガンマ法 |
| -0.75 | 63 | 399 (6.31) | 37 (0.59) | 174 | 1,307 (7.52) | 125 (0.72) | 110 | 488 (4.43) | 47 (0.43) |
| -0.50 | 84 | 306 (3.63) | 51 (0.61) | 231 | 992 (4.30) | 167 (0.73) | 202 | 566 (2.80) | 96 (0.47) |
| -0.25 | 103 | 259 (2.52) | 62 (0.61) | 278 | 833 (2.99) | 201 (0.72) | 257 | 563 (2.19) | 136 (0.53) |
| 0 | 116 | 229 (1.97) | 72 (0.62) | 317 | 732 (2.31) | 231 (0.73) | 304 | 542 (1.79) | 171 (0.57) |
| 0.25 | 125 | 208 (1.66) | 81 (0.64) | 345 | 662 (1.92) | 257 (0.74) | 349 | 519 (1.49) | 201 (0.58) |
| 0.50 | 137 | 192 (1.40) | 89 (0.65) | 378 | 609 (1.61) | 281 (0.74) | 379 | 496 (1.31) | 229 (0.60) |
| 0.75 | 143 | 180 (1.26) | 96 (0.70) | 403 | 567 (1.41) | 303 (0.75) | 416 | 475 (1.14) | 254 (0.61) |

備考：1. VaRの単位は円

2.()内は、モンテカルロ法によるVaRに対する比率を表す

3. 行使価格...ATM：10,000円、OTM：10,300円

狭い範囲の値を示すことがわかる。この理由は、デルタ・ガンマ法が原資産価格間の相関関係を明示的に勘案しているからであると考えられる。

なお、オプション期間2週間とするATMのポートフォリオとOTMのポートフォリオを比較すると、モンテカルロ法以外で計算したVaRは、前者が後者をほぼ一貫して上回っている。これは、これらのVaR算出手法が2次までの感応度しか勘案していないため、ガンマやクロス・ガンマが相対的に大きい前者のリスク量が大きく算出されるためである。これに対し、モンテカルロ法によるVaRでは、2つのポートフォリオ間でそうした傾向はみられない。したがって、これらのコンビジット・オプションのポートフォリオでは、ガンマ・プラス法やデルタ・ガンマ法はそのリスク水準を的確には捕捉できていないとみなすことが可能である。また、ガンマ・プラス法やデルタ・ガンマ法を原資産価格の高次項に拡張することは必ずしも容易ではない。よって、相関デリバティブのVaRの計測には、テーラー近似による感応度を用いた手法は適当でなく、モンテカルロ法等のフル・バリュエーションに基づく手法が必要であると結論付けられる。

5 . ヒストリカル・データを用いた事例分析

本節では、実際の市場で観測されたヒストリカルなデータを用いて、コンビジット・オプションを含むポートフォリオのリスク特性を検討する²⁵。具体的には、(1)でNYダウとドル/円の為替レートを原資産とするコンビジット・オプションを対象に、また(2)でシンガポールの株価指数とUSドル/シンガポール・ドルの為替レートを原資産とするコンビジット・オプションを対象に、それぞれ日次ベースでVaRと損益額の比較を行い、その結果を検討する。次に、(3)では、コンビジット・オプションのプライシングに用いる相関係数に注目し、その推定の方法によって、算出される価格がどの程度の影響を受け得るかを考察する。

(1) コンビジット・オプション (NYダウと為替レートのケース)

まず、NYダウとドル/円の為替レートを原資産とするコンビジット・オプション、NYダウのオプション、ドル/円の為替オプションの3つ(いずれもコール)の組み合わせから構成されるポートフォリオ(デルタ・ヘッジ後)を対象とし、VaRと損益額の比較を行う。市場データ等の各種の設定は以下のとおりである。

25 各種オプションの価格の計算にはBS型モデルを使用した。

図表11 市場データ等の各種設定

| | | | | |
|-----------|---|-------|------------------------|------------------------|
| 市場データ | <ul style="list-style-type: none"> ・ データ期間：1998年10月19日～2002年10月21日 ・ NYダウ、為替レートのボラティリティ（日次）：過去1年間の時系列データより計算 ・ 相関係数（日次）：過去1年間の時系列データより計算 ・ 円貨の無リスク金利：0% ・ NYダウの配当率：0% | | | |
| ポートフォリオ構成 | | オプション | オプション | オプション |
| | ポートフォリオ1 | -1 | 0 | 0 |
| | ポートフォリオ2 | 0 | $-\Gamma_S / \Gamma_S$ | $-\Gamma_X / \Gamma_X$ |
| | ポートフォリオ3 | -1 | Γ_S / Γ_S | Γ_X / Γ_X |
| | <ul style="list-style-type: none"> ・ Γ_S、Γ_X は、それぞれオプション、の株価に対するガンマ ・ Γ_X、Γ_X は、それぞれオプション、の為替レートに対するガンマ ・ マイナス符号は、オプションの売却を表す。 | | | |
| オプション条件 | <ul style="list-style-type: none"> ・ オプション期間：2週間 ・ 行使価格：基準時点の原資産価格 | | | |

ポートフォリオ1は、コンポジット・オプションのショート・ポジションであるため、負のガンマ、クロス・ガンマを持つ²⁶。ポートフォリオ2は、ポートフォリオ1と同じ額の負のガンマを持つ一方、クロス・ガンマはゼロである²⁷。ポートフォリオ3は、ポートフォリオ1と同じ額の負のクロス・ガンマを持つ一方、ガンマはゼロである²⁸。なお、ポートフォリオ1 = ポートフォリオ2 + ポートフォリオ3という関係がある。つまり、ポートフォリオ1はポートフォリオ2と3で複製される。

