

漸近展開を用いたアメリカン・オプション価格の評価法

たかはしあきひこ さいとうたいが
高橋明彦 / 斎藤大河

要 旨

原資産価格が、ある一般的なクラスに属する拡散過程に従う場合、アメリカン・オプション価値が同条件のヨーロッパン・オプション価値と期限前行使価値に分解されることを示し、これに基づき、漸近展開法を用いたアメリカン・オプション価格の新しい評価方法を提案した。さらに、数値例として原資産価格がCEV(*constant elasticity of variance*)過程に従う場合を紹介した。

キーワード：アメリカン・オプション、漸近展開法、CEV過程

.....

本稿は、高橋が日本銀行金融研究所の国内客員研究員として、斎藤が同研究生として行ってきた研究プロジェクトの成果の一部である。草稿段階において、匿名の査読者および日本銀行金融研究所研究第1課FE班の諸氏、特に家田明氏、内田善彦氏より有益な助言を得たことに感謝する。なお、本稿で示されている内容および意見は筆者たちに属し、日本銀行、金融研究所あるいはメリルリンチ日本証券株式会社の公式見解を示すものではない。

高橋明彦 東京大学大学院経済学研究科
斎藤大河 東京大学大学院数理科学研究科修士課程
(現メリルリンチ日本証券株式会社)

1. はじめに

アメリカン・オプション価格は、極めて特殊な場合を除いては解析的に評価できないため、ラティス法をはじめさまざまな効率的な数値計算法が研究されてきた。ただし、原資産価格の従う確率過程が対数正規型の場合を除いては、種々の確率や期待値が解析的に計算できないことから、ラティス法に代わる効率的な計算手法はほとんど提唱されていなかった。本稿は、原資産価格がある一般的なクラスに属する拡散過程に従う場合、アメリカン・オプション価格を漸近展開の手法を用いて効率良く計算する方法を提案した。またその際、対数正規型の場合によく知られているアメリカン・オプション価格に関する分解式 (Karatzas and Shreve [1998], Carr, Jarrow and Myneni [1992], Huang, Subrahmanyam and Yu [1996]) が、あるクラスの一般的拡散過程に従う原資産価格に対しても成り立つことを示した。

より詳しく述べると原資産価格 S_t が1次元拡散過程、

$$dS_t = (r - \delta) S_t dt + \sigma(S_t) dW_t, S_0 = x (> 0),$$

に従う場合に (r は短期金利、 δ は配当率)、行使価格 K 、満期 T のアメリカン・プット・オプション価格の分解式、

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbf{E} [e^{-r\tau} (K - S_\tau)^+] &= \\ \mathbf{E} [e^{-rT} (K - S_T)^+] &= rK \mathbf{E} \left[\int_0^T e^{-ru} 1_{\{S_u \leq B_u\}} du \right] \\ - \delta \mathbf{E} \left[\int_0^T e^{-ru} S_u 1_{\{S_u \leq B_u\}} du \right], \end{aligned}$$

(ただし B_t は最適行使境界と呼ばれる $0 \leq t \leq T$ 上で定義される確定的な関数) が成り立つことを示し、これに対してTakahashi [1995, 1999]によりヨーロッパン・オプション価格の近似として提示された漸近展開の手法を応用することで近似的に計算する方法を開発した。

漸近展開法は、ヨーロッパン・タイプの派生証券の評価に対し、不確実性がブラウン運動で表現されるとき、原資産価格が一般的な(多次元)マルコフ型の連続確率過程に従う場合(国友・高橋[1992], Takahashi [1995, 1999])、また、金利に関しては必ずしもマルコフ型とはならない連続確率過程に従う場合(Kunitomo and Takahashi [2001])も含め、実用に耐えうる精度の解析的な近似を与える統一的な方法である。漸近展開法は、直感的には、対象となる確率過程を、そのブラウン運動の係数がゼロのまわり、すなわち、非確率的な過程のまわりで展開する確率的なテイラー展開といえ、数学的には、確率解析におけるマリアバン・渡辺理論(例えば、Ikeda and Watanabe [1989], Yoshida [1992]を参照)に

基づき正当化される (Kunitomo and Takahashi [2003])。ファイナンスの分野における応用範囲も先述のヨーロッパ型派生証券の評価のほか多岐にわたり、動的最適ポートフォリオ (Takahashi and Yoshida [2001a, 2003], Kobayashi, Takahashi and Tokioka [2001])、モンテカルロ・シミュレーションの効率化 (Takahashi and Yoshida [2001b]) などがある。本稿は、初めて漸近展開法がアメリカ型派生証券への適用が可能であることを示した。なお、これらファイナンスにおける漸近展開法の応用全般の解説は、国友・高橋 [2003] を参照されたい。

また、アメリカン・オプション評価の具体例として、 S_t が CEV (constant elasticity of variance) 過程、すなわち、

$$dS_t = (r - \delta) S_t dt + \sigma S_t^\gamma dW_t, \quad (1/2 \leq \gamma \leq 1),$$

に従う場合について実際に数値計算を行い、漸近展開法の有効性を確認した。さらに、リチャードソンの4点近似の方法をあわせて用いることで、数値計算を高速化する方法も紹介し、数値例においてその有用性を示した。以下、プット・オプションを対象として考察するが、同様の議論は配当支払いあるいは金利を生む原資産に対するコール・オプションに対しても当てはまる。

本稿の構成は以下のとおりである。2節では、原資産価格がある一般的なクラスに属する拡散過程に従う場合に対し、アメリカン・オプション価値の分解式について述べ、証明を与える。3節では、漸近展開法を用いたアメリカン・オプションの数値計算法の具体的なアルゴリズムを解説する。4節では、CEV過程への漸近展開法の適用について説明し、それに対する具体的な数値例と考察を述べる。5節では、今後の展望について簡単に触れる。補論においては、本論で述べられた主要な定理の証明、および本論で用いられた漸近展開法の具体的な計算法を示すほか、CEV過程の解の存在と一意性、原資産価格がCEV過程に従う場合のアメリカン・オプション価値の分解に関し説明する。また、アメリカン・オプション価値の分解を示すための基礎となる連続セミマルチンゲールのスネル包絡線に関する分解定理を紹介する。

2. アメリカン・オプション価格の分解式

本節では、原資産価格の変動がある一般的なクラスの拡散過程に従う場合に最適行使境界が存在すること、そしてアメリカン・プット・オプションの理論価格がこの最適行使境界を用いることにより、ヨーロッパン・オプション価格と早期行使プレミアムと呼ばれる部分に分解されることを示す。

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$ をフィルター付き完備確率空間、期間 $[0, T]$ は有限で、フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ は「通常の条件」(-usual conditions-例えば、Karatzas and Shreve [1996] の Definition 1.2.25 を参照) を満たし、連続であるとする。 $W_t, (0 \leq t \leq T)$

は、 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$ 上定義された1次元標準ブラウン運動とする。ここで、 \mathbf{P} は同値マルチンゲール測度を表すものとする。

次に、 S_t^x , $(0 \leq t \leq T)$ は確率微分方程式、

$$dS_t = (r - \delta) S_t dt + \sigma(S_t) dW_t, S_0 = x (> 0), \quad (1)$$

の解(強い解)を表すものとする。ただし x 、 r 、 δ は正の定数、 $\sigma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は連続関数で、 $y, z \in \mathbf{R}$ となる任意の y, z に対して $K_1 > 0$ が存在し、

$$\begin{aligned} \sigma(y)^2 &\leq K_1(1+y^2), \\ |\sigma(y) - \sigma(z)| &\leq h(|y-z|), \end{aligned} \quad (2)$$

を満たすものとする。ここで、関数 h は $h: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $h(0) = 0$, 狭義単調増加で任意の $\epsilon > 0$ に対して $\int_{(0, \epsilon)}^{h^{-2}}(u) du = \infty$ を満たすとする。

注意1 この条件のもとでの強解の存在は渡辺 [1974] の定理3.1で、強解の一意性はKaratzas and Shreve [1996] のProposition 5.2.13で示されている。

以上の前提のもと、まず最適行使境界の存在を示す定理を述べる。

定理1 (最適行使境界の存在) (1) (2)のもと、 $K > 0$ とし、 $0 < t \leq T$, $0 < x \leq \infty$ となる任意の t, x に対して、

$$p(t, x) := \sup_{0 \leq \tau \leq t} \mathbf{E} [e^{-r\tau} (K - S_\tau^x)^+], \quad (3)$$

$$C_t := \{x \in (0, \infty); p(t, x) > (K - x)^+\}, \quad (4)$$

と定義する。ただし上のsupは $0 \leq \tau \leq t$ となる任意の停止時刻 τ にわたってとるものとする。この時、 $a > 0$, $0 < l \leq T$ となる任意の定数 a, l に対して、

$$\mathbf{P} \left(\inf_{0 \leq u \leq l} S_u^x < a \right) > 0, \quad (5)$$

が成り立つならば、ある非負の数 $c(t)$ が存在して、

$$C_t = (c(t), \infty), \quad (6)$$

と表される(補論1.を参照)。

$p(t, x)$ は、原資産価格の現時点の価格 x 、満期までの期間 t の(行使価格 K の)アメ

リカン・プット・オプションの現時点における価格を表している。また、(5)式は、原資産価格が満期までに任意の（正の）行使価格を下回る確率がゼロではないことを意味する条件である。さらに(6)式は、現時点において原資産価格が $c(t)$ 以下であればオプションを保有し続けるより行使することが望ましく、 $c(t)$ を超えていれば保有し続ける方が望ましいことを示しており、その意味で $c(t)$ は、最適行使境界と呼ばれる。

次に、アメリカン・プット・オプション価格がヨーロッパアン・オプション価格と早期行使プレミアムと呼ばれる部分に分解されることを示す定理とその系を述べる。

定理2 定理1と同一の条件のもとで、 $B_t := c(T-t)$ 、 $0 \leq t < T$ と定義する。この時、

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbf{E}[e^{-r\tau}(K-S_\tau^x)^+] &= \mathbf{E}[e^{-rT}(K-S_T^x)^+] + \mathbf{E}\left[rK \int_0^T e^{-ru} 1_{\{S_u^x \leq B_u\}} du\right] \\ &\quad - \mathbf{E}\left[\delta \int_0^T e^{-ru} S_u^x 1_{\{S_u^x \leq B_u\}} du\right], \end{aligned} \quad (7)$$

が成り立つ（補論2.を参照）。

定理2より、初期時点の原資産価格が x で満期までの期間が $T-t$ ($0 \leq t < T$) のアメリカン・プット・オプション価格の分解式が得られる。

系1 定理2の条件のもと、初期時点の原資産価格が x 、満期までの期間が $T-t$ ($0 \leq t < T$) のアメリカン・プット・オプション価格に対して、

$$\begin{aligned} p(T-t, x) &= \mathbf{E}[e^{-r(T-t)}(K-S_{T-t}^x)^+] + \mathbf{E}\left[\int_0^{T-t} rKe^{-ru} 1_{\{S_u^x \leq B_{t+u}\}} du\right] \\ &\quad - \mathbf{E}\left[\int_0^{T-t} \delta S_u^x e^{-ru} 1_{\{S_u^x \leq B_{t+u}\}} du\right], \end{aligned} \quad (8)$$

が成り立つ。

系1の証明

$$\begin{aligned} p(T-t, x) &= \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} \mathbf{E}[e^{-r\tau}(K-S_\tau^x)^+] \\ &= \mathbf{E}[e^{-r(T-t)}(K-S_{T-t}^x)^+] + \mathbf{E}\left[\int_0^{T-t} rKe^{-ru} 1_{\{S_u^x \leq c(T-t-u)\}} du\right] \\ &\quad - \mathbf{E}\left[\int_0^{T-t} \delta S_u^x e^{-ru} 1_{\{S_u^x \leq c(T-t-u)\}} du\right] \\ &= \mathbf{E}[e^{-r(T-t)}(K-S_{T-t}^x)^+] + \mathbf{E}\left[\int_0^{T-t} rKe^{-ru} 1_{\{S_u^x \leq B_{t+u}\}} du\right] \\ &\quad - \mathbf{E}\left[\int_0^{T-t} \delta S_u^x e^{-ru} 1_{\{S_u^x \leq B_{t+u}\}} du\right]. \end{aligned}$$

(8)式の右辺第1項は、ヨーロピアン・プット・オプション価格を表し、第2、3項は早期行使プレミアムと呼ばれるアメリカン・オプション特有の期限前行使の権利がもたらす付加価値を表現している。

注意2 系1と t 時点の最適行使境界 B_t の定義から、 B_t が

$$\begin{aligned} K-z &= p(T-t, z) \\ &= \mathbf{E}[e^{-r(T-t)}(K-S_{T-t}^z)^+] + \mathbf{E}\left[\int_0^{T-t} rKe^{-ru} 1_{\{S_u^z \leq B_{t+u}\}} du\right] \\ &\quad - \mathbf{E}\left[\int_0^{T-t} \delta S_u^z e^{-ru} 1_{\{S_u^z \leq B_{t+u}\}} du\right], \end{aligned} \quad (9)$$

を満たす最大の z であることがわかる。

3 . 漸近展開法によるアメリカン・オプション価格の評価

$x > 0$ となる任意の x に対して、確率微分方程式、

$$dS_t = (r - \delta) S_t dt + \sigma^*(S_t) dW_t, \quad S_0 = x, \quad (10)$$

の強解を $S_t^x, 0 \leq t \leq T$ とし、これを株価の従う確率過程とする。

ただし安全資産金利 r 、配当率 δ は正の定数で、ボラティリティを表す関数 $\sigma^*: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は連続関数で、前節の条件(2)を満たすものとする。

(1) アメリカン・オプション価格の計算方法

満期 T 行使価格 K のアメリカン・プット・オプションの理論価格 P_A は、

$$P_A = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbf{E}[e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+], \quad (11)$$

とされているが、この条件のもとでは次のように P_A は同じ条件のヨーロピアン・オプションと、早期行使プレミアムと呼ばれる部分に分解される(定理2参照)。

$$\begin{aligned} P_A &= P_E(T, x) + rK \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{-ru} 1_{\{S_u^x \leq B_u\}} du\right] \\ &\quad - \delta \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{-ru} S_u^x 1_{\{S_u^x \leq B_u\}} du\right]. \end{aligned} \quad (12)$$

ここで B_t は最適行使境界と呼ばれる $0 \leq t \leq T$ 上で定義される確定的な関数で、

$$\begin{aligned}
 K-z &= P_E(T-t, z) + rK \mathbf{E} \left[\int_0^{T-t} e^{-ru} 1_{\{S_u^z < B_{u+t}\}} du \right] \\
 &\quad - \delta \mathbf{E} \left[\int_0^{T-t} e^{-ru} S_u^z 1_{\{S_u^z < B_{u+t}\}} du \right], \tag{13}
 \end{aligned}$$

を満たす最大の z であることがわかっている（注意2参照）。ただし、

$$P_E(t, z) := \mathbf{E} [e^{-rt}(K - S_t^z)^+], \tag{14}$$

と定義する。

上の式を離散的に近似し、 S_t に関して漸近展開を使うことで B_t を求め、さらに P_A を求める。

$[0, T]$ の分割数を N 、分割の幅 Δ を

$$\Delta := \frac{T}{N}$$

と定義することで $0, \Delta, 2\Delta, \dots, N\Delta$ という離散的な時点を考える。

また最適行使境界 $B_{(N-1)\Delta}, B_{(N-2)\Delta}, \dots, B_\Delta$ を以下の手順で求めていくことにする。まず、

$$K-z = P_E(\Delta, z), \tag{15}$$

を満たす最大の z を $B_{(N-1)\Delta}$ と定義する。

次に、

$$\begin{aligned}
 K-z &= P_E(2\Delta, z) + rK\Delta e^{-r\Delta} \mathbf{P}(S_\Delta^z < B_{(N-1)\Delta}) \\
 &\quad - \delta \Delta e^{-r\Delta} \mathbf{E} [S_\Delta^z 1_{\{S_\Delta^z < B_{(N-1)\Delta}\}}], \tag{16}
 \end{aligned}$$

を満たす最大の z を $B_{(N-2)\Delta}$ と定義する。

$B_{(N-1)\Delta}, B_{(N-2)\Delta}, \dots, B_{(N-i+1)\Delta}$ がわかったとして、

$$\begin{aligned}
 K-z &= P_E(i\Delta, z) + rK\Delta \sum_{k=1}^{i-1} e^{-r(k\Delta)} \mathbf{P}(S_{k\Delta}^z < B_{(N-i+k)\Delta}) \\
 &\quad - \delta \Delta \sum_{k=1}^{i-1} e^{-r(k\Delta)} \mathbf{E} [S_{k\Delta}^z 1_{\{S_{k\Delta}^z < B_{(N-i+k)\Delta}\}}], \tag{17}
 \end{aligned}$$

