

# 格付け推移行列のファクター・モデル

もりだいらそういちろう すみたかずと  
森平 爽一郎 / 隅田和人

## 要 旨

バーゼル合意に基づく自己資本規制の改定へ向けた最近の動きにみられるように、信用リスクの計量化にあたって、信用格付けを基礎とする考え方が注目されている。本稿では、格付けの変化を記述する推移確率そのものが時間を通じて変動すると考え、その変化を外生的に与えたファクターによって説明するモデルを構築した。具体的には、(1)将来の1時点における格付け変化を順序プロビット分析によって説明するモデルと、(2)将来の任意の時点の格付け変化を生存分析によって説明するモデル、の2つを提唱し、実際に日本の事業債格付けのデータを用いた分析結果を示した。こうした2つの分析方法により、信用リスク・ファクターの変化がもたらす将来の格付けの変化と、それが債券・貸出の価値に与える影響を評価できるようになり、信用リスクの測定をより適切に行える可能性を示した。

キーワード：信用リスク、格付け推移行列、順序プロビット・モデル、生存分析、コックスの比例ハザード・モデル

.....  
本稿は、森平が日本銀行金融研究所の国内客員研究員として、隅田が同研究生として1999年11月から行ってきた研究プロジェクトの成果の一部である。また、大阪大学大学院国際公共政策研究科における発表に対する大西匡光助教授（経済学研究科）、統計数理研究所における発表に対する山下智志助教授のコメント、そして金融研究所のメンバーによるコメントに深く感謝したい。ただし、あり得るべき誤りはもちろん筆者に属する。なお、本稿で示されている内容および意見は筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。

森平爽一郎 慶應義塾大学総合政策学部（E-mail: mori@sfc.keio.ac.jp）

隅田和人 慶應義塾大学大学院経済学研究科博士課程（E-mail: kasumi@sfc.keio.ac.jp）

## 1 . はじめに

バーゼル銀行監督委員会 (Basel Committee on Banking Supervision [ 1999,2001 ]) による自己資本規制 (いわゆるBIS規制) の改定への動きにみられるように、信用リスクを表す尺度として、債券の外部格付け、あるいは債券 (貸出) の内部格付けに注目することが多くなってきている。BIS規制の新提案では、銀行の抱える信用リスクを把握するにあたって、「標準的手法」を利用する場合には外部格付け機関が決定する信用格付けを、「内部格付け手法」を利用しようとする場合には銀行独自の内部格付けを、利用することが認められている<sup>1</sup>。いずれの手法でも、与信先企業の格付けによって、信用リスク量を測定しようという点は共通である<sup>2</sup>。

銀行自身の信用リスク量に応じたリスク・ベースの必要自己資本を算定するにあたっては、与信先企業の格付け変化がどの様にして生じるのかを知る必要がある。

しかしここで問題になるのは、格付け推移行列そのものが時間と共に変化する可能性があるという点である。この問題は、古くから“rating migration/drift”として議論されている。Altman [ 1998 ]、Fons and Kimball [ 1991 ] 等はアメリカにおいて格付け推移確率そのものが長期間にわたって大きく変化していることを示している。

これまでの格付けに関する実証研究は、現時点における当該債券や貸出がどのような格付けを得ているかにかかわらず、将来時点における格付けを説明・予測するモデルに限定されていた。しかし、このような方法では債券投資や貸出の信用リスクが将来どのように変化するかを評価できない。信用リスクの測定と管理にあたって重要なことは、信用リスクの絶対量とともに、それがどのように増減していくかを説明することである。

本稿では、現在時点の格付けを所与として、将来のある特定の時点、あるいは任意の時点における格付けの変化を、いくつかの外生的に与えられるリスク・ファクターによって説明・予測できるモデルの開発をめざしている。

具体的には、格付け推移行列の変化を説明するモデルを構築した。このために、第1に、現在ある債券や貸出が  $i$  格付けにあるときに、将来の特定時点で  $j$  格付けを取得する確率を、順序プロビット・モデルによって推定した。第2に、将来の任意の時点において、債券や貸出が特定 ( $j$  番目) の格付けをとる確率を、生存分析の手法を用いて推定した。将来の任意時点での格付け取得確率を推定することは、

1 標準的手法および内部格付け手法に関する詳細については、Basel Committee on Banking Supervision [ 2000 a,b ] を参照。

2 他方、米国の財務会計基準 (Statement of Financial Accounting Standards No.5, Accounting for Contingencies, SFAS 5) では、金融機関は、貸出損失の適切な予測を行い、損失が不可避であるときには貸倒引当金を計上しなければならない、としている。貸倒の可能性を適切に見積もるためには、格付けの推移に関するモデル化が必要になる。この点に関しては、例えば、Betancourt [ 1999 ] を参照のこと。

債券や貸出の信用リスク量を計算するためにきわめて重要である。なぜならば、債券や貸出の価値の決定にあたっては、信用リスクにさらされている将来の多期間キャッシュ・フローの期待値を推定し、それを適当な割引率によって現在価値に引き戻す必要があるからである。期待キャッシュ・フローを推定するためには、将来のある時点まで生存しているという条件のもとで、その後の一定期間内に当該債券や貸出が同じ格付けにとどまる、あるいは別の格付けをとる確率を推定する必要がある。将来の1時点の格付け取得確率のみでは、正確な債券や貸出の評価を行うことは困難である。

本稿の構成は以下のとおりである。次節において、この分野の先行研究について展望を行い、本稿との違いを明らかにする。3節において、格付け推移行列を比較的少数のリスク・ファクターによって説明することの意義と分析方法を明らかにする。4節では順序プロビット・モデルを用いた格付け推移行列の推定方法とその推定結果を、5節では生存分析の考え方と推定結果を示す。6節では、これ以前の推定結果に基づく格付け推移行列の予測と債券ポートフォリオ投資比率の変化のシミュレーション結果を示す。7節では、要約と残された課題について言及する。なお補論において、格付け推移行列と債券や貸出価格との間の関係を示す簡単な理論モデルと、個別の与信先でなく集計した格付けデータが利用可能な場合の推移行列の推定法を明らかにする。

## 2. 格付け予測モデリングに関する先行研究

格付け機関による債券の格付けを説明・予測するためのモデルについては、すでに1960年代から数多くの試みがなされてきた<sup>3</sup>。Ederington [ 1985 ]やCheung [ 1996 ]のように、順序プロビットあるいはロジット・モデルを適用して、格付け取得確率を推定するものから、最近のMoon and Stotsky [ 1993a, b ]のように倒産確率と格付け取得確率を同時に推定する、より複雑なモデルまで数多くの試みがなされている<sup>4</sup>。日本の格付け分析に関しては、新美 [ 1995 ] が判別分析に基づく分析を、中山・森平 [ 1998 ]、安川 [ 2000 ] が順序ロジット・プロビット分析による実証結果を示している。他方、小林 [ 2001 ] は、順序ロジット・プロビット分析が多数のリスク・ファクターを統合した1次元尺度に依存していることから、格付けをこうした方法によって分析する場合の問題点を指摘し、それに代わる推定方法を提唱している。

これに対して、現在の格付けを所与として、それが将来いかに変化するかを説明し、その確率を推計しようとする試みは最近始まったばかりといつてよい。

3 こうした研究の展望に関しては、森平 [ 2000c ] を参照のこと。

4 Moon and Stotsky [ 1993a, b ] は、従来の単純な格付け予測モデルを拡張し、格付け機関が知覚する当該債券の信用リスクの大きさ（倒産確率）と格付け付与確率とを同時に推計するようなモデルをアメリカの地方債データを用いて分析している。Moon and Stotsky [ 1993a ] の方法に基づく日本における実証結果については、安川 [ 2000 ] を参照。

Nickell, Perraudin and Varotto [ 2000 ] は、1970年から1997年にわたるMoody'sによる5万件あまりの格付けデータに基づき、格付け取得確率を、国（4カ国）、産業（9産業）、景気循環（4つ）などのファクターによって、順序プロビット・モデルを用いて推定した。モデルの推定は、発行時における格付け別に行われているので、発行時の最初の格付けからの推移確率を推定するものであるといえる。

同様な試みは、Kim [ 2000 ] によっても行われている。Kimはデフォルトを含む7段階の格付け推移行列をプロビット・モデルにより推定している。まず、49年間のマクロ的な信用スプレッド、10年物国債利回り、CPIインフレ率、GDP成長率データから、信用循環インデックスを作成する。この信用循環インデックスを説明変数として、1980年から1998年の格付け変更確率を順序プロビット・モデルによって推定している。

格付けを信用リスクを表す状態変数としてでなく、債権のキャッシュ・フローの状態、すなわち、延滞、デフォルト状態などに注目して同様な分析を行った例としては、Smith and Lawrence [ 1995 ]、Smith, Sanchez and Lawrence [ 1996 ] がある。彼らは1992年のある米銀の32,000件余りのモービル・ホームを抵当とする貸出の信用リスクを分析している。融資が取り得る状態を、正常支払い、30～89日延滞、90日以上の延滞、不渡り、破綻とし、その間の状態推移確率を16個の説明変数に基づく多項ロジット・モデルを用いて推定し、さらに推定倒産確率に基づく期待損失額の推計を行っている。

同様に、格付けの変化に着目するのではなく、延滞、法的な係争状況、破産など貸出の状態に関して定義された推移行列をもとにして、企業や銀行の信用リスク分析を試みたものとしては、古くは、Cyert and Thompson [ 1968 ]、Howard [ 1960 ] などがあり、その後、銀行の抱える実際のデータを用いた分析として、Del Angel *et al.* [ 1998 ]、Barkman [ 1981 ]、Betancourt [ 1999 ] などがある。しかしながら、これらの研究では推移確率が一定で、しかもそれは外生的に与えられるものと仮定し分析を行っている。

### 3 . 債券・貸出評価モデルと格付け推移行列

#### (1) なぜ格付け推移行列のファクター・モデルが必要なのか？

債券や貸出の価格が格付け推移行列  $P$  に依存して決定されると考えることにする<sup>5</sup>。さらに、債券価格を決定する信用リスクを示す格付け推移行列が少数のリスク・ファクターによって説明できると考えてみよう。価格決定にあたって、リスク・ファクターを考えることは、次に示す2つの理由による。

.....  
5 詳細は補論に示した。(A-2)式あるいは(A-3)式を参照。

### イ．パラメータ推定の問題

現在多くの格付け機関は、社債格付けとして、AAAからDまでノッチ(+, -)を含めた格付けを付与している。また多くの日本の銀行は、貸出にあたって10から20段階の異なる内部格付けを保有債権に関して考えている場合が多い<sup>6</sup>。例えば、格付けが10段階で、3年間にわたり毎月格付けの推移確率の更新推定を行っている場合を考えてみよう。融資のプライシングを行う場合、 $(10 \times 9) \times (3 \times 12)$ 個の格付け推移行列の要素の推定が必要になる。これに対し、格付け推移行列の要素を、例えば4個のリスク・ファクターによって説明しようとするモデルでは、 $(10 \times 9) \times 4$ 個のパラメータの推定値が必要になるにすぎない<sup>7</sup>。例えば、Aonuma and Tanabe [2001] は、日本の社債の信用スプレッドから18段階の格付け推移行列をインプライドに推定しようとしている。この場合、格付けは、債券価格の毎月の変化に応じ、最長30年にわたり毎月変化すると想定している。このため、推定すべき推移確率の数は膨大になる。Aonuma and Tanabe [2001] では、統計的方法でなく数理計画手法を用い、推移行列の要素に対する先験的なゼロ制約や大きさの順序制約などを課することにより、パラメータの推定数を大幅に減らす試みを行っている。他方、もしファクター・モデルを考えるならば、こうした問題を比較的容易に解決することが可能になる。

### ロ．信用リスクVaRの計算

リスク・ファクターの値が、確定的あるいは不確実に変化すると、格付け推移行列も変化する。推移行列の変化は、さらに債券や貸出価値の不確実な変化をもたらす。企業財務指標やマクロ経済変数がリスク・ファクターであるときには、そうした変数の確率的な変化に応じた債券や貸出価値の不確実性を推定することができる。翻ってリスクをベースにした必要自己資本量、いわゆる信用リスクVaRの計算が可能になる<sup>8</sup>。