原資産価格、ボラティリティ、相関係数の推移は、図表12のとおりである。

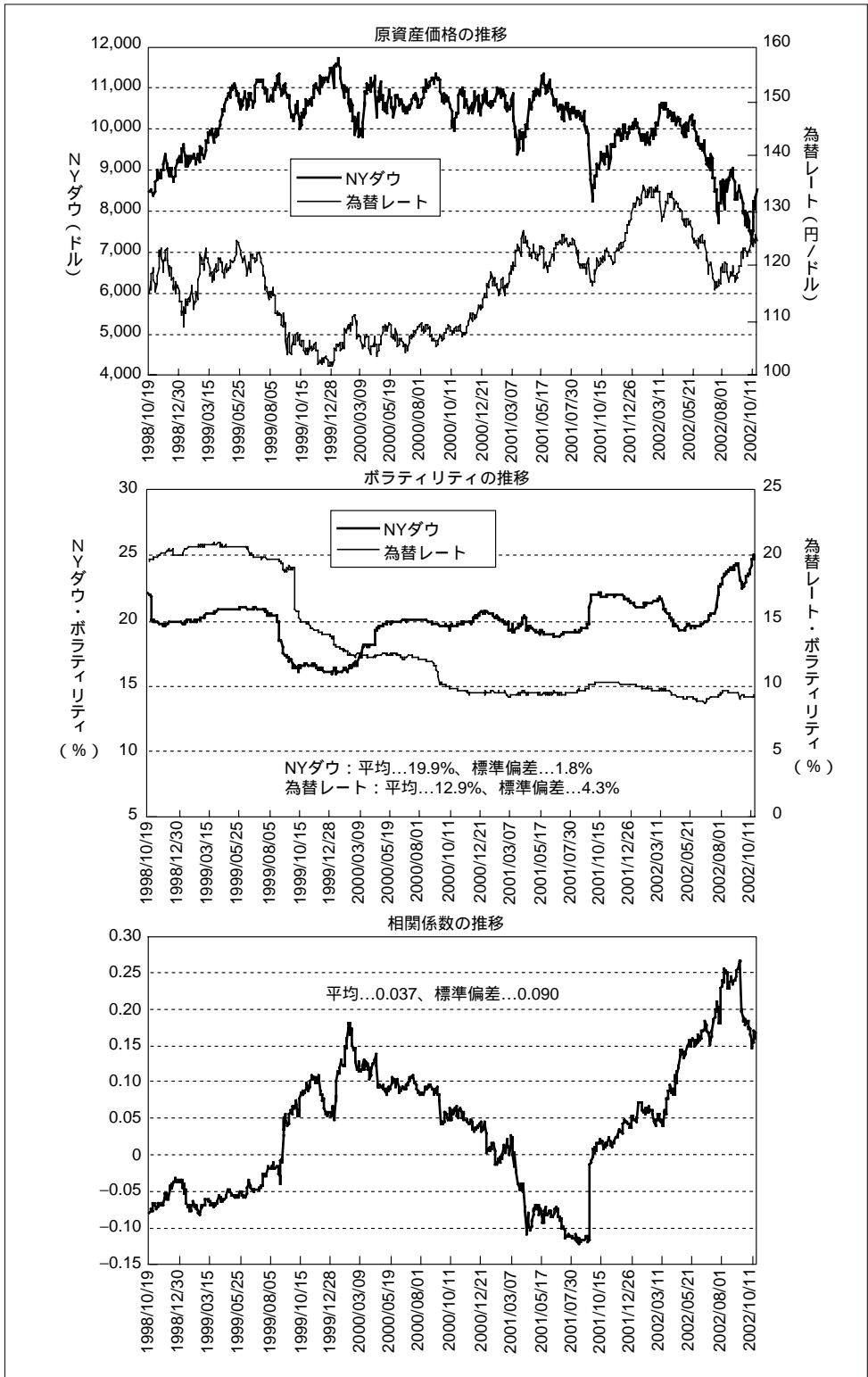
以上の設定のもと、リスク評価期間10日のVaR（99パーセンタイル、モンテカルロ法で算出）と10日後の実際の損益を比較し、ポートフォリオ1（コンポジット・オプションのショート・ポジション）でVaR（負値で定義）を超える損失が発生したサンプルを図表13に掲げた。

26 図表3で、コンポジット・オプションのロング・ポジションのガンマを掲げているが、これから明らかのように、ロング（ショート）・ポジションのガンマは正（負）となる。

27 ポートフォリオ2では、NYダウのオプションを Γ_S / Γ_S 単位売却している。したがって、ポートフォリオ2のSに対するガンマは $-(\Gamma_S / \Gamma_S) \cdot (\Gamma_S) = -\Gamma_S$ となり、ポートフォリオ1のSに対するガンマに等しい。同様に、ポートフォリオ1と2のXに対するガンマも等しいことが導かれる。また、ポートフォリオ2のXとSに対するクロス・ガンマは、ポートフォリオ内にコンポジット・オプションのような相関デリバティブが含まれていないため、ゼロである。

28 前脚注同様の関係が、ポートフォリオ3でも導かれる。

図表12 原資産価格、ボラティリティ、相関係数の推移



図表13 VaRと損益の比較²⁹

| 日付 | NYダウ ボラティ リティ | 為替レート ボラティ リティ | 相関係数 | NYダウ 変化率 (%) | 為替レート 変化率 (%) | × × 10,000 | 損益 (P1) | 損益 (P2) | 損益 (P3) | VaR (P1) | VaR (P2) | VaR (P3) |
|------------|---------------------|----------------------|--------|--------------------|---------------------|---------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|
| 2000/03/09 | 17.27% | 12.40% | 0.116 | 11.08% | 0.93% | 10.30 | -44,368 | -30,771 | -13,597 | -42,385 | -27,319 | -17,728 |
| 2000/03/10 | 17.29% | 12.40% | 0.117 | 11.92% | 0.71% | 8.52 | -47,068 | -33,172 | -13,896 | -41,957 | -27,094 | -17,564 |
| 2000/03/13 | 17.28% | 12.42% | 0.117 | 10.84% | 1.64% | 17.82 | -46,392 | -31,505 | -14,888 | -41,696 | -26,833 | -17,449 |
| 2000/03/14 | 17.29% | 12.42% | 0.122 | 11.47% | 1.53% | 17.50 | -48,032 | -32,964 | -15,068 | -40,963 | -26,348 | -17,170 |
| 2001/08/27 | 19.39% | 9.70% | -0.117 | -14.08% | -2.63% | 37.00 | -83,092 | -67,185 | -15,907 | -45,281 | -40,811 | -17,655 |
| 2001/08/28 | 19.42% | 9.70% | -0.119 | -12.90% | -2.37% | 30.56 | -73,265 | -58,885 | -14,380 | -44,667 | -40,316 | -17,408 |
| 2001/08/29 | 19.44% | 9.72% | -0.114 | -13.20% | -1.86% | 24.51 | -70,872 | -58,124 | -12,748 | -43,932 | -39,512 | -17,108 |
| 2001/08/30 | 19.51% | 9.72% | -0.114 | -15.56% | -2.13% | 33.15 | -85,064 | -70,860 | -14,204 | -43,393 | -39,034 | -16,857 |
| 2001/08/31 | 19.51% | 9.77% | -0.115 | -17.23% | -1.83% | 31.52 | -92,846 | -78,980 | -13,865 | -43,113 | -38,812 | -16,791 |
| 2001/09/04 | 19.51% | 9.77% | -0.113 | -13.94% | -1.89% | 26.40 | -74,606 | -61,557 | -13,049 | -43,641 | -39,173 | -17,015 |
| 2001/09/05 | 19.51% | 9.78% | -0.112 | -13.69% | -2.55% | 34.96 | -77,389 | -62,270 | -15,119 | -44,122 | -39,588 | -17,211 |
| 2001/09/06 | 19.60% | 9.81% | -0.120 | -12.94% | -2.88% | 37.33 | -73,921 | -58,364 | -15,557 | -43,734 | -39,482 | -17,067 |
| 2001/09/07 | 19.74% | 9.80% | -0.117 | -9.62% | -1.66% | 15.96 | -46,341 | -35,970 | -10,371 | -43,043 | -38,805 | -16,696 |
| 2001/09/21 | 21.54% | 10.17% | -0.003 | 10.73% | 3.51% | 37.70 | -50,577 | -35,762 | -14,815 | -40,357 | -33,262 | -15,101 |
| 2002/07/05 | 20.33% | 9.08% | 0.156 | -14.50% | -3.78% | 54.83 | -80,968 | -59,208 | -21,760 | -46,984 | -35,630 | -17,046 |
| 2002/07/08 | 20.36% | 9.21% | 0.162 | -16.07% | -2.06% | 33.02 | -79,018 | -61,947 | -17,071 | -46,048 | -34,689 | -16,794 |
| 2002/07/09 | 20.43% | 9.16% | 0.171 | -15.32% | -0.65% | 9.97 | -66,621 | -54,889 | -11,732 | -45,113 | -34,032 | -16,429 |
| 2002/10/07 | 23.62% | 9.27% | 0.166 | 15.03% | 0.43% | 6.53 | -50,350 | -43,155 | -7,194 | -43,759 | -34,387 | -14,828 |