を満たす最大の z を $B_{(N-i)\Delta}$ と定義する。

以上のようにして最適行使境界 $B_{(N-1)\Delta}$, $B_{(N-2)\Delta}$, ..., B_Δ を求めたら、アメリカン・プット・オプションの価格 P_A を

$$P_A = P_E(T, x) + rK\Delta \sum_{k=1}^{i-1} e^{-r(k\Delta)} \mathbf{P}(S_{k\Delta}^z < B_{k\Delta}) - \delta\Delta \sum_{k=1}^{i-1} e^{-r(k\Delta)} \mathbf{E}[S_{k\Delta}^z \mathbf{1}_{\{S_{k\Delta}^z < B_{k\Delta}\}}], \quad (18)$$

として求める。

(2) 漸近展開法の適用

実際の数値計算においては、上の式における $P_E(t, x)$ 、 $\mathbf{P}(S_t < A)$ 、 $\mathbf{E}(S_t \mathbf{1}_{\{S_t < A\}})$ を具体的に計算する必要がある。ここで A はある定数とする。そのために以下の漸近展開を考えることで $P_E(t, x)$ 、 $\mathbf{P}(S_t < A)$ 、 $\mathbf{E}(S_t \mathbf{1}_{\{S_t < A\}})$ を近似的に計算することを提案する。

まず原資産価格 S_t とその確率過程 (10) を漸近展開の対象となるパラメータ ϵ に明示的に依存させた形に書き直す。すなわち、 $S_t^{(\epsilon)}$ は次の確率微分方程式を満たすとする。

$$dS_t^{(\epsilon)} = (r - \delta) S_t^{(\epsilon)} dt + \epsilon \sigma(S_t^{(\epsilon)}) dW_t, \quad S_0^{(\epsilon)} = x. \quad (19)$$

ただし、 $\epsilon \in (0, 1]$ とする。(10)式との関係を見れば、(10)式のボラティリティの項 $\sigma^*(S_t)$ を $\epsilon \sigma(S_t^{(\epsilon)})$ に置き換えていることに注意を要する。すなわち、

$$\sigma^*(S_t) = \epsilon \sigma(S_t^{(\epsilon)}),$$

である。漸近展開法は、 $\epsilon = 0.0$ 、つまりボラティリティがゼロの確定的な過程のまわりで $S_t^{(\epsilon)}$ を確率的に展開し近似する手法ともみることができる。 $\epsilon = 0.0$ の時の原資産価格過程 $S_t^{(0)}$ は、(19)式より $dS_t^{(\epsilon)} = (r - \delta) S_t^{(\epsilon)} dt$ 、 $S_0^{(\epsilon)} = x$ であるから、

$$S_t^{(0)} := x e^{(r - \delta)t}, \quad (20)$$

により与えられる。 $S_t^{(\epsilon)}$ 自体を $\epsilon = 0.0$ のまわりで ϵ^2 オーダーまで展開すると、

$$S_t^{(\epsilon)} = S_t^{(0)} + \epsilon g_{1t} + \epsilon^2 g_{2t} + o(\epsilon^2), \quad (21)$$

$$g_{1t} := \int_0^t e^{(r - \delta)(t - s)} \sigma(S_s^{(0)}) dW_s,$$

$$g_{2t} := \int_0^t e^{(r - \delta)(t - s)} \partial \sigma(S_s^{(0)}) g_{1s} dW_s,$$

$$\partial \sigma(S_t^{(0)}) := \frac{\partial \sigma(S_t^{(\epsilon)})}{\partial S_t^{(\epsilon)}} \Big|_{S_t^{(\epsilon)} = S_t^{(0)},}$$

であるが、第1項が確定的な $S_t^{(0)}$ となり分布の漸近展開を導出するには不適當であるため、以下の基準化された確率変数 $X_t^{(\epsilon)}$ を導入する。

$$X_t^{(\epsilon)} := \frac{S_t^{(\epsilon)} - S_t^{(0)}}{\epsilon} . \quad (22)$$

この時、 $X_t^{(\epsilon)}$ の ϵ オーダーまでの漸近展開は、

$$X_t^{(\epsilon)} = g_{1t} + \epsilon g_{2t} + o(\epsilon) ,$$

により表される。 g_{1t} は、平均0、分散 Σ_t 、 $\Sigma_t := \int_0^t e^{2(r-\delta)(t-u)} \sigma^2(S_u^{(0)}) du$ の1次元正規分布に従うことに注意すると、 $X_t^{(\epsilon)}$ の $\epsilon \rightarrow 0$ とした場合の極限分布は正規分布であることがわかり、さらに、Takahashi [1999] のLemma2.1(1)を用いると、

$$\mathbf{E} [g_{2t} | g_{1t} = x] = c_t x^2 + f_t ,$$

$$c_t := \frac{1}{\Sigma_t^2} \int_0^t e^{(r-\delta)(t-u)} \sigma(S_u^{(0)}) \partial \sigma(S_u^{(0)}) \int_0^u e^{2(r-\delta)(t-v)} \sigma^2(S_v^{(0)}) dv du ,$$

$$f_t := -c_t \Sigma_t ,$$

が得られる。これらの基本的結果から $X_t^{(\epsilon)}$ の密度関数は、

$$g_{X_t^{(\epsilon)}}(x) \sim n[x; 0, \Sigma_t] + \epsilon \left[-\frac{d}{dx} \{ (c_t x^2 + f_t) n[x; 0, \Sigma_t] \} \right] , \quad (23)$$

と ϵ オーダーまで近似的に求められる（導出の詳細はTakahashi [1999]を参照）。ただし、

$$n[x; 0, \Sigma_t] := \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\Sigma_t}\right) ,$$

と定義する。すなわち、確率変数 $X_t^{(\epsilon)}$ は正規分布のまわりで展開され、その密度関数は $\epsilon \rightarrow 0$ の時の極限分布である正規分布の密度関数 ((23)式の右辺第1項) に、 ϵ オーダーのある補正項 ((23)式の右辺第2項) を加えたもので近似されていることがわかる。

この $X_t^{(\epsilon)}$ の密度関数の近似式(23)に基づき、 $\mathbf{P}(S_t^{(\epsilon)} < A)$ 、 $\mathbf{E}(S_t^{(\epsilon)} 1_{\{S_t^{(\epsilon)} < A\}})$ は近似的に計算できる（計算の詳細は補論3.を参照）。すなわち、

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S_t^{(\epsilon)} < A) &= \mathbf{P}\left(\frac{S_t^{(\epsilon)} - S_t^{(0)}}{\epsilon} < \frac{A - S_t^{(0)}}{\epsilon}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(X_t^{(\epsilon)} < \frac{A - S_t^{(0)}}{\epsilon}\right) \\
&\sim N\left(\frac{a_t}{\sqrt{\Sigma_t}}\right) - \epsilon(c_t a_t^2 + f_t) n[a_t; 0, \Sigma_t], \\
a_t &:= \frac{A - S_t^{(0)}}{\epsilon}, \\
N(y) &:= \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \tag{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[S_t^{(\epsilon)} 1_{\{S_t^{(\epsilon)} < A\}}] &= \mathbf{E}[S_t^{(\epsilon)} 1_{\{X_t^{(\epsilon)} < a_t\}}] \\
&= \mathbf{E}[(S_t^{(\epsilon)} - S_t^{(0)}) 1_{\{X_t^{(\epsilon)} < a_t\}} + S_t^{(0)} 1_{\{X_t^{(\epsilon)} < a_t\}}] \\
&= \mathbf{E}[(S_t^{(\epsilon)} - S_t^{(0)}) 1_{\{X_t^{(\epsilon)} < a_t\}}] + S_t^{(0)} \mathbf{P}(X_t^{(\epsilon)} < a_t) \\
&= \epsilon \mathbf{E}\left[\frac{S_t^{(\epsilon)} - S_t^{(0)}}{\epsilon} 1_{\{X_t^{(\epsilon)} < a_t\}}\right] + S_t^{(0)} \mathbf{P}(X_t^{(\epsilon)} < a_t) \\
&= \epsilon \mathbf{E}[X_t^{(\epsilon)} 1_{\{X_t^{(\epsilon)} < a_t\}}] + S_t^{(0)} \mathbf{P}(X_t^{(\epsilon)} < a_t) \\
&\sim \epsilon(-\Sigma n[a_t; 0, \Sigma_t] - \epsilon c_t a_t^3 n[a_t; 0, \Sigma_t]) \\
&\quad + S_t^{(0)} \left(N\left(\frac{a_t}{\sqrt{\Sigma_t}}\right) - \epsilon(c_t a_t^2 + f_t) n[a_t; 0, \Sigma_t]\right), \tag{25}
\end{aligned}$$

である。したがって、これらを用いることで $P_E(t, x)$ を近似的に計算できる。つまり、 $P_E(t, x)$ を明示的に ϵ に依存させて、改めて $P_E^\epsilon(t, x)$ と書くと、

$$\begin{aligned}
P_E^\epsilon(t, x) &= \mathbf{E}[e^{-rt}(K - S_t^{(\epsilon)})^+] \\
&= \mathbf{E}[e^{-rt}(K - S_t^{(\epsilon)}) 1_{\{S_t^{(\epsilon)} < K\}}] \\
&= e^{-rt}(KP[S_t^{(\epsilon)} < K] - \mathbf{E}[S_t^{(\epsilon)} 1_{\{S_t^{(\epsilon)} < K\}}]) \\
&\sim e^{-rt}K\left(N\left(\frac{k_t}{\sqrt{\Sigma_t}}\right) - \epsilon(c_t k_t^2 + f_t) n[k_t; 0, \Sigma_t]\right) \\
&\quad - e^{-rt}\{\epsilon(-\Sigma_t n[k_t; 0, \Sigma_t] - \epsilon c_t k_t^3 n[k_t; 0, \Sigma_t]) \\
&\quad + S_t^{(0)}\left(N\left(\frac{k_t}{\sqrt{\Sigma_t}}\right) - \epsilon(c_t k_t^2 + f_t) n[k_t; 0, \Sigma_t]\right)\}, \tag{26}
\end{aligned}$$

となる。ただし、

$$k_t := \frac{K - S_t^{(0)}}{\epsilon},$$

とした。この結果、十分小さな正の数 ϵ をとり、

$$\sigma^*(x) = \epsilon\sigma(x), \quad (27)$$

となるように $\sigma(x)$ を決め、上の漸近展開法による近似式を本節(1)で紹介したアメリカン・プット・オプション価格の計算方法の中で用いることにより、価格および最適行使境界を具体的に計算していくことが可能となる。

(3) リチャードソンの近似法

本節の最後として、Geske and Johnson [1984]で紹介されているリチャードソンの近似法 (Richardson's approximation scheme) による数値計算の高速化の手法を説明する。 P_A の近似値をより高速に求めたい場合は、リチャードソンの近似法を利用することができる。特にここでは、4点近似を用いることにする。前節の離散化における時間間隔を h として計算した場合の評価値を $F(h)$ で表すと、

$$F(h) = F(0) + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + o(h^3),$$

の関係式が成り立つ。特に4点近似の場合は $h = T/4$ であり、 $F(ih)$ を各積分の離散化における時間間隔を ih として計算した場合の評価値とすれば、以下の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} F(4h) &= F(0) + 4a_1h + 16a_2h^2 + 64a_3h^3 + o(h^3), \\ F(2h) &= F(0) + 2a_1h + 4a_2h^2 + 8a_3h^3 + o(h^3), \\ F(4/3h) &= F(0) + \frac{4}{3}a_1h + \frac{16}{9}a_2h^2 + \frac{64}{27}a_3h^3 + o(h^3), \\ F(h) &= F(0) + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + o(h^3). \end{aligned}$$

さらに、 h^3 のオーダーより小さい項、 $o(h^3)$ を無視して $F(0)$ に関して解けば、 $F(0)$ の近似値が得られる。

$$F(0) \sim -\frac{1}{6}F(4h) + 4F(2h) - \frac{27}{2}F(4/3h) + \frac{32}{3}F(h). \quad (28)$$

$F(0)$ を求める P_A の値、 $F(4h)$ を満期 T のヨーロッパン・オプションの値、 $F(2h)$ を分割の幅を $T/2$ とした時の値、 $F(4/3h)$ を分割の幅を $T/3$ とした時の値、 $F(h)$ を分割の幅を $T/4$ とした時の値とすれば、上の4つの場合のみを計算すればよいことになり、得られる値の精度が要求水準に達していれば大幅に計算量が削減される。

4 . 数値例

この節では漸近展開法によるアメリカン・オプション価格評価の具体例として原資産価格がCEV過程に従う場合を紹介する。

(1) CEV過程

まず、CEV過程とそれに対する漸近展開法の適用について概説する。CEV過程とは次のような確率微分方程式を満たす確率過程のことである。

$$dS_t = (r - \delta) S_t dt + \sigma S_t^\gamma dW_t, S_0 = x. \quad (29)$$

ただし γ は、

$$1/2 \leq \gamma \leq 1,$$

を満たす数、 r 、 δ 、 σ は正の定数、初期値 x は、 $x > 0$ とする。CEV過程の形式的な離散近似を考えると、

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = (r - \delta)\Delta t + \left(\frac{\sigma}{S_t^{1-\gamma}}\right)\Delta W_t,$$

となるが、これは直感的には株価が0に近づくほど株価の変化率の分散が大きくなるということを反映させたモデルともいえるであろう。

CEV過程に対してアメリカン・オプション価格の分解式が成り立つので（補論4.を参照）前節の計算方法を用いてアメリカン・オプションの価格を計算することができる。

漸近展開を考えるために次の確率微分方程式を考え、その解を $S_t^{(\epsilon)}$ とする。

$$dS_t = (r - \delta) S_t dt + \epsilon b S_t^\gamma dW_t, S_0 = x. \quad (30)$$

ここで、

$$\sigma(x) = bx^\gamma,$$

と置くと、

$$\sigma'(x) = b\gamma x^{\gamma-1},$$

となることに注意する。

また、

$$\alpha := r - \delta,$$

と置き、 $\alpha > 0$ の場合を考える。

まず Σ_t を計算する。

$$\begin{aligned}
 \Sigma_t &= \int_0^t e^{2\alpha(t-u)} \sigma(S_u^{(0)})^2 du \\
 &= \int_0^t e^{2\alpha(t-u)} b^2 (xe^{\alpha u})^{2\gamma} du \\
 &= b^2 x^{2\gamma} e^{2\alpha t} \int_0^t e^{2(\gamma-1)\alpha u} du \\
 &= \frac{b^2 x^{2\gamma}}{2(\gamma-1)\alpha} e^{2\alpha t} (e^{2(\gamma-1)\alpha t} - 1) .
 \end{aligned} \tag{31}$$

次に c_t を計算する。

$$\begin{aligned}
 c_t \Sigma_t^2 &= \int_0^t e^{\alpha(t-u)} b (xe^{\alpha u})^\gamma b \gamma (xe^{\alpha u})^{\gamma-1} \int_0^u e^{2\alpha(t-v)} b^2 (xe^{\alpha v})^{2\gamma} dv du \\
 &= b^4 x^{4\gamma-1} \gamma e^{3\alpha t} \int_0^t e^{2(\gamma-1)\alpha u} \int_0^u e^{2(\gamma-1)\alpha v} dv du \\
 &= \frac{b^4 x^{4\gamma-1} \gamma}{2(\gamma-1)\alpha} e^{3\alpha t} \int_0^t e^{2(\gamma-1)\alpha u} [e^{2(\gamma-1)\alpha u} - 1] du \\
 &= \frac{b^4 x^{4\gamma-1} \gamma}{2(\gamma-1)\alpha} e^{3\alpha t} \frac{1}{4(\gamma-1)\alpha} (e^{2(\gamma-1)\alpha t} - 1)^2 \\
 &= \frac{b^4 x^{4\gamma-1} \gamma}{8(\gamma-1)^2 \alpha^2} e^{3\alpha t} (e^{2(\gamma-1)\alpha t} - 1)^2 ,
 \end{aligned}$$

となることに注意すると、

$$\Sigma_t^2 = \frac{b^4 x^{4\gamma}}{4(\gamma-1)^2 \alpha^2} e^{4\alpha t} (e^{2(\gamma-1)\alpha t} - 1)^2 ,$$

