日本銀行金融研究所／金融研究　/ 2001.4

信用リスクのある金融商品のコックス過程を用いたプライシング方法

丸茂幸平（まるもこうへい）／家田　明（いえだあきら）

要　旨

信用リスクのある金融商品のプライシングで重要となるのがデフォルト事象の扱いである。デフォルト事象を数学的に取り扱う方法として、ポアソン過程によるものがある。これは、各瞬間における「デフォルトの起こりやすさ」を表す強度を定義し、この強度を持つポアソン過程の最初のジャンプをデフォルトとみなす方法である。ただし、ポアソン過程による定式化を行う場合には、デフォルト強度が確定的であるという仮定が必要である。コックス過程では、この仮定を緩和し、デフォルト強度が確率過程である場合を扱う。

本稿では、ランドによって示された、コックス過程を用いた信用リスクのある金融商品のプライシングの枠組みを、数学的証明を展開しつつ解説すると共に、コックス過程を用いた信用リスクのある金融商品（クレジット・デリバティブズ等）のプライシングの具体例についても解説を行う。さらに、実際のプライシングで活用されることが多いダフィー等によるプライシング・モデルとの関係を説明する。信用リスクのある金融商品のプライシングを実際に行う場合には、実務上の制約（データの制約等）から、理論モデルに何らかの仮定を置くことでモデルを扱いやすくすることが多いが、理論の数学的内容を理解しておくことは、こうした実務上の制約や各種仮定が与える影響等を認識・評価するために重要である。

キーワード： 信用リスク、プライシング、クレジット・デリバティブズ、ポアソン過程、コックス過程

本稿作成にあたっては、森平爽一郎教授（慶応大学）から大変貴重なコメントを頂戴した。もっとも、本稿で示された意見やあり得べき誤りは、すべて筆者個人に属する。

丸茂幸平　日本銀行金融研究所研究第1課（E-mail: kouhei.marumo@boj.or.jp）
家田 明　日本銀行金融研究所研究第1課（E-mail: akira.ieda@boj.or.jp）

1．はじめに

信用リスクのある金融商品（defaultable contingent claim）のプライシング手法において、重要となるのがデフォルト事象の扱いである。デフォルト事象を数学的に扱う場合、デフォルトは予め知ることのできない「時刻」に発生すると考え、その「時刻」をモデル化するという手法がある。この手法では、まず各瞬間におけるデフォルトの「起こりやすさ」を表す強度（intensity）を定式化する[1]。デフォルト事象は、ここで定式化された強度を持つポアソン過程（Poisson process）の最初のジャンプとして表現され、ここからデフォルト時刻の分布が導かれる。

強度を定式化する際には、時間に依存しない一定値と仮定したり、ある確定的な関数を仮定する場合がある。しかし、強度の確率的な変動を表現するために、強度を確率過程で表すことも可能である。このように強度を確率過程で置き換えた場合のポアソン過程は「コックス過程（Cox process）」と呼ばれる。

本稿では、コペンハーゲン大学のランドによって示された、コックス過程を用いた信用リスクのある金融商品のプライシングの枠組み（Lando［1998］）を、数学的証明を展開しつつ解説すると共に、コックス過程を用いた信用リスクのある金融商品（クレジット･デリバティブズ等）のプライシングの具体例についても解説を行う。さらに、実際のプライシングで活用されることが多いダフィー等によるプライシング･モデルとの関係を説明する。信用リスクのある金融商品のプライシングを実際に行う場合には、実務上の制約（データの制約等）から、理論モデルに何らかの仮定を置くことでモデルを扱いやすくすることが多いが、理論の数学的内容を理解しておくことは、こうした実務上の制約や各種仮定が与える影響等を認識･評価するために重要である。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、2章で信用リスクのある金融商品のプライシングの基本的な考え方を整理する。次に3章で、コックス過程の解説を行い、4章でコックス過程とプライシングの関係を整理する。5章では、4章の結果を基にダフィー等によるプライシング・モデル（Duffie and Singleton［1998］）を解説する。なお、本論で展開される数学的議論の参考として、確率過程論の用語集を補論として添付した。

1 これとは別の方法として、ある企業の資産価値が確率的に変動すると仮定し、それが一定の水準を下回った場合にデフォルトが生じると考える方法がある。

2．信用リスクのある金融商品のプライシングの基本的な考え方

本章[2]では、まず2章1節で、金融商品の理論的な公正価格（理論価格）を導出する方法を概説する。本稿で扱うコックス過程を用いたプライシングの枠組みも、この仮定のもとで行われる。次に2章2節では、この仮定と金融機関等が算出する与信プレミアムの構成との関係について若干の考察を行う。

