日本銀行金融研究所 / 金融研究 / 2001.12

リスク指標の性質に関する理論的整理
—VaRと期待ショートフォールの比較分析—

山井康浩（やまいやすひろ）／吉羽要直（よしばとしなお）

要　旨

本稿では、既存研究でリスク指標が満たしていることが望ましいとされている性質を4つ挙げたうえで、バリュー・アット・リスク（VaR）と期待ショートフォールがこれらを満たすかどうかを検討する。ここでは、こうした性質として、（1）劣加法性、（2）凸性、（3）期待効用最大化原理との整合性、（4）テイル・リスクの排除、の4つを挙げ、それぞれを説明する。この際、期待効用最大化原理との整合性とテイル・リスクの2つの性質を考察するために、確率優越の考え方を用いる。

次に、具体的にVaRと期待ショートフォールがこれらの性質を満たす条件を考察する。期待ショートフォールは、VaRよりも幅広い条件下でこれらの性質を満たす。しかし、期待ショートフォールにもこれらの性質を満たさない場合が存在する。したがって、VaRや期待ショートフォールをリスクの計測や管理に利用する際には、こうしたリスク指標としての特徴を十分に踏まえる必要があろう。

キーワード： バリュー・アット・リスク、期待ショートフォール、確率優越、期待効用最大化、劣加法性、テイル・リスク

本稿の作成に当たっては、今野浩教授（中央大学）から大変貴重なコメントを頂戴した。もっとも、本稿で示された意見やあり得べき誤りは、全て筆者個人に属する。

山井康浩　日本銀行金融研究所研究第1課（E-mail: yasuhiro.yamai@boj.or.jp）
吉羽要直　日本銀行金融研究所研究第1課（E-mail: toshinao.yoshiba@boj.or.jp）

1．はじめに

バリュー・アット・リスク（以下、VaR）は、金融機関におけるリスク管理では、最も標準的なリスク指標となっているが、定義上・理論上の問題点（信頼区間外のリスクを捉えられない＜テイル・リスク＞、劣加法性を満たさない）が指摘されている。一方、VaRが抱えるこうした問題点を内包しないリスク指標として、期待ショートフォールの概念が提唱されている（Artzner *et al*.［1997］）。山井・吉羽［2001］では、VaRの問題点のうち、テイル・リスクに焦点を当ててVaRと期待ショートフォールの比較分析を行った。この結果、小さい確率で大きな損失が発生する資産が投資機会として存在し、「裾の操作が可能」な状況では、VaRのテイル・リスクが顕現化する一方、期待ショートフォールではこうした問題点が発生する可能性が低いことを示した。その一方で、テイル・リスクを実務上あるいは理論上更に詳しく考察するためには、それぞれのリスク指標が持つ性質などを数学的により一般化して議論を行う必要があることも指摘した。

本稿では、既存研究でリスク指標が満たしていることが望ましいとされている性質を4つ挙げたうえで、VaRおよび期待ショートフォールがこれらを満たすかどうかを検討する。ここでは、こうした性質として、（1）劣加法性、（2）凸性、（3）期待効用最大化原理との整合性、（4）テイル・リスクの排除、の4つを挙げ、これらの解説を行う。この際、期待効用最大化原理との整合性とテイル・リスクの2つの性質を検討するために、確率優越（stochastic dominance）の考え方を用いる。次に、具体的にVaRと期待ショートフォールがこれらの性質を満たす条件を考察する。

本稿の構成は以下のとおりである。まず2節では、VaRや期待ショートフォールなど主要なリスク指標の定義を行い、それぞれについて簡単な説明を行う。3節では、リスク指標の性質として、（1）劣加法性、（2）凸性、（3）期待効用最大化原理との整合性、（4）テイル・リスクの排除、の4つを取り上げ、それらの定義と説明を行う。4節では、具体的にVaRと期待ショートフォールがどういった条件でこれらの性質を満たすかを検討する。5節では、期待ショートフォールでテイル・リスクが発生する具体例を解説し、期待ショートフォールを用いる際の留意点を述べる。最後に、6節で実務上のインプリケーションを示す形で結論を述べる。

2．リスク指標の定義

本節では、本節以降で分析や例示の対象となる主要なリスク指標の定義と簡単な解説を行う。

リスク計測の対象となるポートフォリオの損益額を表す確率変数をX（以下、本稿ではXの確率分布は連続で確率密度関数が存在するとし、その確率密度関数

を $f(x)$、分布関数を $F(x)$ とする）とする[1]。一般的にリスク指標は、この確率変数 X の関数 $\rho(X)$ として表すことができる。リスク指標は、ポートフォリオ価値の不確実性の大きさを表す必要がある。こうした確率変数 X の散らばり具合を表す最も直観的な指標として、まず分散および標準偏差が考えられる。

・分散 $V[X]$：　$V[X]=E[(X-E[X])^2]$,
・標準偏差 $\sigma(X)$：　$\sigma(X)=\sqrt{V[X]}$.

分散や標準偏差は、ポートフォリオ最適化における平均・分散アプローチ（Markowitz［1952］）などで採用されており、実務上最も一般的に利用されるリスク指標の1つである。

また、期待値からのずれの2乗値ではなく絶対値で捉えたリスク指標として絶対偏差（Mean-Absolute Deviation）がある。

・絶対偏差 $MAD(X)$：　$MAD(X)=E[|X-E[X]|]$.

この絶対偏差は、大規模ポートフォリオの最適化問題を比較的容易に扱えるリスク指標として知られている（Konno and Yamazaki［1991］）。

分散、標準偏差および絶対偏差は、損益額分布の左側の損失のみならず、右側の利益の散らばり具合も織り込んでいるため、損失の発生のみをリスクと捉える立場からは、リスクを表す指標として必ずしも適当でないとの指摘がなされている。これは、損益額分布が正規分布など左右対称な場合には該当しないが、分布の対称性が保証されない場合には当てはまる指摘である[2]。こうした指摘を回避するリスク指標として提案されているのが、損益額分布の左側のみを考慮する下方リスク指標である。下方リスク指標の代表的なものは、2次モーメントを分布の左側だけでとった下半分散、下半分散の平方根をとった下半標準偏差、分布の左側だけの絶対偏差をとった下半絶対偏差がある[3]。

・下半分散 $V^-[X]$：　$V^-[X]=E[\{(X-E[X])^-\}^2]$,
・下半標準偏差 $\sigma^-(X)$：　$\sigma^-(X)=\sqrt{V^-[X]}$.
・下半絶対偏差 $MAD^-(X)$：　$MAD^-(X)=E[|(X-E[X])^-|]$.

1 ここで損益額 X は、特定のリスク評価期間までに当該ポートフォリオから生じる損益額を、金額ベースで表したものと定義する。また、この損益額は、期末のポートフォリオ価値から期初のポートフォリオ価値を差し引いた値とする。

2 例えば、既存のポートフォリオに極めて低い確率ではあるが相対的に高額の配当がある無料の宝くじを加えたとしよう。この宝くじは無料であるためダウンサイド・リスクがなく、この宝くじを加えることによりポートフォリオのリスクは増加していないと考えるのが自然であろう。しかし、小さい確率で大きな利益が上がるという利益の不確実性が加わったことにより、利益と損失双方の不確実性を織り込む分散や標準偏差でリスクを測った場合は、宝くじを加えたポートフォリオのリスクが増加することもあり得る。

3 $a^-=-\min\{a,0\}$ である。

さらに、下半分散の考え方を発展させたものとして、一定の閾値K以下における損益額のモーメントをとる下方部分モーメントの考え方も提唱されている（Fishburn［1977］）[4,5]。

・下方部分モーメント　$LPM_{n,K}(X)$：

$$LPM_{n,K}(X) = E\,[\{(K-X\,)^{+}\}^{n}\,] = \int_{-\infty}^{K}(K-u)^{n} f\,(u)\,du\;,$$

この下方部分モーメントで $n=1$、$K=E\,[X]$とすると下半絶対偏差、$n=2$、$K=E\,[X]$とすると下半分散と一致する。

リスク管理実務上最も標準的なリスク指標となっているVaRや、VaRに代わるリスク指標として提唱されている期待ショートフォール（Artzner *et al*.［1997］）は、定義上は損益額分布の損失部分のみを考慮する点で下方リスク指標の1つと位置づけることができる[6]。

・信頼水準 $(1-\alpha)$ のVaR：　$VaR_{\alpha}(X) = -F^{-1}(\alpha)\;,$

・信頼水準 $(1-\alpha)$ の期待ショートフォール：$ES_{\alpha}(X) = E\,[-X \mid -X \geq VaR_{\alpha}(X)]$

自社の全ポートフォリオのリスクをカバーするための所要自己資本の算出にVaRを用いることは、金融機関の内部管理では広範に用いられているほか、バーゼル銀行監督委員会の自己資本比率規制でも一部採用されている。これは、「信頼水準100（1−α）%のVaRを予め与えられた自己資本の範囲内に収める」ことをメルクマールとすることが、「損失額が自己資本を上回り自社が倒産する確率を 100α% 以内に抑える」ことと等しいので、所要自己資本の算出根拠として意味付けやすいことに起因していると考えられる。ただし、VaRには、（1）劣加法性を満たさない、（2）信頼区間の外の損失を捉えられない、といった問題点がある。こうした問題点を克服するリスク指標として提唱されたのが期待ショートフォールである。

本稿では、主にVaRと期待ショートフォールを分析の対象とするが、3節でリスク指標の性質について説明する際、適宜、分散や標準偏差なども例として用いることとする。

3．リスク指標の性質

本節では、リスク指標の性質として、（1）劣加法性、（2）凸性、（3）期待効用最大化原理との整合性、（4）テイル・リスクの排除、の4つを取り上げ、それらの定

4 $a^{+} = \max\{a, 0\}$である。

5 下方部分モーメントの概要およびリスク指標としての性質に関する実証分析は竹原［2000］を参照。

6 ここで、$F^{-1}(x)$ は確率変数 X の分布関数 $F(x)$ の逆関数である。信頼水準$1-\alpha$ は、実務的には0.95、0.99等に設定されることが多い。なお、信頼水準の範囲内で損益額が常に正の場合、VaRは負値となる。

義を示したうえでそれぞれの性質を説明する[7]。

（1）劣加法性

劣加法性とは、Artzner *et al.*［1997, 1999］で紹介された性質であり、「リスク指標はポートフォリオ分散によるリスク削減効果を織り込むべき」という考え方を表現したものである。具体的には以下のように定義される[8]。

定義 1（劣加法性の定義）
あるリスク指標 $\rho(X)$ が劣加法性を満たすとは、X_1、X_2 を確率変数とするとき、次の関係が成立することである。

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2) \ . \qquad (1)$$

（2）凸性

リスク指標の凸性は以下のように定義される。

定義 2（凸性の定義）
あるリスク指標 $\rho(X)$ が凸性を満たすとは、X_1、X_2 を確率変数とするとき、次の関係が成立することである。
$0 \leq \lambda \leq 1$において、

$$\rho(\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2) \leq \lambda \rho(X_1) + (1-\lambda) \rho(X_2) \ . \qquad (2)$$

リスク指標の凸性で重要な点は、凸性が満たされる場合、そのリスク指標を用いたポートフォリオの最適化が比較的容易になることである（今野［1998］第15章

7 リスク指標が満たすべき性質として、これまでさまざまなものが提唱されている（Artzner *et al.*［1997, 1999］、Pflug［1999, 2000］、Breitmeyer *et al.*［2000］など）が、ここではVaRと期待ショートフォールの比較分析の観点からこれら4つを取り上げた。

8 実際には、Artzner *et al.*［1997, 1999］は、リスク指標が満たすべき性質として以下の4つを挙げ、この4つの性質を満たすリスク指標をコヒレント・リスク指標（coherent measures of risk）と呼んだ。
（1）単調性（monotonicity）：$X_1 \geq X_2$ ならば $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$,
（2）劣加法性（subadditivity）：$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$,
（3）正の同次性（positive homogeneity）：$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ for $\lambda > 0$,
（4）平行移動不変性（translation invariance）：$\rho(X + c) = \rho(X) - c$ for 全ての定数関数 c.