より、

$$c_t = \frac{\gamma}{2 x e^{\alpha t}} , \tag{32}$$

となる。

(2) 計算結果と考察

ここでは、原資産価格がCEV過程に従う場合の、具体的な数値例の計算結果とそれに対する若干の考察を示す。

まず、数値例のパラメータに関する条件を $r = 0.0488$ 、 $S(0) = 40$ 、 $b = 100$ とし、 $\gamma = 0.5, 0.66, 0.75$ 、 $T = 0.0833, 0.3333, 0.5833, 1$ 、 $K = 35, 40, 45$ 、対数正規過程のボ

ラティリティ20%, 30%, 40%、 $\delta = 0, 0.1, 0.3, 0.5$ の合計432ケースについて計算した。また ϵ は、ある正定数 b と原資産が対数正規過程に従う場合のボラティリティ σ^* とを所与として、

$$\epsilon b S(0)^\gamma = \sigma^* S(0),$$

により決まるものとする。すなわち、ゼロ時点のブラウン運動の係数が対数正規過程のそれと一致するように ϵ を決めた。これらの前提のもとで漸近展開に基づく手法の時間分割数を300とした場合の計算結果は、各配当率ごとにその要約を表1～4に、全結果を表6～9に掲げた。

図表の凡例

ame latti	ラティス法によるアメリカン・オプション価格
ame a.e.	漸近展開法によるアメリカン・オプション価格
eur latti	ラティス法によるヨーロピアン・オプション価格
eur a.e.	漸近展開法によるヨーロピアン・オプション価格
premi latti	ラティス法による早期行使プレミアム
premi a.e.	漸近展開法による早期行使プレミアム
ame rich.	漸近展開法 + リチャードソンの4点近似法によるアメリカン・オプション価格
error1	ラティス法によるアメリカン・オプション価格 (ame latti) を基準とするときの、 漸近展開法によるアメリカン・オプション価格 (ame a.e.) の誤差率
error2	ラティス法によるヨーロピアン・オプション価格 (eur latti) を基準とするときの、 漸近展開法によるヨーロピアン・オプション価格 (eur a.e.) の誤差率
error3	ラティス法による早期行使プレミアム (premi latti) を基準とするときの、 漸近展開法による早期行使プレミアム (premi a.e.) の誤差率
error4	ラティス法によるアメリカン・オプション価格 (ame latti) を基準とするときの、 漸近展開法 + リチャードソンの4点近似法によるアメリカン・オプション価格 (ame rich.) の誤差率
weight	ラティス法によるヨーロピアン・オプション価格 (eur latti) に対する、ラティス法による 早期行使プレミアム (premi latti) の比率
average	誤差率の平均
rmse	誤差率の2乗平均
max	誤差率の最大値
min	誤差率の最小値
δ	配当率
γ	CEV過程のボラティリティ項に関する係数 ((29) 式参照)
T	満期
K	行使価格
σ	ボラティリティ

表1 配当率 $\delta=0.00$ のときの誤差率(%)の各種統計量

	γ	error1	error4	error2
average	0.5	0.30%	0.39%	0.29%
	0.66	0.35%	0.44%	0.31%
	0.75	0.37%	0.46%	0.32%

	γ	error1	error4	error2
rmse	0.5	0.32%	0.51%	0.30%
	0.66	0.39%	0.58%	0.35%
	0.75	0.42%	0.62%	0.37%

	γ	error1	error4	error2
max	0.5	1.30%	1.71%	1.23%
	0.66	1.57%	2.01%	1.40%
	0.75	1.69%	2.15%	1.45%

	γ	error1	error4	error2
min	0.5	-0.01%	-0.28%	0.00%
	0.66	-0.25%	-0.29%	-0.25%
	0.75	-0.44%	-0.42%	-0.43%

表2 配当率 $\delta=0.01$ のときの誤差率(%)の各種統計量

	γ	error1	error4	error2
average	0.5	0.29%	0.36%	0.28%
	0.66	0.34%	0.41%	0.30%
	0.75	0.36%	0.43%	0.31%

	γ	error1	error4	error2
rmse	0.5	0.30%	0.44%	0.28%
	0.66	0.37%	0.52%	0.33%
	0.75	0.40%	0.55%	0.35%

	γ	error1	error4	error2
max	0.5	1.24%	1.56%	1.16%
	0.66	1.48%	1.84%	1.33%
	0.75	1.59%	1.97%	1.38%

	γ	error1	error4	error2
min	0.5	-0.01%	-0.35%	0.00%
	0.66	-0.23%	-0.34%	-0.23%
	0.75	-0.41%	-0.41%	-0.40%

表3 配当率 $\delta=0.03$ のときの誤差率(%)の各種統計量

	γ	error1	error4	error2
average	0.5	0.27%	0.29%	0.26%
	0.66	0.32%	0.34%	0.29%
	0.75	0.33%	0.35%	0.29%

	γ	error1	error4	error2
rmse	0.5	0.27%	0.34%	0.25%
	0.66	0.32%	0.40%	0.30%
	0.75	0.35%	0.43%	0.32%

	γ	error1	error4	error2
max	0.5	1.12%	1.29%	1.05%
	0.66	1.32%	1.51%	1.20%
	0.75	1.40%	1.61%	1.25%

	γ	error1	error4	error2
min	0.5	0.00%	-0.24%	0.00%
	0.66	-0.19%	-0.24%	-0.18%
	0.75	-0.35%	-0.40%	-0.34%

表4 配当率 $\delta=0.05$ のときの誤差率(%)の各種統計量

	γ	error1	error4	error2
average	0.5	0.25%	0.23%	0.24%
	0.66	0.29%	0.27%	0.27%
	0.75	0.30%	0.27%	0.27%

	γ	error1	error4	error2
rmse	0.5	0.24%	0.26%	0.23%
	0.66	0.28%	0.31%	0.27%
	0.75	0.31%	0.33%	0.29%

	γ	error1	error4	error2
max	0.5	1.00%	1.06%	0.95%
	0.66	1.16%	1.22%	1.09%
	0.75	1.21%	1.29%	1.13%

	γ	error1	error4	error2
min	0.5	0.00%	-0.06%	0.00%
	0.66	-0.15%	-0.21%	-0.15%
	0.75	-0.29%	-0.36%	-0.29%

表5 早期行使プレミアムのアメリカーン・オプション価格に占める割合が5%以上となるケース

δ	γ	T	K	σ	ame latti	ame a.e.	error1	eur latti	eur a.e.	error2	premi latti	premi a.e.	error3	weight	ame latti	ame rich.	error4
0.00	0.50	0.3333	45	0.2	5.063438	5.064555	0.02%	4.742793	4.743614	0.02%	0.320644	0.320940	0.09%	6.8%	5.063438	5.070003	0.13%
0.00	0.50	0.5833	40	0.2	1.985630	1.988262	0.13%	1.881161	1.883605	0.13%	0.104469	0.104656	0.18%	5.6%	1.985630	1.994774	0.46%
0.00	0.50	0.5833	45	0.2	5.216359	5.218388	0.04%	4.778843	4.780791	0.04%	0.437516	0.437597	0.02%	9.2%	5.216359	5.223009	-0.06%
0.00	0.50	1.0000	35	0.2	0.825215	0.831353	0.74%	0.781920	0.787186	0.67%	0.043294	0.044167	2.02%	5.5%	0.825215	0.838329	1.59%
0.00	0.50	1.0000	40	0.2	2.440168	2.445508	0.22%	2.250104	2.255111	0.22%	0.190064	0.190397	0.18%	8.4%	2.440168	2.446866	0.27%
0.00	0.50	1.0000	45	0.2	5.454124	5.457339	0.06%	4.833889	4.837831	0.08%	0.620235	0.619508	-0.12%	12.8%	5.454124	5.438712	-0.28%
0.00	0.50	1.0000	45	0.3	6.776983	6.789329	0.18%	6.363546	6.376514	0.20%	0.413437	0.412814	-0.15%	6.5%	6.776983	6.759830	-0.25%
0.00	0.66	0.3333	45	0.2	5.071051	5.072416	0.03%	4.754659	4.755452	0.02%	0.316391	0.316964	0.18%	6.7%	5.071051	5.077088	0.12%
0.00	0.66	0.5833	40	0.2	1.986982	1.990202	0.16%	1.880844	1.883615	0.15%	0.106139	0.106587	0.42%	5.6%	1.986982	1.996520	0.48%
0.00	0.66	0.5833	45	0.2	5.232123	5.234800	0.05%	4.798201	4.800496	0.05%	0.433922	0.434304	0.09%	9.0%	5.232123	5.228329	-0.07%
0.00	0.66	1.0000	35	0.2	0.804397	0.810737	0.79%	0.760458	0.765516	0.67%	0.043939	0.045221	2.92%	5.8%	0.804397	0.818255	1.72%
0.00	0.66	1.0000	40	0.2	2.443212	2.449927	0.27%	2.249394	2.255143	0.26%	0.193818	0.194784	0.50%	8.6%	2.443212	2.450714	0.31%
0.00	0.66	1.0000	40	0.3	3.954578	3.974733	0.51%	3.765067	3.782315	0.46%	0.189512	0.192418	1.53%	5.0%	3.954578	3.986317	0.80%
0.00	0.66	1.0000	45	0.2	5.480172	5.484473	0.08%	4.861735	4.866489	0.10%	0.618437	0.617983	-0.07%	12.7%	5.480172	5.464441	-0.29%
0.00	0.66	1.0000	45	0.3	6.823943	6.841788	0.26%	6.405129	6.421057	0.25%	0.418814	0.420731	0.46%	6.5%	6.823943	6.812330	-0.17%
0.00	0.75	0.3333	45	0.2	5.075467	5.077019	0.03%	4.761371	4.762135	0.02%	0.314096	0.314884	0.25%	6.6%	5.075467	5.081250	0.11%
0.00	0.75	0.5833	40	0.2	1.987788	1.991328	0.18%	1.880718	1.883618	0.15%	0.107070	0.107710	0.60%	5.7%	1.987788	1.997521	0.49%
0.00	0.75	0.5833	45	0.2	5.241187	5.244287	0.06%	4.809174	4.811631	0.05%	0.432013	0.432657	0.15%	9.0%	5.241187	5.237236	-0.08%
0.00	0.75	1.0000	35	0.2	0.792842	0.799011	0.78%	0.748558	0.753188	0.62%	0.044284	0.045824	3.48%	5.9%	0.792842	0.806860	1.77%
0.00	0.75	1.0000	40	0.2	2.445019	2.452496	0.31%	2.249114	2.255153	0.27%	0.195905	0.197343	0.73%	8.7%	2.445019	2.452935	0.32%
0.00	0.75	1.0000	40	0.3	3.956803	3.979329	0.57%	3.764151	3.782337	0.48%	0.192653	0.196992	2.25%	5.1%	3.956803	3.990165	0.84%
0.00	0.75	1.0000	45	0.2	5.495081	5.500120	0.09%	4.877582	4.882711	0.11%	0.617499	0.617409	-0.01%	12.7%	5.495081	5.479359	-0.29%
0.00	0.75	1.0000	45	0.3	6.850795	6.871915	0.31%	6.429009	6.446262	0.27%	0.421786	0.425653	0.92%	6.6%	6.850795	6.842509	-0.12%
0.01	0.50	0.3333	45	0.2	5.097290	5.098430	0.02%	4.850101	4.850894	0.02%	0.247189	0.247536	0.14%	5.1%	5.097290	5.098783	0.03%
0.01	0.50	0.5833	45	0.2	5.285375	5.287572	0.04%	4.943530	4.945487	0.04%	0.341845	0.342085	0.07%	6.9%	5.285375	5.277041	-0.16%
0.01	0.50	1.0000	40	0.2	2.554077	2.559274	0.20%	2.399293	2.404159	0.20%	0.154785	0.155115	0.21%	6.5%	2.554077	2.565380	0.44%
0.01	0.50	1.0000	45	0.2	5.570274	5.573949	0.07%	5.077258	5.081299	0.08%	0.493016	0.492650	-0.07%	9.7%	5.570274	5.550804	-0.35%
0.01	0.50	1.0000	45	0.3	6.921211	6.934769	0.20%	6.579524	6.592688	0.20%	0.341687	0.342081	0.12%	5.2%	6.921211	6.913907	-0.11%
0.01	0.66	0.3333	45	0.2	5.105877	5.107304	0.03%	4.861636	4.862377	0.02%	0.244241	0.244927	0.28%	5.0%	5.105877	5.106936	0.02%
0.01	0.66	0.5833	45	0.2	5.301916	5.304882	0.06%	4.962387	4.964667	0.05%	0.339529	0.340215	0.20%	6.8%	5.301916	5.293635	-0.16%
0.01	0.66	1.0000	40	0.2	2.556371	2.562892	0.26%	2.398593	2.404181	0.23%	0.157777	0.158711	0.59%	6.6%	2.556371	2.568532	0.48%
0.01	0.66	1.0000	45	0.2	5.596792	5.601869	0.09%	5.104482	5.109340	0.10%	0.492309	0.492529	0.04%	9.6%	5.596792	5.577944	-0.34%
0.01	0.66	1.0000	45	0.3	6.966832	6.986147	0.28%	6.620623	6.636771	0.24%	0.346209	0.349376	0.91%	5.2%	6.966832	6.965197	-0.02%
0.01	0.75	0.5833	45	0.2	5.311377	5.314837	0.07%	4.973077	4.975497	0.05%	0.338299	0.339341	0.31%	6.8%	5.311377	5.303235	-0.15%
0.01	0.75	1.0000	40	0.2	2.557759	2.565005	0.28%	2.398317	2.404189	0.24%	0.159442	0.160816	0.86%	6.6%	2.557759	2.570348	0.49%
0.01	0.75	1.0000	45	0.2	5.611937	5.617920	0.11%	5.119971	5.125195	0.10%	0.491967	0.492724	0.15%	9.6%	5.611937	5.593624	-0.33%
0.01	0.75	1.0000	45	0.3	6.992920	7.015579	0.32%	6.644212	6.661689	0.26%	0.348707	0.353890	1.49%	5.2%	6.992920	6.994574	0.02%