## (2) 格付け推移行列のファクター・モデル：その推定方法

格付け推移行列をいくつかのリスク・ファクターによって説明しようとする場合、分析に利用できるデータの種類に応じて、推定モデルは次の2つに大別される。第1の方法は、個々の貸出や個別銘柄債券の格付け推移に関するパネル・データが利用可能な場合である。第2の方法は、格付けごとの貸出件数や債券銘柄数、ある

6 邦銀が採用する格付け段階数に関しては、金融情報システムセンター [2000] による邦銀の調査結果を参照のこと。

7 格付け推移確率行列の行和は1にならなければならないという制約条件がある。したがって、推定すべきパラメータは行数マイナス1になることに注意せよ。

8 具体的には、(A-2)式において、リスク・ファクターの確定的・確率的な変動に依存して、格付け推移行列がさまざまな値を取るようになる。その結果、債券や貸出の価値の分布を得ることができる。例えば、そのときの分布の下方1%をもってして、信用リスクVaRとすることができよう。

いはその比率が、集計された時系列データとして利用可能な場合である。本稿ではおもに第1の方法について述べ、第2の方法については補論で取り上げている。以下では、第1の方法をさらに分けて、順序プロビット・モデルを利用する方法と、生存分析を用いる方法のそれぞれについて、推定方法と推定結果を共に明らかにする。

#### 4．順序プロビット・モデルによる1期間格付け推移行列の推定

##### (1) 順序プロビット・モデルによる格付け推移確率の推定方法

格付け機関は、財務諸表をはじめとする定量的情報あるいはそのほか利用可能な定性情報から格付けを行う。この場合、格付け機関は現在  $i$  番目の格付けにある特定の企業あるいは債券が次の期に  $j$  番目の格付けに変更する可能性、つまり信用リスク度を考えている。この信用リスクの度合いを、格付け機関は、 $L$ 個の財務要因  $X_l$  ( $l=1, 2, \dots, L$ ) と、それぞれの要因の重要性を表す重み  $\beta_l$  ( $l=1, 2, \dots, L$ ) とに基づき、格付け判定していると考ええる。さらにそうした信用判断には不確実性や誤差  $\varepsilon_{ij}$  がつきまとう。われわれは、格付け機関がこれら2つをもとにして、その企業の信用リスクの度合いを表す信用インデックス  $I_{ij}$  を作成していると仮定する。つまり次式で表されると仮定する。

$$I_{ij} = \sum_l^L \beta_l X_l + \tilde{\varepsilon}_{ij}. \quad (1)$$

ここで、誤差項  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  が平均ゼロ、分散1の正規分布に従うと仮定する。格付け機関は、この1次元の信用インデックスの値  $\tilde{I}_{ij}$  があらかじめ決められた特定の区間内にあるとき、 $t$  期に  $i$  番目の格付けにある債券や貸出に対し、 $t+1$  期に  $j$  番目の格付けを付与する。この区間は、 $K$ 個の格付けがあったときに  $K-1$ 個の閾値 ( $\mu_j, j=1, 2, \dots, K-1$ ) によって決定される。閾値を外部からは知ることが出来ず、(1)式のパラメータとともに閾値を同時に推定する。この場合、 $\tilde{j}$  は  $t$  期に  $i$  番目の格付けにあった債券や貸出が、 $t+1$  期に  $j$  番目の格付けを取ることを意味する確率変数である。こうした点を式で示すと次のようになる。

$$\tilde{j} = \begin{cases} 1 & \text{if } \tilde{I}_{ij} \leq \mu_1 \\ 2 & \text{if } \mu_1 < \tilde{I}_{ij} \leq \mu_2, \\ \vdots & \\ K & \text{if } \tilde{I}_{ij} > \mu_{K-1} \end{cases} \quad (2)$$

ただし、ここで $\mu_1$ については、一般性を失うことなく、0と基準化している<sup>9</sup>。

(1)式と(2)式のパラメータ $\mu_j$ と $\beta_l$ を最尤法によって同時に推定する。ここで、閾値はアナリストの格付け判断の厳しさを表し、係数 $\beta_l$ は格付けにあたって考慮された要因の重要性を示していると考えられる。これから、 $t$ 期に $i$ 番目の格付けにある債券・貸出が $t+1$ 期に $\tilde{j}$ (ここで $j=1, 2, \dots, K$ )番目の格付けを得る確率は、順序プロビット分析において

$$\begin{aligned} \Pr(\tilde{j}=1) &= \Phi\left(-\sum_l \beta_l X_{il}\right), \\ \Pr(\tilde{j}=2) &= \Phi\left(\mu_1 - \sum_l \beta_l X_{il}\right) - \Phi\left(-\sum_l \beta_l X_{il}\right), \\ &\vdots \\ \Pr(\tilde{j}=K) &= 1 - \Phi\left(\mu_{K-1} - \sum_l \beta_l X_{il}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

で示される。ここで $\Phi(\cdot)$ は正規分布の累積密度関数を示す。当然これらの確率はゼロと1の間の値をとり、合計すると1になる<sup>10</sup>。

ここで再度確認したい点は、われわれは、ある債券あるいは貸出が、 $t$ 期に $i$ 番目の格付けであることが観察されている時に、 $t+1$ 期に $j$ 番目の格付けを取得する確率、つまり条件付確率を推計しようとしている点である。これに対し、既示した先行研究の多くは、現在の格付けがどのようなものであるかにかかわらず、将来時点の特定格付けの取得確率、いわば無条件格付け取得確率を推定しようとしている。

## (2) 推定に用いたデータと説明変数の選択

順序プロビット・モデルにより格付け変化の分析を行うために、日本格付情報センター(R&I)の格付けを採用した。その理由は、格付け銘柄数が最も多かったことによる。

日本公社債研究所(JBRI)は1998年4月より日本インベスターズ・サービス社との合併により日本格付情報センター(R&I)となり、合併後の格付けが同年5月より発表されている。合併前と合併後では、格付けスプリット(rating split)とよばれるような、異なった格付け基準に基づく格付けを行っていることが予想されたた

9 格付けは順序尺度であることから、信用インデックスの値と閾値の絶対値は意味を持たないことに注意。

10 ここで $K$ 個の格付け取得確率を別々に推定している。しかし、 $K$ 個の格付けに対し(1)式と(2)式を同時に推定することを考えることもできる。特に $K$ 個存在する(1)式において、 $K$ 個の誤差項が互いに相関を持っている時には、同時にパラメータを推計することにより、よりよい推定値を求めることができることに注意しなければならない。今回は利用できる推定プログラムの都合上、個別の式を別々に推定したが、このことは誤差が無相関であると仮定できる時のみ正しい。したがって、この問題はパラメータ推定と格付け取得確率にバイアスをもたらしている可能性があることに注意しなければならない。この点を指摘された匿名の査読者に感謝したい。

め、合併後の格付けだけ、つまり1998年9月から1999年9月にわたる1年間の格付けのデータを利用し、この間の格付け推移を1999年9月に発表されている中間決算の財務指標の情報によって説明することを試みた。

分析対象とした債券は次のように選択した。まず、R&Iから格付け<sup>11</sup>を取得している企業1,005社の中から、「銀行業」、「その他金融業」、「保険業」、「証券、商品先物取引業」を除く事業会社に属する企業が発行した債券に注目した。このうち1998年9月と1999年9月に格付けを取得しており、かつ9月に中間決算を報告している一般事業会社493社を分析の対象とした。

更に、順序プロビット分析は、1998年9月の格付け別のデータ・セットごとに推定を行う必要があり、必要な標本数を確保するためには15段階にのぼる格付けをより少ない数にグループ化する必要があった。しかし、他方で新美 [ 1995 ]、中山・森平 [ 1998 ]、安川 [ 2000 ] のようにノッチ (+、-) を無視してごく小数の格付けグループにまとめると、この期間に変化した格付け銘柄数が少なくなるという問題が生じる。このトレード・オフ問題を考慮し、最終的に上位と下位の格付けに関しては次のようなグループ化を行った<sup>12</sup>。「AAA、AA+、AA、AA-」の格付けを「AAA/AA」としてまとめ、「BB+、BB、BB-、B+、B、B-、CCC+」を「BB」としてまとめた。

機関投資家は、債券投資にあたり、AA以上を投資適格、BB以下は投資不適格としていることが多いことから、このようなグループ化も意味があると考えてよいであろう。この結果、格付け数は8つになった。このようにグループ化した格付けに基づいて、1998年9月から1999年9月の間に変化した格付け件数と推移確率を示したのが表1である。表1(2)の推移確率は、件数の行和により行列の各要素の件数を割ることにより求めている<sup>13</sup>。

格付けの推移を説明するファクターとして、各段階の格付けを取得している債券に対応する企業の財務指標を9月決算の有価証券報告(単独中間決算)から採用している<sup>14</sup>。どの財務指標を採用するかはこれまでの研究により異なるが、ここでは表2に示された指標を候補としている。各指標は、伝統的な財務諸表分析でよく議論される、安定性、レバレッジ(負債比率)、収益性、効率性、株式指標、企業規模、などを表す代表的な指標である。これらのうち、最終的な推定結果において有

11 この中にはR&Iが企業からの依頼を受けずに、独自に格付けを発行している勝手格付けが含まれている。

12 この研究で用いた日本格付情報センター(R&I)による格付けの意味は次のとおりである。AAA: 債務履行の確実性は最も高く、多くの優れた要素がある。AA: 債務履行の確実性は極めて高く、優れた要素がある。A: 債務履行の確実性は高く、部分的に優れた要素がある。BBB: 債務履行の確実性は十分であるが、将来環境が大きく変化した場合、注意すべき要素がある。BB: 債務履行の確実性は当面問題ないが、将来環境が変化した場合、十分注意すべき要素がある。B: 債務履行の確実性に問題があり、絶えず注意すべき要素がある。CCC: 債務不履行になる可能性が大きく、将来の履行に懸念を抱かせる要素がある。C: 最低位の格付けで、債務不履行に陥っているか、またはその懸念が極めて強い。

13 この方法により求められた推移確率は最尤推定量になっている。詳しくは、森村・高橋 [ 1979 ] 第5章を参照のこと。

14 財務諸表データ・ベースとしてQUICKのAMSUSを利用した。

表1 統合後の1998年9月から1999年9月への格付け推移

## (1) 推移件数

98年9月/99年9月	AAA/AA	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-	BB	合計
AAA/AA	64	13	3	2					82
A+	1	25	12	2					40
A			36	15	11	2			64
A-				56	13	16	5	1	91
BBB+					35	8	11		54
BBB					3	47	21	12	83
BBB-						3	32	22	57
BB								22	22
合計	65	38	51	75	62	76	69	57	493

## (2) 推移確率

98年9月/99年9月	AAA/AA	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-	BB	合計
AAA/AA	0.780	0.159	0.037	0.024	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
A+	0.025	0.625	0.300	0.050	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
A	0.000	0.000	0.563	0.234	0.172	0.031	0.000	0.000	1.000
A-	0.000	0.000	0.000	0.615	0.143	0.176	0.055	0.011	1.000
BBB+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.648	0.148	0.204	0.000	1.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.000	0.036	0.566	0.253	0.145	1.000
BBB-	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.053	0.561	0.386	1.000
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000

意な変数として残った変数は次のようなものであり、それぞれに関する経済的な意味は次のようになる<sup>15</sup>。

有利子負債比率は、利払いの必要な負債が自己資本の何倍であるかを表す比率である。[ (有利子負債/資本合計) × 100 ] の対数変換を行い分布が左右対称な分布に近くなるようにした。負債比率が高いほど格付けが低下する危険は増すと考えられるので、係数の符号条件は正である。この点を、倒産確率推定のオプション・アプローチをもって説明することもできる。オプション・アプローチでは、倒産確率は、債務超過確率、すなわち将来時点の企業資産価値がその時の負債価値を下回る確率として推定される。したがって、将来時点において、資産に占める負債の割合が重要な尺度になる。負債対総資産比率は、分母の総資産が負債と自己資本の合計であることを考えると、ここでいう負債比率と高