参照)[9]。このため、凸性を満たすリスク指標は、実務へ応用しやすいということができる。また、劣加法性と凸性には、以下のように密接な関係があることがわかっている（Rockafeller［1970］Theorem 4.7参照)。

定理 1（劣加法性と凸性との同値性）
あるリスク指標が正の同次性を満たす場合、そのリスク指標が劣加法性を満たすことと凸性を満たすことは同値である。なお、ここであるリスク指標$\rho(X)$が正の同次性を満たすとは以下のことを指す。
$\lambda > 0$ について

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X) \,. \tag{3}$$

（証明）
（正の同次性かつ凸性 => 劣加法性）
リスク指標 $\rho(X)$ が凸性を満たす場合、(2)式で$\lambda = 1/2$ とすることで、

$$\rho\left(\frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2\right) \leq \frac{1}{2}\rho(X_1) + \frac{1}{2}\rho(X_2)\,, \tag{4}$$

が成立する。ここで(4)式の左辺に正の同次性を適用し、

$$\frac{1}{2}\rho(X_1 + X_2) \leq \frac{1}{2}\rho(X_1) + \frac{1}{2}\rho(X_2)\,, \tag{5}$$

を得る。これにより劣加法性が満たされることがわかる。

（正の同次性かつ劣加法性 => 凸性）
リスク指標 $\rho(X)$ が劣加法性を満たす場合、(1)式で$X_1 = \lambda Y_1$, $X_2 = (1-\lambda)\, Y_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$とすることで、

$$\rho(\lambda Y_1 + (1-\lambda) Y_2) \leq \rho(\lambda Y_1) + \rho((1-\lambda)\, Y_2)\,, \tag{6}$$

が成立する。ここで (6)式の右辺に正の同次性を適用し、

9 具体的には、目的関数および制約式が凸性を持つ凸計画問題では、局所最適解が大域的最適解である。一方、最適化問題が凸計画問題でない場合、複数の局所最適解が存在することがあり、真の最適解を求めることは難しくなる。詳細は今野［1998］第15章の定理15.3および定理15.4を参照。
　また、期待ショートフォールの凸性により期待ショートフォールを用いたポートフォリオ最適化が容易に行えることを指摘したものとしてRockafeller and Uryasev［2000］、一方、VaRは非凸性から最適化が困難であることを指摘したものとしてMauser and Rosen［1998］を参照。

$$\rho(\lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2) \leq \lambda\rho(Y_1) + (1-\lambda)\,\rho(Y_2)\,, \text{ for } \ 0 \leq \lambda \leq 1 \qquad (7)$$

を得る。したがって、凸性を満たす。（証明終）

以下、2節で挙げた具体的なリスク指標が劣加法性および凸性を満たすかどうかを簡単に検討する。

【例1：分散】

分散は、凸性は満たす[10]が、正の同次性を満たさないため、劣加法性を満たさない[11]。

【例2：標準偏差】

標準偏差は劣加法性を満たす[12]。また、定義より明らかに正の同次性も満たすことから、凸性を満たす。

【例3：絶対偏差】

絶対偏差は、定義より明らかに正の同次性を満たす。また、劣加法性も満たす[13]ことから、凸性も満たされる。

10 分散が凸性を満たすことは次の関係から明らかである。

$$\begin{aligned}&(\lambda V[X]+(1-\lambda)V[Y]) - V[\lambda X+(1-\lambda)Y]\\&= (\lambda V[X]+(1-\lambda)V[X]) - (\lambda^2 V[X]+(1-\lambda)^2 V[Y]+2\lambda(1-\lambda)Cov[X,Y])\\&= \lambda(1-\lambda)\{V[X]+V[Y]-2Cov[X,Y]\}\\&= \lambda(1-\lambda)V[X-Y] \geq 0 \quad (\because \ 0 \leq \lambda \leq 1)\end{aligned}$$

11 分散が劣加法性を満たさないことは以下のように示すことができる。

$$\begin{aligned}&V[X]+V[Y]-V[X+Y]\\&=(V[X]+V[Y])-(V[X]+V[Y]+2Cov[X,Y])\\&=-2Cov[X,Y]\end{aligned}$$

左辺の正負は右辺の共分散の符号により変わるため、分散の劣加法性は一般的には成立しない。

12 2つの確率変数が標準偏差を持つとき、その標準偏差が劣加法性を満たすことは以下のように示すことができる。

確率変数X、Yの標準偏差をσ_X、σ_Y、XとY の共分散をσ_{XY}とすると、相関係数は1以下($\sigma_{XY} \leq \sigma_X\sigma_Y$)であるため（証明は、竹内［1963］＜4章 p. 37＞を参照)、確率変数 $X+Y$の標準偏差σ_{X+Y}は以下のように劣加法性を満たす。

$$\sigma_{X+Y} \equiv \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY}} \leq \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\,\sigma_X\sigma_Y} = \sigma_X + \sigma_Y\,.$$

13 絶対偏差が劣加法性を満たすことは次の関係から明らかである。

$$\begin{aligned}&(MAD[X]+MAD[Y]) - MAD[X+Y]\\&= E|X-E[X]| + E|Y-E[Y]| - E|X+Y-E[X+Y]|\\&= E\{|X-E[X]| + |Y-E[Y]| - |(X-E[X])+(Y-E[Y])|\}\\&= E\{|U|+|V|-|U+V|\} \qquad (U \equiv X-E[X],\ V \equiv Y-E[Y])\\&\geq 0\end{aligned}$$

【例4：VaR**】**

VaRは一般的に劣加法性も凸性も満たさない[14]。

【例5：期待ショートフォール】

期待ショートフォールは、4節(2)で述べるとおり劣加法性を満たす。また、定義より明らかに正の同次性を満たすことから、凸性も満たす。

(3) 期待効用最大化原理との整合性

ファイナンスおよび経済学の理論では、不確実性のもとでの意思決定を分析する際、投資家は全て合理的で貪欲（富の水準にかかわらずより多くの富を選好する）であり、危険回避的であると仮定するのが一般的である。すなわち、(1) 投資家は損益額Xの関数である効用関数$U(X)$を持ち、(2) Uは条件$U'(x) \geq 0$, $U''(x) \leq 0$, $\forall x$P R を満たし、(3) 投資家は効用関数$U(X)$ の期待値を最大化するよう行動する、という仮定である。この仮定は一般的に「期待効用最大化原理」と呼ばれる[15]。ここでは、特定のリスク指標に基づく意思決定とこの期待効用最大化原理から導かれる意思決定との間に整合性があるかどうかを検討する。

期待効用最大化原理を用いて分析を行うためには、投資家の効用関数を特定する必要がある。しかし、個々の投資家の効用関数を特定することは難しいため、その代りに、効用関数の持つ一般的な性質（上記 (1)～(3)の仮定）を利用して異なる投資機会に対し選好の順序付けをする方法があると望ましい。この方法の1つに確率優越の考え方がある[16]。確率優越は効用関数の一般的な性質に基づいて順序付けを行う方法であることから、特定のリスク指標が確率優越と整合的ならば、このリスク指標は期待効用最大化原理とも整合的となる[17]。

---

14 VaRが劣加法性を満たさない具体例は、Artzner *et al.*［1997, 1999］および山井・吉羽［2001］を参照。また、Mauser and Rosen［1998］は、数値例によりVaRが凸性を満たさないことを示している。

15 期待効用最大化原理を詳細に解説したものとして、池田［2000］、Ingersoll［1987］、Huang and Litzenberger［1993］を参照。

16 確率優越の詳しい解説はLevy［1998］、Bawa［1975］、Ingersoll［1987］、Huang and Litzenberger［1993］、今野［1998］、池田［2000］などを参照。

17 リスク指標が満たすべき性質として確率優越との整合性を論じたものとしては、Cumperayot *et al.*［2000］、Guthoff, Pfingsten, and Wolf［1997］、Ogryczak and Ruszczynski［1999］、Pflug［1999, 2000］を参照。

ここではまず、この確率優越の説明[18]を行ったうえで、リスク指標と確率優越との整合性を定義する。

イ．2次確率優越

まず、確率優越の概念の中で最も一般的に使われる2次確率優越の概念を説明する。

2次確率優越は、分布関数を積分した2次分布関数を用いて定義される。ここで、2次分布関数は、

$$F^{(2)}(x) = \int_{-\infty}^{x} F(u)\,du \quad \text{ただし、}F(u)\text{は分布関数,} \tag{8}$$

と定義される。すなわち、2次分布関数は与えられた閾値 xから下の分布関数の面積を指す。

この2次分布関数の値は、以下のとおり、2節で紹介した下方部分モーメントで n=1とした場合に一致することがわかる（証明は今野［1998］p.50 定理11.3、Ingersoll［1987］p.139などを参照）。

定理 2（2次分布関数と下方部分モーメント）

2次分布関数 $F^{(2)}(x)$ は、以下の関係を有する。

$$F^{(2)}(x) = \int_{-\infty}^{x} F(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} (x-u)\,f(u)\,du \equiv LPM_{1,x}(X) \tag{9}$$

2次確率優越は、2次分布関数を用いて次のように定義される[19,20]。ポートフォリオのリスクを考える場合には、定義3のX_1、X_2をポートフォリオの損益額と考えればよい。

18 ここでの確率優越に関する説明は、Levy［1998］、Ingersoll［1987］、今野［1998］を参考にした。ただし、確率優越を分布関数から定義する考え方は今野［1998］に従った。

19 1次確率優越の概念も、以下のように同様に定義される。

確率変数X_1、X_2の分布関数$F_1(x), F_2(x)$ について、全ての実数 x で$F_1(x) \leq F_2(x)$ が成立するとき、X_1はX_2 に1次確率優越するといい $X_1 \geq_{FSD} X_2$ と表す。

このとき、以下の定理が成立する（証明は、Levy［1998］p. 47 Theorem 3.1、今野［1998］p. 46 定理 11.1参照）。

2つのポートフォリオの損益額を表す確率変数 X_1、X_2が与えられたとき、$X_1 \geq_{FSD} X_2$の必要十分条件は、任意の実数 xで$U'(x) \geq 0$（および少なくとも1つの xで$U'(x) > 0$）を満たす全ての効用関数$U(x)$ に対して $E[U(X_1)] \geq E[U(X_2)]$ が成立することである。