average	0.21%
rmse	0.21%
max	0.79%
min	0.02%

average	0.19%
rmse	0.18%
max	0.67%
min	0.02%

average	0.59%
rmse	0.85%
max	3.48%
min	-0.15%

average	0.21%
rmse	0.55%
max	1.77%
min	-0.35%

表9 配当率 =0.05のときの計算結果

γ	T	K	σ	ame latt1	ame a.e.	error1	eur latt1	eur a.e.	error2	premi latt1	premi a.e.	error3	weight	ame rich.	error4
0.50	0.0833	35	0.2	0.009786	0.009689		0.009785	0.009688		7.35E-07	7.50E-07		0.0%	0.009682	
0.50	0.0833	35	0.3	0.099836	0.099893	0.06%	0.099820	0.099876	0.06%	1.61E-05	1.68E-05	4.41%	0.0%	0.099828	-0.01%
0.50	0.0833	35	0.4	0.294364	0.295136	0.26%	0.294297	0.295066	0.26%	6.72E-05	7.04E-05	4.77%	0.0%	0.294956	0.20%
0.50	0.0833	40	0.2	0.919390	0.919732	0.04%	0.919018	0.919343	0.04%	0.000372	0.000389	4.67%	0.0%	0.919108	-0.03%
0.50	0.0833	40	0.3	1.377998	1.378691	0.05%	1.377352	1.378018	0.05%	0.000646	0.000673	4.13%	0.0%	1.377755	-0.02%
0.50	0.0833	40	0.4	1.836393	1.837656	0.07%	1.835470	1.836693	0.07%	0.000923	0.000963	4.33%	0.1%	1.836406	0.00%
0.50	0.0833	45	0.2	5.009095	5.009145	0.00%	4.998836	4.998761	0.00%	0.010259	0.010384	1.22%	0.2%	5.006164	-0.06%
0.50	0.0833	45	0.3	5.120042	5.120366	0.01%	5.113134	5.113314	0.00%	0.006909	0.007052	2.08%	0.1%	5.116986	-0.06%
0.50	0.0833	45	0.4	5.346631	5.347471	0.02%	5.340791	5.341461	0.01%	0.005840	0.006010	2.91%	0.1%	5.344599	-0.04%
0.50	0.3333	35	0.2	0.292606	0.293366	0.26%	0.292285	0.293047	0.26%	0.000321	0.000319	-0.61%	0.1%	0.293249	0.22%
0.50	0.3333	35	0.3	0.874070	0.877595	0.40%	0.872712	0.876224	0.40%	0.001357	0.001371	0.98%	0.2%	0.877081	0.34%
0.50	0.3333	35	0.4	1.585335	1.593549	0.52%	1.582417	1.590553	0.51%	0.002918	0.002997	2.70%	0.2%	1.592459	0.45%
0.50	0.3333	40	0.2	1.823621	1.824861	0.07%	1.819125	1.820334	0.07%	0.004496	0.004527	0.70%	0.2%	1.824032	0.02%
0.50	0.3333	40	0.3	2.730549	2.733889	0.12%	2.723326	2.726557	0.12%	0.007223	0.007332	1.50%	0.3%	2.732747	0.08%
0.50	0.3333	40	0.4	3.635780	3.643017	0.20%	3.625822	3.632783	0.19%	0.009959	0.010235	2.77%	0.3%	3.641605	0.16%
0.50	0.3333	45	0.2	5.315131	5.316021	0.02%	5.286112	5.286770	0.01%	0.029019	0.029251	0.80%	0.5%	5.312333	-0.05%
0.50	0.3333	45	0.3	5.957648	5.961719	0.07%	5.931173	5.934867	0.06%	0.026475	0.026852	1.42%	0.4%	5.960623	0.05%
0.50	0.3333	45	0.4	6.732022	6.739831	0.12%	6.704998	6.712090	0.11%	0.027024	0.027741	2.65%	0.4%	6.739382	0.11%
0.50	0.5833	35	0.2	0.642518	0.644678	0.34%	0.640779	0.642930	0.34%	0.001739	0.001748	0.52%	0.3%	0.644317	0.28%
0.50	0.5833	35	0.3	1.548236	1.556526	0.54%	1.542778	1.550949	0.53%	0.005458	0.005577	2.18%	0.4%	1.555471	0.47%
0.50	0.5833	35	0.4	2.564714	2.581752	0.66%	2.554449	2.570983	0.65%	0.010265	0.010770	4.92%	0.4%	2.580409	0.61%
0.50	0.5833	40	0.2	2.391537	2.393965	0.10%	2.379580	2.381900	0.10%	0.011957	0.012065	0.91%	0.5%	2.394119	0.11%
0.50	0.5833	40	0.3	3.578188	3.585322	0.20%	3.559300	3.566029	0.19%	0.018889	0.019293	2.14%	0.5%	3.585806	0.21%
0.50	0.5833	40	0.4	4.760950	4.777032	0.34%	4.735105	4.750161	0.32%	0.025845	0.026871	3.97%	0.5%	4.777899	0.36%
0.50	0.5833	45	0.2	5.674091	5.676474	0.04%	5.622581	5.624497	0.03%	0.051510	0.051977	0.91%	0.9%	5.673393	-0.01%
0.50	0.5833	45	0.3	6.658465	6.666180	0.12%	6.606588	6.613309	0.10%	0.051877	0.052871	1.92%	0.8%	6.666996	0.13%
0.50	0.5833	45	0.4	7.752320	7.769745	0.22%	7.696170	7.711686	0.20%	0.056150	0.058059	3.40%	0.7%	7.772041	0.25%
0.50	1.0000	35	0.2	1.167966	1.173213	0.45%	1.160778	1.165917	0.44%	0.007188	0.007296	1.50%	0.6%	1.172526	0.39%
0.50	1.0000	35	0.3	2.453228	2.469799	0.68%	2.434750	2.450605	0.65%	0.018478	0.019193	3.87%	0.8%	2.469856	0.68%
0.50	1.0000	35	0.4	3.821012	3.859392	1.00%	3.789116	3.825208	0.95%	0.031896	0.034184	7.17%	0.8%	3.861371	1.06%
0.50	1.0000	40	0.2	3.086445	3.091388	0.16%	3.056043	3.060606	0.15%	0.030402	0.030782	1.25%	1.0%	3.094685	0.27%
0.50	1.0000	40	0.3	4.612893	4.628276	0.33%	4.565435	4.579441	0.31%	0.047458	0.048835	2.90%	1.0%	4.633475	0.45%
0.50	1.0000	40	0.4	6.130771	6.166367	0.58%	6.066164	6.098286	0.53%	0.064607	0.068080	5.38%	1.1%	6.173156	0.69%
0.50	1.0000	45	0.2	6.197032	6.202399	0.09%	6.101027	6.105424	0.07%	0.096005	0.096975	1.01%	1.6%	6.199419	0.04%
0.50	1.0000	45	0.3	7.579265	7.595803	0.22%	7.474395	7.488531	0.19%	0.104871	0.107272	2.29%	1.4%	7.598768	0.26%
0.50	1.0000	45	0.4	9.045880	9.083988	0.42%	8.927105	8.960191	0.37%	0.118776	0.123797	4.23%	1.3%	9.089876	0.49%
0.66	0.0833	35	0.2	0.009033	0.008806		0.009032	0.008806		6.55E-07	6.00E-07		0.0%	0.008800	
0.66	0.0833	35	0.3	0.095171	0.095031	-0.15%	0.095156	0.095016	-0.15%	1.51E-05	1.51E-05	0.27%	0.0%	0.094969	-0.21%
0.66	0.0833	35	0.4	0.284167	0.284913	0.26%	0.284103	0.284848	0.26%	6.41E-05	6.51E-05	1.70%	0.0%	0.284740	0.20%
0.66	0.0833	40	0.2	0.919372	0.919732	0.04%	0.919001	0.919343	0.04%	0.000371	0.000389	4.83%	0.0%	0.919107	-0.03%
0.66	0.0833	40	0.3	1.377939	1.378692	0.05%	1.377294	1.378018	0.05%	0.000645	0.000674	4.51%	0.0%	1.377754	-0.01%
0.66	0.0833	40	0.4	1.836254	1.837657	0.08%	1.835334	1.836693	0.07%	0.000920	0.000964	4.73%	0.1%	1.836407	0.01%
0.66	0.0833	45	0.2	5.009964	5.009930	0.00%	4.999820	4.999637	0.00%	0.010144	0.010293	1.47%	0.2%	5.006914	-0.06%
0.66	0.0833	45	0.3	5.124993	5.125193	0.00%	5.118134	5.118158	0.00%	0.006858	0.007034	2.57%	0.1%	5.121828	-0.06%
0.66	0.0833	45	0.4	5.356966	5.357686	0.01%	5.351155	5.351659	0.01%	0.005811	0.006026	3.70%	0.1%	5.354795	-0.04%
0.66	0.3333	35	0.2	0.282492	0.283222	0.26%	0.282186	0.282925	0.26%	0.000306	0.000297	-2.91%	0.1%	0.283111	0.22%
0.66	0.3333	35	0.3	0.852457	0.856550	0.48%	0.851146	0.855237	0.48%	0.001312	0.001313	0.05%	0.2%	0.856020	0.42%
0.66	0.3333	35	0.4	1.552532	1.562128	0.62%	1.549695	1.559213	0.61%	0.002837	0.002915	2.74%	0.2%	1.561008	0.55%
0.66	0.3333	40	0.2	1.823474	1.824867	0.08%	1.818990	1.820334	0.07%	0.004484	0.004533	1.10%	0.2%	1.824049	0.03%
0.66	0.3333	40	0.3	2.730078	2.733941	0.14%	2.722873	2.726557	0.14%	0.007205	0.007384	2.48%	0.3%	2.732838	0.10%
0.66	0.3333	40	0.4	3.634689	3.643153	0.23%	3.624754	3.632783	0.22%	0.009935	0.010370	4.38%	0.3%	3.641839	0.20%
0.66	0.3333	45	0.2	5.325197	5.326092	0.02%	5.296322	5.296816	0.01%	0.028875	0.029276	1.39%	0.5%	5.322430	-0.05%
0.66	0.3333	45	0.3	5.977947	5.982899	0.08%	5.951508	5.955784	0.07%	0.026439	0.027115	2.56%	0.4%	5.981666	0.06%
0.66	0.3333	45	0.4	6.761786	6.771619	0.15%	6.734741	6.743371	0.13%	0.027045	0.028248	4.45%	0.4%	6.770947	0.14%

表9 (続き)

γ	T	K	σ	ame latt1	ame a.e.	error1	eur latt1	eur a.e.	error2	premi latt1	premi a.e.	error3	weight	ame rich.	error4
0.66	0.5833	35	0.2	0.625459	0.627589	0.34%	0.623788	0.625926	0.34%	0.001671	0.001662	-0.50%	0.3%	0.627211	0.28%
0.66	0.5833	35	0.3	1.516103	1.525706	0.63%	1.510800	1.520284	0.63%	0.005303	0.005422	2.25%	0.4%	1.524636	0.56%
0.66	0.5833	35	0.4	2.518296	2.538002	0.78%	2.508280	2.527373	0.76%	0.010016	0.010629	6.12%	0.4%	2.536814	0.74%
0.66	0.5833	40	0.2	2.391199	2.394010	0.12%	2.379272	2.381900	0.11%	0.011927	0.012110	1.54%	0.5%	2.394191	0.13%
0.66	0.5833	40	0.3	3.577112	3.585526	0.24%	3.558269	3.566029	0.22%	0.018843	0.019497	3.47%	0.5%	3.586099	0.25%
0.66	0.5833	40	0.4	4.758472	4.777536	0.40%	4.732689	4.750161	0.37%	0.025782	0.027374	6.17%	0.5%	4.778562	0.42%
0.66	0.5833	45	0.2	5.690676	5.693588	0.05%	5.639296	5.641374	0.04%	0.051380	0.052214	1.62%	0.9%	5.690488	0.00%
0.66	0.5833	45	0.3	6.687642	6.697512	0.15%	6.635734	6.643872	0.12%	0.051908	0.053640	3.34%	0.8%	6.697980	0.15%
0.66	0.5833	45	0.4	7.792620	7.814695	0.28%	7.736341	7.755215	0.24%	0.056279	0.059480	5.69%	0.7%	7.816364	0.30%
0.66	1.0000	35	0.2	1.142372	1.147881	0.48%	1.135418	1.140836	0.48%	0.006953	0.007045	1.32%	0.6%	1.147171	0.42%
0.66	1.0000	35	0.3	2.408392	2.427646	0.80%	2.390367	2.408747	0.77%	0.018026	0.018899	4.85%	0.8%	2.427947	0.81%
0.66	1.0000	35	0.4	3.757968	3.801452	1.16%	3.726800	3.767273	1.09%	0.031168	0.034179	9.66%	0.8%	3.803982	1.22%
0.66	1.0000	40	0.2	3.085697	3.091563	0.19%	3.055369	3.060606	0.17%	0.030327	0.030957	2.08%	1.0%	3.094859	0.30%
0.66	1.0000	40	0.3	4.610535	4.628989	0.40%	4.563192	4.579441	0.36%	0.047344	0.049548	4.66%	1.0%	4.634099	0.51%
0.66	1.0000	40	0.4	6.125389	6.168054	0.70%	6.060947	6.098286	0.62%	0.064443	0.069767	8.26%	1.1%	6.174460	0.80%
0.66	1.0000	45	0.2	6.221178	6.228055	0.11%	6.125226	6.130318	0.08%	0.095953	0.097738	1.86%	1.6%	6.224957	0.06%
0.66	1.0000	45	0.3	7.618195	7.639579	0.28%	7.513107	7.530250	0.23%	0.105088	0.109329	4.04%	1.4%	7.641711	0.31%
0.66	1.0000	45	0.4	9.097748	9.145612	0.53%	8.978612	9.018017	0.44%	0.119137	0.127595	7.10%	1.3%	9.149813	0.57%
0.75	0.0833	35	0.2	0.008611	0.008310		0.008611	0.008309		6.15E-07	5.08E-07		0.0%	0.008304	
0.75	0.0833	35	0.3	0.092564	0.092296	-0.29%	0.092550	0.092282	-0.29%	1.45E-05	1.41E-05	-3.19%	0.0%	0.092236	-0.36%
0.75	0.0833	35	0.4	0.278477	0.279163	0.25%	0.278414	0.279101	0.25%	6.24E-05	6.23E-05	-0.19%	0.0%	0.278994	0.19%
0.75	0.0833	40	0.2	0.919365	0.919731	0.04%	0.918994	0.919343	0.04%	0.000370	0.000388	4.92%	0.0%	0.919107	-0.03%
0.75	0.0833	40	0.3	1.377915	1.378692	0.06%	1.377271	1.378018	0.05%	0.000644	0.000674	4.68%	0.0%	1.377754	-0.01%
0.75	0.0833	40	0.4	1.836199	1.837658	0.08%	1.835280	1.836693	0.08%	0.000919	0.000965	4.99%	0.1%	1.836408	0.01%
0.75	0.0833	45	0.2	5.010505	5.010379	0.00%	5.000432	5.000129	-0.01%	0.010072	0.010249	1.76%	0.2%	5.007342	-0.06%
0.75	0.0833	45	0.3	5.127976	5.127912	0.00%	5.121152	5.120883	-0.01%	0.006824	0.007028	2.99%	0.1%	5.124553	-0.07%
0.75	0.0833	45	0.4	5.362821	5.363436	0.01%	5.357025	5.357396	0.01%	0.005796	0.006040	4.20%	0.1%	5.360533	-0.04%
0.75	0.3333	35	0.2	0.276848	0.277516	0.24%	0.276550	0.277232	0.25%	0.000298	0.000284	-4.72%	0.1%	0.277408	0.20%
0.75	0.3333	35	0.3	0.840433	0.844710	0.51%	0.839146	0.843433	0.51%	0.001287	0.001277	-0.79%	0.2%	0.844169	0.44%
0.75	0.3333	35	0.4	1.534357	1.544447	0.66%	1.531564	1.541585	0.65%	0.002793	0.002862	2.50%	0.2%	1.543316	0.58%
0.75	0.3333	40	0.2	1.823414	1.824873	0.08%	1.818937	1.820334	0.08%	0.004477	0.004539	1.38%	0.2%	1.824062	0.04%
0.75	0.3333	40	0.3	2.729889	2.733973	0.15%	2.722694	2.726557	0.14%	0.007195	0.007415	3.06%	0.3%	2.732896	0.11%
0.75	0.3333	40	0.4	3.634254	3.643231	0.25%	3.624334	3.632783	0.23%	0.009921	0.010448	5.32%	0.3%	3.641980	0.21%
0.75	0.3333	45	0.2	5.330903	5.331775	0.02%	5.302105	5.302466	0.01%	0.028798	0.029309	1.77%	0.5%	5.328121	-0.05%
0.75	0.3333	45	0.3	5.989831	5.994834	0.08%	5.963428	5.967549	0.07%	0.026403	0.027285	3.34%	0.4%	5.993512	0.06%
0.75	0.3333	45	0.4	6.778748	6.789522	0.16%	6.751691	6.760965	0.14%	0.027057	0.028557	5.54%	0.4%	6.788717	0.15%
0.75	0.5833	35	0.2	0.615958	0.617974	0.33%	0.614324	0.616363	0.33%	0.001634	0.001611	-1.41%	0.3%	0.617585	0.26%
0.75	0.5833	35	0.3	1.498847	1.508362	0.63%	1.493639	1.503037	0.63%	0.005208	0.005325	2.24%	0.3%	1.507292	0.56%
0.75	0.5833	35	0.4	2.492752	2.513374	0.83%	2.482874	2.502845	0.80%	0.009878	0.010529	6.60%	0.4%	2.512300	0.78%
0.75	0.5833	40	0.2	2.391061	2.394039	0.12%	2.379151	2.381900	0.12%	0.011910	0.012139	1.93%	0.5%	2.394239	0.13%
0.75	0.5833	40	0.3	3.576680	3.585647	0.25%	3.557864	3.566029	0.23%	0.018817	0.019618	4.26%	0.5%	3.586275	0.27%
0.75	0.5833	40	0.4	4.757486	4.777820	0.43%	4.731740	4.750161	0.39%	0.025746	0.027659	7.43%	0.5%	4.778929	0.45%
0.75	0.5833	45	0.2	5.700090	5.703249	0.06%	5.648777	5.650865	0.04%	0.051312	0.052384	2.09%	0.9%	5.700126	0.00%
0.75	0.5833	45	0.3	6.704267	6.715180	0.16%	6.652341	6.661061	0.13%	0.051926	0.054119	4.22%	0.8%	6.715431	0.17%
0.75	0.5833	45	0.4	7.815729	7.840020	0.31%	7.759381	7.779697	0.26%	0.056348	0.060323	7.05%	0.7%	7.841320	0.33%
0.75	1.0000	35	0.2	1.128161	1.133625	0.48%	1.121336	1.126731	0.48%	0.006825	0.006894	1.01%	0.6%	1.132909	0.42%
0.75	1.0000	35	0.3	2.383704	2.403912	0.85%	2.365929	2.385206	0.81%	0.017775	0.018706	5.24%	0.8%	2.404377	0.87%
0.75	1.0000	35	0.4	3.723651	3.768801	1.21%	3.692886	3.734690	1.13%	0.030765	0.034111	10.88%	0.8%	3.771625	1.29%
0.75	1.0000	40	0.2	3.085389	3.091673	0.20%	3.055104	3.060606	0.18%	0.030285	0.031068	2.58%	1.0%	3.094968	0.31%
0.75	1.0000	40	0.3	4.609587	4.629403	0.43%	4.562310	4.579441	0.38%	0.047277	0.049962	5.68%	1.0%	4.634447	0.54%
0.75	1.0000	40	0.4	6.123250	6.168984	0.75%	6.058905	6.098286	0.65%	0.064345	0.070698	9.87%	1.1%	6.175127	0.85%
0.75	1.0000	45	0.2	6.234913	6.242559	0.12%	6.138987	6.144317	0.09%	0.095926	0.098242	2.41%	1.6%	6.239370	0.07%
0.75	1.0000	45	0.3	7.640501	7.664292	0.31%	7.535296	7.553712	0.24%	0.105205	0.110579	5.11%	1.4%	7.665918	0.33%
0.75	1.0000	45	0.4	9.127801	9.180332	0.58%	9.008476	9.050539	0.47%	0.119326	0.129793	8.77%	1.3%	9.183577	0.61%