(1) 金融商品の理論価格の導出方法

本節では、デリバティブズ等金融商品の理論的な公正価格（理論価格）を導出する方法（プライシング理論）の解説を行う。

金融商品のプライシング理論の根幹をなす考え方として、無裁定条件と金融市場の完備性を基本とするものがある。ここで、無裁定条件とは、リスクなしで利益を稼ぐ（フリー･ランチにあずかる）ことはできないということで、全く同じキャッシュ・フローを持つ2つの金融商品の価格は同一でなければならないという条件である。また、市場が完備であるとは、任意のキャッシュ・フローが、市場で流通し価格が存在する金融商品の組合せによって複製することが可能であることをいう[3]。

これらの 無裁定条件と金融市場の完備性を前提とすれば、金融商品の理論価格は､現時点から将来にかけて発生するキャッシュ・フローの割引現在価値を合計し、リスク中立測度に関する期待値を計算することによって得ることができるというのが、プライシング理論の根幹をなす考え方である[4]。これは、数理ファイナンスの世界の用語を使って述べると､「無裁定条件と市場の完備性が成立している場合には、無リスク資産を基準財として、すべての資産の相対価格をマルチンゲールとするリスク中立測度がただ一つ存在する」という定理である。この定理が主張するのは、ある金融商品の将来のキャッシュ・フローが確定的ではなく、個々の経済主体が自らのリスク許容度等に基づいて行う評価が異なり得る場合でも、理論的な公正価格が存在するということである。

この考え方を用いた理論価格の定式化を具体的にみてみよう。以下では、無裁定条件と金融市場の完備性を仮定する[5]。この仮定のもとでは、デフォルトが

2 信用リスクのある金融商品のプライシングの包括的な解説書としては、小田［1999］等がある。

3 この場合、取引にかかる税金やコスト等がない（摩擦がない）こと、任意の金額のポジションをとることが可能であることが仮定されている。

4 これは、Harrison and Pliska［1981］によって示されたものである。なお、リスク中立測度は、このようなプライシングを行う際に利用される概念であり、いわゆる「現実の確率」とは異なる。

5 実際の市場では、取引コスト等の要因から無裁定条件が成立していない場合があると考えられる。また、市場の完備性も、任意のペイオフを複製できる金融商品が存在しない場合が多く、成立していないのがむしろ普通である。完備性が成り立たない場合には、例えば適当なモデルを導入することによって、市場で流通している金融商品の価格からモデルのパラメータを推定し、それによって、任意のペイオフをプライシングするという手法が用いられる（3章で触れるクレジット・スワップ・オプションのプライシングがその具体例である）。

時点τ（$\tau \leq T$）で発生した場合に Z_τ 円の支払いが発生し、満期Tまでデフォルトが発生しなかった場合にX円の支払いが発生する、信用リスクのある金融商品の時点 t（現時点）における価格をS_t 円とおくと、上述の定理を用いて、

$$S_t = E_t\left[\exp\{-\int_t^\tau r_u\,du\}\,Z_\tau 1_{\{\tau\leq T\}} + \exp\{-\int_t^T r_u\,du\}\,X1_{\{\tau>T\}}\,|\,\tau\geq t\right] \qquad (1)$$

と表すことができる。E_tは時点 t までに得られた情報を所与とした場合のリスク中立測度による期待値演算子、τはデフォルト時点を表す確率変数、r_u は時点 u での無リスク（デフォルト・フリー）の短期金利、$1_{\{\cdot\}}$は定義関数[6]である。

さて、単純化のため元本を1円とする割引債（すなわちXを1としたもの）を考える。回収額に関しては、やや技術的になるが、確率過程 $\{L_u\}_{0\leq u\leq T}$ とデフォルト時点τを使って、L_τ と表す[7]。

さらに、「無リスク金利過程$\{r_u\}_{0\leq u\leq T}$、回収額過程 $\{L_u\}_{0\leq u\leq T}$、デフォルト過程 $\{1_{\{\tau\leq u\}}\}_{0\leq u\leq T}$ は、リスク中立下で互いに独立である」との仮定を置くと、(1) 式は、

$$S_t = E_t\left[\exp\{-\int_t^T r_u\,du\}\right] E_t\left[L^T\cdot 1_{\{\tau\leq T\}} + 1\cdot 1_{\{\tau>T\}}\,|\,\tau\geq t\right] \qquad (2)$$