20 実務上確率優越の概念を利用してポートフォリオの優劣を判断する場合は、初期投資額を一定額以内に抑えるなど、投資の対象とするポートフォリオに制約を加える。

定義 3（2次確率優越の定義）

確率変数X_1、X_2の2次分布関数について、全ての実数xで、

$$F_1^{(2)}(x) \leq F_2^{(2)}(x), \tag{10}$$

が成立するとき、X_1はX_2に2次確率優越するといい、

$$X_1 \geq_{SSD} X_2, \tag{11}$$

と表す。

この関係は図1のように表される（上図が分布関数、下図が2次分布関数）。（10）式が全ての実数xで成立している限りは分布関数の曲線が交わることがあってもポートフォリオの順序付けが可能となる。

また、定理2からわかるように、（10）式は次式で置き換えることができ、2次確率優越は下方部分モーメントの大小により定義できることがわかる。

$$LPM_{1,x}(X_1) \leq LPM_{1,x}(X_2), \tag{12}$$

2次確率優越と期待効用最大化原理とを関連付ける次の定理が成立する（今野［1998］p. 48 定理11.2、Levy［1998］p. 69 Theorem 3.2参照、証明は補論2を参照）。

定理 3（2次確率優越と期待効用最大化）

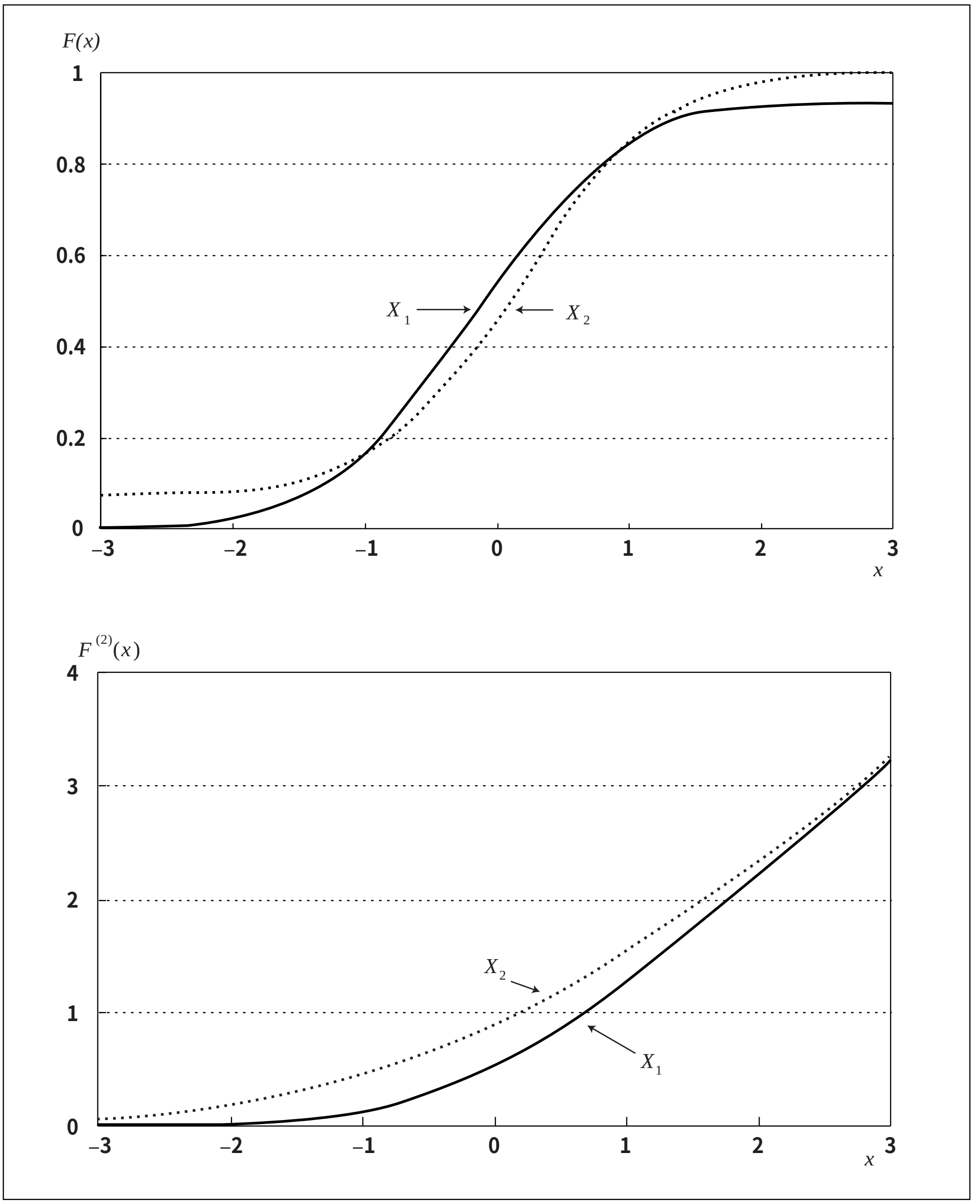
2つのポートフォリオの損益額を表す確率変数X_1、X_2が与えられたとき、X_1がX_2に2次確率優越すること、すなわち、$X_1 \geq_{SSD} X_2$の必要十分条件は、任意の実数xで[21]、$U'(x) \geq 0$、$U''(x) \leq 0$（かつ、少なくとも1つのxで、$U'(x) > 0$、$U''(x) < 0$）を満たす全ての効用関数$U(x)$に対して、

$$E[U(X_1)] \geq E[U(X_2)], \tag{13}$$

が成立することである。

21 ここでは「任意の実数」としているが、「測度ゼロの集合を除いた任意の点からなる実数の集合」としても成立する。また、$U(x)$の微分可能性も、測度ゼロの集合以外の任意の集合で微分可能であれば成立する（Levy［1998］ p. 47参照）。

図1　X_1がX_2を2次確立優越している場合[22]



22 分布関数$F(x)$ではX_1がX_2を上回ることがあるが、その積分値である2次分布関数はX_1がX_2を上回ることがないため、X_1がX_2を2次確率優越している。

ここで、任意の実数xで$U'(x) \geq 0$、$U''(x) \leq 0$ となる条件は、効用関数が損益額に対して単調非減少であり限界効用が逓減すること、すなわち、効用関数がリスク回避的であることを示している。この定理に従えば、あるポートフォリオXが他のポートフォリオYに2次確率優越している場合、リスク回避的ないかなる効用関数をとっても、ポートフォリオXの期待効用はポートフォリオYの期待効用を上回る。したがって、危険回避的な全ての投資家はポートフォリオXを選好する。しかし、一般には、あるリスク回避的な効用関数ではポートフォリオXの期待効用が高いが、他のリスク回避的な効用関数ではポートフォリオYの期待効用が高いというケース、つまりポートフォリオの望ましさの順序付けが行えないケースが存在する。このケースは、2つのポートフォリオの2次分布関数が途中で交差しているため2次確率優越の概念が適用できないケースに相当する。こうしたポートフォリオの順序付けを行うには、より高次の確率優越の概念が必要となる。

ロ．n 次確率優越

より高次の確率優越の概念として、2次確率優越と同様にn次確率優越を定義することができる。

n次確率優越は、分布関数を（n−1）回積分したn次分布関数を用いて定義される。ここで、n次分布関数は、

$$F^{(1)}(x) = F(x)\,,\ F^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{x} F^{(n-1)}(u)\,du \qquad \text{ただし、}F(u)\text{は分布関数}\,, \quad (14)$$

として、帰納的に定義される。

定理2と同様、n次分布関数の値は（n−1）次の下方部分モーメントの定数倍と一致する（証明はIngersoll［1987］p. 139参照）。

定理 4（n 次分布関数と下方部分モーメント）

n次分布関数 $F^{(n)}(x)$は次式の関係を持つ。

$$F^{(n)}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-u)^{n-1} f(u)\,du \equiv \frac{1}{(n-1)!}LPM_{n-1,x}(X) \qquad (15)$$

n次確率優越は、n次分布関数によって次のように定義される。

定義 4（n 次確率優越の定義）
確率変数 X_1、X_2の n次分布関数について、全ての実数xで、

$$F_1^{(n)}(x) \leq F_2^{(n)}(x), \tag{16}$$

が成立するとき、 X_1はX_2にn次確率優越するといい、

$$X_1 \geq_{SD(n)} X_2, \tag{17}$$

と表す。

一般的に、異なる次数の確率優越の間には、以下の定理が成立する。

定理 5（異なる次数間の確率優越の関係）
確率変数 X_1、X_2の間に、

$$X_1 \geq_{SD(n)} X_2, \tag{18}$$

が成立するとき、

$$X_1 \geq_{SD(n+1)} X_2, \tag{19}$$

が成立する。

（証明）

（18）式が成立するならば、（16）式が全ての実数xで成立する。これから明らかに、

$$\int_{-\infty}^{x} F_1^{(n)}(u)\,du \leq \int_{-\infty}^{x} F_2^{(n)}(u)\,du\,, \tag{20}$$

が全ての実数xで成立する。したがって、（14）式より全ての実数xで、

$$F_1^{(n+1)}(x) \leq F_2^{(n+1)}(x), \tag{21}$$

が成立する。よって、$X_1 \geq_{SD\,(n+1)} X_2$ となる。　（証明終）

したがって、ある次数の確率優越の関係が成立するならば、それより高次の全ての確率優越の関係も成立することがわかる。

1次、2次確率優越と同様、n次確率優越と期待効用最大化原理とを関連付ける次の定理が成立する（証明はIngersoll［1987］p. 139、Levy［1998］pp.116-7参照）。

定理 6（n 次確率優越と期待効用最大化）
2つのポートフォリオの損益額を表す確率変数X_1、X_2が与えられたとき、X_1がX_2にn次確率優越すること、すなわち、$X_1 \geq_{SD(n)} X_2$の必要十分条件は、全てのxで $(-1)^k U^{(k)}(x) \leq 0$（k=1,2,3,･･･, n）[23]（かつ、少なくとも1つのxで不等号が成立）を満たす任意の$U(x)$に対して、

$$E[U(X_1)] \geq E[U(X_2)], \tag{22}$$

が成立することである。

したがって、n次確率優越は、制約条件 $(-1)^k U^{(k)}(x) \leq 0$（k=1,2,･･･, n）（かつ、少なくとも1つのxで不等号が成立）を満たす効用関数に対しては、期待効用最大化原理と整合的である。また、この制約式をみると、次数が高次になるほど効用関数の制約の数が多くなることから、その分だけ順序付けが可能なポートフォリオの範囲が広がることがわかる。

ハ．確率優越と整合的なリスク指標

本稿では、確率優越と整合的なリスク指標$\rho(X)$を次のように定義する[24]。

定義 5（確率優越と整合的なリスク指標）
$X_1 \geq_{SD(n)} X_2$ ならば $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$という関係が成立するリスク指標 $\rho(X)$ をn次確率優越と整合的なリスク指標と呼ぶ。

n次確率優越と整合的なリスク指標 $\rho(X)$ は定義 5の対偶をとると、

$$\rho(X_1) > \rho(X_2) \Rightarrow \text{ not } (X_1 \geq_{SD(n)} X_2), \tag{23}$$

となる。つまり、X_2のリスク指標がX_1のリスク指標よりも小さい場合、X_2はX_1にn次確率優越されないことがわかる。よって、$\rho(X_1) > \rho(X_2)$が成立している場合、