例えば、表6は配当率 $\delta = 0$ の場合について $\gamma = 0.5, 0.66, 0.75$ 、 $T = 0.0833, 0.3333, 0.5833, 1$ 、 $K = 35, 40, 45$ 、ボラティリティを $\sigma^* = 0.2, 0.3, 0.4$ として、計108ケースについて計算したものである。この表において、本稿の漸近展開法によるアメリカン・オプションの値をame a.e.、Nelson and Ramaswamy [1990] のラティス法を用いたアメリカン・オプションの値をame latti、ame lattiを基準値とした場合の、ame a.e.の誤差率をerror1とした。ここで、基準値としたラティス法の時間分割数1,000の場合の値は安定的で、例えば、 $\gamma = 0.75$ 、 $K = 35$ 、 $\delta = 0.0$ 、 $T = 1$ 、 $\sigma^* = 0.4$ のケースでは、ラティスの時間分割数998の場合の値から分割数999の場合の値の変化率は0.02%、999分割から1,000分割の値の変化率は-0.02%であった。また、漸近展開法を用いて計算したヨーロッパン・オプションの部分の値をeur a.e.、Nelson and Ramaswamy [1990] のラティス法を用いたヨーロッパン・オプションの値をeur latti、eur lattiを真の値とみた時のeur a.e.の誤差率をerror2とした。さらに、漸近展開法を用いて計算した早期行使プレミアム、すなわち、ame a.e.とeur a.e.との差をpremi a.e.、Nelson and Ramaswamy [1990] のラティス法を用いた早期行使プレミアム、すなわち、ame lattiとeur lattiとの差をpremi latti、premi lattiを基準値とした場合のpremi a.e.の誤差率をerror3とした。最後に、漸近展開の手法にリチャードソンの4点近似法を用いて高速化した値をame rich.、ame lattiを基準値とした時のame rich.の誤差率をerror4とした。なおerror1、error2、error3、error4において、アメリカン・オプションの値が0.01未満のものは除いた。今回の場合では、 $T = 0.0833$ 、 $K = 35$ 、 $\sigma^* = 0.2$ のケースがこれに該当する。表7、8、9は $\delta = 0.01, 0.03, 0.05$ の場合について表6と同様に計算した結果である。

表10 図1～6に用いる各種パラメータの値

[A] (図 1、3、4)

δ	0
γ	0.75
T	1
σ	0.2
K	45

[B] (図 2、5、6)

δ	0
γ	0.75
T	1
σ	0.4
K	35

eur latti	4.877582
eur a.e.	4.882711
error2	0.11%
premi latti	0.617499
premi a.e.	0.617409
error3	-0.01%
weight	12.7%

eur latti	3.151353
eur a.e.	3.197126
error2	1.45%
premi latti	0.093003
premi a.e.	0.101939
error3	9.61%
weight	3.0%

表1は配当率 $\delta = 0$ の場合に $\gamma = 0.5, 0.66, 0.75$ の3ケースについて、ame a.e.、ame rich.、eur a.e.のおおの誤差率の平均 (average) 2乗平均誤差の平方根 (rmse) 最大値 (max) 最小値 (min)を $T=0.0833, 0.3333, 0.5833, 1$ 、 $K=35, 40, 45$ 、ボラティリティを $\sigma^*=0.2, 0.3, 0.4$ とした36個の標本を基に計算した結果を示している。表2~4はおのおの、配当率 $\delta = 0.01, 0.03, 0.05$ の場合について表1と同様に計算した結果である。

表5は今回計算した432ケースのうち、早期行使プレミアムの対応するヨーロピアン・オプション価格に対する比率 (表5~10におけるweight) が5%以上となる場合の結果を示している。

表10は配当率 $\delta = 0$ のうち早期行使プレミアムの部分の誤差が最小となる $\gamma = 0.75$ 、 $T=1$ 、 $\sigma^*=0.2$ 、 $K=45$ ([A]とする) のケースと、最大となる $\gamma = 0.75$ 、 $T=1$ 、 $\sigma^*=0.4$ 、 $K=35$ ([B]とする) のケースの計算結果を示しており、図1~6は、おのおのの早期行使境界、 S_T の密度関数に対し漸近展開法による計算結果をラティス法による計算結果と比較して図示したものである。

まず表6のame latti、ame a.e.、error1の列をみてもと、誤差率error1は概ね1%未満であり、本稿の漸近展開法によるアメリカン・オプションの計算精度が良いことがわかる。またame rich.、error4の列をみると誤差率error4は概ね2%未満であり、計算に要する時間は非常に短いことを勘案すれば、リチャードソンの4点近似法による高速化が有効であることがわかる。アメリカン・オプションのerror1が1%を超えているものに注目してみると、 γ 、 T 、ボラティリティが大きく、OTM (out of the money) のものほど誤差率が高い傾向がみてとれる。実際 $\gamma = 0.75$ 、 $T=1$ 、 $K=35$ 、 $\sigma^*=0.4$ のケースが誤差率が1.69%で表6の中の最大誤差となっている。この要因としては漸近展開法は、 $X_T^{(\epsilon)}$ の分布を正規分布 ($\gamma = 0.0$) により近似しているので γ が0.0から乖離すればするほど、分布の近似精度が悪くなるであろうこと、さらに、 $\epsilon = 0$ 、すなわち分散ゼロまわりで漸近展開しているため、分散が大きいほど、すなわち T 、 σ^* が大きいほど近似精度が悪くなるであろうことが挙げられ、この結果、分布の差が最も影響するOTMの場合の価格の誤差が最大となっていると考えられる。同様の理由でアメリカン・プットの場合は配当率が低いほど同じ行使価格に対して相対的にOTMとなるため、他の条件を同一とすれば配当率が低いほど誤差が大きくなる傾向がみてとれる (表1~4、表6~9を参照)。

さらに、アメリカン・オプション価値をヨーロピアン・オプション価値と早期行使プレミアムに分割し、それぞれの誤差を調べた。premi latti、premi a.e.を比較すると、どのケースについてもほぼ等しい値になっており、アメリカン・オプション特有の早期行使プレミアムが非常にうまく計算できていることがわかる。早期行使プレミアムの誤差率error3をみると早期行使プレミアムの数値premi latti、premi a.e.が非常に小さいにもかかわらず、誤差率が非常に小さいこと、早期行使プレミアムのウエイトが本質的に重要なウエイトの高いケースほど早期行使プレミアムの誤差率が非常に小さいことがみてとれる。表7、8、9については、表6と同様の考察が当てはまるので省略する。

表5は、全ケースのうち早期行使プレミアムヨーロピアン・オプション価格に対する比率が5%を超えるものを集めたが、早期行使プレミアムが特に精度良く計算されていることがわかる。また δ が小さく、 T が大きく、ボラティリティが小さく、ITM (in the money) のものほどウエイトが大きいという傾向もみてとれる。例えばウエイトが12%を超えるものはいずれも $\delta = 0$ 、 $T = 1$ 、 $\sigma^* = 0.2$ 、 $K = 45$ となるものである。

アメリカン・オプションの価格が精度良く計算できているケースと比較的精度が落ちるケースについて (表10参照) 最適行使境界と S_T の密度関数を数値的に求めた結果が図1~6である。

ケース[B] ($\delta = 0$ 、 $\sigma^* = 0.75$ 、 $T = 1$ 、 $\sigma^* = 0.4$ 、 $K = 35$) は表6の中でアメリカン・オプションの誤差error1が最大のものを選び、ケース[A] ($\delta = 0$ 、 $\sigma^* = 0.75$ 、 $T = 1$ 、 $\sigma^* = 0.2$ 、 $K = 45$) はケース[B]との比較のため、 $\delta = 0$ 、 $\sigma^* = 0.75$ 、 $T = 1$ の中で誤差率error1が最小のものを選んだ。先述のように相対的にボラティリティが大きくOTMのケース[B]が誤差が大きくなっている。まず最適行使境界 B_T のグラフ (図1、2) を比較すると、[A] [B] どちらのケースも精度良く最適行使境界を計算できていることがみてとれるが、[A]の方がさらにラティス法から得られる最適行使境界に近くなっていることがわかる。

さらに[A] [B]それぞれのケースについて S_T の密度関数が漸近展開によってどのように計算されているかをみってみる。図3、図5のどちらもモンテカルル法によってシミュレートされる密度関数とほぼ一致しているが、[A]の方がより一致していることがみてとれる。ヨーロピアン・オプションの部分の評価に影響を与える行使価格 K 以下の密度について拡大したのが図4、図6である。これをみると[A]のケースが密度関数を非常にうまく近似できていることがわかる。また[B]のケースでは K 以下では漸近展開法で計算される密度の方がモンテカルル法によってシミュレートされる密度よりも大きく、このことによって実際に漸近展開法によるアメリカン・オプションの値がラティス法による基準値よりも大きくなっているものと推察できる。

図1 最適行使境界 [A]

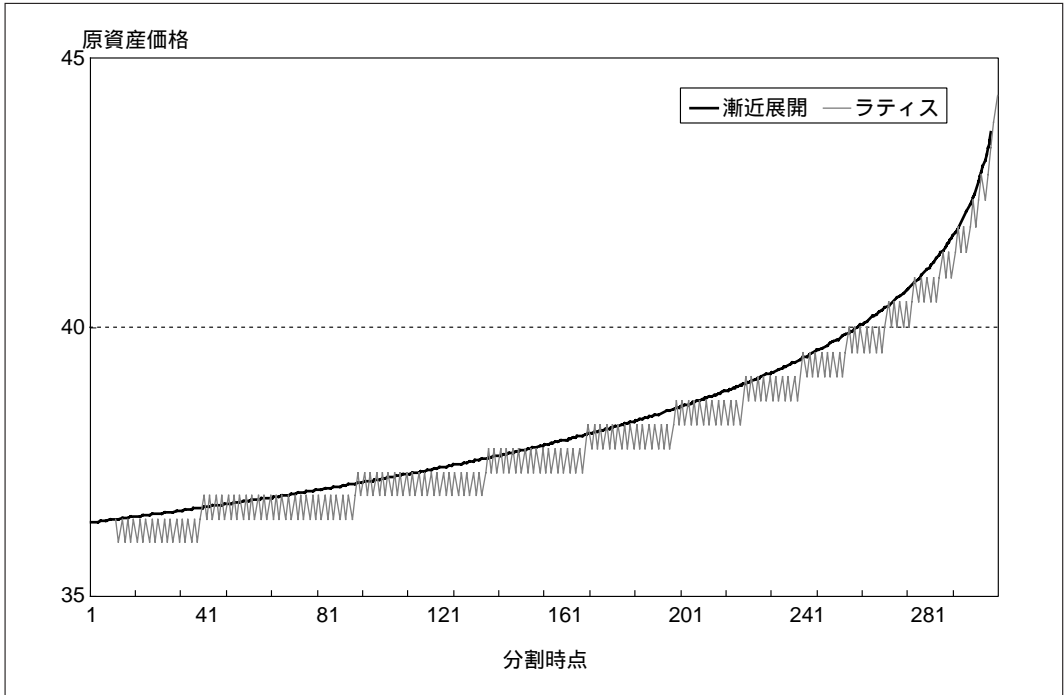


図2 最適行使境界 [B]

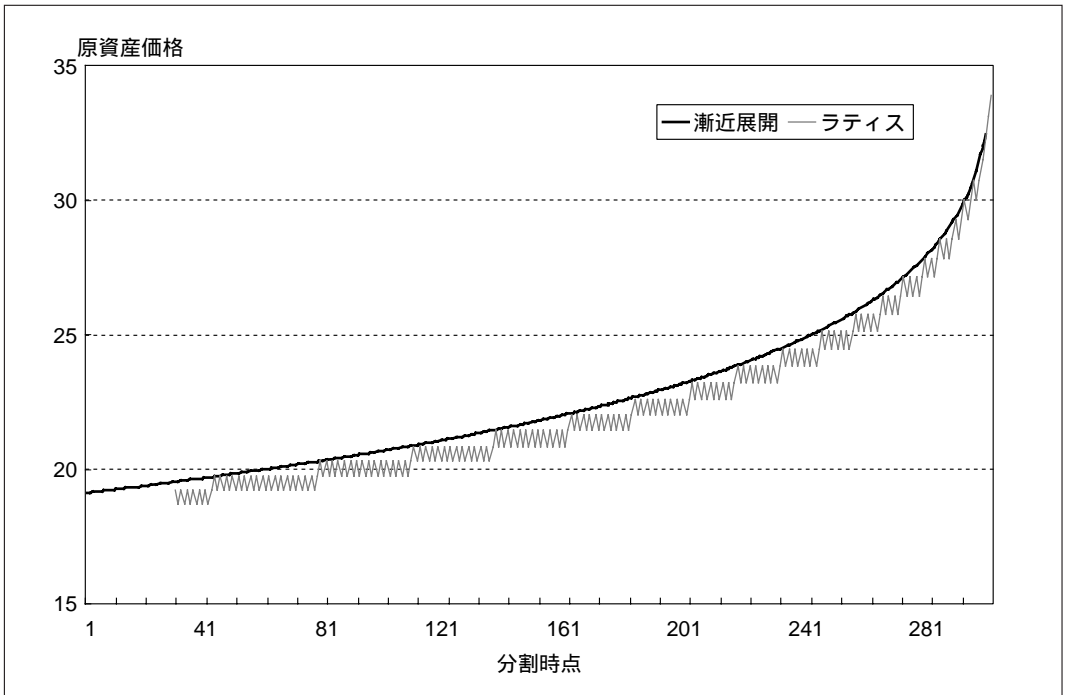


図3 密度関数 [A]

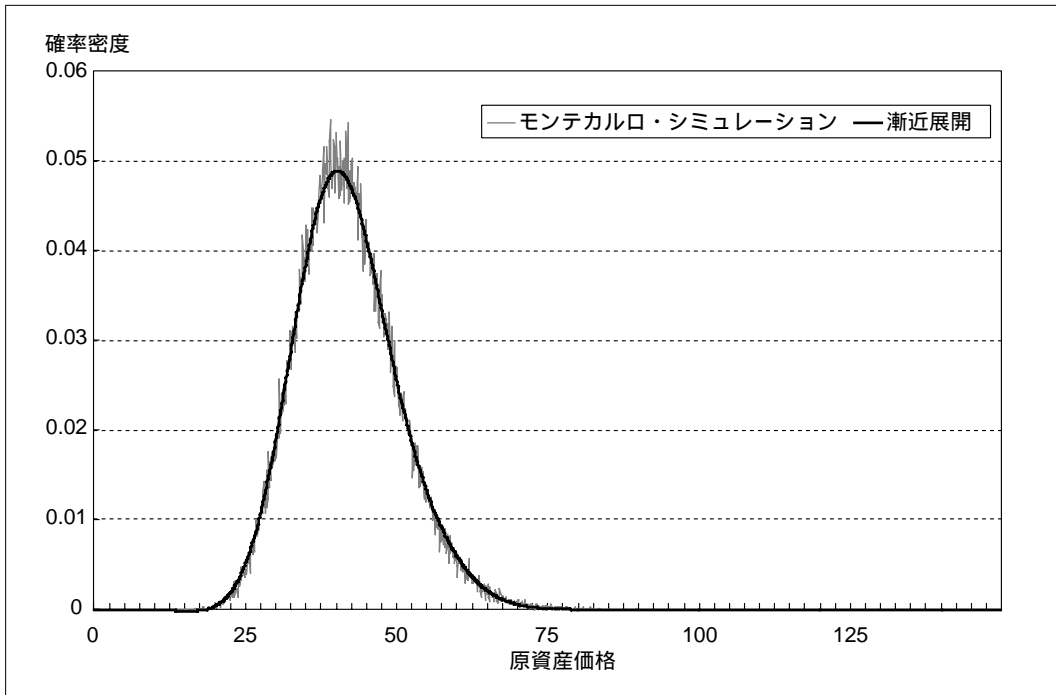


図4 密度関数 [A] (拡大図)