ただし、$L^T = L_\tau \exp\{\int_t^T r_u\,du\}$

と表され、さらに$1_{\{\tau\leq T\}} = 1-1_{\{\tau>T\}}$であることを用いると、

$$S_t = S^0(t,T)\{E_t[L^T] + (1-E_t[L^T])P_t(\tau>T\,|\,\tau\geq t)\} \qquad (3)$$

ただし、$S^0(t,T) = E_t\left[\exp\{-\int_t^T r_u\,du\}\right]$（満期$T$のデフォルト・フリーの割引債の時点$t$での価格）

$$P_t(\tau>T\,|\,\tau\geq t) = E_t[1_{\{\tau>T\}}\,|\,\tau\geq t]$$

と整理することができる。市場の完備性を利用すれば、$P_t(\tau>T\,|\,\tau\geq t)$を推定することができることになる。また、$P_t(\tau>T\,|\,\tau\geq t)$が求まれば、それを用いて任意のペイオフの理論価格を計算することも可能となる。

6 $1_{\{A\}}$は、事象Aが真のとき1、そうでないとき0（ゼロ）となる。
7 この表記の背後には次のような考え方がある。すなわち、まず、回収額はデフォルト時点に依存するものと考え、デフォルトが時点 $u(0\leq u\leq T)$ に発生した場合の回収額をL_uとおく。一方、L_uの値が確率的に変動するものと考えると、$\{L_u\}_{0\leq u\leq T}$ は確率過程である。このL_uにデフォルト時点 τを与えたL_τをデフォルト時の回収額とした。

$P_t\ (\tau > T|\tau \geq t\ )$の計算は、例えば市場で観測されるクレジット・スプレッドを用いて行うことができる。時点tでのある社債（満期Tの割引債）とデフォルト・フリーの割引債（満期T）の利回りをおのおの$Yield_t$、$Yield_t^0$とする。同社債のクレジット・スプレッドCSは利回りの差として次のように表すことができる[8]。

$$CS = Yield_t - Yield_t^0$$

$$= -\frac{1}{T-t}\log\frac{S_t}{S^0(t,T)}$$

(3)式を用いると、クレジット・スプレッドCSは

$$CS = -\frac{1}{T-t}\log\left[E_t\left[L^T\right]+(1-E_t\left[L^T\right])P_t(\tau > T|\tau \geq t)\right]$$

と表される。さらに$L_t \equiv L$（一定）との仮定を置くと、満期Tの社債のクレジット・スプレッドから、$P_t\ (\tau > T|\tau \geq t\ )$を計算することができる。

(2) 個々の経済主体による金融商品の評価

前節では、金融商品の理論的な公正価格（理論価格）を導出する方法を概説した。そのポイントは、無裁定条件と金融市場の完備性が成立するとの条件のもとでは、金融商品の理論的な公正価格は、無リスク金利やリスク中立測度など市場全体に共通のファクターによって決定されることであった。この理論価格は、市場で取引可能と考えられる価格であり、市場全体の需要と供給が反映された価格であると考えることができる。つまり、この価格は、市場ないし市場を構成するほかの金融商品の価格と整合的になるように決まる客観的な価格である。したがって、こうしたプライシング手法は、金融商品の客観的な価格を計算したい場合に使用するべきものである。

一方、個々の経済主体は自らのリスク許容度等に基づいて金融商品の評価を行う。金融機関が金融商品を取引する場合を考えよう。金融機関の実務では、金融商品取引の取引条件は、取引にかかる諸コストやリスクに対する引当金コストなど、個別のファクターにも依存して主観的に決められるのが一般的である。本節では、具体例として、金融機関等が貸出レートを算出する際に用いられる考え方の概要に触れる。

金融機関がある企業に与信を行う場合、与信先の信用度や当該与信の採算性が考慮される。具体的には、金融機関は、①資金調達コスト、②当該取引にかかる事務コスト、③期待損失額に対する引当金コスト、④予期しない損失額に対する資本コストを回収したうえ、⑤超過収益を得ることを目標として貸出レートを設定する。

これらのうち、①資金調達コストは、無リスク金利水準と当該金融機関の信用度

8 実際のスプレッドには信用リスクのほかに流動性リスク等も反映されていると考えられる。

によって決まると通常は考えることができる。

次に、③期待損失額に対する引当金と④予期しない損失額に対する資本コストは、与信先の信用リスクに対するプレミアムと考えることができる。ここで、③の期待損失額は、回収率などを考慮したうえでの損失額の期待値と考えることができる。また、④の予期しない損失額は、当該金融機関のポートフォリオの損失額分布を基に算出される。