23 ここで、$U(x)$ は全ての実数でk回微分可能であるとし、$U^{(k)}(x)$は効用関数$U(x)$のk回微分を表すとする。なお、ここで、$U(x)$は測度ゼロの集合以外の任意の集合でk回微分可能で制約条件 $(-1)^k U^{(k)}(x) \leq 0$（k=1,2,3,･･･, n）が成り立つとしても定理は成立する。

24 このような考え方でリスク指標と確率優越を結び付ける方法は、Guthoff, Pfingsten, and Wolf［1997］、Ogryczak and Ruszczynski［1999］、Pflug［1999, 2000］に従った。

（1）X_2はX_1よりn次確率優越している
（2）X_1とX_2とにn次確率優越の関係がない

のいずれかが成り立っている。

したがって、(1)が成り立つ場合、定理6より、「n次確率優越と整合的なリスク指標が小さい方のポートフォリオは、一定の制約を満たす任意の効用関数について期待効用が他方のポートフォリオよりも大きい」、つまり、リスク指標が期待効用最大化原理と整合的であることがわかる。これから、投資対象となるポートフォリオがn次確率優越で比較可能ならば、n次確率優越と整合的なリスク指標は期待効用最大化原理とも整合的である。一方、(2)が成り立つ場合、n次確率優越と整合的なリスク指標は期待効用最大化原理と必ずしも整合的であるとはいえなくなる。

また、リスク指標と確率優越の次数の関係には、次の定理が成立する。

定理 7（確率優越の次数とリスク指標）
（n＋1）次確率優越と整合的なリスク指標は、n次確率優越とも整合的である。

（証明）

定理5より、

$$X_1 \geq_{SD\,(n)} X_2 \Rightarrow\ X_1 \geq_{SD\,(n+1)} X_2 . \qquad (24)$$

また、（n＋1）次確率優越と整合的なリスク指標を$\rho(X)$とすると、

$$X_1 \geq_{SD\,(n+1)} X_2 \Rightarrow \rho(X_1) \leq \rho(X_2). \qquad (25)$$

(24)式および(25)式より、

$$X_1 \geq_{SD\,(n)} X_2 \Rightarrow \rho(X_1) \leq \rho(X_2), \qquad (26)$$

したがって、$\rho(X)$はn次確率優越とも整合的なリスク指標である。（証明終）

これから、あるリスク指標がn次確率優越と整合的ならば、そのリスク指標は1次からn次までの全ての次数の確率優越と整合的であることがわかる。したがって、より高次の確率優越と整合的なリスク指標ほど、より包括的なリスク指標であることになる。

以下、2節で示したリスク指標が確率優越との整合性を満たすかどうかを述べる。

【例1：下方部分モーメント】

下方部分モーメント$LPM_{n-1,\,K}(X) = E\,[\{(K-X)^+\}^{n-1}]$は、定理4および定義4より

明らかに$X_1 \geq_{SD\,(n)} X_2 \Rightarrow\; LPM_{n-1,\,K}\,(X_1) \leq LPM_{n-1,\,K}\,(X_2)$が成立することから、$n$次確率優越と整合的。

【例2：下半標準偏差】

Ogryczak and Ruszczynski［1999］の Proposition 9[25]により、$X_1 \geq_{SSD} X_2 \Rightarrow\; \sigma^-(X_1) - E[X_1] \leq \sigma^-(X_2) - E[X_2]$ が成立する。したがって、下半標準偏差から損益額の期待値を差し引いた値（$\sigma^-[X] - E[X]$）をリスク指標としてみると、この指標は2次確率優越と整合的[26]。

【例3：下半絶対偏差】

Ogryczak and Ruszczynski［1999］のProposition 7により、$X_1 \geq_{SSD} X_2 \Rightarrow MAD^-(X_1) - E[X_1] \leq MAD^-(X_2) - E[X_2]$が成立する。したがって、下半絶対偏差から損益額の期待値を差し引いた値（$MAD^-[X] - E[X]$）をリスク指標としてみると、この指標は2次確率優越と整合的。

【例4：標準偏差】

分布が対称な場合は、Ogryczak and Ruszczynski［1999］のProposition 10より、$X_1 \geq_{SSD} X_2 \Rightarrow\; \sigma(X_1) - E[X_1] \leq \sigma(X_2) - E[X_2]$ が成立する。したがって、標準偏差から損益額の期待値を差し引いた値（$\sigma[X] - E[X]$）をリスク指標としてみると、この指標は2次確率優越と整合的。

さらに、Ogryczak and Ruszczynski［1999］のProposition 6より$(X_1 \geq_{SSD} X_2)$ かつ $(E[X_1] = E[X_2]) \Rightarrow\; \sigma(X_1) \leq \sigma(X_2)$ が成立することから、損益額の期待値が等しいポートフォリオを比較する場合、標準偏差は2次確率優越と整合的。

（4）テイル・リスク

イ．テイル・リスクの定義

本稿では、3節(3)で説明した確率優越の考え方と並列的にテイル・リスクを定義し、これに基づいてテイル・リスクを考察する。

「あるリスク指標がテイル・リスクを持つ」とは、直観的には「そのリスク指標が、損益額分布の裾（テイル）部分の損失に関する情報を完全には把握できていないことに伴い、リスクの大小関係を見誤る惧れがある」ことを指す。以下では、分布の裾における情報、テイル・リスクおよびリスク指標の関係を検討する。

25 例2～4に挙げたOgryczak and Ruszczynski［1999］の各Propositionの解説は今野［1998］、一般的な証明はPflug［1999］を参照。

26 Ogryczak and Ruszczynski［1999］は、これから$\sigma^-[X] - \lambda E[X]$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$ が2次確率優越と整合的であるという結果を導き出している。さらに、横軸に下半標準偏差、縦軸に期待値をとった平面上に描いた「平均・下半標準偏差フロンティア」が、$0 \leq \lambda \leq 1$の範囲で2次確率優越と整合的であることを利用して平均・下半標準偏差モデルでポートフォリオ最適化を行うことを提唱している。

まず、分布の裾における情報として、分布の裾での分布関数の大小関係を考える。ある損失額lでのポートフォリオX_1の分布関数の値$F_1(l)$がポートフォリオX_2の分布関数の値$F_2(l)$より大きい場合、ポートフォリオX_1の方が損益額がl以下となる確率が高い。この意味で、分布関数の大小関係は裾に関する情報の一部を与えていることになる。ここから、テイル・リスクのないリスク指標の1つの考え方を定義することができる。すなわち、ある閾値以下での水準で分布関数の曲線が一度以上交差し、大小が入れ替わることがある場合、どちらのポートフォリオの損益額分布がよりファット・テールの性質を持っているのか判断できなくなるという意味で、この事象を「1次テイル・リスク」と呼ぶこととする。これを基に、以下のとおり「1次テイル・リスクがないリスク指標」を定義する。

定義 6（「1次テイル・リスクのないリスク指標」の定義）
リスク指標 $\rho(X)$に「ある閾値K以下で1次テイル・リスクがない」とは、ある2つの確率変数 X_1、X_2について、

$$\rho(X_1) < \rho(X_2), \qquad (27)$$

ならば、

$$F_1(x) \leq F_2(x), \qquad \forall x \quad x \leq K \qquad (28)$$

が成立することである。
　ここで $F_1(x)$、$F_2(x)$はそれぞれX_1、X_2の分布関数である。

この定義を満たすリスク指標が存在すれば、そのリスク指標でみたリスクが小さい方のポートフォリオは、ある閾値以上の全ての損失の累積発生確率が他方のポートフォリオより小さいことが保証される。

しかし、これが成立するか否かは、リスク指標の性質のみならず、対象となるポートフォリオの性質に依存することに注意する必要がある。仮に、対象となるポートフォリオに1次確率優越の関係があれば、これらのポートフォリオの分布関数の曲線は互いに交差することがない。したがって、次の定理が成立することがわかる。

定理 8（1次確率優越と1次テイル・リスク）
対象とするポートフォリオに1次確率優越の関係がある場合、1次確率優越と整合的なリスク指標は、閾値によらず1次テイル・リスクのないリスク指標となる。

（証明）

1次確率優越の関係がある任意のポートフォリオをX_1、X_2とし、1次確率優越と整合的なリスク指標 $\rho(X)$が$\rho(X_1)<\rho(X_2)$ を満たすとする。この場合、X_1とX_2に1次確率優越の関係があることから、$X_1 \geq_{FSD} X_2$となる。したがって、1次確率優越の定義から明らかにKによらず（28）式が成立し、リスク指標 $\rho(X)$ には1次テイル・リスクがないことがわかる。（証明終）

しかし、対象となるポートフォリオに1次確率優越の関係がない場合、分布関数は1つ以上の点で交差する。この交差が閾値K以下で発生している場合、リスク指標に「1次テイル・リスク」があることはわかるが、それ以上の情報はもたらさない。そこで、裾に関する情報として、単に確率のみでなく、期待値や2次以上のモーメントなどの概念を利用することにより、ポートフォリオのテイル・リスクを考察し得る枠組みが必要となると考えられる。これは、これらのモーメントを利用すれば、発生確率は低いが損益額が大きいテイル部分をより高くウエイト付けして評価することになるため、損益額分布の裾に関する異なる尺度での情報が得られるためである。

まず、期待値の概念を利用した考え方として、「2次テイル・リスクのないリスク指標」を以下のように定義する。ここで、「2次テイル・リスク」は、以下の（30）式の両辺で表される期待値の大小関係が（ある閾値以下で）一貫して同じではないことを指す。

定義 7（「2次テイル・リスクのないリスク指標」の定義）

リスク指標 $\rho(X)$に「ある閾値K以下で2次テイル・リスクがない」とは、ある2つの確率変数X_1、X_2について、

$$\rho(X_1) < \rho(X_2), \tag{29}$$

ならば、

$$\int_{-\infty}^{x} (x-u)\, f_1(u)\,du \leq \int_{-\infty}^{x} (x-u)\, f_2(u)\,du\,, \quad \forall x \quad x \leq K \tag{30}$$

が成立することである。

ここで、$f_1(x)$ 、$f_2(x)$はそれぞれX_1、X_2の確率密度関数である。

なお、（30）式は、1次の下方部分モーメントであり、定理 2より、2次分布関数に一致する。つまり、（30）式は次の（31）式と同値である。

$$F_1^{(2)}(x) \leq F_2^{(2)}(x) \quad \forall x \quad x \leq K. \tag{31}$$

これから、定理8と同様にして次の定理を簡単に示すことができる。

定理 9（2次確率優越と2次テイル・リスク）
対象とするポートフォリオに2次確率優越の関係がある場合、2次確率優越と整合的なリスク指標は、閾値によらず2次テイル・リスクのないリスク指標となる。

また、定理7より2次確率優越と整合的なリスク指標は1次確率優越とも整合的なリスク指標であることから、2次テイル・リスクと1次テイル・リスクとの間に以下の関係があることがわかる。

定理 10（2次テイル・リスクと1次テイル・リスク）
対象とするポートフォリオを1次確率優越の関係があるものに限定した場合、閾値によらず2次テイル・リスクのないリスク指標は、閾値によらず1次テイル・リスクのないリスク指標となる。

さらに一般には、$(n-1)$次の下方部分モーメントを利用した「n次テイル・リスクのないリスク指標」を考えることができる。ここで「n次テイル・リスク」とは、以下の(33)式の両辺で表される積分値の大小関係が（ある閾値以下で）一貫して同じではない事象を示す。