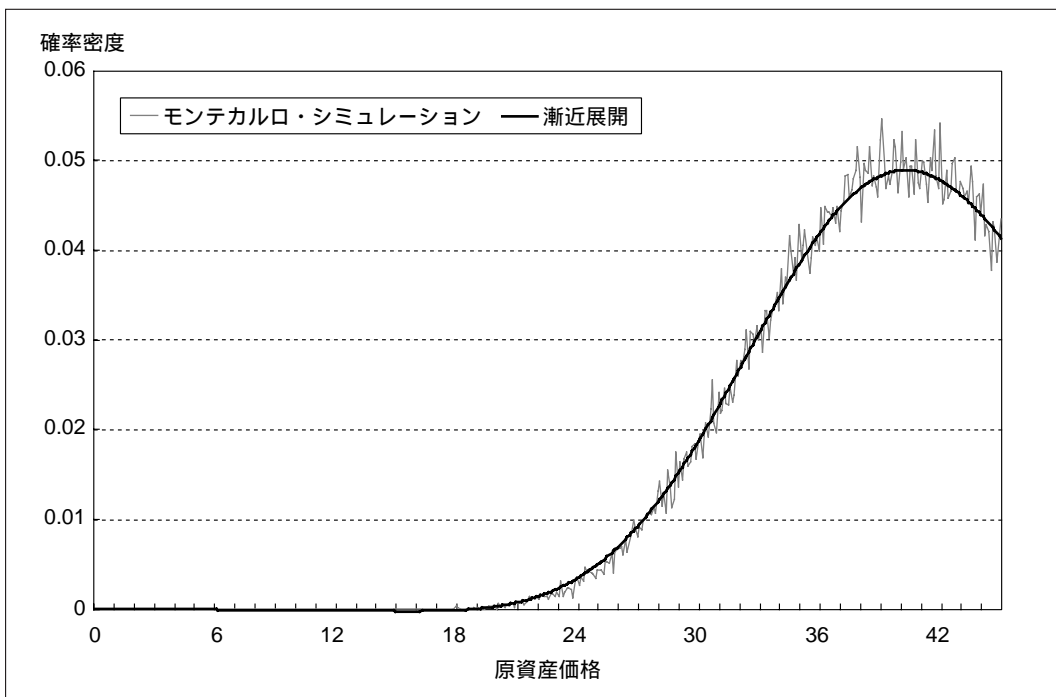


図5 密度関数 [B]

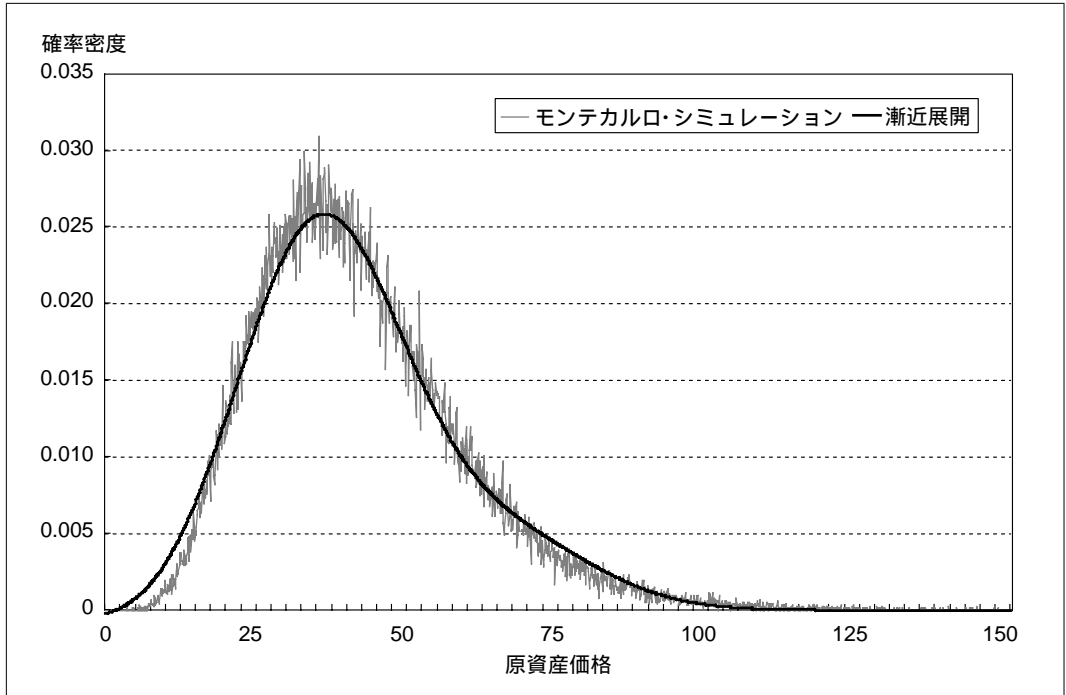
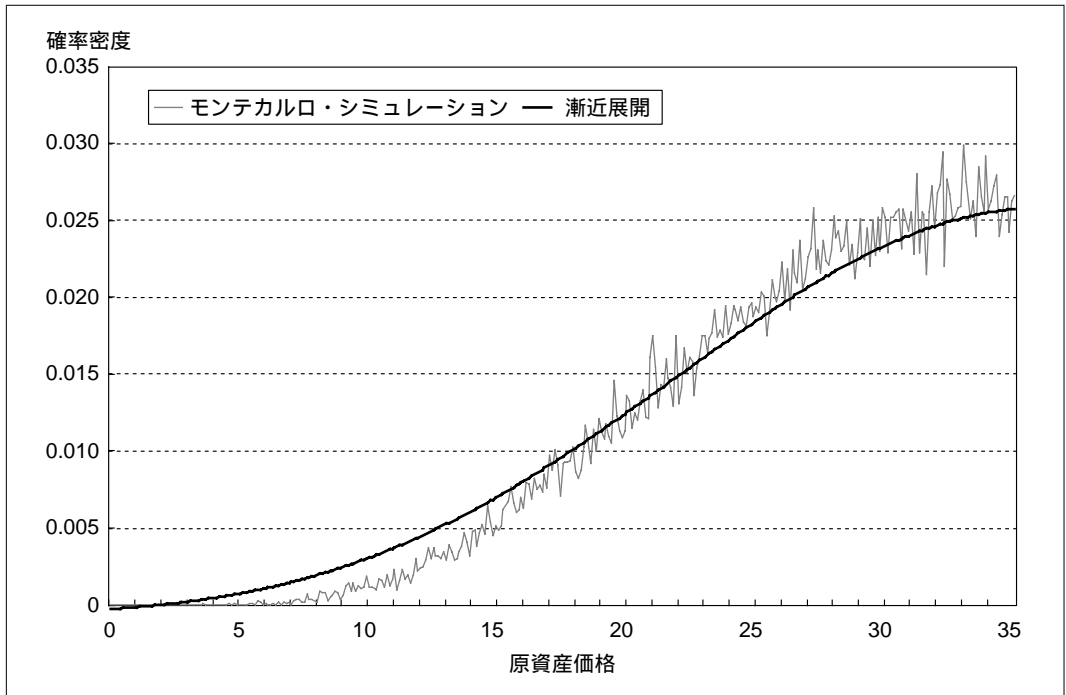


図6 密度関数 [B] (拡大図)



5 . おわりに

本稿では、原資産価格の従う拡散過程のボラティリティ関数が時間パラメータに依存しない場合について検討したが、時間パラメータに依存する場合についても同様の結果が得られる (Takahashi [2002])。また、数値例についてもファイナンスで教科書的によく知られたCEV過程を用いた。しかし、上場先物オプションの多くはアメリカン・オプションであり、市場のオプション価格をよく近似する原資産価格が従う確率過程を推定することは実際上重要であると思われる。

本稿で提示した方法は、その推定のための効率的計算方法として有用である。特に、リチャードソンの近似法をあわせて用いた漸近展開法は、擬似解析的手法で高速であるため、市場価格データを用いた確率過程の推定などに対しては、ラティス法などの他の手法に比べて簡易で効率的であると思われる。実際の適用に関しては今後の研究課題とする。また、本稿では価格の近似に焦点を当てたが、デルタ、ガンマ等のリスク指標の計算も実用上重要であり、漸近展開法による近似精度の検討も今後の課題としたい。さらに漸近展開法は広範囲の確率過程に適用可能な統一的な近似手法であるが、数値的により高い精度を要求する場合は、より高次の漸近展開の適用 (Takahashi [1999]) やモンテカルロ法との組合せ (Takahashi and Yoshida [2001b]) による対応が考えられ、その詳しい分析は今後の研究に委ねることとしたい。

補論1 . 定理1の証明

まず以下の事柄に注意する。

$0 \leq x \leq y$ の時、

$$\mathbf{P} [S_t^x \leq S_t^y, \forall 0 \leq t \leq T] = 1,$$

となることはKaratzas and Shreve [1996] のProposition 5.2.18で示されている。

$$\mathbf{E} [\sup_{0 \leq t \leq T} |S_t^x|^2] < \infty,$$

は $K_2 > 0$ が存在して、

$$(r - \delta)^2 x^2 + \sigma(x)^2 \leq K_2 (1 + x^2),$$

となることからわかる (例えば長井 [2000] の補題3.2.6)。

$e^{-(r-\delta)t} S_t^x, 0 \leq t \leq T$ はマルチンゲールになる。なぜなら伊藤の公式より、

$$e^{-(r-\delta)t} S_t^x = x + \int_0^t e^{-(r-\delta)u} \sigma(S_u^x) dW_u.$$

$r - \delta \geq 0$ の時、

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [\int_0^t e^{-2(r-\delta)u} \sigma^2(S_u^x) du] &\leq \mathbf{E} [\int_0^t \sigma^2(S_u^x) du] \\ &\leq \mathbf{E} [\int_0^t K_1 (1 + S_u^{x^2}) du] \\ &= K_1 t + K_1 \mathbf{E} [\int_0^t S_u^{x^2} du] \\ &= K_1 t + K_1 \int_0^t \mathbf{E} [S_u^{x^2}] du \\ &\leq K_1 t + K_1 \int_0^t \mathbf{E} [\sup_{0 \leq s \leq T} |S_s^x|^2] du \\ &= K t + t K_1 \mathbf{E} [\sup_{0 \leq s \leq T} |S_s^x|^2] \\ &< \infty, \end{aligned}$$

となり、 $r - \delta < 0$ の時も同様の結果が得られるからである。よって $e^{-(r-\delta)t} S_t^x, 0 \leq t \leq T$ はマルチンゲールになることがわかる。

$p(t, x) \geq (K - x)^+$ となることは、

$$\begin{aligned} p(t, x) &= \sup_{0 \leq \tau \leq t} \mathbf{E} [e^{-r\tau} (K - S_\tau^x)^+] \\ &\geq \mathbf{E} [(K - S_0^x)^+] \\ &= (K - x)^+, \end{aligned}$$

からわかる。

$p(t, x) > 0$ となることは次のようにしてわかる。 $0 < x < K$ の時、

$$p(t, x) \geq (K - x)^+ > 0,$$

$K \leq x$ の時は、

$$\tau_1 := t \inf \{ u > 0; S_u^x \leq \frac{K}{2} \},$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} p(t, x) &\geq \mathbf{E}[e^{-r\tau_1}(K - S_{\tau_1}^x)^+] \\ &\geq \mathbf{E}[e^{-r\tau_1} \frac{K}{2} 1_{\{\tau_1 < t\}}] \\ &= \frac{K}{2} \mathbf{E}[e^{-r\tau_1} 1_{\{\tau_1 < t\}}] \\ &> 0. \end{aligned}$$

よって $p(t, x) > 0$ 。

定理1の証明

$$p : (0, T] \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad (33)$$

は連続であることを示す。

まず t に関する右連続性を示す。 (t_0, x_0) を $[0, \infty)^2$ の任意の点とし、また、 $t_0 \leq t$ となる任意の t をとる。

$$\begin{aligned} \tau^* &:= \inf \{ u \in [0, t]; p(t - u, x_0) = (K - S^{x_0}(u))^+ \} \quad t, \\ \tau_0 &:= \tau^* \quad t_0, \end{aligned}$$

と定義する。

この時、

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} \mathbf{E}[e^{-r\tau}(K - S_{\tau}^{x_0})^+] = \mathbf{E}[e^{-r\tau^*}(K - S_{\tau^*}^{x_0})^+],$$

となることに注意する。

$$\begin{aligned}
 |p(t, x_0) - p(t_0, x_0)| &= p(t, x_0) - p(t_0, x_0) \\
 &= \mathbf{E} [e^{-r\tau^*}(K - S^{x_0}(\tau^*))^+] - p(t_0, x_0) \\
 &\leq \mathbf{E} [e^{-r\tau^*}(K - S^{x_0}(\tau^*))^+] - \mathbf{E} [e^{-r\tau_0}(K - S^{x_0}(\tau_0))^+] \\
 &= \mathbf{E} [e^{-r\tau^*}(K - S^{x_0}(\tau^*))^+ - e^{-r\tau_0}(K - S^{x_0}(\tau_0))^+] \\
 &\leq \mathbf{E} [\{e^{-r\tau^*}(K - S^{x_0}(\tau^*)) - e^{-r\tau_0}(K - S^{x_0}(\tau_0))\}^+] \\
 &\leq \mathbf{E} [(e^{-r\tau_0} S^{x_0}(\tau_0) - e^{-r\tau^*} S^{x_0}(\tau^*))^+] \\
 &= \mathbf{E} [(e^{-r t_0} S^{x_0}(t_0) - e^{-r\tau^*} S^{x_0}(\tau^*))^+ \mathbf{1}_{\{\tau_0 = t_0\}}] \\
 &= \mathbf{E} [(e^{-r t_0} S^{x_0}(t_0) - e^{-r\tau^*} S^{x_0}(\tau^*))^+ \mathbf{1}_{\{t_0 \leq \tau^*\}}] \\
 &\leq \mathbf{E} [\sup_{t_0 \leq u \leq t} (e^{-r t_0} S^{x_0}(t_0) - e^{-r u} S^{x_0}(u))^+ \mathbf{1}_{\{t_0 \leq \tau^*\}}] \\
 &\leq \mathbf{E} [\sup_{t_0 \leq u \leq t} (e^{-r t_0} S^{x_0}(t_0) - e^{-r u} S^{x_0}(u))^+].
 \end{aligned}$$

2番目の不等式では任意の実数 α 、 β に対して、

$$\alpha^+ - \beta^+ \leq (\alpha - \beta)^+,$$

が成り立つことを用いた。

ここで、

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \sup_{t_0 \leq u \leq t} (e^{-r t_0} S^{x_0}(t_0) - e^{-r u} S^{x_0}(u))^+ \\
 &\leq 2 \sup_{t_0 \leq u \leq t} |e^{-r u} S^{x_0}(u)| \\
 &\leq 2 \sup_{0 \leq u \leq T} |S^{x_0}(u)|.
 \end{aligned}$$

$\mathbf{E} [\sup_{0 \leq u \leq T} |S^{x_0}(u)|] < \infty$ なので収束定理が使え、 $t \rightarrow t_0$ とした時、右辺は0に収束する。

t に関する左連続性は上と同様の方法に示すことができる。

p が x についてリプシッツ連続であることを示す。 $0 < x \leq y$ となる任意の x 、 y と $0 < t < \infty$ に対して、

$$\tau_x := \inf \{u \in [0, t]; p(t - u, x) = (K - S(u))^+\} \quad t,$$

と定義する。

この時、 $x \leq y$ ならば、

$$p(t, x) \geq p(t, y),$$

となることが以下のようにしてわかる。

$$p(t, x) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \mathbf{E} [e^{-r\tau} (K - S_\tau^x)^+],$$

$$p(t, y) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \mathbf{E} [e^{-r\tau} (K - S_\tau^y)^+].$$

$0 \leq \tau \leq t$ となる任意の停止時刻 τ に対して、

$$\begin{aligned} S_\tau^x &\leq S_\tau^y, \\ e^{-r\tau} (K - S_\tau^x)^+ &\geq e^{-r\tau} (K - S_\tau^y)^+, \end{aligned}$$