備考：1. 損益、VaRの単位は円

2. NYダウ、為替レートの変化率は(10日後の価格 - 基準時の価格) / 基準時の価格で算出

3. P1～P3は、それぞれポートフォリオ1～ポートフォリオ3を表す

4. 色付き部分は損失がVaRを超過したことを示す

さて、図表2でみたように、ガンマ・リスクは、原資産である株価(ドル)と為替レート(円/ドル)が現時点からいずれの方向でも変動すれば損失をもたらす、クロス・ガンマ・リスクは、両者が同方向に変動すると損失を発生させる一方で、逆方向に変動すると収益をもたらす。これを前提に図表13をみてみよう。ポートフォリオ1で「VaRを超える損失が発生している」(以下、「超過が発生している」)ときに、ポートフォリオ2でも超過が発生しているサンプルが多い。一方、ポートフォリオ3では、ポートフォリオ1で超過が発生していても、同時に超過が発生しているサンプルは2つのみと対照的に少ない。つまり、ポートフォリオ2では原資産価格のいずれかが相対的に大きく変動したときに超過が発生し、それがポートフォリオ1での超過発生につながっている。その一方で、データ期間内では、原資産価格両方が同時に同方向へ相対的に大きな変動を示したことが少なく、その結果として

29 「× ×10,000」の列は、原資産価格の両者が同時に変動した大きさの目安となる。

ポートフォリオ3に超過が発生する回数が少なかったと推論できる。

(2) コンポジット・オプション
(シンガポール株価指数と為替レートのケース)

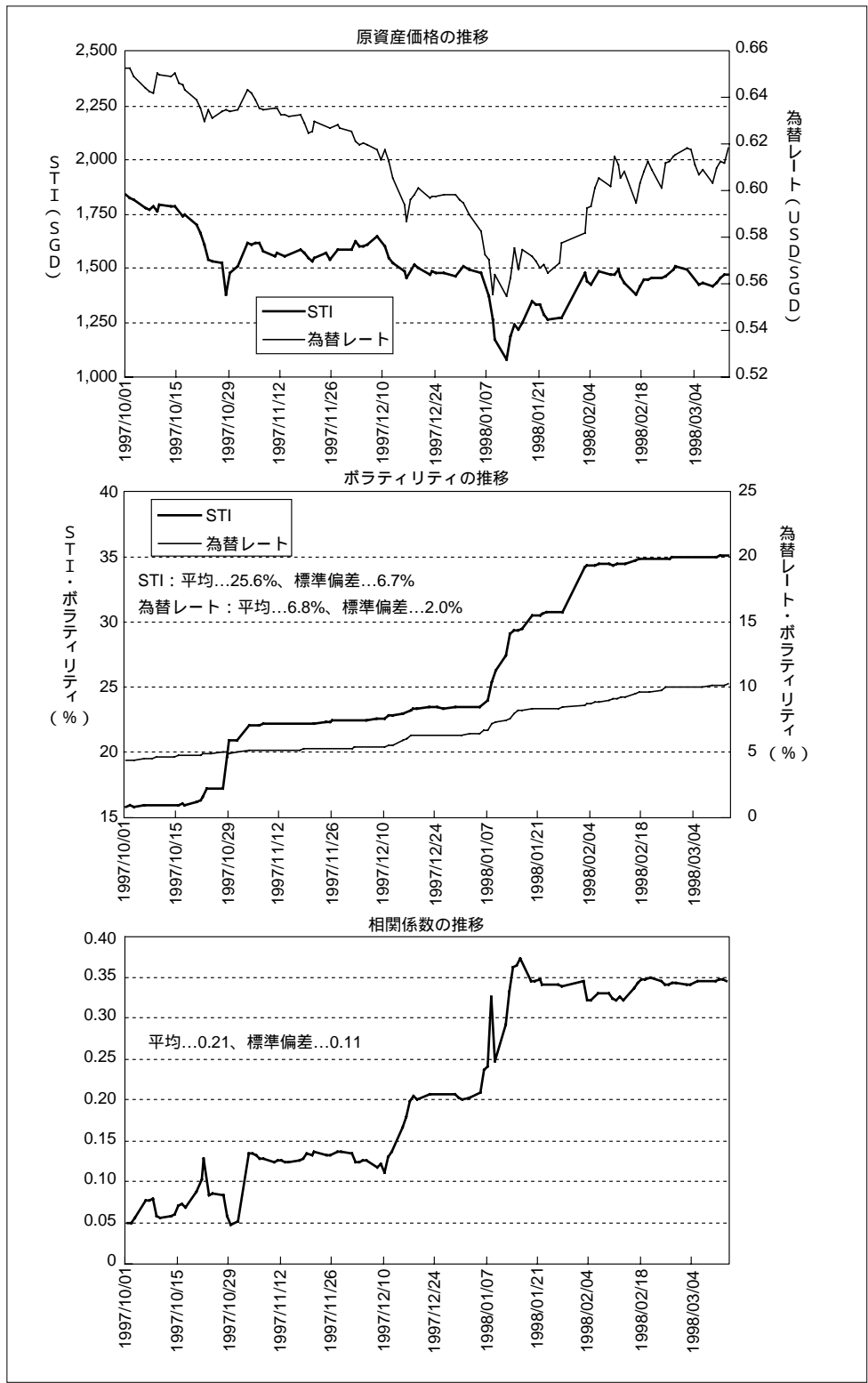
(1)のNYダウと為替レートを原資産とするコンポジット・オプションの例では、原資産価格両方が同時に同方向へ相対的に大きな変動を示したことが少なく、そのためポートフォリオ3での超過発生回数が少ないと推論した。そうすると、2つの原資産価格の連動性が高まれば、(1)のポートフォリオ3のような性質を持つポートフォリオでは、超過発生回数が多くなると考えられる。

そこで、コンポジット・オプションの原資産をシンガポールの株価指数であるSTI (Straits Times Index) とUSドル/シンガポール・ドルとし、1997年10月～1998年3月のアジア通貨危機時の市場データを使用して、(1)と同様の分析を行った。対象ポートフォリオは、 Γ_S STIとUSドル/シンガポール・ドルの為替レートを原資産とするコンポジット・オプション、 Γ_X STIのオプション、 Γ_X USドル/シンガポール・ドルの為替オプション(いずれもコール)の組み合わせたもの(デルタ・ヘッジ後)とする。具体的な設定等は図表14、15である。