定義 8（「n次テイル・リスクのないリスク指標」の定義）
リスク指標 $\rho(X)$に「ある閾値K以下でn次テイル・リスクがない」とは、ある2つの確率変数X_1、X_2について、

$$\rho(X_1) < \rho(X_2), \tag{32}$$

ならば、

$$\int_{-\infty}^{x} (x-u)^{n-1} f_1(u)\,du \leq \int_{-\infty}^{x} (x-u)^{n-1} f_2(u)\,du\,, \qquad \forall x \quad x \leq K \tag{33}$$

が成立することである。ここで、$f_1(x)$、$f_2(x)$ はそれぞれX_1、X_2の確率密度関数である。

なお、(33)式は、定理4よりn次分布関数の$(n-1)!$倍に一致する。つまり、(33)式は次の(34)式と同値である。

$$F_1^{(n)}(x) \leq F_2^{(n)}(x) \qquad \forall x \quad x \leq K. \tag{34}$$

これから、定理9と同様にしてn次テイル・リスクとn次確率優越に関する次の定理を示すことができる。

定理 11（n 次確率優越とn 次テイル・リスク）
対象とするポートフォリオにn次確率優越の関係がある場合、n次確率優越と整合的なリスク指標は、閾値によらずn次テイル・リスクのないリスク指標となる。

また、定理10と同様にして、次数の異なるテイル・リスクの間には以下の関係が成立する。

定理 12（次数の異なるテイル・リスクの関係）
対象とするポートフォリオにn次確率優越の関係がある場合、閾値によらず（n+1）次テイル・リスクのないリスク指標は、閾値によらずn次テイル・リスクのないリスク指標となる。

４．VaRと期待ショートフォールに関する考察

本節では、3節での解説を踏まえ、VaRと期待ショートフォールに関して、（1）劣加法性、（2）凸性、（3）期待効用最大化原理との整合性、（4）テイル・リスクの排除、の4点を確認する。3節の結果から、一般的にn次確率優越と整合的なリスク指標は、対象とするポートフォリオにn次確率優越の関係がある場合に、期待効用最大化原理との整合性とテイル・リスクの排除が保証される。このため、（3）と（4）は、確率優越との整合性により判断される。

（1）VaR

3節でも述べたとおり、VaRは一般的に劣加法性も凸性も満たさない。しかし、損益額が楕円分布に従う場合には、VaRは、劣加法性、凸性、期待効用最大化原理との整合性、テイル・リスクの排除、の全てを満たすことが示される。また、対象とするポートフォリオに1次確率優越の関係がある場合には、期待効用最大化原理との整合性、テイル・リスクの排除を満たす。

イ．１次確率優越との整合性

VaRは、以下のとおり、1次確率優越と整合的なリスク指標であることがわかっている（証明は、Levy and Kroll［1978］ Theorem 1’ 参照）。

定理 13（VaRの1次確率優越との整合性）

VaRは、1次確率優越と整合的なリスク指標である。つまり、2つの確率変数X_1、X_2について、次の関係が成立する。

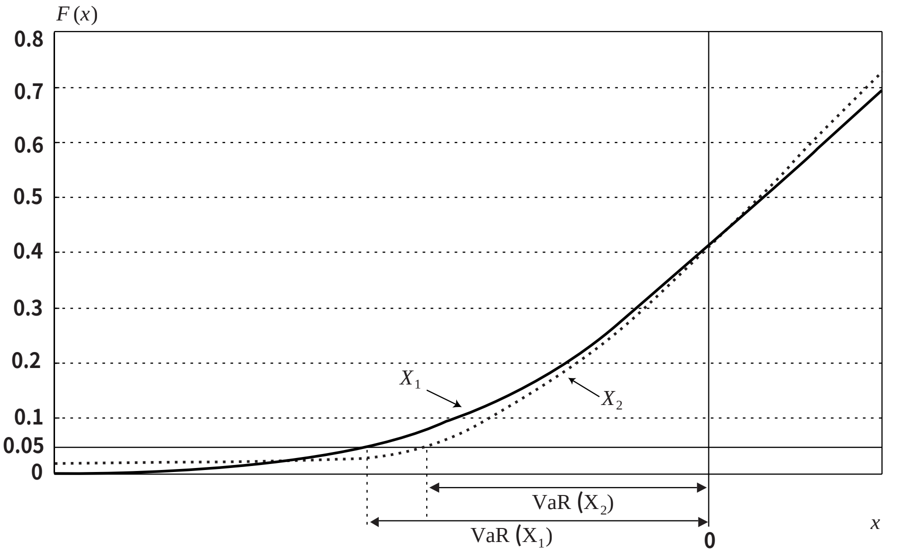
$$X_1 \geq_{FSD} X_2 \Rightarrow \ VaR_\alpha(X_1) \leq VaR_\alpha(X_2). \tag{35}$$

したがって、対象とするポートフォリオに1次確率優越の関係がある場合、VaRは期待効用最大化原理と整合的であり、テイル・リスク（1次テイル・リスク）のないリスク指標となることがわかる。「対象とするポートフォリオに1次確率の関係がある」場合とは、任意の損益額で一方のポートフォリオの分布関数の値が他方のそれを上回ることを指すが、現実の世界ではこうしたことが起こる例は多くないと考えられる。

また、VaRは一般的に2次確率優越との整合性を保証できないことを以下のように示すことができる。

図2は、$X_1 \geq_{SSD} X_2$を満たす2つのポートフォリオX_1、X_2の分布関数を描いたものである。信頼水準95%のVaRは、この分布関数と累積確率5%を表す水平な線との交点で表わされる。VaRでは$VaR(X_1) > VaR(X_2)$で X_1の方がリスクが大きい一方、2次確率優越の基準では$X_1 \geq_{SSD} X_2$でX_1 が選好され、VaRと2次確率優越との間に不整合が発生していることがわかる[27]。この例では、2つのポートフォリオX_1、X_2の分布関数の裾の厚さが大きく異なるため、こうした不整合が発生している。

図2　VaRと2次確率優越との不整合



27 この反例は、Guthoff, Pfingsten, and Wolf［1997］による。

ロ．楕円分布の場合

このように、一般にVaRは3節で挙げた性質を満たしていない。しかし、損益額の確率分布に一定の仮定を置くことで、VaRにこれらの性質を与えることができる。ここでは、こうした可能性の1つとして、損益額が楕円分布に従うことを仮定した場合を説明する。

楕円分布（楕円分布族に含まれる分布）とは、確率分布の等高線が楕円体となる分布である（池田［2000]、Fang and Anderson［1990］参照)。楕円分布は次のように定義される。

定義 9（楕円分布の定義）

n次元確率変数$R=[R_1 \cdots R_n]^T$が楕円分布に従うとは、その密度関数$f(R)$が関数$\varphi(\cdot\,;n)$によって、

$$f(R;\theta,\Sigma)=\frac{1}{|\Sigma|^{1/2}}\varphi((R-\theta)^T\Sigma^{-1}(R-\theta);n), \qquad (36)$$

の関数形で表されることである。Σはn次元正定値行列で尺度パラメータ行列、θはn次元列ベクトルで位置パラメータ・ベクトルと呼ばれる。Rが多変量正規分布に従う場合は、Σは分散・共分散行列、θは平均値を表すベクトルに相当する。

楕円分布には正規分布の他、t-分布やパレート分布、コーシー分布などいわゆる「裾の厚い分布」も含まれる。楕円分布はリスク分析に好都合ないくつかの特徴を持っている。次の定理は楕円分布のもとでのVaRのリスク指標としての性質を考える際に最も重要なものである（Embrechts, McNeil, and Straumann［1998］を参照)[28]。

定理 14（楕円分布でのVaR）

Xが楕円分布に従っており、その分散$V[X]$が有限であるならば、信頼水準（$1-\alpha$）でのVaR（$VaR_\alpha(X)$）は、次式で表現できる。

$$VaR_\alpha(X)=E[X]+q_\alpha\sqrt{V[X]}\ , \qquad (37)$$

ただし、q_αはその楕円分布の標準形におけるα%分位点である。

28 この定理は、楕円分布に従う確率変数を線形変換しても同じ分布に従うこと（池田［2000］ 命題3.1)、楕円分布に従う確率変数の分散は確率密度関数の尺度パラメータの定数倍となること（池田［2000］(3.4)式）より示すことができる（なお、コーシー分布は分散が有限ではないため、ここでの議論は成立しない)。

この定理から、VaRは、損益額が楕円分布に従う場合、損益額の標準偏差で表現され、標準偏差がリスク指標として満たしている性質（劣加法性、凸性、対象とするポートフォリオの期待損益額が等しい場合の2次確率優越との整合性）を満たすことを示すことができる[29]。まず、損益額が楕円分布に従う場合、VaRが劣加法性を満たすことは以下のようにわかる（Embrechts, McNeil and Straumann［1998］）。

定理 15（楕円分布でのVaRの劣加法性）

2つの確率変数 X_1およびX_2が分散有限の楕円分布に従う場合、信頼水準$(1-\alpha)$での VaR（$VaR_\alpha(X)$）は、以下の劣加法性を満たす。

$$VaR_\alpha(X_1+X_2) \leq VaR_\alpha(X_1)+VaR_\alpha(X_2). \tag{38}$$

（証明）

まず、3節（1）でみたように、分散有限の場合、標準偏差は一般的に劣加法性を満たすことから、

$$\sqrt{V[X_1+X_2]} \leq \sqrt{V[X_1]}+\sqrt{V[X_2]}, \tag{39}$$

が成立する。したがって、（37）式および（39）式から、

$$\begin{aligned}
&VaR_\alpha(X_1+X_2)-\{VaR_\alpha(X_1)+VaR_\alpha(X_2)\}\\
&=\{E[X_1+X_2]+q_\alpha\sqrt{V[X_1+X_2]}\}-\{E[X_1]+q_\alpha\sqrt{V[X_1]}+E[X_2]+q_\alpha\sqrt{V[X_2]}\}\\
&=q_\alpha(\sqrt{V[X_1+X_2]}-\sqrt{V[X_1]}-\sqrt{V[X_2]})\leq 0,
\end{aligned} \tag{40}$$

が成立し、VaRの劣加法性が示される。（証明終）

VaRは定義より明らかに正の同次性を満たすことから、定理1より凸性を満たすことがわかる。

一方、対象とするポートフォリオの損益額が楕円分布に従う場合は、2次確率優越との整合性に関する次の定理が成立する。

29 対象とする全てのポートフォリオの損益額が同一の分布に従っていることが必要である。例えば、正規分布もt-分布も楕円分布に属するが、一部のポートフォリオの損益額が正規分布に従っている一方、その他のポートフォリオの損益額がt-分布に従っている状況では、この議論は当てはまらない。

定理 16（楕円分布でのVaRと2次確率優越との整合性）
対象とするポートフォリオの損益額（ X_1およびX_2）が期待値の等しい（$E[X_1] = E[X_2]$）分散有限の楕円分布に従う場合、VaRは2次確率優越と整合的なリスク指標となる。