さらに、⑤超過収益は、当該金融機関の経営戦略（例えば目標ROE）や与信先との取引関係等によって決定される。

このように貸出レートの決定には、①②④のような自行の状況に依存する要因や、⑤のように自行と取引先との関係に依存する要因が含まれている。

3．コックス過程の構築

前章では、信用リスクのある金融商品のプライシングの基本的な考え方をみてきた。本章以降では、前章1節でみた金融商品の理論的な公正価格（理論価格）を導出する方法の解説を行う。本章では、前章で詳細には触れなかったデフォルト事象や各時点における情報等の数学的定式化をみていくこととする[9]。

すなわち、まず各時点でのデフォルトの「起こりやすさ」を強度関数で表し、デフォルト事象をポアソン過程での最初のジャンプとして定式化する。

さらに、強度の確率的変動を表現するために、強度が確率過程である場合を考察する。このようにポアソン過程の強度関数を確率過程としたものを「コックス過程」と呼ぶ。この場合のデフォルト事象の定式化では、各時点における「情報」を表すフィルトレーションの概念が重要になる。

(1) ポアソン過程

ゼロ以上の整数値をとる計数過程$\{N_t\}, (t \geq 0,\ N_0 = 0)$が

$$P(N_t - N_s = k) = \frac{(\int_s^t l(u)du)^k}{k!}\exp\{-\int_s^t l(u)du\} \quad (k = 0,1,...) \tag{4}$$

を満たすとき、$\{N_t\}_{0 \leq t}$を強度[10]関数（intensity function）を$l(\cdot)$とするポアソン過程（Poisson process）という。ただし、$l(\cdot)$は時間に関する確定的な関数で、非負の値をとるものとする。

9 なお、本章での議論は、特定の確率測度を前提としていない。

10 強度は、直観的には次のように理解できる。観測対象とする事象が、時間区間［$t, t+\Delta t$］に発生する確率の1次近似は$\int_t^{t+\Delta t} l(s)ds$で与えられる。$\Delta t$が微小であるとき、この積分は$l(t)\Delta t$と近似できる。したがって、強度は各時刻でのその事象の「起こりやすさ」を表す。

観測対象とする事象（ここではデフォルト）が時刻 t（≥ 0）まで発生しない確率は、(4) 式より

$$P(N_t = 0) = \exp\{-\int_0^t l(u)\,du\}$$

と表される。

ここで、観測対象とする事象（デフォルト）が起こる時刻 $\tau(\geq 0)$ を考える。デフォルト時刻 τ をポアソン過程の最初のジャンプに対応させると、

$$\tau = \sup\{t : N_t = 0\}$$

であるが、同値な表現として以下のものがある。

τ は、期待値1の指数分布に従う確率変数 E_1 を使って

$$\tau = \inf\{t : -\int_0^t l(u)\,du \geq E_1\} \tag{5}$$

と表すことができる。

（証明）

τ の定義より

$$\tau = \sup\{t : N_t = 0\}$$

である。ここで τ の分布関数 $F(x) = P(\tau \leq x)$ を考えると、

$$\begin{aligned} F(x) &= P(\sup\{t : N_t = 0\} \leq x) \\ &= P(N_x \geq 1) \\ &= 1 - P(N_x = 0) \\ &= 1 - \exp\{-\int_0^x l(u)\,du\} \end{aligned}$$

と計算される。

一方、$\tau_1 = \inf\{t : \int_0^t l(u)\,du \geq E_1\}$ の分布関数 $F_1(x) = P(\tau_1 \leq x)$ は、

$$\begin{aligned} F_1(x) &= P(\inf\{t : \int_0^t l(u)\,du \geq E_1\} \leq x) \\ &= P(E_1 \leq \int_0^x l(u)\,du) \\ &= 1 - \exp\{-\int_0^x l(u)\,du\} \end{aligned}$$

であるので、τとτ_1は同じ分布関数を持つ。確率変数E_1は、「期待値1の指数分布に従う」というほかに制約条件がないので、

$$\sup\{t : N_t = 0\} \equiv \inf\{t : \int_0^t l(u)du \geq E_1\}$$

となるように定義することができる。したがって、$\tau(\omega) \equiv \tau_1(\omega)$となるように$E_1(\omega)$を定義できる。
（証明終）