図表14 市場データ等の各種設定

| 市場データ | <ul style="list-style-type: none"> ・ データ期間：1997年10月1日～1998年3月13日 ・ STI、為替レートのボラティリティ(日次)：過去1年間の時系列データより計算 ・ 相関係数(日次)：過去1年間の時系列データより計算 ・ USドルの無リスク金利：0% ・ STIの配当率：0% | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|--|--------------------------|--------------------------|--|------------------|------------------|------------------|-----------|----|---|---|-----------|---|--------------------------|--------------------------|-----------|----|-------------------------|-------------------------|
| ポートフォリオ構成 | <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>オプション Γ_S</th> <th>オプション Γ_X</th> <th>オプション Γ_X</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>ポートフォリオ1'</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>ポートフォリオ2'</td> <td>0</td> <td>$-\Gamma_S' / \Gamma_S'$</td> <td>$-\Gamma_X' / \Gamma_X'$</td> </tr> <tr> <td>ポートフォリオ3'</td> <td>-1</td> <td>Γ_S' / Γ_S'</td> <td>Γ_X' / Γ_X'</td> </tr> </tbody> </table> <ul style="list-style-type: none"> ・ Γ_S'、Γ_S' は、それぞれオプション Γ_S'、Γ_S' の株価に対するガンマ ・ Γ_X'、Γ_X' は、それぞれオプション Γ_X'、Γ_X' の為替レートに対するガンマ ・ マイナス符号は、オプションの売却を表す。 | | | | オプション Γ_S | オプション Γ_X | オプション Γ_X | ポートフォリオ1' | -1 | 0 | 0 | ポートフォリオ2' | 0 | $-\Gamma_S' / \Gamma_S'$ | $-\Gamma_X' / \Gamma_X'$ | ポートフォリオ3' | -1 | Γ_S' / Γ_S' | Γ_X' / Γ_X' |
| | オプション Γ_S | オプション Γ_X | オプション Γ_X | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ポートフォリオ1' | -1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ポートフォリオ2' | 0 | $-\Gamma_S' / \Gamma_S'$ | $-\Gamma_X' / \Gamma_X'$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ポートフォリオ3' | -1 | Γ_S' / Γ_S' | Γ_X' / Γ_X' | | | | | | | | | | | | | | | | |
| オプション条件 | <ul style="list-style-type: none"> ・ オプション期間：2週間 ・ 行使価格：基準時点の原資産価格 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

図表15 原資産価格、ボラティリティ、相関係数 (STI)



以上の設定で、リスク評価期間10日のVaR（99パーセンタイル、モンテカルロ法で算出）と10日後の実際の損益を比較し、ポートフォリオ1'（コンポジット・オプションのショート・ポジション）でVaRを超える損失が発生したサンプルを図表16に示す。

図表16 VaRと損益の比較（STI）

| 日付 | STI ボラティ リティ | 為替レート ボラティ リティ | 相関係数 | STI 変化率 (%) | 為替レート 変化率 (%) | × × 10,000 | 損益 (P1') | 損益 (P2') | 損益 (P3') | VaR (P1') | VaR (P2') | VaR (P3') |
|------------|--------------------|----------------------|-------|-------------------|---------------------|---------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| 1997/10/08 | 15.90% | 4.44% | 0.078 | -9.66% | -1.85% | 17.83 | -50.86 | -40.16 | -10.70 | -34.26 | -30.60 | -9.54 |
| 1997/10/09 | 15.88% | 4.65% | 0.058 | -12.82% | -2.47% | 31.71 | -72.06 | -58.08 | -13.98 | -34.29 | -30.68 | -9.84 |
| 1997/10/10 | 15.92% | 4.65% | 0.056 | -14.30% | -2.92% | 41.78 | -83.80 | -67.26 | -16.54 | -34.80 | -31.14 | -9.97 |
| 1997/10/13 | 15.92% | 4.65% | 0.057 | -14.63% | -2.28% | 33.40 | -82.57 | -68.08 | -14.49 | -34.51 | -30.97 | -9.95 |
| 1997/10/14 | 15.90% | 4.65% | 0.059 | -22.61% | -2.44% | 55.28 | -129.57 | -111.81 | -17.76 | -34.78 | -31.06 | -10.00 |
| 1997/10/15 | 15.97% | 4.70% | 0.071 | -16.07% | -1.90% | 30.55 | -87.25 | -73.87 | -13.38 | -34.21 | -30.46 | -9.91 |
| 1997/10/16 | 16.02% | 4.70% | 0.072 | -13.23% | -1.72% | 22.76 | -68.54 | -57.80 | -10.74 | -33.97 | -30.13 | -9.75 |
| 1997/10/28 | 19.70% | 4.95% | 0.058 | 12.99% | -0.28% | -3.70 | -39.88 | -39.81 | -0.08 | -31.77 | -29.41 | -8.28 |
| 1997/12/02 | 22.49% | 5.35% | 0.123 | -10.48% | -5.60% | 58.64 | -61.18 | -37.27 | -23.91 | -42.04 | -38.12 | -10.56 |
| 1997/12/08 | 22.55% | 5.36% | 0.117 | -10.43% | -3.42% | 35.72 | -51.02 | -35.64 | -15.38 | -42.52 | -38.65 | -10.65 |
| 1997/12/23 | 23.44% | 6.31% | 0.206 | -14.87% | -6.97% | 103.71 | -76.31 | -49.80 | -26.51 | -39.84 | -34.10 | -10.76 |
| 1997/12/24 | 23.44% | 6.31% | 0.206 | -20.68% | -5.61% | 116.07 | -95.61 | -71.58 | -24.03 | -39.86 | -34.06 | -10.76 |
| 1997/12/26 | 23.40% | 6.32% | 0.206 | -26.74% | -7.30% | 195.10 | -128.20 | -95.45 | -32.75 | -39.73 | -33.97 | -10.80 |
| 1997/12/29 | 23.42% | 6.32% | 0.206 | -18.99% | -5.94% | 112.89 | -88.77 | -64.42 | -24.35 | -39.34 | -33.65 | -10.63 |
| 1997/12/30 | 23.49% | 6.32% | 0.203 | -16.80% | -3.48% | 58.51 | -71.88 | -55.46 | -16.43 | -40.01 | -34.32 | -10.82 |
| 1997/12/31 | 23.49% | 6.32% | 0.201 | -19.01% | -4.73% | 89.89 | -86.63 | -65.49 | -21.13 | -40.31 | -34.63 | -10.89 |
| 1998/01/02 | 23.50% | 6.37% | 0.203 | -16.53% | -2.53% | 41.79 | -66.14 | -53.39 | -12.74 | -39.80 | -34.05 | -10.78 |
| 1998/01/12 | 27.48% | 7.49% | 0.292 | 17.35% | 2.53% | 43.93 | -44.23 | -35.84 | -8.39 | -32.25 | -26.63 | -8.95 |
| 1998/01/14 | 29.32% | 8.00% | 0.362 | 19.25% | 1.11% | 21.28 | -52.19 | -44.98 | -7.21 | -41.49 | -33.44 | -11.54 |
| 1998/01/15 | 29.33% | 8.14% | 0.364 | 18.18% | 4.56% | 82.91 | -60.47 | -44.52 | -15.95 | -40.22 | -32.32 | -11.39 |
| 1998/01/16 | 29.44% | 8.28% | 0.372 | 14.19% | 3.20% | 45.46 | -42.77 | -31.53 | -11.24 | -42.03 | -33.54 | -12.02 |
| 1998/01/20 | 30.52% | 8.30% | 0.346 | 11.39% | 6.23% | 71.00 | -46.80 | -26.94 | -19.86 | -45.87 | -37.24 | -12.66 |
| 1998/01/22 | 30.69% | 8.32% | 0.340 | 14.76% | 8.14% | 120.17 | -65.06 | -39.41 | -25.64 | -44.15 | -35.95 | -12.13 |
| 1998/01/23 | 30.72% | 8.33% | 0.341 | 17.98% | 8.27% | 148.80 | -76.18 | -49.58 | -26.60 | -43.28 | -35.23 | -11.92 |
| 1998/01/26 | 30.71% | 8.37% | 0.341 | 15.00% | 6.39% | 95.80 | -57.92 | -37.71 | -20.22 | -43.86 | -35.54 | -12.17 |
| 1998/01/27 | 30.71% | 8.52% | 0.338 | 12.61% | 5.29% | 66.73 | -45.67 | -29.02 | -16.64 | -44.59 | -36.06 | -12.50 |