15 以下の説明で株式ベータ値は、後に示すように、生存分析でのみ用いられている。

い相関を持つであろう。この意味で、有利子負債比率は、信用リスクの重要な代理変数と考えることができる<sup>16</sup>。借入金依存度に関しても同様な解釈もできる。総資産事業利益率(ROA)は、企業全体の収益性を示す指標である〔(事業利益/資産合計)×100〕ここで事業利益は営業利益に受取利息・割引料そして配当金を加えたものである。このROAは「売上高営業利益率×総資産回転率」に等しくなっている。前者は営業利益の売上高に占める割合を示し収益性の代表指標であり、後者は資産全体の効率性をみる指標である。この結果ROAは収益性と資産の効率性を表す総合的な財務比率となっている。ROAが増加するほど、格付け低下の危険度は低くなると考えられるので、期待される係数の符号条件は負である。また、自己資本利益率(ROE)も同様な解釈を行うことができる。時価総額は、企業規模を表す変数である。対数変換を行い、分布が左右対称に近くなるようにした。企業規模を表す変数としては先行研究では資本合計を使用することが多いが、資本合計は簿価であり、時価表示の時価総額の方が適切であること、有利子負債比率の計算に既に使われており、多重共線性の問題を回避する必要があることという、2つの理由で時価総額を企業規模を示す変数とした。規模が大きいほど信用リスクが少ない、あるいは規模が大きいゆえ貸付け金融機関がデフォルトを宣告することが困難であるという理由から格下げが生じにくいと考えられる。このほか、キャッシュ・フローあるいは営業利益も、収益性を表すとともに企業規模をも表す変数と考えることが出来よう。リスクを表す指標として、過去60ヵ月の日経平均株価指数から計算された株式ベータ値を考えた。これは次式

$$R_j - R_F = \alpha_j + \beta_j (\bar{R}_M - R_F) + \tilde{u}_j, \quad (4)$$

における回帰係数 $\beta_j$ の推定値である。ここで $\alpha_j$ は定数項、 $\bar{R}_j$ はj番目の企業の月次株式投資収益率、 $\bar{R}_M$ は日経総合株価指数の月次投資収益率(月末値)、 $R_F$ はリスク・フリー・レートの代理変数として日経公社債インデックス短期(月率、月末値)の収益率を用いている。この指標は、分散投資によって除去できないリスク、システマティック・リスク(組織的危険)を表している。ベータ値は価格変動リスクの尺度であるが、信用リスクは価格変動にも一部織り込まれているという解釈も行うことができる。したがって、格下げとベータ値には正の相関があり、係数の符号条件は正であると考えられる。

16 倒産確率推定のオプション・アプローチについては、森平[2000a]を参照のこと。ただし、この方法では、総資産と負債は時価評価であるべきであり、デフォルト距離(default distance)として知られている倒産確率推定のための信用リスク尺度は、資産時価の期待値と負債価値の期待値の「比」でなく、「差」として、さらにこの差を資産価値変動の標準偏差(ボラティリティ)で割ったものとして定義されている。それに対し、ここで用いた負債比率は簿価表示であり、資産変動のボラティリティを考慮していないため、本来の信用リスクの尺度である時価表示の負債対総資産比率の代理指標であると考えなければならないであろう。

表2 1期間格付け推移行列推定のための候補変数

特徴	財務指標	単位
安定性	インタレスト・カバレッジ	倍
	自己資本比率	%
	時価自己資本比率	%
レバレッジ	固定長期適合率	%
	固定比率	%
	負債比率	%
	有利子負債	100万円
	有利子負債比率	%
	借入金（有利子負債）依存度	%
支払能力	流動比率	%
収益性	売上高営業利益率	%
	売上高経常利益率	%
	自己資本利益率（ROE）	%
	総資産事業利益率（ROA）	%
資産活用の効率性	固定資産回転率	%
	総資産回転率	%
株式指標	一株当たり利益	円
規模	時価総額	100万円
	キャッシュ・フロー	100万円

備考：「キャッシュ・フロー」は「当期利益 + 減価償却実施額 - 中間配当額 - 株主配当金 - 役員賞与」により計算されている。

### （3）順序プロビット・モデルによる推移確率の推定結果

格付け取得確率に影響を与えるファクターとして何をを用いるべきかについて明確な理論的裏付けがあるわけではないが、これまでのこの分野における先行業績と、格付け別の初等統計量に基づき変数選択をまず行った。その後1998年9月の格付けに依じて、各付けごとに7つのデータ・セットを作成し、1年後の1999年9月の低い格付けを0とし格付けが1ランク上昇するごとに、ランクを1つずつ増やすように値を与えた。財務指標についてはそのまま使う指標と、対数変換した指標との2種類を推定に用いている。規模に関する指標は対数変換を試み、極値による影響を排除するようにしている。

説明変数として採用する財務指標の選択は安川 [ 2000 ] に類似した方法をとった<sup>17</sup>。まず、どの財務データが格付けの推移に関連しているかを検討するため、数値化した格付け ( $Z$ ) を個々の財務変数 ( $X$ ) に単回帰し、 $X$  の係数が有意に0と異なるかどうかを調べた。次に、個別に有意であった財務データが全体として、格付けの変化に影響するかをみるために、単回帰で有意となった財務変数を重回帰分析で用い、符号条件を満たす説明変数を選択した。この結果、例えば格付けBBB+の単回帰分析においては有意な説明変数が多かったが、重回帰分析においては借入金依存度しか残らなかった。

最後に、先に行った重回帰によって得られた最小自乗推定値を初期値として、順序プロビット・モデルのパラメータを推定した<sup>18</sup>。この推定結果が表3に示されている。各モデルの最尤推定にあたって、標本数が少ないグループ (例えば格付けA+) を含めて全ての格付けグループで収束した。推定結果から求められた尤度比検定統計量の値とその $p$ 値をみるとわかるように、どの格付けでも全ての係数が0という帰無仮説が棄却されており、モデル全体として統計的意味があることがわかる。各モデルの個々の係数も統計的に有意である。表4に示された閾値の推定値が有意でないのはAAA/AAからA+へ推移する場合だけである。

実際の格付けとモデルから予測された格付けとの間の関係をみると、実際にこの1年間に生じた格付けの変化の58%から78%を予測できたことがわかる。格付けの絶対水準を説明しようとした中山・森平 [ 1998 ]、安川 [ 2000 ] による結果では、全ての格付けについて70から80%の格付けを予測できた。しかし、それらの結果はあくまでも格付けの変化でなく、その絶対水準を説明しようとしていたことと、格付け分類数が本稿より少なかったことに留意する必要がある。

係数の推定結果をみると、各グループの格付け推移を共通に説明するような財務変数は存在しないことがわかる。中山・森平 [ 1998 ]、安川 [ 2000 ] で有意となっている規模に関する財務指標は、上位 (AAA/AA、A+) と下位 (BBB、BBB-) の格付けで有意であったが、全てのグループの格付け推移においては有意ではなかった。これは、新美 [ 1995 ] によって示されているように、最近になるほど規模以外の指標が高い因子負荷量を持つようになってきているとする分析結果と整合的である。

17 安川 [ 2000 ] は、1時点の債券格付けを予測するモデルを推定するために、分析の対象とする企業の107の財務指標を収集し、第1ステップとして、数値化した格付けを各財務指標に回帰し有意となる指標を選択している。第2ステップとして第1ステップの結果有意であった指標を説明変数として数値化した格付けに対し、ステップ・ワイズ法により説明変数を選択している。第3ステップとして、絞り込まれた指標を用いて順序プロビット・モデルを推定している。この方法には、3段階の選択プロセス全体に対して、有意水準を一定の水準に抑えることができないという問題点が存在する (1つのステップでの誤った判断は続くステップに波及する)。他の方法として全てのモデルに共通の説明変数を用いる方法、新美 [ 1995 ] のように各グループごとの財務指標を用いて因子分析を行い抽出された因子ごとに代表的な財務指標を用いる方法もあるが、どの方法が適切であるかは一概に言えないであろう。

18 推定にあたってはLimdep計算プログラムを使用している。そこでは最適化方法としてニュートン法を用い、情報行列の推定には、対数尤度関数の2階微分を用いている。収束の判断はパラメータ推定値のノルムで行い、0.001を基準としている。

表3 順序プロビット・モデルの推定結果

変数	AAA/AA	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-
時価総額		2.92E-04 (-2.63)					9.07E-04 (-2.35)
*時価総額						0.803333 (-4.4)	
営業利益				5.19E-05 (-2.81)			
*キャッシュ・フロー	0.457325 (-2.6)						
売上高営業利益率							0.084372 (-2.36)
総資産事業利益率(ROA)			0.528434 (-2.85)				
*当座比率		0.564894 (-2.62)					
時価自己資本比率				1.43653 (-4.07)			
有利子負債比率			-4.44E-03 (-3.99)				
*有利子負債比率						-0.66345 (-4.32)	
有利子負債				-1.26E-06 (-2.29)			
借入金依存度					-0.04505 (-3.49)		
定数項	-2.563 (-1.46)	-1.553 (-1.45)	2.169 (-4.84)	1.746 (-3.59)	2.348 -4.73	-0.3155 (-0.31)	-0.124 (-0.59)
観測値数	82	40	64	91	54	83	57
対数尤度	-53.19	-28.59	-55.54	-78.43	-40.8	-67.09	-41.54
尤度比	7.91	14.56	26.46	41.75	14.3	43.34	13.41
$\rho$ 値	[0.005]	[0.001]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.001]
的中率(%)	78	62.5	64	63.7	64.8	57.8	73.3

備考：\*の付いている変数は、対数変換を意味し、( )内の数値は漸近的 $t$ 値である。

また、レバレッジに関する変数は中位格付け(A、A-、BBB+、BBB)で有意である。そのほかの財務変数(収益性、流動性、運用調達)は中位(A+、A、A-)の格付け推移に有意な影響を及ぼすことがわかる。全体の傾向をまとめると、上位と下位の格付けの推移では規模の変数が影響を及ぼし、中位の格付けでは負債関連の変数が影響をもつ傾向がみられる。

格付けが最上位にとどまる、あるいは格下げになるモデルを推定することは、困難であった。表3の2列目に示されているように、上位格付けの推移に対する有意

な説明変数として採用できたのは対数キャッシュ・フローのみであった。これには次のような理由を考えることができる。第1に、最上位格付けを取る債券銘柄数が少なかったという標本の大きさの問題があること。第2に、格付けAAA/AAは最上位格付けであるため、それ以上の格付けを取ることができないという上方推移の制約があるという点で他の格付けと異なる性格を持っていること。第3に、格付けは信用リスクを表す指標であるため、信用リスクがほとんど無い高格付け債券銘柄を説明することが財務データのみでは困難であったこと。最後に、標本数を確保するために、2つの異なる格付けAAAと格付けAAの債券をグループ化したこと。いずれにせよ、高格付け銘柄の推移を説明するにあたっては、キャッシュ・フローに加え、非財務的な企業の将来に関する定性的情報が必要になるであろう。

表4 閾値( $\mu$ )の推定結果

変数	AAA/AA	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-
AAA/AAに留まる	1.24016 (-4.2)						
AAA/AAからA+	0.418274 (-1.79)						
A+からAAA/AA		4.7118 (-5.92)					
A+に留まる		1.62831 (-3.69)					
Aに留まる			2.21722 (-5.73)				
AからA-			1.271 (-3.64)				
A-に留まる				2.64234 (-5.75)			
A-からBBB+				2.06201 (-4.58)			
A-からBBB				0.951097 (-2.34)			
BBB+に留まる					0.549164 (-3.09)		
BBBからBBB+						4.55674 (-6.95)	
BBBに留まる						1.09991 (-5.19)	
BBB-からBBB							2.4283 (-5.5)