（証明）

まず、3節（3）の【例4】でみたように、損益額の期待値が等しいポートフォリオを比較する場合、標準偏差は2次確率優越と整合的なリスク指標となる。したがって、X_1とX_2の期待値が等しい場合、

$$X_1 \geq_{SSD} X_2 \Rightarrow \sqrt{V[X_1]} \leq \sqrt{V[X_2]}, \tag{41}$$

が成立する。よって、（37）式および $E[X_1] = E[X_2]$ から、

$$\begin{aligned} X_1 \geq_{SSD} X_2 &\Rightarrow \sqrt{V[X_1]} \leq \sqrt{V[X_2]} \\ &\Rightarrow E[X_1]+q_\alpha\sqrt{V[X_1]} \leq E[X_2]+q_\alpha\sqrt{V[X_2]} \Rightarrow VaR_\alpha(X_1) \leq VaR_\alpha(X_2), \end{aligned} \tag{42}$$

が成立し、VaRの2次確率優越との整合性が示される。（証明終）

したがって、対象とするポートフォリオの損益額が楕円分布に従う場合、VaRは劣加法性および凸性を常に満たす。さらに、対象を損益額の期待値が等しいポートフォリオとする場合、VaRは2次確率優越と整合的なリスク指標となる[30]。損益額の期待値が等しい楕円分布に従うポートフォリオは2次確率優越の関係を有することから、この場合には、VaRは期待効用最大化原理と整合的（定理3より）で（2次）テイル・リスクのないリスク指標となる（定理9）ことがわかる。楕円分布族に属する分布には、t-分布やパレート分布などいわゆる裾の厚い分布も含まれている。つまり、単純に損益額分布がファット・テイルの性質を持つことがVaRの問題点（劣加法性を満たさない、テイル・リスクがある、期待効用最大化原理と整合的でない）に結びつくわけではないことになる[31]。

30 ここで、期待値を等しいとする仮定はかなり強いものに思われるかもしれないが、期待値を等しいと仮定してリスク指標の大小によりリスクを比較する方法は平均・分散アプローチなど実務でも標準的に採用されている。

31 ただし、この議論は、対象とする全てのポートフォリオの損益額が同一の分布に従っていることが前提となる（脚注29参照）。ポートフォリオの損益額分布の裾の厚さが異なっている場合は、図2の例で挙げたようにVaRに問題が発生する場合がある。

(2) 期待ショートフォール

期待ショートフォールは、損益額分布の形状によらず、劣加法性、凸性、2次確率優越との整合性の3つを満たすことがわかっている。2次確率優越との整合性から対象とするポートフォリオが2次確率優越の関係を有する場合、期待ショートフォールは期待効用最大化原理と整合的でテイル・リスクのないリスク指標となる。ここでは、3節での結果を用いてこれらを示す。

まず、期待ショートフォールの劣加法性については、確率変数の分布関数が連続関数である場合[32]、次の定理が成立する。

定理 17（期待ショートフォールの劣加法性）
X_1およびX_2を連続な分布関数を持つ確率変数とするとき、信頼水準100（1–α）%での期待ショートフォール（$ES_\alpha(X)$）は、以下の劣加法性を満たす。

$$ES_\alpha(X_1+X_2) \leq ES_\alpha(X_1)+ES_\alpha(X_2). \tag{43}$$

（証明）

この証明はAcerbi, Nordio, and Sirtori［2001］による。まず、損益額Xのq分位点をx_qとして、

$$\bar{x}_q = \frac{1}{q} E\,[X 1_{X \leq x_q}], \tag{44}$$

と置く[33]。この時、確率変数は連続な分布関数を持つため[34]、期待ショートフォールは$-\bar{x}_q$となる。2つのポートフォリオの損益額をそれぞれX、Yとし、新たな確率変数$Z=X+Y$を考える。期待ショートフォールの劣加法性は、

$$\bar{z}_q \geq \bar{x}_q + \bar{y}_q\,, \tag{45}$$

を証明することで示される。ただし、$\bar{y}_q$、$\bar{z}_q$は$\bar{x}_q$と同様に定義する。ここで、次の関係が成り立つ[35]。

32 確率変数の分布関数が連続関数ではない場合は、期待ショートフォールをより厳密に定義し直す必要がある。詳細はAcerbi and Tasche［2001］および Rockafeller and Uryasev［2001］を参照。

33 定義関数$1_{\{A\}}$は、Aが真の時に1、偽の時に0をとる関数である。

34 確率変数が離散的な分布関数を持つ場合の期待ショートフォールの扱いとその劣加法性の証明については、Acerbi and Tasche［2001］を参照。

35 $X>x_q$であれば$1_{X \leq x_q}=0$であり、定義関数の定義より$0 \leq 1_{Z \leq x_q} \leq 1$となるため最初の関係が成り立つ。2番目の関係も同様に成り立つことを示すことができる。

$$\begin{cases} 1_{Z\le z_q}-1_{X\le x_q}\ge 0 \text{ if } X>x_q, \\ 1_{Z\le z_q}-1_{X\le x_q}\le 0 \text{ if } X<x_q. \end{cases} \tag{46}$$

すなわち、$(1_{Z\le z_q}-1_{X\le x_q})(X-x_q)\ge 0$である。よって、

$$\begin{aligned} q(\bar{z}_q-\bar{x}_q-\bar{y}_q) &= E[Z1_{Z\le z_q}-X1_{X\le x_q}-Y1_{Y\le y_q}] \\ &= E[X(1_{Z\le z_q}-1_{X\le x_q})+Y(1_{Z\le z_q}-1_{Y\le y_q})] \\ &\ge x_q E[(1_{Z\le z_q}-1_{X\le x_q})]+y_q E[(1_{Z\le z_q}-1_{Y\le y_q})] \\ &= x_q(q-q)+y_q(q-q)=0, \end{aligned} \tag{47}$$

が成立する。したがって、期待ショートフォールの劣加法性が示された。

（証明終）

さらに、期待ショートフォールは定義より明らかに正の同次性を満たすことから、定理1より凸性も満たすことがわかる。

また、期待ショートフォールの2次確率優越との整合性については、次の定理が成立する。

定理 18（期待ショートフォールと2次確率優越との整合性）

期待ショートフォールは2次確率優越と整合的なリスク指標である。

（証明）

証明は、Levy and Kroll［1978］の結果を利用する[36]。まず、信頼水準100（1–α）%の期待ショートフォールは以下で表される。

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X) &= E[-X \mid -X\ge VaR_\alpha(X)] = \frac{E[-X;-X\ge VaR_\alpha(X)]}{P[-X\ge VaR_\alpha(X)]} \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{q(\alpha)}(-x)f(x)\,dx, \\ &\qquad \text{ただし } q(\alpha) \text{ は} X \text{の } \alpha-\text{分位点}. \end{aligned} \tag{48}$$

ここで、分布関数を$F(x)=t$とすると、$f(x)dx=dt$、$F(q(\alpha))=\alpha$、$F(-\infty)=0$より、

$$ES_\alpha(X)=\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{q(\alpha)}(-x)f(x)\,dx=-\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F^{-1}(t)\,dt=-\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q(t)\,dt, \tag{49}$$

36 Levy and Kroll［1978］の結果を用いて期待ショートフォールの2次確率優越との整合性を示す考え方は、Bertsimas, Lauprete, and Samarov［2000］による。なお、この定理にはOgryczak and Ruszczynski［2001］, Proposition 4.2で共役凸関数の考え方を用いた別証が与えられている。

が得られる。ここで、Levy and Kroll［1978］、Theorem 5’（補論3参照）より、2つの確率変数X_1、X_2に次の関係が成立する。

$$X_1 \geq_{SSD} X_2 \ \Longleftrightarrow \int_0^{\alpha} q_1(t)\,dt \geq \int_0^{\alpha} q_2(t)\,dt \qquad \forall\alpha \ \ (0 \leq \alpha \leq 1), \tag{50}$$

ただし、$q_1(t)$、$q_2(t)$は確率変数X_1、X_2の$t-$分位点である。

したがって、(49)式と合わせ、特定のαで次の関係が成立することから、期待ショートフォールが2次確率優越と整合的なリスク指標であることがわかる。

$$X_1 \geq_{SSD} X_2 \Rightarrow -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q_1(t)\,dt \leq -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q_2(t)\,dt . \tag{51}$$

（証明終）

以上から、期待ショートフォールは、損益額分布の形状にかかわらず、(1) 劣加法性、(2) 凸性、(3) 2次確率優越との整合性、の3つが常に満たされることがわかった。また、2次確率優越と整合的であることから、対象とするポートフォリオに2次確率優越の関係がある場合は、(3) 期待効用最大化原理と整合的なほか、(4) (2次) テイル・リスクがないことがわかる。

一方、本節 (1) で指摘したとおり、VaRは、損益額が楕円分布に従う場合（または投資対象が1次確率優越で比較可能な場合）を除いて、(1) 劣加法性、(2) 凸性、(3) 期待効用最大化原理との整合性、(4) テイル・リスクの排除、のいずれも一般的には満たさない。したがって、期待ショートフォールはVaRに比べてこれらの性質をより多く満たすリスク指標であることがわかる。

ただし、期待ショートフォールが持つ性質のうち、(1) 期待効用最大化原理との整合性、(2) テイル・リスクの排除、の2つが満たされるのは、ポートフォリオに2次確率優越の関係がある場合に限られる。このため、仮に2次確率優越の関係がないポートフォリオを対象とする場合は、リスク指標が理論的に望ましい性質を持っていることを求めるのであれば、3次以上の確率優越と整合的なリスク指標を利用する必要がある。

(3) 代替策：n次下方部分モーメント

(2) では、VaRと期待ショートフォールが3節で掲げた性質を満たすかどうかを検討し、その結果、期待ショートフォールはVaRよりも多くの性質を満たすことを示した。しかし、対象とするポートフォリオに2次確率優越の関係がない場合は、(1) 期待効用最大化原理と整合的でない、(2) テイル・リスクを完全には排除できない、といった問題が生じる（具体例は5節を参照）。これに対しては、3次以上の確率優越と整合的なリスク指標によりリスクを計測することが考えられる。

こうしたリスク指標として最も簡単なものは、以下で表される下方部分モーメントで次数を2次以上としたものである。

・下部モーメント　$LPM_{n.K}(X)$：

$$LPM_{n.K}(X) = E\left[\{(K-X)^{+}\}^{n}\right] = \int_{-\infty}^{K} (K-u)^{n}\, f(u)du\,,$$

3節（3）の例1より、この下方部分モーメントで次数をn次としたものは、（n+1）次確率優越と整合的なリスク指標となる。

しかし、実務上このリスク指標をリスク管理に用いる場合、閾値であるKの設定が問題となり得る[37]。また、この下方部分モーメントは凸性は満たしているが、正の同次性を満たしていないため劣加法性が成立しない。したがって、このn次下方部分モーメントの利用はVaRあるいは期待ショートフォールの代替ではなく、むしろそれらの補完と位置づけるのが妥当であると考えられる。これまでの結果を基に、表1にVaR、期待ショートフォール、n 次下方部分モーメント（$n \geq 2$）の満たす性質をまとめた。

表1　主要なリスク指標の性質

	VaR	期待ショートフォール	n 次下方部分モーメント（n≧2）
劣加法性	× （楕円分布のとき○）	○	×
凸性	× （楕円分布のとき○）	○	○
期待効用最大化原理との整合性	ポートフォリオに1次確率優越の関係がある場合。損益額が楕円分布に従う場合	ポートフォリオに2次確率優越の関係がある場合	ポートフォリオに（n+1）次確率優越の関係がある場合
テイル・リスクの排除	〃	〃	〃