備考：1. 損益、VaRの単位はUSドル

2. STI、為替レートの変化率は（10日後の価格 - 基準時の価格）/ 基準時の価格で算出
3. P1' ~ P3'は、それぞれポートフォリオ1' ~ ポートフォリオ3'を表す
4. 色付き部分は損失がVaRを超過したことを示す

図表16と図表13とでは、データ期間の長さに大きな差がある（図表16：約半年、図表13：約4年）が、図表16の方で超過発生回数が多いことがわかる。このうち特にポートフォリオ3'での超過回数が格段に多くなっていることがみてとれる。図表16の超過発生サンプルをみると、原資産価格の両方が同時に相対的に大きな変動を示すことが多い。この点は、図表15下図に示した原資産価格間の相関係数が、(1)のそれ（図表12下図）と比べると、データ期間を通じて常に正值をとっている、水準も相対的に高いことが多いという傾向を持つことから裏付けられる。その結果として、ポートフォリオ3'での超過発生回数が格段に増加し、ポートフォリオ1'での超過発生回数を増加させる一因となったと結論付けることが可能である。

ここでみたように、原資産価格間の相関関係が強まり、原資産価格が同じ方向に相対的に大きく変動しやすい局面では、コンポジット・オプションのショート・ポジションは、予想外の大きな損失を発生させやすいという傾向を持つ。ポートフォリオにコンポジット・オプションのような相関デリバティブを含む場合には、リスク管理上、この傾向を予め認識することが重要である。

(3) 相関係数の推定値がプライシングに与える影響

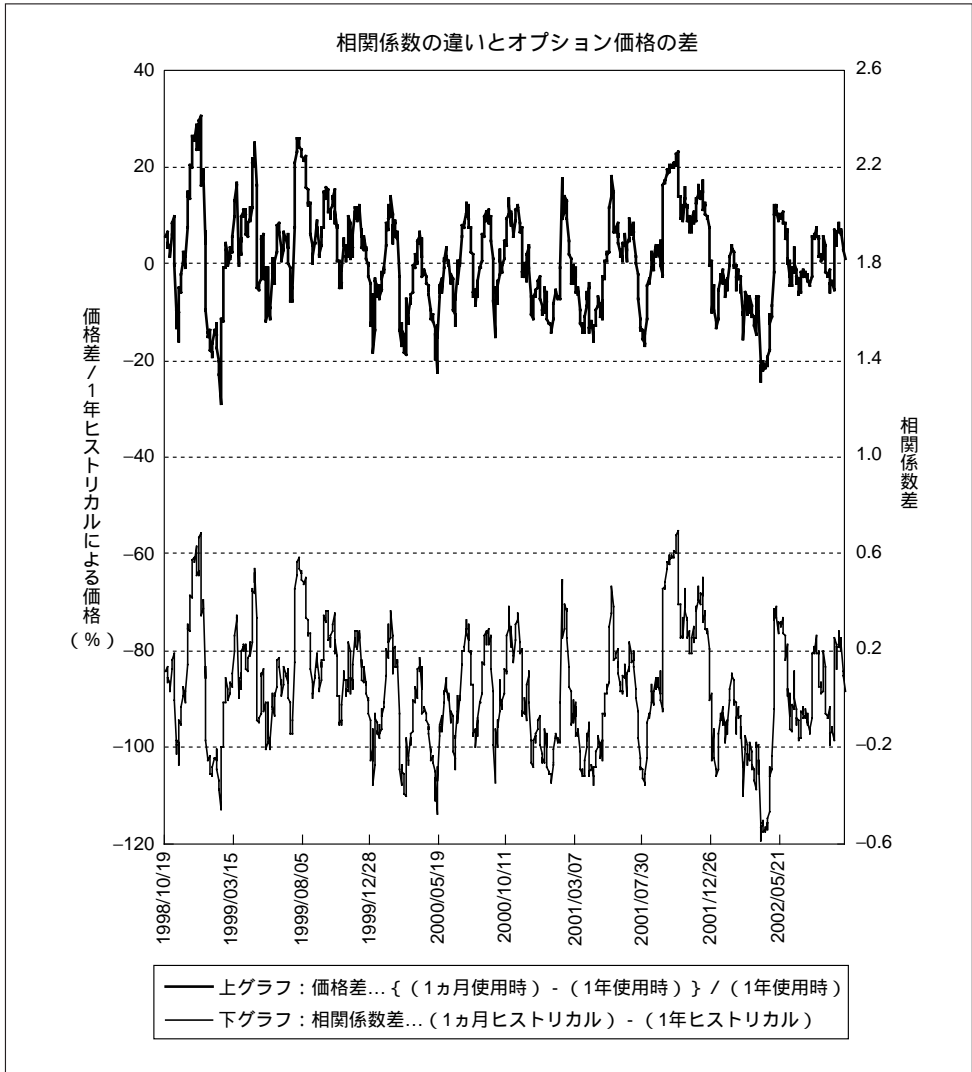
次に、相関係数の推定値が、複数の原資産を有する相関デリバティブのプライシングに与える影響を検討する。

一般的に、相関デリバティブは、流動性が低く、信頼性のある価格を市場から入手することは困難である。このため、相関デリバティブの価格情報とプライシング・モデルを用いて相関係数を逆算することができず、結果的に原資産価格のヒストリカルな時系列データから推定した相関係数を使わざるを得ないことがほとんどである。その際に、相関係数の推定に、どの程度の期間のヒストリカル・データを用いるべきかは議論が分かれるところである。相対的に長い期間のデータを用いれば、時間経過に伴う相関係数の変動は小さくなる反面、直近における市場参加者の見方が反映される程度が小さくなるという問題がある。逆にデータ期間が短いと、それとは逆の問題が発生する。

図表17は、相関係数の水準の違いによって、オプション価格にどの程度の格差が生じるのかを示したものである。対象はコンポジット・オプションのロング・ポジションで、オプション期間は半年、その他の各種設定は図表11と同一である。図表17の上段では、過去1年間および1ヵ月間の時系列データから求めた相関係数（以下、ヒストリカル相関と呼ぶ）を用いてオプション価格を求め、両者の相対格差率の推移を示した。また、下段では、対応するヒストリカル相関の差の推移を示している。

ここからわかることは、時系列データを用いたヒストリカル相関の差は大きく変動すること、オプション価格は、使用するヒストリカル相関によって、最大で±30%程度の非常に大きな格差が生じることである。