備考：( )内の数値は漸近的*t*値である。

表5 は、推定モデルに基づく1998年9月から1999年9月までの格付け推移の推定件数と推定された推移行列を示している。モデルからの予測が実績を十分説明していない場合もいくつか存在するが、これは標本数が少ないためであると考えられる。全体としてみると、高い格付けでは、必ずしも実績をよく予測しているとは言い難いが、低い格付けでは実績をかなりよく説明しているといえる。

表5 推定された98年9月から99年9月への格付け推移

## (1) 推移件数

98年9月/99年9月	AAA/AA	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-	BB	合計
AAA・AA	82								82
A+		30	9	1					40
A			49	7	7	1			64
A-				74	0	16	0	1	91
BBB+					47	0	7		54
BBB					1	62	11	9	83
BBB-						2	45	10	57
BB								22	22
合計	82	30	58	82	55	81	63	42	493

## (2) 推移確率

98年9月/99年9月	AAA/AA	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-	BB	合計
AAA・AA	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
A+	0.000	0.750	0.225	0.025	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
A	0.000	0.000	0.766	0.109	0.109	0.016	0.000	0.000	1.000
A-	0.000	0.000	0.000	0.813	0.000	0.176	0.000	0.011	1.000
BBB+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.870	0.000	0.130	0.000	1.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.000	0.012	0.747	0.133	0.108	1.000
BBB-	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.035	0.789	0.175	1.000
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000

## 5. 生存分析による格付け推移確率の期間構造推定

債券価格や貸出価格を算定するためには、将来の任意時点において特定の格付けにとどまる、あるいは他の格付けに推移する確率の推定値が必要になる。なぜならば、価格はこの格付け推移確率を用いて計算した将来期待キャッシュ・フローの現在価値として求めることができるからである。より正確にいうと、このためには、現在の格付けを所与として、 $t$  期間後に同一の格付けにとどまる確率（生存確率）あるいは異なる格付けに変化する確率（死亡確率）を推計しなければならない。つまり、このことは、横軸に債券や貸出の残存期間をとり、縦軸に債券や貸出が特定

の格付けを保持する確率をとり、その間の関係を示す曲線を推定することに等しい。そうした意味で、これは格付け推移確率の期間構造を示している。

われわれは、このために、生存分析、とりわけ、「多重繰り返しイベントがある場合の生存分析」を用いて、 $t$  期間格付け推移行列を推計する<sup>19</sup>。生存分析のファイナンス領域への応用はこれまで、森平 [2000b] で示されたように、倒産確率の期間構造推定のために主に用いられてきた。しかし、格付け推移確率を生存分析によって分析するためには、いくつかの異なる格付け変更がありうること、つまり多重イベント (multiple events) あるいは競合リスク (competitive risks) の問題と、一定期間内に同じ格付けをとることがありうること、つまり繰り返しイベント (repeated events) の問題、の2つの問題を処理する必要がある<sup>20</sup>。

このために、まず本稿の目的に沿った形で、簡単に生存分析の考え方を説明し、そのうえでどのようにして、 $t$  期間にわたる格付け推移確率を推計できるか、さらに信用リスクのある債券や貸出の評価を行うために1期間推移行列を計算できるかを示すことにする。

## (1) 生存時間分析

ここでは、推移確率のファクター・モデルを用いた分析の枠組みとなる生存時間分析と、その中で特にコックスの比例ハザード・モデルについて述べる<sup>21</sup>。

### イ．生存確率とハザード率

ある企業が特定の格付けを取得して、それが変更されるまでの継続時間 (生存時間) を  $\tilde{T}$  とする。この時間  $\tilde{T}$  は確率変数であり、その分布関数を  $\Pr(T \leq t) = F(t)$ 、その密度関数を  $F'(t) = f(t)$  と記す。初期時点では格付け変更がないので  $F(0) = 0$  であり、時間を無限にとるとその格付けが変更されることは確かであるから  $F(\infty) = 1$  である。逆に現在の格付けが  $t$  期間以降継続する生存確率 (生存関数) は、 $S(t) = \Pr(\tilde{T} > t) = 1 - F(t)$  により求められる。

生存時間分析において生存確率を推定する場合、次に定義するハザード率を推定し、その後、両者の関係から生存確率を逆算する。今、ある時点  $t$  から微小時間  $\Delta t$  だけ経過したときに、格付けが変化する危険率 (ハザード率) は以下ようになる。

19 ここでは、疫学でいう生存時間分析を分析手法を表す名前として用いた。工学でいう信頼性分析、計量社会学でいうイベント経歴分析 (event history analysis)、計量経済学でいうデュレーション分析 (duration analysis) はすべて同じ手法を意味する。

20 繰り返しイベントの処理方法に関しては、5.(2)節を参照のこと。

21 コックスの比例ハザード・モデルも含む生存分析一般に関しては、大橋・浜田 [1995] 特に生存分析と信用リスクの測定問題との間の関係については、森平 [2000b] を参照。

$$\begin{aligned}
h(t) &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\Pr(t < \tilde{T} \leq t + \Delta t \mid \tilde{T} > t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\Pr(t < \tilde{T} + \Delta t) - \Pr(\tilde{T} \leq t)}{\Delta t} \frac{1}{\Pr(\tilde{T} > t)} \\
&= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{-(S(t + \Delta t) - S(t))}{\Delta t} \frac{1}{S(t)} \\
&= \frac{-S'(t)}{S(t)} = \frac{f(t)}{S(t)} \\
&= \frac{-d \log S(t)}{dt} \\
&= \frac{f(t)}{1 - F(t)} . \tag{5}
\end{aligned}$$

(5)式は、統計学でいう「ミルズ比 (milles ratio)」を示している。他方、ハザード率と生存確率 (関数) との関係は、(5)の最後の結果の両辺を積分することにより、次のように示される。

$$S(t) = e^{\int_0^t h(u) du} \equiv e^{-H(t)} . \tag{6}$$

ここで

$$H(t) \equiv \int_0^t h(u) du , \tag{7}$$

を累積ハザード率と呼ぶ。また、ハザード率を時間  $t$  の関数とみなし、これをハザード関数と呼ぶこともある。

#### □ . 最尤法によるパラメータ推定

$N$  銘柄の債券や貸出がその格付けを保持する期間のデータ、すなわち生存時間データが従う尤度関数を、これらのデータが独立であると仮定した場合について導出する。まず  $d_i$  を  $i$  番目の債券や貸出の格付けが観測期間終了時点で変更されていれば1、そうで無ければ0をとる「打切り」を表す変数とする。つまり、当該債券や貸出の格付けが、データ観測期間の最終時点で依然として変更がないかどうかを示す1,0のダミー変数である。次に  $i$  番目の債券や貸出の格付けが、 $t_i$  時点で変更される確率は  $f(t_i)$  とする。また観測期間の終わりまで  $i$  番目の債券・貸出の格付けに変更がなく同じである場合、つまり打切りが生じている確率は  $S(t_i)$  とする。したがって独立性の仮定のもとで、これら  $N$  個の債券・貸出の格付け変更あるいは非変更をこの観測期間内に観察できる確率は、 $n$  個の債券・貸出格付けの変更(死亡)確率と  $N-n$  個の格付け維持(生存)確率の積になる。このことを式で表現すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
L &= \prod_{i=1}^n f(t_i) \prod_{i=n+1}^N S(t_i) \\
&= \prod_{i=1}^N f(t_i)^{d_i} S(t_i)^{1-d_i} \\
&= \prod_{i=1}^N \left[ (h(t_i) S(t_i))^{d_i} \frac{S(t_i)}{S(t_i)^{d_i}} \right] \\
&= \prod_{i=1}^N h(t_i)^{d_i} S(t_i) = \prod_{i=1}^N h(t_i)^{d_i} e^{-H(t_i)}. \tag{8}
\end{aligned}$$

(8)式の両辺の自然対数をとることにより得られる対数尤度関数は

$$\ln L = \sum_{i=1}^N d_i \ln h(t_i) - \sum_{i=1}^N H(t_i), \tag{9}$$

となり、対数尤度関数はハザード率と累積ハザード率で表現できる。この対数尤度を最大にするパラメータ値を求めればよい。

#### ハ・コックスの比例ハザード・モデル

ハザード率の関数型についてさまざまな想定を試みて、推移確率を推定することも可能であるが、ここではハザード率をいくつかのリスク・ファクターによって説明することを考える。この場合、最も良く用いられるのがコックスの比例ハザード・モデル (PHM: proportional hazard model) である。このモデルにより、格付け変更に影響を与える要因を探し出し、かつその影響度の大きさを推計することができる。

比例ハザード・モデルでは、ハザード率を、時間 (生存期間)、複数のリスク・ファクター、の2つの部分に分けて説明しようとする。説明変数が1つの場合 ( $X_1$ )、比例ハザード・モデルは次のようになる<sup>22</sup>。

$$h(t) = \tau_0(t) e^{\beta_0 + \beta_1 X_1}. \tag{10}$$

ここで、右辺の $\tau_0$ は生存時間 $t$ のみに依存してきまる部分であり、ベースライン (基底)・ハザード関数と呼ばれる。その関数型をあらかじめ、ワイブル分布や指数分布などと特定化することも可能であるが、通常はカプラン・メイヤー法などにより、右辺第2項部分を推定したあとで、その結果に基づき $\tau_0(t)$ をノンパラメトリックに推定する。あるいは、本稿で用いたように、累積ハザード関数 $H(t)$ を

22 実際のモデリングにあたっては、説明変数は2つ以上選択されるのが普通であるが、基本的な考え方は以上の説明をもっても変わらない。

ネルソン・アーレン法で推定する<sup>23</sup>。

(10)式の右辺第2項は、説明要因( $X_1$ )に依存して決まる部分である。リスク・ファクターの影響は、パラメータ( $\beta_0, \beta_1$ )によって示される。右辺第2項のリスク・ファクターの値がゼロになった時 $e^0 = 1$ となり、ハザード率はベースライン・ハザード関数で説明される。つまり、もしリスク・ファクターの値が平均値からの偏差で表されている場合、全てのリスク・ファクターがその平均値をとったときのハザード率は、ベースライン・ハザード関数に等しい。その意味で $\tau_0(t)$ はベース(基底)になるハザード率を表す。リスク・ファクターの影響を示す右辺第2項で指数関数が用いられているのは、べき乗部分が正負いずれの値をとっても左辺のハザード率が負にならないようにするためである。

右辺第2項のリスク・ファクターに対する感応度を示す $\beta_0, \beta_1$ は、上の(10)式を、対数尤度関数を示す(9)式に代入し、この対数尤度を最大にする値を求めることによって推定される。

## (2) 格付け推移確率推定と生存分析の適用

生存分析を用いて格付けの推移確率を推定する場合、格付けが変更されるまでの時間(月数)である生存時間を取り扱うため、2時点間の格付け推移を推定する場合とは異なり次のようなさまざまな問題を処理する必要がある<sup>24</sup>。

多重イベントの処理：本節の分析では、格付けに付与される(+)や(-)記号、つまりノッチを無視し分析を行った。格付けの推移を示した表6をみると、分析期間である28ヵ月間における格付けの変化は、ほぼ同一の格付けに留まる場合、あるいは一段階下位の格付けに移行する場合がほとんどであった。したがって、多重イベントの分析は実際に格付けが変化せずに留まるか、低下するかの2つの事象を扱う分析に簡略化できた。

繰り返しイベントの処理：分析期間内で、以下で示したステップ1の初期格付けに、同一債券が回帰したときは、繰り返しイベントが生じたとみなした。例えば、初期時点でAAであった債券が、4ヵ月間で、AA A AA AAとなった場合、まずAAからAへの格下げが1ヵ月間で生じたと考え、次に同一企業であってもAAが1ヵ月続く標本、つまり合計して2つの標本が生じたと考え、処理を行った。