（2）コックス過程の定義

前節のポアソン過程では、強度$l(\cdot)$を確定的な関数として扱った。この定式化では、「注目する企業の将来の信用状況が現時点でわかっている」という仮定が暗に置かれている。

しかし、このように将来時点の信用状況が現時点で既にわかっているというのは非常に強い仮定である。本節では、この条件を少し緩和し、強度が確率的に変動する場合を考察する。

すなわち、強度lは時刻$s\ (\geq 0)$と根元事象$\omega\ (\in \Omega)$の関数で、s, ωを与えた$l(s, \omega)$は非負の実数値をとるものとする。このような確率過程$\{l(s, \cdot)\}_{0\leq t\leq T}$は、非負の実数値をとる確定的な関数$\lambda(\cdot)$と、$0\leq s\leq T$で定義された確率過程$\{X_s(\cdot)\}_{0\leq s\leq T}$を使って、

$$l(\mathrm{s}, \omega) \equiv \lambda(X_s(\omega)) \qquad (6)$$

と表すことができる。ただし、$\{X_s\}_{0\leq s\leq T}$をR^dの値をとる（すなわちd変量の）右連続左極限の確率過程とし、$\lambda : R^d \mapsto [0, \infty)$とする。

強度をこのように定式化することの意味は、次のように理解することができる。注目している企業の信用状況に影響するd個の変数がすべて特定できたとする。これらd個の変数を状態変数（state variable）と呼び、まとめてX（d次元ベクトル）で表す。そうすると、強度lは状態変数Xの関数$\lambda(X)$として$l = \lambda(X)$のように表すことができる。ただし、d個の状態変数の中に確率的に変動するものが含まれている場合には、Xを確率過程と考えることが必要になる。(6)式のような定式化は、確率過程として表された状態変数$\{X_s(\cdot)\}_{0\leq s\leq T}$を通して強度を表している（なお、以下では、$\lambda(X_s)$を単に$\lambda_s$と表記することがある）。

このように、強度を確率過程にまで拡張した計数過程$\{N_s\}_{0\leq s\leq T}$を「コックス過程」という。

（3）コックス過程のもとでのデフォルト時刻の定式化

前節で述べたように、コックス過程は、ポアソン過程の強度関数を確率過程に置

き換えたものである。コックス過程のもとでのデフォルト時刻τも、ポアソン過程の場合と同様に、最初のジャンプに対応させて、

$$\tau = \sup\{t : N_t = 0\}$$

ただし、$\{N_s\}$は強度過程$\{\lambda_s\}$を持つコックス過程

と定義することは自然である。

デフォルト時刻τをさらに考察するためには、多少の数学的準備を必要とする。まず、時間とともに「情報」が増大していく様子を表すためにフィルトレーションの概念を導入する。

確率過程$\{X_s\}_{0\le s\le T}$に対応するフィルトレーションを$\{\mathcal{G}_s\}_{0\le s\le T}$とする。ただし、確率過程$\{X_s\}_{0\le s\le T}$は、前節で示した$d$変量の状態変数のベクトルである。

フィルトレーション$\{\mathcal{G}_t\}$の形式的な定義は

$$\mathcal{G}_t = \sigma(X_s : 0\le s\le t),\ 0\le t\le T$$

と書くことができる。ただし、$\sigma(X_s : 0\le s\le t)$は、$\{X_s\}_{0\le s\le t}$を可測にする最小の$\sigma$ー加法族である。

直観的には、$\mathcal{G}_t$は「d 個の状態変数$\{X_s\}$の時点tまでの履歴」という情報を表すと考えることができる。また、d個の状態変数$\{X_s\}$によってデフォルト強度が決められることを思い出すと、$\mathcal{G}_t$が与えられれば、デフォルト強度λ_sの$0\le s\le t$における履歴も与えられることがわかる。

このようにフィルトレーションを定義すると、以下の関係が成立する。

$$P(\tau > t \mid \mathcal{G}_t) = \exp\{-\int_0^t \lambda_s\, ds\}, \qquad t\in[0,T] \tag{7}$$

$$P(\tau > t) = E[\exp\{-\int_0^t \lambda_s\, ds\}], \qquad t\in[0,T] \tag{8}$$

（証明）

（7）式左辺は、

$$P(\tau > t \mid \mathcal{G}_t) = P(N_t = 0 \mid \mathcal{G}_t)$$

であるが、$P(N_t = 0 \mid \mathcal{G}_t)$は、強度過程$\{\lambda_s\}_{0\le s\le t}$を与えたときの確率を表すので、強度が確定的な場合と同様の計算ができて、

$$P(N_t = 0 \mid \mathcal{G}_t) = \exp\{-\int_0^t \lambda_s\, ds\}$$

となり、右辺と等しい。

また、(8) 式は

$$
\begin{aligned}
P(\tau > t) &= E[1_{\{\tau > t\}}] \\
&= E[E[1_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{G}_t]] \\
&= E[P(\tau > t \mid \mathcal{G}_t)] \\
&= E[\exp\{-\int_0^t \lambda_u du\}]
\end{aligned}
$$