図表17 相関係数とオプション価格



6. 相関デリバティブのリスク管理手法に関する留意点

本節では、5節までのコンポジット・オプションを題材にした各種事例や検討結果を踏まえ、金融機関の実務での、相関デリバティブのリスク管理手法に関するいくつかの留意すべき点を考察する。

(1) 流動性に関するリスク

相関デリバティブは、複数の原資産を持つという点で単一原資産の(プレーンな)

デリバティブに比べて複雑な商品性を有しているため、市場の流動性が十分には高くない場合がある。市場の流動性の低さは、市場の通常時でも、ポジションを手仕舞うための時間が相対的に長いことを示している。したがって、相関デリバティブのVaR計測におけるリスク評価期間については、必要に応じて、流動性の高い商品のそれに比べて、保守的に長めに設定するということが考えられる。

また、市場にストレスが発生し相場が大きく変動するような局面においては、相関デリバティブ市場は、国債等の市場に比べて、取引規模や市場参加者の広がりといった点で劣ることから、取引ニーズが特定の方向に傾く等によって、その流動性が大きく低下することが想定される。したがって、相関デリバティブをポジションとして保有する際には、市場でのストレス発生時に手仕舞いが困難化すること、またそれにつれて価格も大きく変動し得ることを念頭に、想定し得るシナリオを与えて発生する損失を算出するといったシナリオ分析を行い、その結果に基づいて、ポジションの保有枠を決定するといった保守的な運営が求められる。

(2) 相関係数の扱い

相関デリバティブのプライシングには、単一原資産のデリバティブのプライシングに必要なパラメータ以外に、複数の原資産価格の間の相関係数の値が必要となる。相関係数の算出には、主として、原資産価格のヒストリカルな時系列データを用いて推定する方法と、市場で観測される他の相関デリバティブの価格情報からプライシング・モデルによって逆算する方法が用いられている。の方法は、一般的に原資産価格の時系列データを入手することは容易であることから、相対的に使いやすい方法である。ただし、この方法で求められるのは、ヒストリカル・データに基づく過去の相関関係を表す値である。このため、市場で観測される他の相関デリバティブの現時点の価格(時価)を用いて、相関係数を推定する方が、その時点の市場の情報を織り込めると考えられよう。しかし、市場で相関デリバティブの価格情報が観測できない場合があるほか、何らかの価格情報を入手できたとしても、流動性の低さからビッド・アスク・スプレッドが大きく、推定値の誤差が無視できないことがあり得る。

このように、信頼性の高い相関係数の推定が困難なことがあり得るので、そのような場合には、推定された相関係数を用いるとしても、プライシングに当たっては、時価をある程度幅をもってみる、損益の評価やリスク量の計測においては、算出される値が保守的になる相関係数を用いるという対応が必要になる。

(3) VaR計測の方法

本稿では、オプション性を有することが多い相関デリバティブのリスク量(VaR)の計測を複数の手法で行った。具体的には、金融商品やポートフォリオの非線形性に対応する手法として、感応度を用いる簡便的な手法(デルタ・ガンマ法とガン

マ・プラス法) および感応度を用いないモンテカルロ法によって、それぞれVaRを算出し、それらを比較した。

一般に、オプションのVaRの計測においては、単一の前資産を持つオプションであれば、リスク評価期間が十分短いという前提のもとでは、感応度を用いる手法は近似としては実務的にある程度有用であることが知られている³⁰。しかし、複数の前資産を有する相関デリバティブ(オプション)では、商品性が相対的に複雑であるだけに、リスク評価期間が十分短いという前提をおいたとしても、感応度を用いる手法の有用性には疑問があると考えられる。実際、感応度を用いるデルタ・ガンマ法とガンマ・プラス法では、相関デリバティブの比較的単純なポートフォリオでもリスクを必ずしも正確には捉えることができないことが確認された。本稿が例として取り上げたコンポジット・オプションでは、特に、オプションの期間が短かつ前資産価格がATM付近にあるときに、感応度であるガンマやクロス・ガンマの水準が大きいことから、ガンマ・プラス法によるVaRが相対的に高めに算出されるという傾向があった。

したがって、相関デリバティブを含むポートフォリオのリスク量(VaR)をより正確に把握するためには、ガンマ・プラス法等の感応度に基づく近似手法ではなく、モンテカルロ法のようなフル・バリュエーションによる手法を用いることが基本的に望ましい。実務上は、相関デリバティブのポジションが全体のポートフォリオに比べれば僅少であるようなときには、ガンマ等の感応度によって、便宜的に、ポジションのリスク特性を把握したり、あるいはそれによるポジション枠を設定・管理を行うことも考えられよう。しかし、このような便宜的な扱いを取り入れる場合でも、感応度を用いるリスク量計測の問題点を十分に把握したうえで、モンテカルロ法等のフル・バリュエーションによるリスク量の計測を行えるようにしておく等の体制を整えておく必要があると考えられる。

7. おわりに

本稿では、相関デリバティブの典型例としてコンポジット・オプションを題材に選び、そのプライシング手法のエッセンスやリスク特性を解説するとともに、リスク管理の体制や手法に関する各種の論点を提供した。

相関デリバティブは相対的に複雑な商品性を有しているため、そのリスク特性は複雑であるほか、市場での流動性も高くないため、この商品をポジションとして保

30 ただし、複数のオプションを含むポートフォリオでは、感応度を用いる近似が必ずしも適当ではないことがある。例えば、家田[2001]は、単一前資産のオプションのポートフォリオについて、前資産価格変動に関するリスクの計測をガンマまでの感応度を用いて行くと、リスクを完全に見過ごしてしまうことがあるという具体的な事例を示している。

有する場合には、リスク管理上で留意すべき点が少なくない。この点、本稿で取り上げたコンボジット・オプションは、多様な種類がある相関デリバティブの中の一例に過ぎない。したがって、リスク管理の実務の現場においては、各種商品のリスク特性や市場の流動性等に関する理解を深め、適切なリスク管理を講じていくことが肝要である。

補論1 . コンポジット・オプションのプライシング方法 (修正BS型モデル³¹)

ここでは、3節のBS型モデルにおける各種仮定を緩和したモデルとして、(1)金利を確率変数として扱うケースと、(2)ボラティリティを確率変数として扱うケースを示す。

外貨建て株式の価格 S 、為替レート X の確率過程を次のように表す。

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu_S(t)dt + \sigma_S(t)dW_S(t), \quad (\text{A-1})$$

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu_X(t)dt + \sigma_X(t)dW_X(t), \quad (\text{A-2})$$

ただし、 W_S 、 W_X は、相関 ρ_{SX} を持つ標準ブラウン運動³²、 σ_S 、 σ_X は株価、為替レートのボラティリティ、 σ_S 、 σ_X 、 ρ_{SX} は、いずれも確定的な時間の関数で表せ、 μ_S 、 μ_X は、株価、為替レートの期待収益率である。 r_d 、 r_f 、 q をそれぞれ、円貨の無リスク金利、外貨の無リスク金利、株式配当とし、いずれも連続複利ベースで確定的な時間の関数で表せるとする。