23 累積ハザード関数を $H(t) = \sum_{j=1}^t d_j / \tau_j$ により計算する。ここで $\tau_j = I(T_i \geq t) \exp(\beta_0 + \beta_1 X_1)$ であり、 $d_j$ は $t_j$ 時点までに格付けの低下した債権数であり、 $I(T_i \geq t)$ は格付け継続時間 $\tilde{T}_i$ が経過時間 $t$ に等しいか、それより小さい場合に1をとり、それ以外では0をとるダミー変数である。この式によって推定された累積ハザード率と生存関数との間の関係を示す(6)式から、生存確率を推定する。

24 最初の3つの問題の処理にあたっては、Allison [1984,1995]によった。

打ち切りの処理：生存分析においては、打ち切り（censoring）という特有の問題を処理しなければならない。第1の打ち切り問題は、観察期間終了時においても、格付けの変更が生じていない債券があるときに生じる。第2の打ち切り問題は、多重イベントの処理において生じる。今回の分析では、格付け*i*から格付け*j*への変化が生じる時、生存分析でいうイベントが生じたとしたが、 $i \rightarrow j$  への確率を推計する時は、 $i \rightarrow k$  ( $k \neq j$ ) への変更には打ち切りが生じたとした。例えばAAからAへの格付けの低下を分析する際には、AAからBBBに推移している企業は打ち切りデータとして扱っている。

具体的な分析は、以上の3点を考慮し、次の3つの段階を経て行った。

ステップ1：分析の開始時点である1998年3月の格付けを初期時点として、全ての債券を初期時点の格付け別に分類する。

ステップ2：初期時点の格付けから、2000年7月31日に至るまでに、格付け変更があった場合を、生存分析の用語でいうところの「信用イベント」とした。またそれまでの期間を生存時間（survival time）とする<sup>25</sup>。信用イベントが生じた時点から時間をさかのぼり、直近で利用可能な財務情報をもって、信用イベントが生じるまでの時間に影響を与える共変量（説明変数）とした。

ステップ3：この期間で、ステップ1で示した初期格付けに同一債券が回帰した時は、繰り返シイベントが生じたとみなした。つまり、この場合、同一企業であったとしても、異なる標本が新たに加わったと考えて分析を行った。

### （3）使用データ

#### イ．使用データ：社債格付け

生存分析を適用して推移確率を推定するためには、順序プロビット分析を用いて1期間の分析を行った場合とは異なる方法で、データを取り扱う必要がある。まず使用したデータを説明し、次にモデルの推定結果を示す。

分析の対象としたデータは合併後のR&Iの1998年5月から2000年7月までの製造業の債券格付けである。推定可能な標本数を確保するために格付けのノッチを無視し、次のようにまとめている。AAAはそのまま用いていることとして、AA（AA+、AA、AA-）、A（A+、A、A-）、BBB（BBB+、BBB、BBB-）、BB（BB+、BB、BB-、CCC+以下）と5グループにまとめている。このようにしてまとめた5段階の格付けグループの推移行列の実績値が、表6に示されている。

.....  
25 初期格付けから、複数の異なる格付けに変更が生じる場合は、上でも述べたように多重イベントの処理を可能にする生存分析を行う必要がある。

表6 1998年5月から2000年7月までの格付け推移行列

## (1) 推移件数

変更前/後	AAA	AA	A	BBB	BB	合計
AAA	15	9				24
AA		54	26			80
A		1	180	69		250
BBB			4	234	36	274
BB				1	68	69
合計	15	64	210	304	104	697

## (2) 推移確率

変更前/後	AAA	AA	A	BBB	BB	合計
AAA	0.625	0.375	0.000	0.000	0.000	1.000
AA	0.000	0.675	0.325	0.000	0.000	1.000
A	0.000	0.004	0.720	0.276	0.000	1.000
BBB	0.000	0.000	0.015	0.854	0.131	1.000
BB	0.000	0.000	0.000	0.014	0.986	1.000

表6のパネル(1)と(2)の表側(行)は取得時における格付けであり、表頭(列)は、推移後の格付けである。ただし、この期間中に2段階以上格付けが低下した企業は、5(2)節で説明したように別々の企業として扱っていることに注意が必要である。例えば、AAAからAA、さらにAへと格付けが低下した企業は、AAAからAAと、AAからAとで別個の企業として扱っている。表6(1)は、格付けの推移した件数を示している。表6(2)は、表6(1)の各セルの件数をそのセルが属する行のセルの件数の和により除して求めた推移確率を表している。

## ロ．使用データ：財務データ

格付け変更に影響を与え得る財務指標としては数多くの指標が考えられるが、ここでは順序プロビット・モデルを推定したときの財務データを主な候補変数として<sup>26</sup>、その中から互いに相関の低い指標を採用することにより説明変数を選択した。

初期時点の格付けごとに分類した4つのグループについて、有利子負債比率、総資産事業利益率(ROA)、時価総額、ベータ値を説明変数として採用している。これ以外にも重要な財務指標が存在する可能性はあるが、AAAからAAへ格付けの変更があった企業数は9と少なく、多くの説明変数を使用できないこと、本決算と中間決算の両方で発表されていることなどの理由から、これらの4つの財務指標を使

26 ただし、順序プロビット・モデルでは使用しなかった日経総合株価指数ベータ値(60ヵ月)をここでは使用している。

用することにした<sup>27</sup>。

これらの財務指標については、格付けの変更が最近の財務指標の情報によるものと考え、表7のように格付け変更時に最も近いデータを使用している。格付けを変更しなかった企業については、1998年3月のデータを使用している。

表7 生存分析に使用した財務指標の発表時期

使用した財務指標	格付け継続期間の最後の月
1998年3月	1998年5月、6月、7月、8月
1998年9月	1998年9月、10月、11月、12月、1999年1月、2月
1999年3月	1999年3月、4月、5月、6月、7月、8月
1999年9月	1999年9月、10月、11月、12月、2000年1月、2月
2000年3月	2000年3月、4月、5月、6月、7月

#### (4) コックス比例ハザード・モデルの推定結果

表8に全ての格付けデータに対して共通の説明変数を用いた場合の推定結果が示されている<sup>28</sup>。

観測期間は1998年5月から2000年7月までの28ヵ月である。この期間中にR&I社の格付けが低下している企業を分析の対象とし、格付けの上昇している企業と低下していない企業を打ち切りデータとして扱っている。当該企業の財務変数に欠損値が存在する場合には、当該債券を分析に含めないことにしている。

表のパラメータ推定結果をみて、全体としていえることは、格付けを低下させる要因として、企業規模を示す変数である時価総額や、収益性を示すROAが重要な変数となることである。特に規模を表す時価総額が高度に有意となるという結果は、中山・森平 [1998] の日本公社債研究所による格付けデータを用いた時の結果と整合的である。

しかし、負債関連の指標については、どの格付けからの推移についても有意となっているわけではない。本稿で負債関連の指標として取り上げた有利子負債比率は、AからBBBへ推移する場合とBBBからBBへ推移する場合にのみ、有意な変数であった。

また、中山・森平 [1998] や安川 [2000] で有意となっていたベータ値については、AからBBBに推移するときの変数としては有意となっているが、それ以外では有意ではなかった。債券の信用リスクを表す格付け推移確率を説明するにあたっ

27 これらの指標は全て、1998年3月 [ 連結決算 ]、9月 [ 単独決算 ]、1999年3月 [ 連結決算 ]、9月 [ 単独決算 ]、2000年3月 [ 連結決算 ] の有価証券報告書に基づき、QUICKのデータ・ベースAMSUSから採用したものである。

28 推定はS-Plusのcoxph関数により行われている。なお、異なる格付けごとに異なった説明変数を用いて、個々の格付けに対して最も良い適合度を与えるモデルを推定した結果が、補論3(1)に示してある。

表8 コックスの比例ハザード・モデルの推定結果

変数名	AAA	AA	A	BBB
有利子負債比率(対数)	-0.82 (-1.96)	0.131 (-0.70)	0.653 (4.34)	0.6448 (3.79)
総資産事業利益率(ROA)	-0.565 (-2.72)	-0.647 (-4.69)	-0.468 (-6.37)	-0.1513 (-3.63)
時価総額(対数)	-0.867 (-2.37)	-0.486 (-2.16)	-0.455 (-3.58)	-0.6876 (-4.24)
ベータ	-0.736 (-0.51)	0.679 (0.64)	0.921 (2.10)	-0.0208 (-0.07)
標本数	24	80	242	250
事象の発生数	9	26	66	41
尤度比	11.8	50.7	114	53.5
p値	[0.0187]	[0.000]	[0.000]	[0.000]

備考：( )内の数値は漸近的 $t$ 値である。

て、簿価ベースの情報を含んだ財務比率が有意であるのに対し、マーケット情報をベースとするベータ値が有意でなかったことは興味深い。

次に、生存確率について検討する。推定されたパラメータに基づき、初期の格付けに留まる生存確率が、表9、表10、表11、表12に示されている。

表8に、格付けAAAとAAの生存確率についてまとめてある。格付けAAAの生存確率の減少度合いがほかの格付けに比較して最も大きい。18ヵ月経過後には生存確率は、0.732となっている。しかし、その推定値の標準誤差も非常に大きく、95%の信頼区間をみると、18ヵ月後には上限では0.984、下限では0.544となっている。これは、明らかに利用できた標本数が少ないことを反映している。表9の格付けAAの生存確率については、AAAほど生存確率は低下しておらず、20ヵ月後には0.89という値が得られている。しかし、生存確率の標準誤差は大きく、95%信頼区間の上限は1に近いままで推移している。

表11と表12では、それぞれ格付けAとBBBの結果がまとめられている。これら2つの格付けについては標本数が200を越え、AAAやAAに比べて多くの標本を使用できるために、標準誤差は小さくなっている。表11にある格付けAの生存確率については、26ヵ月後に0.863、表12の格付けBBBについては、22ヵ月後に0.882という結果が得られた。標本数の多さを反映して、信頼区間は狭くなっており、AAAとAAでは信頼区間の上限が1の近くで推移していたが、格付けAについては22ヵ月後には0.93となり、26ヵ月後に0.92となっている。

表9 格付けAAA債券の生存確率推定値

経過月数	格付け低下 リスク企業数	実際に格付けが 低下した企業数	生存確率	標準誤差	95%信頼 限界下限	95%信頼 限界上限
3	24	2	0.965	0.031	0.906	1.000
8	22	1	0.947	0.042	0.868	1.000
12	21	1	0.917	0.056	0.814	1.000
14	20	3	0.819	0.090	0.660	1.000
18	17	2	0.732	0.111	0.544	0.984

備考：標準誤差は生存確率の標準誤差であり、アーレンの方法により推定されている。信頼限界は半対数 (semi-log) の方法により計算されている。これらの方法についてはVenables and Ripley [1999]、p. 371を参照。

表10 格付けAA債券の生存確率推定値

経過月数	格付け低下 リスク企業数	実際に格付けが 低下した企業数	生存確率	標準誤差	95%信頼 限界下限	95%信頼 限界上限
1	80	1	0.998	0.002	0.993	1.000
2	79	1	0.995	0.004	0.988	1.000
3	78	4	0.986	0.009	0.968	1.000
5	74	3	0.977	0.013	0.952	1.000
6	71	1	0.974	0.014	0.946	1.000
7	70	3	0.964	0.019	0.927	1.000
8	67	3	0.952	0.024	0.905	1.000
9	64	3	0.938	0.030	0.880	0.999
12	59	1	0.932	0.033	0.871	0.998
13	58	3	0.914	0.039	0.840	0.995
15	52	1	0.907	0.042	0.828	0.993
19	49	1	0.899	0.045	0.816	0.991
20	48	1	0.890	0.048	0.801	0.988

備考：標準誤差は生存確率の標準誤差であり、アーレンの方法により推定されている。信頼限界は半対数 (semi-log) の方法により計算されている。これらの方法についてはVenables and Ripley [1999]、p. 371を参照。