37 例えば、閾値Kを、何らかの「ターゲット収益率」を基に設定することが考えられる（竹原［2000］）。しかし、このターゲット収益率を株価指数などのベンチマークとすると、閾値自体が確率変数となり扱いが難しくなる。
　また、金融機関がVaRを利用する際に統一的な信頼水準を用いて個別ポートフォリオのリスクを測っているように、下方部分モーメントを用いる際にも多様なポートフォリオのリスクを同一の閾値を用いて測る必要があると考えられる。しかし、リスクや規模の大小を無視して金額ベースで全てのポートフォリオに同じ閾値を設定するのは、実務上無理があるといわざるを得ない。

5．期待ショートフォールの問題点が発生する例

期待ショートフォールは2次確率優越と整合的なリスク指標であるが、対象とするポートフォリオに2次確率優越の関係がない場合は、(1) 期待効用最大化原理との整合性がない、(2) テイル・リスクを排除できない、といった問題点が発生する可能性がある。以下では、離散的な損益額分布を持った簡単なサンプル・ポートフォリオによりその例を示す。

対象とするサンプル・ポートフォリオは、そのペイ・オフが表 2で示されるポートフォリオA、Bの2つである。それぞれのペイ・オフの期待値は97.05である。計算の簡単化のため、初期投資額はこの期待値に等しいとする。

表2　サンプル・ポートフォリオのペイ・オフ[38]

ポートフォリオA			ポートフォリオB		
ペイ・オフ	損失額	確率	ペイ・オフ	損失額	確率
100.00	−2.95	50.000%	98	−0.95	50.000%
95.00	2.05	49.000%	97	0.05	49.000%
50.00	47.05	1.000%	90	7.05	0.457%
			20	77.05	0.543%

ポートフォリオAでは、初期投資額が97.05であるので、損失が10を下回る確率（＝ペイ・オフが100ないし95となる確率）は99%である一方、1%の確率で初期投資額の半分近い損失（損失47.05）が発生する可能性がある。ポートフォリオBでは、損失が10を下回る確率（＝ペイ・オフが98、97、90のいずれかになる確率）は約99.5%とAよりも高い一方、ごくわずかな確率（約0.4%）だが初期投資額が半分以上失われてしまう（損失77.05）可能性がある。

これらのポートフォリオを期待効用（Wをペイ・オフとし、対数型＜ln$W$＞、3次関数型＜$-W^3/3+10{,}000W$＞を採用[39]）、VaR（信頼水準99%）、期待ショートフォール（信頼水準99%）、2次部分下方モーメント（閾値 $K= -1$）で比較したのが表 3である。

38 ポートフォリオBのペイ・オフが90および20となる確率は四捨五入されており正確な値では表示されていない（実際には、これら2つの事象の確率の和が1%で、ポートフォリオのペイ・オフの期待値が97.05となるよう設定した）。

39 ここで採用した効用関数はいずれも $0\leq W \leq 100$では、$U'(W) \geq 0$, $U''(W) \leq 0$と、貪欲でリスク回避的な効用を表しており、定理 3の意味で2次確率優越と整合的な効用関数である。しかし、$U'''(W)$は、対数型では正、3次関数型では負となっているため、対数型は定理 6の意味で3次確率優越と整合的である一方、3次関数型は整合的でない。

表3　各資産のリスク・プロファイル

	ポートフォリオA	ポートフォリオB	備考
ペイ・オフの期待値	97.050	97.050	期待値は同じ
期待効用（対数型）	4.573	4.571	Aの期待効用が大きい
期待効用（3次関数型）	663,379	663,439	Bの期待効用が大きい
VaR（信頼水準99%）	47.050	7.050	VaRはAが大
期待ショートフォール（信頼水準99%）	47.050	45.050	期待ショートフォールはAが大
2次下方部分モーメント（閾値K=-1）	21.746	31.564	2次下方部分モーメントはBが大

まず、VaRおよび期待ショートフォールを比較すると、ポートフォリオBの値が小さいため、ペイ・オフの期待値が等しいことを踏まえるとポートフォリオBがより望ましいポートフォリオであると判断される。一方、対数型の効用関数（$\ln W$）で測った期待効用をみると、ポートフォリオAの期待効用が高く、ポートフォリオAの方がより望ましいポートフォリオであるとの判断が下される。したがって、この例では、期待ショートフォールによる判断が期待効用による判断と整合的ではない、つまり期待ショートフォールは期待効用最大化原理と整合的でないことがわかる。さらに、ポートフォリオBはわずかな確率で大きな損失が発生するポートフォリオであるにもかかわらず、期待ショートフォールではポートフォリオBのリスクが小さいと判断されている。これは、ポートフォリオBにおける大きな損失の発生確率が僅少であるため、期待ショートフォールでは、潜在的に大きな損失が発生し得るポートフォリオBのリスクが小さいと判断してしまうという形でテイル・リスクが発生していることを示している。

さらに、3次関数型の効用関数（$-W^3/3+10{,}000W$）で測った期待効用をみると、ポートフォリオBの期待効用が高くなり、対数型の期待効用でみた場合と矛盾した結果が得られる。つまり、リスク回避的な効用関数の範囲内ではポートフォリオA、Bの優劣をつけることができず、2次確率優越の意味で順序付けができないことがわかる。したがって、ポートフォリオに2次確率優越の関係がない場合は、期待ショートフォールが期待効用最大化原理と整合的でなく、テイル・リスクも排除できなくなる可能性があることが確認できる。

一方、サンプル・ポートフォリオの2次下方部分モーメントを比較すると、大きな損失のある資産Bのリスクが大きいとの結果となっている。これは直観的には、2次下方部分モーメントが損失の大きさを損失の2乗でみているため、期待ショートフォールに比べ低い確率で生じる大きな損失をリスクとして取り込みやすいためといえる。また、3節で整理した考え方を援用すると、2次下方部分モーメントは3次確率優越と整合的であるため、期待ショートフォールに比べより高い次数のテイル・リスクを排除できることによると考えられる。ただし、対象とするポートフォリオに3次確率優越の関係がない場合は2次下方部分モーメントでは十分でなく、より高次の下方部分モーメントをとる必要性も生じ得る。

6．おわりに

本稿では、既存研究でリスク指標が満たしていることが望ましいとされている性質として、(1) 劣加法性、(2) 凸性、(3) 期待効用最大化原理との整合性、(4) テイル・リスクの排除、の4つを挙げ、VaRと期待ショートフォールがどういった条件でこれらを満たすかを検討した。この結果、期待ショートフォールはVaRよりも幅広い条件でこれらの性質を満たすことが確認された。しかし、期待ショートフォールにも期待効用最大化原理との整合性やテイル・リスクの排除を確保できないケースが存在することに注意する必要がある。

VaRや期待ショートフォールをリスクの計測や管理に利用する際には、こうしたリスク指標としての特徴を十分に踏まえたうえで、これらを活用する必要があると思われる。

補論1．2次確率優越と期待効用最大化原理との整合性の証明

$X_1 \geq_{SSD} X_2$の必要十分条件は、任意の実数xに関して、$U'(x) \geq 0$，$U''(x) \leq 0$を満たす全ての効用関数（凹型増加効用関数）$U(x)$が、$E[U(X_1)] \geq E[U(X_2)]$を満たすことである。本補論ではこの証明をIngersoll［1987］に沿って行う。

議論を簡単にするため、X_1、X_2は有限の区間$[a, b]$上に分布する確率変数とし、その分布関数をそれぞれ$F_1(x)$、$F_2(x)$とする。$X_1 \geq_{SSD} X_2$ということは、任意のxP $[a, b]$に対して、

$$\int_a^x F_1(u)\,du \leq \int_a^x F_2(u)\,du , \tag{A-1}$$

が成立するということである。

十分条件を示す。まず、

$$\Delta(x) \equiv \int_a^x [F_2(u) - F_1(u)]\,du , \tag{A-2}$$

と定義する。（A-2）式より、任意のxP $[a, b]$に対して$\Delta(x) \geq 0$であり、$\Delta(a) = 0$となる。リスク回避型の効用関数を考えていることから、$U''(x)\Delta(x) \leq 0$となるため、部分積分を用いることにより、

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int_a^b U''(x)\Delta(x)dx = [U'(x)\Delta(x)]_a^b - \int_a^b U'(x)\Delta'(x)dx \\
&= [U'(x)\Delta(x) - U(x)\Delta'(x)]_a^b + \int_a^b U(x)\Delta''(x)dx \\
&= [U'(x)\Delta(x) - U(x)(F_2(x) - F_1(x))]_a^b + \int_a^b U(x)(f_2(x) - f_1(x))\,dx ,
\end{aligned} \tag{A-3}$$

となる。ここで、$f_1(x)$、$f_2(x)$はそれぞれX_1、X_2の密度関数である。$\Delta(a) = F_2(a) = F_1(a) = 0$と$F_2(b) = F_1(b) = 1$より、

$$0 \geq U'(b)\Delta(b) + E[U(X_2)] - E[U(X_1)] , \tag{A-4}$$

となる。（A-4）式において右辺第1項は非負であるため、不等号はX_1の期待効用がX_2の期待効用を上回っているときに成立する。ここで、（A-3）式の積分をルベーグ積分の意味で考えると、$U'(x) \geq 0$、$U''(x) \leq 0$が成立しない（例えば$U(x)$が微分できない）場合の測度がゼロであれば同様に十分条件が成立する。

次に必要条件を示す。まず、

$$0 \leq \int_a^b U(x)(f_1(x) - f_2(x))\,dx , \tag{A-5}$$

が全ての凹型増加効用関数$U(x)$について成立している。ここで、凹型増加関数

$m\,(x\,;\,\mathrm{y}) \equiv \min\,(x-\mathrm{y},0)$ を定義する。また、

$$
\begin{aligned}
M(y) &\equiv \int_a^b m(x\,;\,\mathrm{y})\,(f_1(x)-f_2(x))\,dx \\
&= \int_a^y (x-\mathrm{y})\,(f_1(x)-f_2(x))\,dx \qquad \text{(A-6)} \\
&= y\,(F_2(y)-F_1(y)) + \int_a^y x\,(f_1(x)-f_2(x))\,dx\,,
\end{aligned}
$$

と定義する。（A-5）式より、任意のyについて $M(\mathrm{y}) \geq 0$ である。部分積分により、

$$
0 \leq y\,(F_2(y)-F_1(y)) + [\,x(F_1(x)-F_2(x))]_a^y - \int_a^y (F_1(x)-F_2(x))\,dx, \qquad \text{(A-7)}
$$

が得られる。したがって、

$$
0 \geq \int_a^y (F_1(x)-F_2(x))\,dx, \qquad \text{(A-8)}
$$

となる。これは（A-1）式と同じことを示している。ここでも、積分をルベーグ積分の意味で考えると、$U'(x) \geq 0$、$U''(x) \leq 0$が成立しない測度がゼロであれば、同様に必要条件が成立する。

以上により、必要条件、十分条件ともに示された。（証明終）

補論2．期待ショートフォールと2次確率優越との整合性の証明

ここでは、期待ショートフォールと2次確率優越との整合性に関するLevy and Kroll［1978］における以下の結果（Theorem 5'）の証明を紹介する。