なので、

$$p(t, x) \geq p(t, y),$$

となる。

$$\begin{aligned} |p(t, x) - p(t, y)| &= p(t, x) - p(t, y) \\ &= \mathbf{E} [e^{-r\tau_x} (K - S^x(\tau_x))^+] - p(t, y) \\ &\leq \mathbf{E} [e^{-r\tau_x} (K - S^x(\tau_x))^+] - \mathbf{E} [e^{-r\tau_x} (K - S^y(\tau_x))^+] \\ &= \mathbf{E} [e^{-r\tau_x} \{(K - S^x(\tau_x))^+ - (K - S^y(\tau_x))^+\}] \\ &\leq \mathbf{E} [e^{-r\tau_x} (S^y(\tau_x) - S^x(\tau_x))] \\ &= \mathbf{E} [e^{-\delta\tau_x} e^{-(r-\delta)\tau_x} (S^y(\tau_x) - S^x(\tau_x))] \\ &\leq \mathbf{E} [e^{-(r-\delta)\tau_x} (S^y(\tau_x) - S^x(\tau_x))] \\ &= y - x \\ &= |x - y|. \end{aligned}$$

ここでは $0 \leq u \leq t$ となる任意の u に対して $S^x(u) \leq S^y(u)$ 、 $e^{-(r-\delta)t} S(t)$ がマルチンゲールになることを使った。 $x > y$ の時も同様に示せるので p が x についてリブシッツ連続であることがいえる。

以上から p は連続であることは、

$$\begin{aligned} |p(t, x) - p(t_0, x_0)| &\leq |p(t, x) - p(t, x_0)| + |p(t, x_0) - p(t_0, x_0)| \\ &\leq |x - x_0| + |p(t, x_0) - p(t_0, x_0)| \\ &\rightarrow 0 \quad ((t, x) \rightarrow (t_0, x_0) \text{とする時}), \end{aligned}$$

として示される。

次に、

$$t \mapsto p(t, x) \text{ は非減少関数,} \quad (34)$$

$$x \mapsto p(t, x) \text{ は非増加関数,} \quad (35)$$

$$x \mapsto x + p(t, x) \text{ は非減少関数,} \quad (36)$$

であることを示す。

1つ目は $p(t, x)$ の定義より明らか。2つ目はリブシッツ連続を示す途中ですでに示したので、3番目を示す。

$0 < x \leq y$ 、 $0 < t < \infty$ となる任意の x 、 y 、 t に対し、

$$\begin{aligned} p(t, x) - p(t, y) &\leq \mathbf{E} [e^{-r\tau_x}(K - S^x(\tau_x))^+] - \mathbf{E} [e^{-r\tau_x}(K - S^y(\tau_x))^+] \\ &\leq \mathbf{E} [e^{-r\tau_x}(S^y(\tau_x) - S^x(\tau_x))] \\ &= \mathbf{E} [e^{-\delta\tau_x} e^{-(r-\delta)\tau_x}(S^y(\tau_x) - S^x(\tau_x))] \\ &\leq \mathbf{E} [e^{-(r-\delta)\tau_x}(S^y(\tau_x) - S^x(\tau_x))] \\ &= y - x. \end{aligned}$$

よって、

$$p(t, x) + x \leq p(t, y) + y,$$

となり、3番目を示すことができる。

定理の証明に戻る。 $x \in C_t$ とする。この時 $x < y$ となる任意の y に対し、

$$\begin{aligned} p(t, y) &\geq p(t, x) + x - y \\ &> (K - x)^+ + x - y \\ &\geq (K - x) + x - y \\ &= K - y. \end{aligned}$$

$p(t, y) > 0$ より、

$$p(t, y) > (K - y)^+.$$

よって、

$$y \in C_t.$$

また $p(t, x)$ は連続なので、

$$C_t = \{x \in (0, \infty); p(t, x) > (K - x)^+\},$$

は開集合。よってある非負の数 $c(t)$ が存在して、

$$C_t = (c(t), \infty),$$

と書けることがわかる。

補論2 . 定理2の証明

最初に定理2の証明で用いられるRutkowski [1994] による連続セミマルチンゲールのスネル包絡線に対する分解定理を紹介する。なお、この定理の証明の詳細は、原論文および補論5. を参照されたい。

定理A1

$$X_t = X_0 + M_t + V_t ; \quad 0 \leq t \leq T, \quad (37)$$

は、連続セミマルチンゲール (ただし、 X_0 は定数)、 M_t は $M_0 = 0$ の連続局所マルチンゲール、 V_t は $V_0 = 0$ の連続適合有限変動過程とし、

$$\mathbf{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t| \right] < \infty,$$

とする。

V_t の減少部分、 V_t^d に対し、ある非負適合過程 v_t が存在し、

$$dV_t^d = v_t dt,$$

と書けるとする。

さらに、任意の時刻 $t \in \{0, T\}$ に対し、

$$\mathbf{E} [X_{\tau_t^*}] = \text{ess sup}_{t \leq \tau \leq T} \mathbf{E} [X_\tau | \mathcal{F}_t], \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

を満たす停止時刻 τ_t^* が存在すると仮定する。このとき、

$$\mathbf{E} [X_{\tau_0^*}] = \mathbf{E} [X_T] - \mathbf{E} \left[\int_{\tau_0^*}^T 1_{\{\tau_u^* = u\}} dV_u \right], \quad (38)$$

が成立する。

定理2の証明

まず $B_t < K$ となることに注意しておく。

なぜなら、

$$C_{T-t} = (c(T-t), \infty),$$

であったが、 $p(T-t, K) > 0$ 、 $(K-K)^+ = 0$ より、

$$p(T-t, K) > (K-K)^+.$$

よって、

$$K \in C_{T-t},$$

であるから、

$$B_t = c(T-t) < K,$$

となる。

$e^{-rT}(K - S_T)^+$ に対し、凸関数に対する一般化された伊藤の公式を用いて、

$$\begin{aligned} e^{-rT}(K - S_T)^+ &= (K - S_0)^+ + \int_0^T (-rKe^{-ru} 1_{\{S_u \leq K\}} + \delta S_u e^{-ru} 1_{\{S_u \leq K\}}) du \\ &\quad - \int_0^T e^{-ru} 1_{\{S_u \leq K\}} \sigma(S_u) dW_u + \int_0^T e^{-ru} dL_u^K(S). \end{aligned}$$

ここで、 $L_u^K(S)$ は、 S_t の K における局所時間とする。

X_t, M_t, V_t を次のように定義する。

$$X_t := e^{-rt}(K - S_t)^+,$$

$$M_t := -\int_0^t e^{-ru} 1_{\{S_u \leq K\}} \sigma(S_u) dW_u,$$

$$V_t := \int_0^t (-rKe^{-ru} 1_{\{S_u \leq K\}} + \delta S_u e^{-ru} 1_{\{S_u \leq K\}}) du + \int_0^t e^{-ru} dL_u^K(S).$$

この時 σ に関する一次増大条件と $\mathbf{E}[\sup_{0 \leq t \leq T} |S_t^*|^2] < \infty$ からバークホルダの不等式 (例えば、Karatzas and Shreve [1996] の Theorem 3.3.28 を参照) 等を用いて、

$$\mathbf{E}[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|] < \infty,$$

が成り立つことがわかる。

$rKe^{-rt} 1_{\{S_t \leq K\}}$ は、非負適合過程。

$$\tau_t^* := \inf \{u \in [t, T]; S_u \leq B_u\} \quad T,$$

と定義すると、

$$\mathbf{E}[e^{-r\tau_t^*}(K - S_{\tau_t^*})^+ | \mathcal{F}_t] = \text{ess sup}_{t \leq \tau \leq T} \mathbf{E}[e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+ | \mathcal{F}_t] \quad \text{for all } t \in [0, T],$$

となる。この時定理 A1 より、

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbf{E}[e^{-r\tau}(K-S_\tau)^+] &= \mathbf{E}[e^{-r\tau_0^*}(K-S_{\tau_0^*})^+] \\
&= \mathbf{E}[e^{-rT}(K-S_T)^+] - \mathbf{E}\left[\int_{\tau_0^*}^T 1_{\{\tau_u^*=u\}} dV_u\right] \\
&= \mathbf{E}[e^{-rT}(K-S_T)^+] - \mathbf{E}\left[\int_{\tau_0^*}^T 1_{\{S_u \leq B_u\}} dV_u\right] \\
&= \mathbf{E}[e^{-rT}(K-S_T)^+] - \mathbf{E}\left[\int_0^T 1_{\{S_u \leq B_u\}} dV_u\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\int_0^T 1_{\{S_u \leq B_u\}} dV_u\right] &= \mathbf{E}\left[\int_0^T (-rKe^{-ru} 1_{\{S_u \leq K\}} 1_{\{S_u \leq B_u\}} \right. \\
&\quad \left. + \delta S_u e^{-ru} 1_{\{S_u \leq K\}} 1_{\{S_u \leq B_u\}}) du \right. \\
&\quad \left. + \int_0^T e^{-ru} 1_{\{S_u \leq B_u\}} dL_u^K(S)\right].
\end{aligned}$$

$S_t \leq B_t$ なる t においては、 $B_t < K$ より、 $L_t^K(S)$ の増分は0であること、

また、 $1_{\{S_u \leq B_u\}} 1_{\{S_u \leq K\}} = 1_{\{S_u \leq B_u\}}$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbf{E}[e^{-r\tau}(K-S_\tau)^+] &= \mathbf{E}[e^{-rT}(K-S_T)^+] + \mathbf{E}\left[rK \int_0^T e^{-ru} 1_{\{S_u \leq B_u\}} du\right] \\
&\quad - \mathbf{E}\left[\delta \int_0^T e^{-ru} S_u 1_{\{S_u \leq B_u\}} du\right],
\end{aligned}$$

を得る。

補論3．漸近展開の計算

漸近展開による $X_t^{(\epsilon)}$ の密度関数の近似式が与えられると、 $\mathbf{P}(X_t^{(\epsilon)} < k)$ 、 $\mathbf{E}[X_t^{(\epsilon)} 1_{\{X_t^{(\epsilon)} < k\}}]$ は次のように計算できる。

定理A2 確率変数 X の密度関数が

$$g_{X_t^{(\epsilon)}}(x) = n[x; 0, \Sigma_t] + \epsilon \left[-\frac{d}{dx} \{h(x)n[x; 0, \Sigma_t]\} \right],$$

であるとする。ただし、 $\epsilon \in (0, 1]$ 、 Σ_t 、 c_t は正の定数とし、

$$h(x) := c_t x^2 + f_t,$$

$$f_t := -c_t \Sigma_t,$$

$$n[x; 0, \Sigma_t] := \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\Sigma_t}\right),$$

と定義する。この時、

$$\mathbf{P}(X_t^{(\epsilon)} < k) = N\left(\frac{k}{\sqrt{\Sigma_t}}\right) - \epsilon(c_t k^2 + f_t) n[k; 0, \Sigma_t],$$

$$\mathbf{E}[X_t^{(\epsilon)} 1_{\{X_t^{(\epsilon)} < k\}}] = -\Sigma_t n[k; 0, \Sigma_t] - \epsilon c_t k^3 n[k; 0, \Sigma_t].$$

ただし、

$$N(y) := \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx.$$

証明

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_t^{(\epsilon)} < k) &= \int_{-\infty}^k g_{X_t^{(\epsilon)}}(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^k [n[x; 0, \Sigma_t] + \epsilon \left[-\frac{d}{dx} \{h(x)n[x; 0, \Sigma_t]\} \right]] dx. \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^k n[x; 0, \Sigma_t] dx &= N\left(\frac{k}{\sqrt{\Sigma_t}}\right). \\ \int_{-\infty}^k \epsilon \left[-\frac{d}{dx} \{h(x)n[x; 0, \Sigma_t]\} \right] dx &= -\epsilon [h(x)n[x; 0, \Sigma_t]] \Big|_{x=-\infty}^k \\ &= -\epsilon [h(k)n[k; 0, \Sigma_t]] \\ &= -\epsilon (c_t k^2 + f_t) n[k; 0, \Sigma_t]. \end{aligned}$$

よって、

$$\mathbf{P}(X_t^{(\epsilon)} < k) = N\left(\frac{k}{\sqrt{\Sigma_t}}\right) - \epsilon (c_t k^2 + f_t) n[k; 0, \Sigma_t],$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X 1_{\{X_t^{(\epsilon)} < k\}}] &= \int_{-\infty}^k x g_{X_t^{(\epsilon)}}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^k x \left\{ n[x; 0, \Sigma_t] + \epsilon \left[-\frac{d}{dx} \{ h(x) n[x; 0, \Sigma_t] \} \right] \right\} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^k x n[x; 0, \Sigma_t] dx &= \int_{-\infty}^k x \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\Sigma_t}\right) dx \\ &= -\Sigma_t n[x; 0, \Sigma_t] \Big|_{x=-\infty}^k \\ &= -\Sigma_t n[k; 0, \Sigma_t], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^k x \frac{d}{dx} (h(x) n[x; 0, \Sigma_t]) dx &= x h(x) n[x; 0, \Sigma_t] \Big|_{-\infty}^k - \int_{-\infty}^k h(x) n[x; 0, \Sigma_t] dx \\ &= k h(k) n[k; 0, \Sigma_t] - \int_{-\infty}^k h(x) n[x; 0, \Sigma_t] dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^k h(x) n[x; 0, \Sigma_t] dx &= \int_{-\infty}^k (c_t x^2 + f_t) n[x; 0, \Sigma_t] dx \\ &= c_t \int_{-\infty}^k x^2 n[x; 0, \Sigma_t] dx + f_t N\left(\frac{k}{\sqrt{\Sigma_t}}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^k x^2 n[x; 0, \Sigma_t] dx &= \int_{-\infty}^k x \frac{d}{dx} (-\Sigma_t n[x; 0, \Sigma_t]) dx \\ &= -\Sigma_t (x n[x; 0, \Sigma_t]) \Big|_{-\infty}^k - \int_{-\infty}^k n[x; 0, \Sigma_t] dx \\ &= -\Sigma_t (k n[k; 0, \Sigma_t] - N\left(\frac{k}{\sqrt{\Sigma_t}}\right)). \end{aligned}$$

以上の計算から、

$$\mathbf{E}[X_t^{(\epsilon)} 1_{\{X_t^{(\epsilon)} < k\}}] = -\Sigma_t n[k; 0, \Sigma_t] - \epsilon c_t k^3 n[k; 0, \Sigma_t].$$

補論4 . CEV過程

ここではCEV過程における非負の強解の存在と一意性、またアメリカン・オプション価格の分解式（定理2）が適用できることを説明する。

次の確率微分方程式、

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma (S_t - 0)^\gamma dW_t, S_0 = x,$$

を考える。ただし γ は、

$$1/2 \leq \gamma < 1,$$

となる定数とする。

まず次の事実に注意する。

定理B1 γ は $1/2 \leq \gamma \leq 1$ を満たす数とする。

任意の非負の数 x, y に対してある正の数 K が存在し、

$$|x^\gamma - y^\gamma| \leq K |x - y|^\gamma,$$

が成り立つ。

証明

$x > y \geq 0$ の場合に示す。

$$\frac{x^\gamma - y^\gamma}{(x - y)^\gamma} = \frac{1 - u^\gamma}{(1 - u)^\gamma}.$$

ここで、

$$u := y/x,$$

とした。

この時、

$$0 \leq u < 1,$$

であるが、

$$\frac{1 - u^\gamma}{(1 - u)^\gamma} \Big|_{u=0} = 1,$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{1-u^\gamma}{(1-u)^\gamma} = 0,$$