表11 格付けA債券の生存確率推定値

経過月数	格付け低下 リスク企業数	実際に格付けが 低下した企業数	生存確率	標準誤差	95%信頼 限界下限	95%信頼 限界上限
1	242	1	0.999	0.001	0.997	1.000
2	241	5	0.993	0.003	0.987	1.000
3	235	4	0.989	0.005	0.980	0.997
4	231	6	0.981	0.007	0.968	0.994
5	223	8	0.970	0.009	0.952	0.988
6	215	4	0.963	0.011	0.942	0.984
7	207	3	0.957	0.012	0.934	0.981
8	204	7	0.943	0.015	0.914	0.973
9	195	11	0.917	0.020	0.880	0.956
11	179	5	0.904	0.022	0.862	0.948
12	173	1	0.902	0.022	0.859	0.946
13	171	2	0.896	0.023	0.852	0.943
14	168	1	0.893	0.024	0.848	0.941
15	167	3	0.883	0.025	0.835	0.934
16	161	1	0.879	0.026	0.830	0.931
18	157	1	0.876	0.026	0.826	0.929
21	148	2	0.868	0.027	0.816	0.923
26	135	1	0.863	0.028	0.810	0.920

備考：標準誤差は生存確率の標準誤差であり、アーレンの方法により推定されている。信頼限界は半対数 (semi-log) の方法により計算されている。これらの方法についてはVenables and Ripley [1999]、p. 371を参照。

表12 格付けBBB債券の生存確率推定値

経過月数	格付け低下 リスク企業数	実際に格付けが 低下した企業数	生存確率	標準誤差	95%信頼 限界下限	95%信頼 限界上限
1	250	2	0.996	0.003	0.990	1.000
2	247	3	0.990	0.005	0.980	0.999
3	243	1	0.987	0.006	0.976	0.998
4	241	1	0.985	0.006	0.973	0.997
5	233	2	0.980	0.007	0.966	0.995
6	230	2	0.975	0.008	0.959	0.992
7	228	2	0.971	0.009	0.952	0.989
8	224	5	0.958	0.012	0.935	0.981
9	218	4	0.948	0.014	0.922	0.975
11	199	7	0.927	0.017	0.894	0.961
13	189	3	0.917	0.019	0.881	0.954
14	182	2	0.910	0.020	0.872	0.950
15	178	3	0.899	0.021	0.858	0.942
16	174	1	0.895	0.022	0.853	0.940
19	167	1	0.891	0.023	0.848	0.937
22	145	2	0.882	0.024	0.836	0.930

備考：標準誤差は生存確率の標準誤差であり、アーレンの方法により推定されている。信頼限界は半対数 (semi-log) の方法により計算されている。これらの方法についてはVenables and Ripley [1999]、p. 371を参照。

## 6. 格付け推移行列の予測と債券ポートフォリオ・シミュレーション

前節で示したコックスの比例ハザード・モデルにより推定した格付け推移行列の応用例として、推定された生存確率から月ごとの格付け推移行列を作成し、当初に特定の格付けにある債券や貸出が将来どのような格付けを付与される可能性があるかを予測する。

まず、生存確率の推定値を用いて、3ヵ月ごとの2年間にわたる格付け推移行列を作成した。表13はこうして計算された格付け推移行列の平均的な値を示している。なお、その生存確率の95%信頼区間の下限と上限を使用して作成した推移行列を補論4の表(1)と(2)に示した。

次に、この求められた格付け推移行列を用いて、社債投資のポートフォリオの投資比率が将来どう変化するかを(A-4)式を用いて求めた。ただし、 $\pi(t)$ の推定値を $y(t)$ とした。これは、各格付けの社債への投資比率であると解釈できる。また $\hat{P}(t)$ を $t$ 期の格付け推移行列の推定値とすると、 $t+1$ 期において異なる格付けへの投資比率は次式により決定される。

$$y(t+1) = \hat{P}(t)y(t). \quad (11)$$

この関係を用いて将来のポートフォリオに占める、各格付けの割合を求めることができる。シミュレーションにあたっては、第1期の格付け(AAA、AA、A、BBB、BB)の投資比率を

$$y'(1) = [0.5 \quad 0.3 \quad 0.2 \quad 0.0 \quad 0.0],$$

と仮定した場合を試みた。つまり、最初の社債ポートフォリオが比較的高い格付けであったものが、どのように格付けが悪化するかを、2年間にわたる3ヵ月ごとの投資比率の変化をみることによって確認しようとした。その結果が、表14に示されている。ただし、シミュレーションにあたって、格付け推移行列として、

1. 推定値(平均値)を用いた場合
2. 95%信頼区間の下限を用いた場合
3. 95%信頼区間の上限を用いた場合

の3つの場合を考えたシナリオ・シミュレーションを行った<sup>29</sup>。

29 これらの予測結果は下方に偏っている可能性がある。なぜならば、比例ハザード・モデルを推定するために利用した標本期間は、日本企業の信用リスクがそれ以前と比べて比較的高かった期間であったため、格下げ企業が多く、格上げ企業がほとんど存在しなかった。したがって、推移行列の将来予測は保守的な予測であると考えられる。

表13 生存確率から推定された格付け推移行列（推定値）

$t=3$	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.965	0.035	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.986	0.014	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.989	0.011	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.987	0.013
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

$t=6$	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.965	0.035	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.974	0.026	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.963	0.037	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.975	0.025
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

$t=9$	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.947	0.053	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.938	0.062	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.917	0.083	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.948	0.052
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

$t=12$	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.917	0.083	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.932	0.068	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.902	0.098	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.927	0.073
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

$t=15$	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.819	0.181	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.907	0.093	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.883	0.117	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.899	0.101
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

$t=18$	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.732	0.268	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.907	0.093	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.876	0.124	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.895	0.105
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

$t=21$	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.732	0.268	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.890	0.110	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.868	0.132	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.891	0.109
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

$t=24$	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.732	0.268	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.890	0.110	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.868	0.132	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.882	0.118
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

表14(1)は格付け推移行列の「平均値」を用いた場合であり、最もありうるケースである。この場合、格付けAAAの比率については生存確率の低さを反映し、24ヵ月後には13%と初期の半分以下になっている。それ以外の格付けについては増加している一方で、格付けAAの比率が30%から45%と半数近くを占めるようになっている。格付けAは、20%から26%へ増加している。格付けBBBでは0%から12%にまで増加し、格付けBBは0%から4%となっている。

表14(2)は、推移行列に「95%信頼区間の下限」を用いた場合の投資比率の変化を示している。つまり信用リスクの悪化を示す悲観的なケースである。格付けAAAは初期に50%だったのが、24ヵ月後には3%にまで低下している。格付けAAは18ヵ月後にピークである44%に達し、その後減少し、24ヵ月後には34%となっている。格付けAは徐々に増加し24ヵ月後にはAAを1%上回り35%となっている。格付けBBBは24ヵ月後には20%にも増加しており、BBは8%を占めるようになっている。

表14(3)は、「推移行列に95%信頼区間の上限」を用いた場合、つまり信用リスクに関して楽観的な見方を反映した結果である。この場合には先の結果と異なり、

表14 社債ポートフォリオ投資比率の変化

(1) 推移行列(推定値)を用いた場合

	1	3	6	9	12	15	18	21	24
AAA	0.50	0.48	0.47	0.44	0.40	0.33	0.24	0.18	0.13
AA	0.30	0.31	0.32	0.33	0.34	0.38	0.44	0.45	0.45
A	0.20	0.20	0.20	0.21	0.21	0.22	0.22	0.24	0.26
BBB	0.00	0.00	0.01	0.03	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12
BB	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.04

(2) 推移行列(95%下限)を用いた場合

	1	3	6	9	12	15	18	21	24
AAA	0.50	0.45	0.41	0.36	0.29	0.19	0.10	0.06	0.03
AA	0.30	0.34	0.36	0.37	0.39	0.42	0.44	0.40	0.34
A	0.20	0.21	0.21	0.23	0.25	0.27	0.30	0.33	0.35
BBB	0.00	0.00	0.02	0.04	0.07	0.10	0.13	0.17	0.20
BB	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.03	0.05	0.08

(3) 推移行列(95%上限)を用いた場合

	1	3	6	9	12	15	18	21	24
AAA	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.49	0.48	0.48
AA	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.31	0.31
A	0.20	0.20	0.18	0.16	0.14	0.12	0.10	0.09	0.08
BBB	0.00	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.09	0.11	0.12
BB	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02

格付けAAAとAAへの投資比率はほとんど変化しない。24ヵ月後には、格付けAAAは2%減少し48%、AAは1%増加し31%となっている。格付けAへの投資比率は20%から減少し24ヵ月後には8%となっている。格付けBBBについては増加し24ヵ月後には12%となっているが、格付けBBは24ヵ月後には2%増えるだけにとどまっている。

## 7. おわりに

本稿では、信用リスク・モデリングの基礎となる債券や貸出の格付け変化、特に格付け推移行列の変化を説明するマルチファクター・モデルを提唱した。バーゼル合意に基づく自己資本比率規制の改定に向けた最近の動きにみられるように、信用リスクの定量化にあたって、信用格付けを基礎とする考え方が注目されている。本稿では、格付けの変化を記述する推移確率そのものが時間を通じて変動すると考え、その変化を外生的に与えたファクターによって説明するモデルを構築した。具体的には、将来の1時点の格付け変化をプロビット分析によって説明するモデル、将来の任意の時点の格付け変化を生存分析によって説明するモデルの2つを提唱し、実際のデータを用いた推定結果を示した。

この結果、財務諸表から計算された財務比率や株式市場からの情報をファクターとして、格付け推移行列の1期間あるいは多期間にわたる変化を説明可能であることを示した。また、どのような変数が格付け推移行列の変化を有意に説明するかも示すことができた。1期間の格付け変化を説明するために用いられた説明変数は、必ずしも多期間の格付け変化を説明するにあたって有意ではなく、異なる変数を選択する必要があることも明らかになった。

他方、今後の研究課題とすべき問題もいくつか残っている。まず第1に、われわれは、格付け推移行列の推定にあたり、最近の信用リスク・デリバティブズの価格決定モデルで考えられているような、リスク中立測度のもとにおける推定問題を考えなかった。市場性のある事業債はいざ知らず、貸出に関してはその売買市場が未発達である。したがって、貸出の市場価格を得ることができないので、リスク中立測度のもとにおける格付け推移行列をインプライドに推定することができない。しかし、もし事業債に関して市場価格を得ることができるならば、本稿で論じたファクター・モデルは、リスク中立測度のもとにおける格付け推移行列の推定についても意味があると考えられる。なぜならば、まず債券の市場価格からファクター・モデルのパラメータをインプライドに推定し、次に格付け推移行列の危険確率を、このファクター・パラメータにもとづいて推定することができるからである。この場合、たとえ推移行列の次元が多くとも、それが時間に依存しないことと、ファクター数が比較的少ないことを仮定できれば、インプライドな格付け推移行列を推定することが可能になる。

第2に、統計学・計量経済学上の問題についてなお考慮すべきいくつかの点があることを指摘したい。まずに、われわれが用いたコックスの比例ハザード・モデルには、誤差項がない。つまり、リスク・ファクターの種類が同じで、それらの値も同じ貸出は、全く同じ格付け保持・変更確率を示し、かつ互いに完全な相関を有していることになる。信用リスクVaRを計算するためには、生存関数が不確実性の影響を受けるようなモデルが必要になる。最近の生存分析の発展はこのようなモデル構築を可能にしており、今後はこの面の検討を行う必要があると思われる<sup>30</sup>。また、この研究では、説明変数は時間の経過にかかわらず、一定の値をとると仮定した。多くの信用リスク分析に生存分析を適用した研究は、説明変数が時間に依存しないと仮定することが多いが、これは必ずしも正しくない。説明変数を時間依存変数にすることにより、推定上・データ作成上きわめて複雑な処理が必要になるためにこうした仮定をおくことになる。しかし、格付け変更を説明するに必要とされた多くの財務比率は決算期ごとに変わり得る。また、説明変数にマクロの経済・金融指標を考えるときは当然こうした点を考慮しなければならないであろう<sup>31</sup>。