> **定理 A-1（Levy and Kroll【1978】 Theorem 5'）**
> 2つの確率変数X_1、X_2について以下が成立する。
>
> $$X_1 \geq_{SSD} X_2 \iff \int_0^{\alpha} q_1(t)\,dt \geq \int_0^{\alpha} q_2(t)\,dt \qquad \forall\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq 1)\,, \qquad \text{(A-9)}$$
>
> ただし、$q_1(t)$、$q_2(t)$ は確率変数 X_1、X_2 の t–分位点である。

（証明）

2次確率優越の定義より、(A-9)式は以下の条件と同値である。

$$\int_{-\infty}^{x} \{F_2(x) - F_1(x)\}\,dx \geq 0,\ \ \forall x \iff \int_0^{\alpha} \{q_1(t) - q_2(t)\}dt \geq 0,\ \forall\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq 1)\,, \qquad \text{(A-10)}$$

(A-10)式左辺は、縦軸に累積確率、横軸に損益額をとったグラフ（図A-1）で、分布関数$F_2(x)$、$F_1(x)$および縦軸に平行な任意の直線で囲まれた面積が非負であることを示している。これを図A-1上で説明すると、例えば、縦軸に平行な直線をx_a^*でとった場合には$S_a^1 + S_a^2 \geq 0$が成立し、縦軸に平行な直線をx_b^*でとった場合には$S_a^1 + S_a^2 + S_a^3 - S_b^1 - S_b^2 \geq 0$が成立するといったことが、縦軸に平行な任意の直線について成立することを示している。

一方、(A-10)式右辺は、同様に図A-1で、分布関数 $F_2(x)$、$F_1(x)$および横軸に平行な任意の直線で囲まれた面積が非負であることを示している。これを図A-1上で説明すると、例えば、横軸に平行な直線をp_a^* でとった場合には$S_a^1 \geq 0$が成立し、横軸に平行な直線をp_b^*でとった場合には$S_a^1 + S_a^2 + S_a^3 - S_b^1 \geq 0$が成立するといったことが、横軸に平行な任意の直線について成立することを示している。

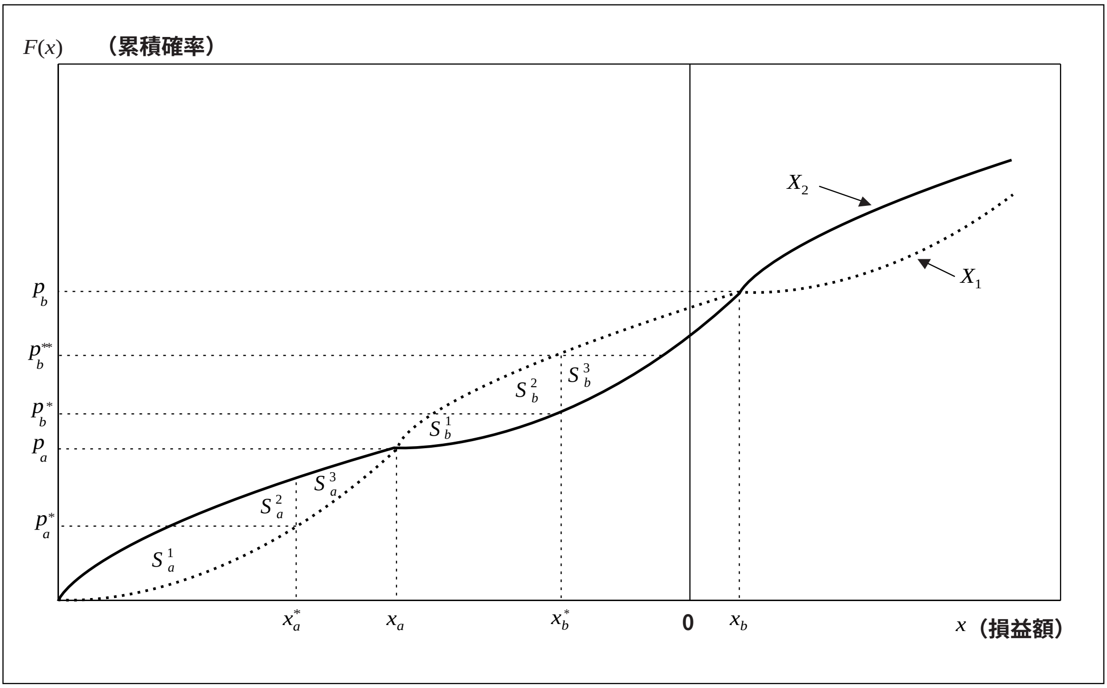
次にこれらが同値であることを示す。まず、2つの分布関数が交差する点で、(A-10)式の左辺と右辺が等しくなることは明らかである。また、(x_a, p_a) が2つの分布関数が最初に交差する点であるとすると、(A-10)式左辺が全てのxで成立する時、任意の$x \leq x_a$で（A-10）式左辺が成立することは明らか。逆に、(A-10)式右辺が全てのα で成立する時、任意のxで（A-10）式左辺が成立することも明らかである。

次に問題となるのは、最初の交差点 (x_a, p_a) 以降の点で（A-10）式が成立するかどうかであるが、これも簡単に示すことができる。まず、(A-10)式左辺が全てのxで成立する時、最初の交差点 (x_a, p_a) と2番目の交差点 (x_b, p_b) の間の点 $x = x_b^*$ をとった時、図A-1で $S_a^1 + S_a^2 + S_a^3 - S_b^1 - S_b^2 \geq 0$ が成立することから、$\alpha = p_b^*$ とした時、

$S_a^1 + S_a^2 + S_a^3 - S_b^1 > S_a^1 + S_a^2 + S_a^3 - S_b^1 - S_b^2 \geq 0$ が成立し（A-10）式右辺は非負である。これは、(x_a, p_a)と(x_b, p_b)の間で(x_b^*, p_b^*)を任意にとった時に成立する。逆に、（A-10）式右辺が全てのαで成立する時、図A-1で$\alpha = p_b^{**}$としても成立することから、$S_a^1 + S_a^2 + S_a^3 - S_b^1 - S_b^2 - S_b^3 \geq 0$ が成立する。この時、$x = x_b^*$とした時の（A-10）式右辺は、$S_a^1 + S_a^2 + S_a^3 - S_b^1 - S_b^2 > S_a^1 + S_a^2 + S_a^3 - S_b^1 - S_b^2 - S_b^3 \geq 0$で非負である。これは、$(x_a, p_a)$ と(x_b, p_b) との間で (x_b^*, p_b^{**}) を任意にとった時に成立する。したがって、最初の分布関数の交差点と2番目の交差点との間の任意の点で、（A-10）式は成立する。

2番目の交差点以降の点でも、同様にして（A-10）式が成立することを示すことができる。したがって、題意は証明された。（証明終）

図A-1　期待ショートフォールと2次確率優越との整合性



参考文献

池田昌幸、『金融経済学の基礎』、朝倉書店、2000年

今野 浩、『理財工学Ⅱ：数理計画法による資産運用最適化』、日科技連、1998年

竹内 啓、『数理統計学』、東洋経済新報社、1963年

竹原 均、「ダウンサイドリスク・モデルによる資産配分」、『ファイナンシャル・リスクマネージメント』、朝倉書店、2000年、28～52頁

山井康浩・吉羽要直、「バリュー・アット・リスクのリスク指標としての妥当性について ―期待ショートフォールとの比較分析による理論的サーベイ―」、『金融研究』第20巻第2号、日本銀行金融研究所、2001年、33～68頁

Acerbi, C., C. Nordio, and C. Sirtori, "Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management," Working Paper, Italian Association for Financial Risk Management, 2001.

———, and D. Tasche, "On the Coherence of Expected Shortfall," Working Paper, Center for Mathematical Sciences, Munich University of Technology, 2001.

Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath, "Thinking Coherently," *Risk*, 10 (11), 1997, pp. 68-71.

———,———,———, and ———, "Coherent Measures of Risk," *Mathematical Finance*, 9 (3), 1999, pp. 203-228.

Bertsimas, D., G. J. Lauprete, and A. Samarov, "Shortfall as a Risk Measure: Properties, Optimization and Applications," Preprint, Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology, 2000.

Bawa, V. S., "Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects," *Journal of Financial Economics*, 2 (1), 1975, pp. 95-121.

Breitmeyer, C., H. Hakenes, A. Pfingsten, and C. Rechtien, "Learning from Poverty Measurement: An Axiomatic Approach to Measure Downside Risk," Diskussionsbeitrag 99-03, Westfälishce Wilhelms-Universität Münster, Institut für Kreditwesen, 2000.

Cumperayot, P. J., J. Danielsson, B. N. Jorgenson, and C. G. de Vries, "On the (Ir) Relevancy of Value-at-Risk Regulation," *Measuring Risk in Complex Stochastic Systems*, Springer Verlag, 2000, pp. 103-119.

Embrechts, P., A. McNeil, and D. Straumann, "Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls," Preprint, ETH Zürich, 1998.

Fang, K.T., and T. W. Anderson, *Statistical Inference in Elliptically Contoured and Related Distributions*, Allerton Press, 1990.

Fishburn, P. C., "Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns," *The American Economic Review*, 67 (2), 1977, pp. 116-126.

Guthoff, A., A. Pfingsten, and J. Wolf, "On the Compatibility of Value at Risk, Other Risk Concepts, and Expected Utility Maximization," *Geld, Finanzwirtschaft, Banken und Versicherungen*, Verlag Versicherungswirtschaft, 1997, pp. 591-614.

Huang, C., and R. H. Litzenberger, *Foundations for Financial Economics*, Prentice-Hall, 1993.

Ingersoll, J. E. Jr., *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield Publishers, 1987.

Konno, H., and H. Yamazaki, “Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market,” *Management Science*, 37, 1991, pp. 519-531.

Levy, H., *Stochastic Dominance*: *Investment Decision Making under Uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

———, and Y. Kroll, “Ordering Uncertain Options with Borrowing and Lending,” *The Journal of Finance*, 33 (2), 1978, pp. 553-574.

Markowitz, H., “Portfolio Selection,” *The Journal of Finance*, Vol.7, No.1, 1952, pp. 77-91.

Mauser, H., and D. Rosen, “Beyond VaR: from Measuring Risk to Managing Risk,” *ALGO Research Quarterly*, 1 (2), pp. 5-20, 1998.

Ogryczak, W., and A. Ruszczynski, “From Stochastic Dominance to Mean-risk Models: Semideviations as Risk Measures,” *European Journal of Operational Research*, 116 (1), 1999, pp. 33-50.

———, and ———, “Dual Stochastic Dominance and Related Mean-Risk Models,” Rutcor Research Report, RRR 10-2001, 2001.

Pflug, G. C., “How to Measure Risk?” *Modelling and Decisions in Economics. Essays in Honor of Franz Ferschl*, Physica-Verlag, 1999.

———, “Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk,” *Probabilistic Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 2000, pp. 278-287.

Rockafeller, R. T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.

———, and S. Uryasev, “Optimization of Conditional Value-at-Risk,” *Journal of Risk*, 2 (3), 2000, pp. 21-41.

———, and ———, “Conditional Value-at-Risk for General Distributions,” Research Report #2001-5, Department of Industrial and Systems Engineering, University of Florida, April 2001.