であり、 $1-u^\gamma/(1-u)^\gamma$ は $0 \leq u < 1$ で連続だから、ある正の数 K が存在して、

$$\frac{1-u^\gamma}{(1-u)^\gamma} < K, \quad 0 \leq u < 1,$$

となることがわかる。

よって、

$$|x^\gamma - y^\gamma| \leq K |x - y|^\gamma,$$

となる。

$x = y$ の時は明らかで、 $x < y$ の場合も上と同様に示すことができる。

上の確率微分方程式において強解 $S_t^x, 0 \leq t < \infty$ が一意に存在し、初期値 x が $x \geq 0$ の時は、

$$S_t^x \geq 0, 0 \leq t < \infty, (\mathbf{P} - a.s.),$$

となることが次のようにしてわかる。

存在は渡辺 [1974] の定理3.1からわかる。

一意性は定理B1と、Karatzas and Shreve [1996] の Proposition 5.2.13からわかる。

$x = 0$ の時は、

$$S_t^0 = 0, 0 \leq t \leq \infty,$$

となる。

比較定理 (Karatzas and Shreve [1996] の Proposition 5.2.18) から $x > 0$ に対して、

$$\mathbf{P} [S_t^0 \leq S_t^x, 0 \leq t < \infty] = 1,$$

が成り立つ。

よって初期値 $x > 0$ に対しては、

$$\mathbf{P} [S_t^x \geq 0, 0 \leq t < \infty] = 1,$$

となる。

定理B2 $x > 0$ の時、 $a > 0$ 、 $0 < l < \infty$ となる任意の a 、 l に対して、

$$\mathbf{P} \left(\inf_{0 \leq u \leq l} S_u^x < a \right) > 0,$$

となる。

証明

$\alpha > 0$ の場合を考える。

$$S_t = x + \int_0^t \alpha S_u du + \int_0^t \sigma S_u^\gamma dW_u,$$

であるが、伊藤の公式より、

$$e^{-\alpha t} S_t = x + \int_0^t \sigma e^{-\alpha u} S_u^\gamma dW_u.$$

$$M_t := \int_0^t \sigma e^{-\alpha u} S_u^\gamma dW_u,$$

とする。

$$\mathbf{P} \left(\inf_{0 \leq u \leq l} S_u^x \geq \alpha \right) = 1,$$

として矛盾を示す。

$0 \leq t \leq l$ に対して、

$$\begin{aligned} M_t &= \int_0^t \sigma^2 e^{-2\alpha u} S_u^{2\gamma} du \\ &\geq \int_0^t \sigma^2 e^{-2\alpha u} \alpha^{2\gamma} du \quad (\mathbf{P} - a.s.). \end{aligned}$$

$0 \leq s < \int_0^l \sigma^2 e^{-2\alpha u} \alpha^{2\gamma} du$ となる任意の s に対して停止時刻 $T(s)$ を、

$$T(s) := \inf \{ t \geq 0; M_t > s \},$$

と定義する。

ここで、

$$0 \leq T(s) \leq l,$$

となることに注意する。

$0 \leq s < \int_0^l \sigma^2 e^{-2\alpha u} \alpha^{2\gamma} du$ となる s に対して、

$$B_s := M_{T(s)}, \mathcal{G}_s := \mathcal{F}_{T(s)},$$

と定義すると、時間変更された確率過程 B_s はブラウン運動となる。

このことから $M_{T(s)}$ は平均0、分散 s の正規分布に従うことがわかる。
よって任意の実数 c に対して、

$$\mathbf{P} \left(\inf_{0 \leq u \leq l} M_u < c \right) > 0 .$$

ここで、

$$S_t = e^{\alpha t}(x + M_t) ,$$

であったから、

$$\mathbf{P} \left(\inf_{0 \leq u \leq l} S_u^x < a \right) > 0 ,$$

となつて、これは、

$$\mathbf{P} \left(\inf_{0 \leq u \leq l} S_u^x \geq a \right) > 1 ,$$

に反する。

$\alpha > 0$ の場合に定理を示すことができたので、比較定理 (Karatzas and Shreve [1996] の Proposition 5.2.18) を用いることで $\alpha \leq 0$ の場合にも、

$$\mathbf{P} \left(\inf_{0 \leq u \leq l} S_u^x < a \right) > 0 ,$$

となることがわかる。

補論5．定理A1の証明

ここではRutkowski [1994] で述べられている連続セミマルチンゲールのスネル包絡線の分解定理の証明を紹介する。

定理A1の証明

Z を X のスネル包絡線とする。すなわち、 Z を X を上から押さえる最小の優マルチンゲールとする。この時、Jacka [1993] より次のことが成り立つ。

Z は連続。

任意の停止時刻 η に対して、

$$\begin{aligned} Z_\eta &= \text{ess sup}_{\eta \leq \tau \leq T} \mathbf{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\eta], \\ \tau_i^* &= \inf \{u \in [t, T] | Z_u = X_u\}. \end{aligned}$$

Z_t のドゥーブ・メイヤー分解を、

$$Z_t = Z_0 + N_t + B_t,$$

とする。

ここで、 N_t は連続マルチンゲール、 B_t は連続減少過程。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_{\tau_0^*}] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_{\tau_0^*} | \mathcal{F}_0]] \\ &= \mathbf{E}[\text{ess sup}_{0 \leq \tau \leq T} \mathbf{E}[X_\tau | \mathcal{F}_0]] \\ &= \mathbf{E}[Z_0] \\ &= \mathbf{E}[Z_T - N_T - B_T] \\ &= \mathbf{E}[Z_T] - \mathbf{E}[B_T] \\ &= \mathbf{E}[\text{ess sup}_{T \leq \tau \leq T} \mathbf{E}[X_\tau | \mathcal{F}_T]] - \mathbf{E}[B_T] \\ &= \mathbf{E}[X_T] - \mathbf{E}[B_T] \\ &= \mathbf{E}[X_T] - \mathbf{E}[\int_0^T 1_{\{\tau_u^* = u\}} dB_u] - \mathbf{E}[\int_0^T 1_{\{\tau_u^* > u\}} dB_u]. \end{aligned}$$

ここで、

$$\int_0^T 1_{\{\tau_u^* > u\}} dB_u = 0 \quad (\text{P} - a.s.),$$

となることを示す。

$$\mathcal{D} := \{\tau_t^* > t\} = \{Z_t \neq X_t\},$$

と定義すると、 Z_t 、 X_t は連続なので \mathcal{D} は開集合。

\mathcal{D} の中にある区間で、長さが $1/n$ 以上のものに対し、その左端を L_k^n 、右端を R_k^n と定義する($k = 1, 2, \dots, N_n$)。

また $S_k^n := L_k^n + 1/n$ とする。この時、 $\tau_{S_k^n}^* = R_k^n$ となることに注意すると、

$$\begin{aligned} Z_{S_k^n} &= \text{ess sup}_{S_k^n \leq \tau \leq T} \mathbf{E}[X_\tau | \mathcal{F}_{S_k^n}^n] \\ &= \mathbf{E}(X_{\tau_{S_k^n}^*} | \mathcal{F}_{S_k^n}^n) \\ &= \mathbf{E}(X_{R_k^n} | \mathcal{F}_{S_k^n}^n) \\ &= \mathbf{E}(Z_{R_k^n} | \mathcal{F}_{S_k^n}^n). \end{aligned}$$

また、

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{N_n} [S_k^n, R_k^n].$$

この時、 $\mathcal{D}_n := \bigcup_{k=1}^{N_n} [S_k^n, R_k^n]$ とすると、

$$\begin{aligned} \int_0^T 1_{\{\tau_u^* > u\}} dB_u &= \int_0^T 1_{\mathcal{D}}(u) dB_u \\ &= \int_0^T 1_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n}(u) dB_u \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T 1_{\mathcal{D}_n}(u) dB_u \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} (B_{R_k^n} - B_{S_k^n}). \end{aligned}$$

$Z_{S_k^n} = \mathbf{E}(Z_{R_k^n} | \mathcal{F}_{S_k^n}^n)$ であったから、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(B_{R_k^n} - B_{S_k^n} | \mathcal{F}_{S_k^n}^n) &= \mathbf{E}(Z_{R_k^n} - Z_{S_k^n} | \mathcal{F}_{S_k^n}^n) - \mathbf{E}(N_{R_k^n} - N_{S_k^n} | \mathcal{F}_{S_k^n}^n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

B_t は減少過程で $B_{R_k^n} - B_{S_k^n} \leq 0$ なので、 $B_{R_k^n} - B_{S_k^n} = 0$ がわかる。

よって、

$$\int_0^T 1_{\{\tau_u^* > u\}} dB_u = 0,$$

となる。

$$U_t := Z_t - X_t,$$

と定義する。

この時、

$$U_t \geq 0,$$

である。

U_t の0における局所時間を $L_t^0(U)$ 、左局所時間を $\tilde{L}_t^0(U)$ とすると、

$$L_t^0(U) - \tilde{L}_t^0(U) = 2 \int_0^t 1_{\{0\}}(U_u) d(B_u - V_u).$$

(Protter [1992] 参照)

また、 U_t は非負より $\tilde{L}_t^0(U) = 0$ となることと、 $\{\tau_u^* = u\} = \{U_u = 0\}$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \int_0^T 1_{\{\tau_u^* = u\}} dB_u &= \int_0^T 1_{\{0\}}(U_u) dB_u \\ &= \frac{1}{2} L_t^0(U) + \int_0^T 1_{\{0\}}(U_u) dV_u \\ &= \frac{1}{2} L_t^0(U) + \int_0^T 1_{\{\tau_u^* = u\}} dV_u. \end{aligned}$$

次の補題を示す。

補題1 非負連続セミマルチンゲール $Y_t = Y_0 + M_t + C_t$ に対して、ある非負適合過程 ξ_t が存在し、 C_t の増大部分 C_t^i が $dC_t^i = \xi_t dt$ と書けるとする。この時、 Y_t の0における局所時間を $L_t^0(Y)$ とすると、 $L_t^0(Y) = 0$ となる。

$\tilde{L}_t^0(Y) = 0$ であり、 $Y_t \geq 0$ なので、

$$\begin{aligned} L_t^0(Y) &= 2 \int_0^t 1_{\{0\}}(Y_u) dC_u \\ &= 2 \int_0^t 1_{\{0\}}(Y_u) dC_u^i \\ &= 2 \int_0^t 1_{\{0\}}(Y_u) \xi_u du, \quad \forall 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

dM_u のルベーク分解を

$$dM_u = m_u du + dM_u^s,$$

とする。ここで、 m_u は非負適合過程。

$\mathcal{W} := \{u \in [0, T] | m_u > 0\}$ とし、 \mathcal{W}^c を $[0, T]$ での \mathcal{W} の補集合とする。

この時、

$$\begin{aligned}
L_T^0(Y) &= 2 \int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u) \xi_u 1w(u) du + 2 \int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u) \xi_u 1w^c(u) du \\
&= 2 \int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u) \xi_u 1w(u) m_u^{-1} (d\langle M \rangle_u - d\langle M \rangle_u^s) \\
&\quad + 2 \int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u) \xi_u 1w^c(u) du \\
&= J_1 - J_2 + J_3,
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
J_1 &:= 2 \int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u) \xi_u 1w(u) m_u^{-1} d\langle M \rangle_u, \\
J_2 &:= 2 \int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u) \xi_u 1w(u) m_u^{-1} d\langle M \rangle_u^s, \\
J_3 &:= 2 \int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u) \xi_u 1w^c(u) du,
\end{aligned}$$

と置いた。

$$\langle M \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} L_t^z(Y) dz,$$

であるから、フビニの定理を用いて、

$$J_1 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T 1_{\{0\}}(z) \xi_u 1w(u) m_u^{-1} dL_u^z(Y) dz = 0,$$

を得る。

$$\begin{aligned}
0 \leq J_2 &= 2 \int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u) \xi_u 1w(u) m_u^{-1} d\langle M \rangle_u^s \\
&\leq 2 \int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u) \xi_u 1w(u) m_u^{-1} d(\langle M \rangle_u^s + m_u du) \\
&= J_1.
\end{aligned}$$

$J_1=0$ より $J_2=0$ を得る。

$$\mathcal{M} := \{u \in [0, T] \mid m_u = Y_u = 0\},$$

とし、 λ をルベグ測度とする。 $\lambda(\mathcal{M})=0$ ならば J_3 の定義から $J_3=0$ となる。

正の確率で $\lambda(\mathcal{M})>0$ となる場合は次のような時間変更を行う。

$$g(t) := \int_0^t 1_{\mathcal{M}}(u) du, \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

とし、 $g(t)$ の逆関数として右連続なものを $g^{-1}(t)$ とする。

$\tau_t = g^{-1}(t)$ とし、 $\tilde{Y}_t := Y_{\tau_t}$ 、 $\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_{\tau_t}$ と置くと \tilde{Y}_t は $\tilde{\mathcal{F}}_t$ 連続セミマルチンゲールとな

り、また $\lambda \{u \in [0, T] | \tilde{Y}_u = 0\} = 0$ となるので \tilde{Y}_t の 0 における局所時間は 0 になる。

また $L_T^0(Y) = L_{g(T)}^0(Y)$ となるから (EL Karoui [1978] 参照) $L_T^0(Y) = 0$ が成り立つ。

定理の証明に戻る。

U_t の有界変動項の増大部分は V^d で、 $dV_t^d = v_t dt$ なので、補題 1 より $L_t^0(U) = 0$ となる。

よって、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_{\tau_0^*}] &= \mathbf{E}[X_T] - \mathbf{E}\left[\int_0^T 1_{\{\tau_u^* = u\}} dB_u\right] - \mathbf{E}\left[\int_0^T 1_{\{\tau_u^* > u\}} dB_u\right] \\ &= \mathbf{E}[X_T] - \mathbf{E}\left[\int_0^T 1_{\{\tau_u^* = u\}} dB_u\right] \\ &= \mathbf{E}[X_T] + \frac{1}{2} L_T^0(U) + \int_0^T 1_{\{\tau_u^* = u\}} dV_u \\ &= \mathbf{E}[X_T] + \int_0^T 1_{\{\tau_u^* = u\}} dV_u, \end{aligned}$$

となる。

参考文献

- 国友直人・高橋明彦、「平均オプション価格の評価法」、『ファイナンス研究』第14巻、日本証券経済研究所、1992年、1～11頁
- ・、『数理ファイナンスの基礎 - マリアバン解析と漸近展開の応用』、東洋経済新報社、2003年
- 長井英生、『確率微分方程式』、共立出版、2000年
- 渡辺信三、『確率微分方程式』、産業図書、1974年
- Carr, P., R. Jarrow, and R. Myneni, “Alternative characterizations of American put options,” *Mathematical Finance*, 2 (2), 1992, pp. 87-106.
- EL Karoui, N., “Sur les Montées des Semi-martingales,” *Astérisque*, 1978, pp. 52-53.
- Geske, R., and H. Johnson, “The American Put Valued Analytically,” *The Journal of Finance*, 39 (5), 1984, pp. 1511-1524.
- Huang, J., M. G. Subrahmanyam, and G. G. Yu, “Pricing and Hedging American Options: A Recursive Integration Method and its Implementation,” *The Review of Financial Studies*, 9 (1), 1996, pp. 277-300.
- Ikeda, N., and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, Second Edition, North-Holland/Kodansha, Tokyo, 1989.
- Jacka, S. D., “Local Times, Optimal Stopping and Semimartingales,” *The Annals of Probability*, 21 (1), 1993, pp. 329-339.
- Karatzas, I., and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Graduate Texts in Mathematics 113, Second Edition, Springer, 1996.
- ・, and ・, *Methods of Mathematical Finance*, Springer, 1998.
- Kobayashi, T., A. Takahashi, and N. Tokioka, “Dynamic Optimality of Yield Curve Strategies,” Discussion Paper Series, Faculty of Economics, University of Tokyo, CIRJE-F-141 (submitted), 2001.
- Kunitomo, N., and A. Takahashi, “The Asymptotic Expansion Approach to the Valuation of Interest Rate Contingent Claims,” *The Annals of Applied Probability*, 13 (3), 2003, pp. 914-952.
- Nelson, D. B., and K. Ramaswamy, “Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models,” *The Review of Financial Studies*, 3 (4), 1990, pp. 393-430.
- Protter, P., *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, 1992.
- Rutkowski, M., “The early exercise premium representation of foreign market American options,” *Mathematical Finance*, 4 (4), 1994, pp. 313-325.
- Takahashi, A., “Essays on the Valuation Problems of Contingent Claims,” Ph.D. Dissertation, University of California, Berkeley, 1995.
- ・, “An Asymptotic Expansion Approach to Pricing Financial Contingent Claims,” *Asia-Pacific Financial Markets*, 6 (2), 1999, pp. 115-151.
- ・, “An Asymptotic Expansion Approach to American Options,” Unpublished manuscript, 2002.

- , and N. Yoshida, “An Asymptotic Expansion Scheme for Optimal Portfolio for Investment,” 数理解析研究所講究録 1215, 「経済の数理解析」, 京都大学数理解析研究所, 2001a.
- , and , “An Asymptotic Expansion Approach with Monte Carlo Simulations,” Preprint, 2001b.
- , and , “An Asymptotic Expansion Scheme for Optimal Investment Problems,” Preprint, 2003. To appear *Statistical Inference for Stochastic Processes*
- Yoshida, N., “Asymptotic Expansions of Maximum Likelihood Estimator of Small Diffusion via the Theory of Malliavin-Watanabe,” *Probability Theory and Related Fields*, 92, 1992, pp. 275-311.