第3に、われわれが分析対象とした観測期間では、格付け変更件数が多くなかったため、ある格付けから2つ以上の異なる格付けへ移行する確率を求めることができなかった。標本期間をより長く取ることや、社債格付けの代わりとしてより長期間・多数の格付けデータが利用可能な内部格付けや信用情報機関の提供する信用格付けなどの情報を利用した実証研究が望まれる。

最後に、次のような点に触れておきたい。われわれのモデルにおいては、信用リスクを示す状態変数として、格付けを想定し、その確率的な推移をモデル化した。しかし、規制当局は信用リスクを表す状態変数として、格付けと担保状況に基づき、少数の債務者区分に分類することを要求している<sup>32</sup>。こうした場合には、格付けの推移に関するファクター・モデルを考えるのではなく、債務者区分の推移を説明するようなファクター・モデルを考える必要がある。そうした場合であっても、本稿で示したような分析の枠組みは依然として有効であろう。要は、担保状況などを含め、債務者区分の変化を説明可能なファクターを新たに設定することが必要になるだけであろう。

30 こうした研究としては、不動産抵当融資のデフォルト確率の期間構造の推定モデルを生存分析を用いて行った、Deng *et al.* [1996] の例が参考になる。

31 説明変数が時間に依存する生存分析例としては、一条・森平 [2001] を参照のこと。

32 例えば、金融庁の「金融検査マニュアル」では、金融機関は、原則として、債務者の信用格付けを行い、債務者を、正常先、要注意先、破綻懸念先、実質破綻、および破綻先、の5分類に区分することを求めている。

## 補論 1. 債券・貸出評価モデル

格付け推移確率をいくつかのリスク・ファクターによって説明するモデルを考えることは、それ自身意味のあることである。それはまた、リスク・ファクターの変化が銀行の有する社債や貸出のポートフォリオ価値にどのような影響を与えるのかを明らかにすることができるという意味でも重要である。そこで、この補論では格付け推移確率のファクター・モデルが債券・貸出価格決定にあたってどのような役割を果たすのかを説明することにする。

信用リスクが格付けの推移によって表されると考えた時に、 $t$  期の債券あるいは貸出の価値を格付け推移行列により表現することを考えてみよう<sup>33</sup>。

$v_i(t)$  を  $i$  番目の格付けが与えられている債券あるいは貸出の  $t$  期における公正価値（価格）としよう。 $v_i(t)$  を要素とする  $K$  次元列ベクトル  $\mathbf{v}(t)$  を、

$$\mathbf{v}'(t) = [v_1(t) \quad v_2(t) \quad \cdots \quad v_K(t)],$$

と定義し、 $d(0, T)$  を現在から  $T$  期間後に 1 円を支払う信用リスクのない割引債の時点 0 における価値、つまり割引関数を表すものとしよう。さらに、 $\mathbf{P}(t)$  を  $t$  期から  $t+1$  期への  $K$  次元格付け推移行列とする。つまり

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1K}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2K}(t) \\ A & A & \ddots & A \\ p_{K1}(t) & p_{K2}(t) & \cdots & p_{KK}(t) \end{bmatrix},$$

である。この行列の要素  $p_{ij}(t)$  は  $t$  期に格付け  $i$  にある債券が、 $t+1$  期に格付け  $j$  に推移する確率を表す。ここで、 $p_{ij}(t)$  は確率であるので、 $0 \leq p_{ij}(t) \leq 1$  かつ  $\sum_j p_{ij}(t) = 1$  を満たさなければならない。格付け推移行列の要素は、時間  $t$  の関数であり、時間がたつにつれて変動しうるものとする。

$c_i(t)$  を、この債券や貸出が  $t$  期に  $i$  番目の格付けに変更になった時の実質キャッシュ・フローとする。つまり  $t$  期のクーポンや元利均等払いなどの形を取る名目キャッシュ・フロー  $C_i(t)$  に、その債券や貸出が  $i$  番目の格付けであるときに予想される回収率 ( $0 \leq R_i(t) \leq 1$ ) をかけた後の実質キャッシュ・フローを  $c_i(t) = C_i(t) \cdot R_i(t)$  で計算する。これを要素をもつ列ベクトル  $\mathbf{c}(t)$  を次のように定義する。

33 なお、以下の分析では、格付け推移確率は、デリバティブズ評価にあたって一般的なりスク中立確率測度 (risk neutral measure) でなく、実測度 (natural あるいは real measure) で表現されていると考える。これは、格付けが付与されている社債や貸出の流通市場が十分発達していないことを想定しているからである。その結果、危険中立測度を導くためのリスクヘッジ取引が可能でないからである。危険中立確率測度のもとにおける割引債価格決定モデルに関しては、Acharya, Das and Sundaram [2001]、Das and Sundaram [2000]、Das and Tufano [1996]、家田 [1999] を参照のこと。家田 [1999] は、Jarrow, Lando and Turnbull [1997] モデルを改良した Kijima and Komoribayashi [1998] モデルに基づき、わが国の社債の市場価格データと格付け推移行列からインプライドなデフォルト確率を推定している。

$$\mathbf{c}'(t) = [c_1(t) \quad c_2(t) \quad \dots \quad c_k(t)].$$

このようにすると、 $t$  期に特定格付けにある債券・貸出の価値は、この債券・貸出の  $t+1$  期に実現するであろうキャッシュ・フローと  $t+1$  期の債券価値を合計し、その期待現在価値として求まる。つまり、

$$\mathbf{v}(t) = \left( \frac{d(0, t+1)}{d(0, t)} \right) \mathbf{p}(t) [\mathbf{c}(t+1) + \mathbf{v}(t+1)], \quad (\text{A-1})$$

が成立するであろう。右辺の最初の括弧内の値は、 $t$  期における1期間フォワード価格にあたり、右辺の残りの項の現在価値を計算するために必要になる。

さらに、満期  $T$  におけるこの債券・貸出の価値がゼロ ( $\mathbf{v}(T) = 0$ ) であることに注意して、(A-1)式を後向きに解くことにより、現在時点( $t=0$  期)の債券・貸出の価値は次のようになる。

$$\mathbf{v}(0) = \sum_{t=1}^T \left\{ \mathbf{d}(0, t) \left[ \prod_{j=0}^{t-1} \mathbf{p}(j) \right] \mathbf{c}(t) \right\}, \quad (\text{A-2})$$

$\mathbf{D}(0, t) \equiv \mathbf{d}(0, t) \prod_{j=0}^{t-1} \mathbf{p}(j)$  と定義すると、これは信用リスクを考慮した割引ファクターとみなすことができ、上の式は、

$$\mathbf{v}(0) = \sum_{t=1}^T \mathbf{D}(0, t) \mathbf{c}(t), \quad (\text{A-3})$$

と書き直すことができる<sup>34</sup>。この結果、格付け推移行列を考慮した債券や貸出の評価は、形式的には、通常信用リスクがない債券と同じように、将来キャッシュ・フローを割引ファクター  $\mathbf{D}(0, t)$  を用いて現在価値に戻すことによって得られる。ただし、この場合の割引ファクターは時間価値と格付け推移行列  $\mathbf{P}(t)$  で示される信用リスクの2つを考慮した割引ファクターになっていることに注意しなければならない。

したがって、(A-2)式あるいは(A-3)式に基づき、債券や貸出の評価を行う場合には、時間の関数としての格付け推移行列、格付け推移行列に対応した時間と共に変化する実質キャッシュ・フロー行列、金利期間構造、の3つの推定値が必要になる。われわれは、上の問題に注目して、格付け推移確率が時間と共に変化し、かつそれが外生的に与えられるいくつかのファクターによって説明できるようなモデルとその計測方法を本論において考えることにする。

34 この結果は、Li [1999] が示した債券がデフォルトをするかしないかの2状態モデルを、多数の信用リスク状態をとる場合に拡張した形になっている。

## 補論 2. 集計データが利用可能な場合の格付け推移行列の推定方法

個々の債券や貸出の格付け変化を観察することができない代わりに、特定の格付けに属する債券や貸出の件数（割合）や金額の時系列推移を知ることができる場合がある。例えば、銀行はその貸出債権について、あらかじめ決められた信用リスク分類に従う貸出残高を決算期ごとに発表することが義務付けられている。規制当局をはじめとする外部関係者は、以下に述べるような方法によって、こうしたデータに基づいて、ある貸出債権が特定の分類に推移する確率を推定することができる。また、そうした推移がどのような要因によって規定されているかを知ることができる。こうしたモデルは、本論に説明した、個別貸出に対するモデルと同様に、オフサイト・モニタリングのためにも有効な手段を提供し得るといえよう。

まず、次の事実に注目しよう。ある債券・貸出が  $t-1$  期において  $i$  番目の格付けに属する確率  $\pi_i(t-1)$  と  $t$  期にその債券が  $j$  番目 ( $j = 1, 2, \dots, K$ ) 格付けに移行する確率  $\pi_j(t)$  との間には、格付け推移行列  $\mathbf{P}$  の要素を用いると次のような関係が成り立つ。

$$\pi_j(t) = \sum_{i=1}^K \pi_i(t-1) p_{ij}(t-1) \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, K, \quad (\text{A-4})$$

ここで、 $p_{ij}$  は、格付け推移行列  $\mathbf{P}$  の要素を表す。確率  $\pi_i(t)$ 、 $\pi_j(t)$  を、每期実際に観測される  $i$ 、 $j$  番目の格付け件数、あるいはその発行残高から計算される比率  $y_i(t)$ 、 $y_j(t)$  で置き換え、上の (A-4) 式に誤差項  $\varepsilon_{ij}(t)$  を加えると、次のような回帰モデル、

$$\tilde{y}_{ij}(t) = \sum_{i=1}^K y_i(t-1) p_{ij}(t-1) + \tilde{\varepsilon}_{ij}(t) \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, K, \quad (\text{A-5})$$

として表現できる。もし推移確率に関して斉時性  $p_{ij}(t) = p_{ij}$  を仮定できれば、推移確率を推定することは、誤差項に関するやや特殊な性質を勘案したうえで、Lee, Judge, and Zellner [1970] で示されたような方法によって比較的容易に行える。例えば、高橋・森平 [1996] は、帝国データバンクが発表している集計化した年次評点データを用いて、格付け推移行列を推定した。この場合、個別企業のデータを用いるのではなく、1986年から94年までの9年間にわたる個別企業の評点を集計した6段階評点 ( $A/B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $\dots$ 、 $G$ ) データに基づき、格付け推移行列を求めている。

他方、格付け推移確率が時間と共に変化し、かつそれが  $L$  個のリスク・ファクター  $X_1(t)$ 、 $X_2(t)$ 、 $\dots$ 、 $X_L(t)$  に依存すると考え、一般的に推移確率とリスク・ファクターの間で次のような関係が成り立つと想定しよう。

$$p_{ij}(t) = f(X_1(t), X_2(t), \dots, X_L(t)), \quad (\text{A-6})$$

Lee and Judge [1972] は、このとき線形回帰モデルが成立すると考え、上の式を次のように定式化した。

$$p_{ij}(t) = b_{ij0} + \sum_{l=1}^L b_{ijl} X_l(t) + \tilde{u}_{ij}(t). \quad (\text{A-7})$$

ここで $\tilde{u}_{ij}(t)$ は誤差項である。(A-5)式の誤差項 $\tilde{\varepsilon}_{ij}(t)$ と(A-7)式の誤差項 $\tilde{u}_{ij}(t)$ との間における独立性を仮定したうえで、彼らは一般化最小自乗法、あるいは2次計画法を用いた漸近的に有効性を持つ推移行列の推定方法を提唱している<sup>35</sup>。

本稿の実証例では、個別の社債格付けデータが利用可能であったので、このような方法を用いなかった。しかし、社債市場における格付けや、貸出・債権の延滞状況などの集計データが整備・開示されれば、そうしたデータと、ここで示したような定式化によって、格付け推移行列を推定することが可能になり、推移行列に基づく債券や貸出の評価とリスク分析が比較的容易に可能になると期待できよう。