(1) 金利を確率変数として扱う場合

時刻 T に通貨1単位のキャッシュ・フローが発生する円貨の割引債価格 $P_d(t, T)$ を考え、 $P_d(t, T)$ が以下の確率過程に従うと仮定する。

$$\frac{dP_d(t, T)}{P_d(t, T)} = \mu_{P_d}(t, T)dt + \sigma_{P_d}(t, T)dW_{P_d}(t), \quad (\text{A-3})$$

ただし、 W_{P_d} は、標準ブラウン運動で、 W_{P_d} と W_S 、 W_X との相関は ρ_{SP_d} 、 ρ_{XP_d} ³³、 μ_{P_d} 、 σ_{P_d} は、それぞれ $P_d(t, T)$ の期待収益率、ボラティリティ、 σ_{P_d} 、 ρ_{SP_d} 、 ρ_{XP_d} は、いずれも確定的な時間の関数で表せるとする。

ここで、 $S(t)X(t)e^{-\tilde{q}(t)}/P_d(t, T)$ の確率過程がマルチンゲールとなる測度 Q^T を考える。つまり、 Q^T のもとでは次のような関係がある。

31 ボラティリティや無リスク金利等を時間によらない定数としたモデル (BS型モデル) は3節(1)で説明している。

32 W_S 、 W_X はリスク中立測度 Q のもとでのブラウン運動とする。

33 ここでは、 W_{P_d} 、 W_S 、 W_X は全てフォワード中立測度 Q^T のもとでのブラウン運動とする。

$$d \left\{ \frac{S(t)X(t)e^{-\tilde{q}(t)}}{P_d(t,T)} \right\} / \left\{ \frac{S(t)X(t)e^{-\tilde{q}(t)}}{P_d(t,T)} \right\} = \sigma_F(t)dW(t), \quad (\text{A-4})$$

$$\sigma_F(t)dW(t) = \sigma_S(t)dW_S(t) + \sigma_X(t)dW_X(t) - \sigma_{P_d}(t,T)dW_{P_d}(t), \quad (\text{A-5})$$

$$\sigma_F(t) = \sqrt{\sigma_S(t)^2 + \sigma_X(t)^2 + \sigma_{P_d}(t,T)^2 + 2\rho_{SX}(t)\sigma_S(t)\sigma_X(t) - 2\rho_{SP_d}(t,T)\sigma_S(t)\sigma_{P_d}(t,T) - 2\rho_{XP_d}(t,T)\sigma_X(t)\sigma_{P_d}(t,T)}, \quad (\text{A-6})$$

ただし、 $\tilde{q}_T(t) = \int_t^T q(u)du$ である。

ここで、 $\tilde{\sigma}_F(t) = \sqrt{[1/(T-t)] \int_t^T \sigma_F(u)^2 du}$ とおくと、コール・オプションの価格は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} PV &= E_{Q_T} [P_d(0,T) \max\{S(T)X(T) - K, 0\}] \\ &= E_{Q_T} \left[e^{\tilde{q}_T(0)} P_d(0,T) \max \left\{ \frac{S(T)X(T)e^{-\tilde{q}_T(T)}}{P_d(T,T)} - \frac{Ke^{-\tilde{q}_T(T)}}{P_d(T,T)}, 0 \right\} \right] \\ &= S(0)X(0)e^{-\tilde{q}_T(0)} N(\bar{d}) - KP_d(0,T)N(\bar{d} - \tilde{\sigma}_F(0)\sqrt{T}), \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

ただし、 $\bar{d} = [\ln(S(0)X(0)/KP_d(0,T)) - \tilde{q}_T(0) + \tilde{\sigma}_F(0)^2 T / 2] / [\tilde{\sigma}_F(0)\sqrt{T}]$ である。

(2) ボラティリティを確率変数として扱う場合

ボラティリティを確率変数として扱うケースとして、Heston [1993] と同様のアプローチをとると、次のようになる。まず、 S 、 X の確率過程を以下のように仮定する。

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu_S dt + \sigma_S \sqrt{v(t)} dW_S(t), \quad (\text{A-8})$$

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu_X dt + \sigma_X \sqrt{v(t)} dW_X(t), \quad (\text{A-9})$$

また、 $v(t)$ は次の確率過程に従うものとする。

$$dv(t) = \kappa[\theta - v(t)] dt + \sigma_v \sqrt{v(t)} dW_v(t), \quad (\text{A-10})$$

ただし、 W_S 、 W_X 、 W_v は標準ブラウン運動、 $W_S \cdot W_X$ 間、 $W_S \cdot W_v$ 間、 $W_X \cdot W_v$ 間は、相関 ρ_{SX} 、 ρ_{Sv} 、 ρ_{Xv} を持ち、 μ_S 、 μ_X 、 σ_S 、 σ_X 、 κ 、 θ 、 σ_v 、 ρ_{SX} 、 ρ_{Sv} 、 ρ_{Xv} は、いずれも定数とする。

積 $S(t)X(t)$ (これを $Y(t)$ とおく)の確率過程を考えると、以下のように書ける。

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = (\mu_S + \mu_X + \rho_{SX}\sigma_S\sigma_X v(t))dt + \sigma_Y \sqrt{v(t)}dW_Y(t), \quad (\text{A-11})$$

$$\sigma_Y dW_Y(t) = \sigma_S dW_S(t) + \sigma_X dW_X(t), \quad (\text{A-12})$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_S^2 + 2\rho_{SX}\sigma_S\sigma_X + \sigma_X^2}. \quad (\text{A-13})$$

$W_Y \cdot W_v$ 間の相関を ρ_{Yv} とすると、

$$\rho_{Yv} = (\sigma_S \rho_{Sv} + \sigma_X \rho_{Xv}) / \sigma_Y, \quad (\text{A-14})$$

と書ける。

Heston [1993] では、ボラティリティに関するリスクの市場価格が $v(t)$ に比例する(比例係数を λ とする)と仮定し、無裁定条件から算出される偏微分方程式からフーリエ変換を使って、単一の前資産を持つオプションの価格の解析解を求めている。

コンポジット・オプションの場合には、 $Y(t)$ を前資産とするオプションと考えることで、Heston [1993] 同様の方法が適用可能である。ここで、推計が必要なパラメータは、 σ_S 、 σ_X 、 κ 、 θ 、 σ_v 、 ρ_{SX} 、 ρ_{Sv} 、 ρ_{Xv} に加え、 λ である。

補論2 . VaRの算出方法

(1) デルタ・ガンマ法によるVaR算出

資産1、2を原資産に持つ金融商品からなるポートフォリオの価値を PV とする。原資産価格を X_1 、 X_2 とし、それらに関する2次までのテーラー近似を用いると、次のように書ける(ここでは、相関係数、ボラティリティは一定とする)。

$$\begin{aligned} \Delta PV \approx & \frac{\partial PV}{\partial X_1} \Delta X_1 + \frac{\partial PV}{\partial X_2} \Delta X_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 PV}{\partial X_1^2} (\Delta X_1)^2 \\ & + \frac{\partial^2 PV}{\partial X_1 \partial X_2} \Delta X_1 \Delta X_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 PV}{\partial X_2^2} (\Delta X_2)^2. \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