35 もう1つの考え方は、(A-6)式において、 $\mathbf{P}$ の非負性と行列の各行の要素の和が1になるという条件を満足するために、 $X_l(t)$ の非確率的なロジット変換を試みることであろう。しかしこの場合は、 $t$ 期の格付けと外生的なリスク・ファクターに関し繰り返しデータが必要になる。そのため集計データのみを議論するこのケースでは論及をしなかった。詳しくはGourieroux [2000]を参照のこと。

## 補論3. コックスの比例ハザード・モデルの推定結果（選択された説明変数を用いた場合）

## (1) コックスの比例ハザード・モデルの推定結果（選択された説明変数を用いた場合）

変数名	AAAからAA		AAからA		AからBBB		BBBからBB	
	係数推定値	t値	係数推定値	t値	係数推定値	t値	係数推定値	t値
当座比率	-0.03	-2.61						
固定長期適合率	-0.109	-3.18						
有利子負債比率								
売上高営業利益率								
売上高経常利益率								
自己資本利益率								
総資産事業利益率			-0.379	-3.44	-0.36	-4.37	-0.38	-4.52
固定資産回転率								
総資産回転率								
一株当り利益								
日経総合株価指数・値(36ヵ月)								
日経総合株価指数・値(60ヵ月)					1.501	3.74	1.007	2.08
固定比率(対数)								
負債比率(対数)								
有利子負債(対数)								
有利子負債比率(対数)					0.763	5.47	0.523	3.64
借入金依存度(対数)								
金利・税控除前利益(対数)								
資本合計(対数)	-1.058	-2.58			-0.704	-4.06	-0.603	-3.31
売上高・営業収益(対数)								
営業利益(対数)								
自己資本比率(対数)								
経常利益(対数)								
時価総額(対数)			-0.401	-2.05				
標本数	24		80		245		236	
切断された観測値数	9		26		69		43	
尤度比検定	10.7 [0.014]		20.3 [0.000]		92.8 [0.000]		50 [0.000]	

備考：[ ]内の数値はp値である。

## 補論 4. 格付け推移行列の95%信頼限界

### (1) 格付け推移行列 (95%信頼区間下限)

t=3	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.906	0.094	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.968	0.032	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.980	0.020	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.976	0.024
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

t=6	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.906	0.094	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.946	0.054	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.942	0.058	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.959	0.041
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

t=9	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.868	0.132	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.880	0.120	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.880	0.120	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.922	0.078
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

t=12	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.814	0.186	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.871	0.129	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.859	0.141	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.894	0.106
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

t=15	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.660	0.340	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.828	0.172	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.835	0.165	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.858	0.142
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

t=18	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.544	0.456	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.828	0.172	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.826	0.174	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.853	0.147
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

t=21	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.544	0.456	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.801	0.199	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.816	0.184	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.848	0.152
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

t=24	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.544	0.456	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.801	0.199	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.816	0.184	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.836	0.164
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

## (2) 格付け推移行列 (95%信頼区間上限)

$t=3$	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.997	0.003	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.998	0.002
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

$t=6$	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.984	0.016	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.992	0.008
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

$t=9$	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.956	0.044	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.975	0.025
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

$t=12$	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.946	0.054	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.961	0.039
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

$t=15$	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.934	0.066	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.942	0.058
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

$t=18$	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.984	0.016	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.984	0.016	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.929	0.071	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.940	0.060
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

$t=21$	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.984	0.016	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.984	0.016	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.923	0.077	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.937	0.063
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

$t=24$	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	0.984	0.016	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.984	0.016	0.000	0.000
A	0.000	0.000	0.923	0.077	0.000
BBB	0.000	0.000	0.000	0.930	0.070
BB	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

## 参考文献

- 家田 明、「社債流通価格にインプライされている期待デフォルト確率の信用リスク・プライシング・モデルによる推定 改良型ジャロウ・ランド・ターンブル・モデルを用いて」、『金融研究』第18巻別冊第1号、日本銀行金融研究所、1999年1月、107～134頁
- 一條裕彦、森平爽一郎、「住宅ローンのプリペイメント分析」、『日本金融・証券計量・工学会 (JAFEE) 2001年夏季大会予稿集』、2001年7月、221～239頁
- 大橋靖雄、浜田知久馬、「生存時間解析 SASによる生物統計」、『東京大学出版会、1995年金融情報システムセンター、「リスク管理モデルに関する調査報告書」』、2000年7月
- 小林正人、「順序プロビット・モデルのテストと社債格付データへの応用」、『金融研究』第20巻別冊第1号、日本銀行金融研究所、2001年4月、1～18頁
- 高橋秀夫、森平爽一郎、「信用リスク管理の展望:市場リスクとの統合ポートフォリオアプローチ」、『金融研究』第15巻第4号、日本銀行金融研究所、1996年11月、155～208頁
- 中山めぐみ、森平爽一郎、「格付け選択確率の推定と信用リスク量」、『日本金融・証券計量・工学会 (JAFEE) 1998年夏季大会予稿集』、1998年7月、210～25頁
- 新美隆宏、「格付けと財務指標の関係について」、『JAFEE夏季大会予稿集』、1995年6月
- 森平爽一郎、「信用リスクの測定と管理 第3回:倒産確率推定のオプション・アプローチ」、『証券アナリストジャーナル』、2000年1月a、85～100頁
- 、「信用リスクの測定と管理 第5回:倒産確率の期間構造推定」、『証券アナリストジャーナル』、2000年5月b、104～124頁
- 、「信用リスクの測定と管理 第6回:格付けと信用リスク分析」、『証券アナリストジャーナル』、2000年7月c、84～96頁
- 森村英典、高橋幸雄、「マルコフ解析」、『日科技連』、1979年
- 安川武彦、「社債格付けの決定要因に関するパネル・データ分析」、『筑波大学大学院 経営・政策科学研究科修士論文』、2000年1月
- Acharya, Viral., Sanjiv R. Das, and Rasngarajan K. Sundaram, “Arbitrage-Free Pricing of Credit Derivatives with Ratings Transitions,” forthcoming in *Financial Analysts Journal*, 2001.
- Allison, Paul D., *Survival Analysis Using the SAS System: A Practical Guide*, SAS Institute, 1995.
- ., *Event History Analysis: Regression for Longitudinal Event Data*, Sage University Papers Series, Quantitative Applications in the Social Sciences, No. 07-046, Sage Publications, 1984.
- Altman, Edward I., “The Importance and Subtlety of Credit Rating Migration,” *Journal of Banking and Finance*, 22 (10-11), October, 1998, pp. 1231-1247.
- Aonuma, Kimiaki., and Takahito Tanabe, “An Estimation Model for the Term Structure of Yield Spread,” forthcoming in *Asian Pacific Financial Markets*, 2001.
- Barkman, Arnold I., “Testing The Markov Chain Approach on Accounts Receivable,” *Management Accounting*, 62 (7), 1981, pp. 48-50.
- Basel Committee on Banking Supervision, *Credit Risk Modelling: Current Practices and Applications*, Bank for International Settlements, April 1999 (パーゼル銀行監督委員会「信用リスク・モデル:現状とその活用」(日本銀行仮訳) 1999年4月).

- , *The New Basel Capital Accord*, Bank for International Settlements, January 2001 ( パーゼル銀行監督委員会「自己資本に関する新しいパーゼル合意」(日本銀行仮訳)、2001年1月 ) .
- , *The Standardized Approach to Credit Risk*, Bank for International Settlements, January, 2000a.
- , *The Internal Ratings-Based Approach*, Bank for International Settlements, January, 2000b.
- Betancourt, Luis, “Using Markov Chains to Estimate Losses from a Portfolio of Mortgages,” *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 12 (3), May, 1999, pp. 303-318.
- Cheung, Stella, “Provincial Credit Ratings in Canada: An Ordered Probit Analysis,” Bank of Canada Working Paper, 96-6, April 1996.
- Cyert, R. M., and G. L. Thompson, “Selecting a Portfolio of Credit Risks by Markov Chains,” *Journal of Business*, 41 (1), 1968, pp. 39-46.
- Das, Sanjiv R., and Rasngarajan K. Sundaram, “A Discrete-Time Approach to Arbitrage-Free Pricing of Credit Derivatives,” *Management Science*, 46 (1), January 2000, pp. 46-63.
- ., and Peter Tufano, “Pricing Credit-Sensitive Debt when Interest Rates, Credit Ratings and Credit Spreads are Stochastic,” *Journal of Financial Engineering*, 5 (2), June, 1996, pp. 161-198.
- Del Angel, Gabriela F., Javier Marquez Diez-Canedo, and Estela Patino Gorbea, “A Discrete Markov Chain Model for Valuing Loan Portfolios: The Case of Mexican Loan Sales,” *Journal of Banking and Finance*, 22 (10-11), October, 1998, pp. 1457-1480.
- Deng, Yongheng, John M. Quigley, Robert Van Order, and Freddie Mac, “Mortgage Default and Low Downpayment Loans: The Costs of Public Subsidy,” *Regional Science and Urban Economics*, 26 (3-4), June, 1996, pp. 263-285.
- Ederington, L. H., “Classification Models and Bond Ratings” *The Financial Review*, 20 (4), November, 1985, pp. 237-262.
- Fons, Jerome S., and Andrew E. Kimball, “Corporate Bond Defaults and Default Rates 1970-1990,” *Journal of Fixed Income*, 1 (1), 1991, pp. 36-48.
- Gourieroux, Christian, *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Themes in Modern Econometrics, Cambridge University Press, 2000.
- Howard, Ronald A., *Dynamic Programming and Markov Processes*, Technology Press of Massachusetts Institute of Technology, 1960, ( 関根智明他訳、「ダイナミックプログラミングとマルコフ過程」, 培風館、1971年 ) .
- Jarrow, R. A., D. Lando, and S. M. Turnbull, “A Markov Model for The Term Structure of Credit Risk Spreads,” *Review of Financial Studies*, 10 (2), Summer, 1997, pp. 481-523.
- Kijima, Masaaki, and Katsuya Komoribayashi, “Markov Chain Model for Valuing Credit Risk Derivatives,” *Journal of Derivatives*, 6 (1), Fall, 1998, pp. 97-108.
- Kim, Jongwood, “Conditional Transition Matrix Builder: Technical Document,” RiskMetrics Group, Working Paper, 2000.
- Lee, T. C., G. G. Judge, and A. Zellner, *Estimating the Parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data*, Contributions to Economic Analysis, v.65, North-Holland, 1970.

- and , “Estimation of Transition Probabilities in a Nonstationary Finite Markov Chain,” *Metroeconomica*, 24 (2), 1972, pp. 180-201.
- Li, David, “Constructing a Credit Curve,” in *it Credit Risk: Model and Management*, edited by David Shimko, Risk Books, 1999.
- Moon, Choon Geol, and J. G. Stotsky, “Testing the Differences between the Determinants of Moody's and Standard & Poor's Ratings: An Application of Smooth Simulated Maximum Likelihood Estimation,” *Journal of Applied Econometrics*, 8 (1), 1993a, pp. 51-69.
- , and , “Municipal Bond Rating Analysis: Sample Selectivity and Simultaneous Equations Bias,” *Regional Science and Urban Economics*, 23 (1), 1993b, pp. 29-50.
- Nickell, Pamela, William Perraudin, and Simone Varotto, “Stability of Rating Transitions,” *Journal of Banking and Finance*, 24 (1/2), 2000, pp. 203-227.
- Smith, L. Douglas, and Edward C. Lawrence, “Forecasting Losses on a Liquidating Long-Term Loan Portfolio,” *Journal of Banking and Finance*, 19 (6), 1995, pp. 959-985.
- , Susan M. Sanchez, and Edward C. Lawrence, “A Comprehensive Model for Managing Credit Risk on Home Mortgage Portfolios,” *Decision Science*, 27 (2), Spring, 1996, pp. 291-317.
- Venables, W.N., and B.D. Ripley, *Modern Applied Statistics with S-PLUS*, Third Edition, New York: Springer, 1999.