(A-15)式から、 ΔPV の分散 $V[\Delta PV]$ を求めると、

$$\begin{aligned} V[\Delta PV] = & \sum_i^2 \sum_j^2 \frac{\partial PV}{\partial X_i} \frac{\partial PV}{\partial X_j} C[\Delta X_i, \Delta X_j] \\ & + \frac{1}{2} \sum_k^2 \sum_j^2 \sum_i^2 \frac{\partial PV}{\partial X_k} \frac{\partial^2 PV}{\partial X_i \partial X_j} C[\Delta X_k, \Delta X_i \Delta X_j] \\ & + \frac{1}{4} \sum_l^2 \sum_k^2 \sum_j^2 \sum_i^2 \frac{\partial^2 PV}{\partial X_k \partial X_l} \frac{\partial^2 PV}{\partial X_i \partial X_j} C[\Delta X_k \Delta X_l, \Delta X_i \Delta X_j], \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

となる($C[\cdot]$ は共分散を表す)。

リスク評価期間 t が十分短く、 ΔX_1 と ΔX_2 が、それぞれ平均0、標準偏差 $\sigma_1 X_1 \sqrt{t}$ 、 $\sigma_2 X_2 \sqrt{t}$ の正規分布に従い、それらの相関係数が ρ であると仮定する。このとき、以下の関係が導かれる。

$$\begin{aligned} V[\Delta X_1] &= \sigma_1^2 X_1^2 t, \quad V[\Delta X_2] = \sigma_2^2 X_2^2 t, \quad C[\Delta X_1, \Delta X_2] = \rho \sigma_1 \sigma_2 X_1 X_2 t, \\ C[\Delta X_1, (\Delta X_1)^2] &= 0, \quad C[\Delta X_2, (\Delta X_2)^2] = 0, \quad C[\Delta X_1, (\Delta X_2)^2] = 0, \\ C[\Delta X_2, (\Delta X_1)^2] &= 0, \quad C[\Delta X_1, \Delta X_1 \Delta X_2] = 0, \quad C[\Delta X_2, \Delta X_1 \Delta X_2] = 0, \\ V[(\Delta X_1)^2] &= 2\sigma_1^4 X_1^4 t^2, \quad V[(\Delta X_2)^2] = 2\sigma_2^4 X_2^4 t^2, \\ V[\Delta X_1 \Delta X_2] &= (1 + \rho^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2 X_1^2 X_2^2 t^2, \quad C[(\Delta X_1)^2, (\Delta X_2)^2] = 2\rho^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 X_1^2 X_2^2 t^2, \\ C[\Delta X_1 \Delta X_2, (\Delta X_1)^2] &= 2\rho \sigma_1^3 \sigma_2 X_1^3 X_2 t^2, \\ C[\Delta X_1 \Delta X_2, (\Delta X_2)^2] &= 2\rho \sigma_1 \sigma_2^3 X_1 X_2^3 t^2. \end{aligned}$$

これらの関係を用いると、 $V[\Delta PV]$ は、

$$\begin{aligned}
 V[\Delta PV] = & \left(\frac{\partial PV}{\partial X_1} \right)^2 \sigma_1^2 X_1^2 t + \left(\frac{\partial PV}{\partial X_2} \right)^2 \sigma_2^2 X_2^2 t + 2 \left(\frac{\partial PV}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial PV}{\partial X_2} \right) \rho \sigma_1 \sigma_2 X_1 X_2 t \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 PV}{\partial X_1^2} \right)^2 \sigma_1^4 X_1^4 t^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 PV}{\partial X_2^2} \right)^2 \sigma_2^4 X_2^4 t^2 \\
 & + \left(\frac{\partial^2 PV}{\partial X_1 \partial X_2} \right)^2 (1 + \rho^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2 X_1^2 X_2^2 t^2 + 2 \frac{\partial^2 PV}{\partial X_1^2} \frac{\partial^2 PV}{\partial X_1 \partial X_2} \rho \sigma_1^3 \sigma_2 X_1^3 X_2 t^2 \\
 & + 2 \frac{\partial^2 PV}{\partial X_2^2} \frac{\partial^2 PV}{\partial X_1 \partial X_2} \rho \sigma_1 \sigma_2^3 X_1 X_2^3 t^2 + \frac{\partial^2 PV}{\partial X_1^2} \frac{\partial^2 PV}{\partial X_2^2} \rho^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 X_1^2 X_2^2 t^2,
 \end{aligned}
 \tag{A-17}$$

となる。さらに、 ΔPV の分布が正規分布に従うと仮定し、 $2.33\sqrt{V[\Delta PV]}$ をVaRとする方法を本稿では「デルタ・ガンマ法」と呼ぶ。

(2) モンテカルロ法によるVaR算出

2つの原資産の時刻 t における価格を $X_1(t)$ 、 $X_2(t)$ 、ポートフォリオの価値を $PV(X_1(t), X_2(t), t)$ とする。 $X_1(t)$ 、 $X_2(t)$ の収益率は正規分布に従うとする。ポラリティ、相関係数は、それぞれ σ_1 、 σ_2 、 ρ とし、いずれも定数とする。また、リスク評価期間を Δt とする。

本稿で用いたモンテカルロ法の手順は以下のとおりである。

ステップ1：ポートフォリオの現在価値 $PV(X_1(0), X_2(0), 0)$ を計算する。

ステップ2：一様乱数を生成、Moro [1995] の逆関数法で標準正規乱数に変換、互いに独立な2つの標準正規乱数 ($\hat{\epsilon}_1$ 、 $\hat{\epsilon}_2$) を得る。

ステップ3： $\hat{\epsilon}_1$ 、 $\hat{\epsilon}_2$ を次式により、相関 ρ を持つ乱数 (ϵ_1 、 ϵ_2 とする) に変換する。

$$\epsilon_1 = \hat{\epsilon}_1, \quad \epsilon_2 = \rho \hat{\epsilon}_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \hat{\epsilon}_2.
 \tag{A-18}$$

ステップ4： ϵ_1 、 ϵ_2 を用いて、次式により、 $X_1(\Delta t)$ 、 $X_2(\Delta t)$ を計算する。

$$X_1(\Delta t) = X_1(0) e^{\sigma_1 \sqrt{\Delta t} \epsilon_1}, \quad X_2(\Delta t) = X_2(0) e^{\sigma_2 \sqrt{\Delta t} \epsilon_2}.
 \tag{A-19}$$

ステップ5： $PV(X_1(\Delta t), X_2(\Delta t), \Delta t) - PV(X_1(0), X_2(0), 0)$ を計算する。

ステップ6：ステップ2～ステップ5を10,000回繰り返す。

ステップ7：100番目に大きい損失額を99パーセントイルのVaRとする。

参考文献

- 家田 明、『リスク計量とプライシング』、朝倉書店、2001年
- 小田信之、『金融デリバティブズ』、朝倉書店、2001年
- 山下 司、『オプションプライシングの数理』、金融財政事情研究会、2001年
- Black, F., and M. Scholes, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81, 1973, pp. 637-654.
- Brockhaus, O., A. Ferraris, C. Gallus, D. Long, R. Martin, and M. Overhaus, *Modeling and Hedging Equity Derivatives*, Risk Books, 1999.
- Heston, S.L., “A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options,” *The Review of Financial Studies*, 6, 1993, pp. 327-343.
- Moro, B., “The Full Monte,” *Risk*, 8 (2), 1995, pp. 57-58.
- Rebonato, R., *Interest-Rate Option Models*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 2000.