のように示される。
(証明終)

また、$t \leq T$ より (7) 式の期待値の条件を $\mathcal{G}_t$ から $\mathcal{G}_T$ に交換しても同様の証明ができて、

$$P(\tau > t \mid \mathcal{G}_T) = \exp\{-\int_0^t \lambda_u du\}, \quad t \in [0, T] \tag{9}$$

が成立する。

デフォルト時刻 τ は、強度が確定的である場合と同様に、期待値1の指数分布に従う確率変数 E_1（ただし、E_1 と $\{X_s\}_{0 \leq s \leq T}$ は互いに独立）を使って、以下のように表すことができる。

$$\tau = \inf\{t : \int_0^t \lambda_s ds \geq E_1\} \tag{10}$$

(証明)

$\tau_1 = \inf\{t : \int_0^t \lambda_s ds \geq E_1\}$ とおいて、その分布と先に定義した $\tau = \sup\{t : N_t = 0\}$ の分布を比較する。まず、$0 \leq t \leq s \leq T$ のとき、$\mathcal{G}_s$ で条件付けした場合の確率を考える。

τ については、(7) 式と同様の証明ができて、

$$P(\tau > t \mid \mathcal{G}_s) = \exp\{-\int_0^t \lambda_u du\}$$

が成立する。τ_1 については、

$$
\begin{aligned}
P(\tau_1 > t \mid \mathcal{G}_s) &= P(\inf\{s : \int_0^s \lambda_u du \geq E_1\} > t \mid \mathcal{G}_s) \\
&= P(\int_0^t \lambda_u du < E_1 \mid \mathcal{G}_s)
\end{aligned}
$$

であるが、$\int_0^t \lambda_u du$ が $\mathcal{G}_s$ ー可測であり、また E_1 と $\mathcal{G}_s = \sigma(X_u : 0 \leq u \leq s)$ が独立であるので、結局、

$$P(\tau_1 > t \mid \mathcal{G}_s) = \exp\{-\int_0^t \lambda_u du\}$$

が成立し、両者は分布として互いに等しい。

次に、$0 \leq s < t \leq T$として、$\mathcal{G}_s$で条件付けした場合を考える。
τについては、

$$
\begin{aligned}
P(\tau > t \mid \mathcal{G}_s) &= E[1_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{G}_s] \\
&= E[E[1_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{G}_t] \mid \mathcal{G}_s] \\
&= E[P(\tau > t \mid \mathcal{G}_t) \mid \mathcal{G}_s] \\
&= E[\exp\{-\int_0^t \lambda_u du\} \mid \mathcal{G}_s] \\
&= \exp\{-\int_0^s \lambda_u du\} E[\exp\{-\int_s^t \lambda_u du\} \mid \mathcal{G}_s]
\end{aligned}
$$

と計算される。τ_1については、

$$
\begin{aligned}
P(\tau_1 > t \mid \mathcal{G}_s) &= E[1_{\{\tau_1 > t\}} \mid \mathcal{G}_s] \\
&= E[E[1_{\{\tau_1 > t\}} \mid \mathcal{G}_t] \mid \mathcal{G}_s] \\
&= E[P(\tau_1 > t \mid \mathcal{G}_t) \mid \mathcal{G}_s] \\
&= E[\exp\{-\int_0^t \lambda_u du\} \mid \mathcal{G}_s] \\
&= \exp\{-\int_0^s \lambda_u du\} E[\exp\{-\int_s^t \lambda_u du\} \mid \mathcal{G}_s]
\end{aligned}
$$

であり、この場合もやはり両者は分布として等しい。よって、τとτ_1の$\{\mathcal{G}_s\}$に関する条件付き分布は等しく、また、$\{\mathcal{G}_s\}$と$\sigma(E_1)$が独立なことから、$\tau(\omega) \equiv \tau_1(\omega)$ となるように$E_1(\omega)$を定義することができる。
（証明終）

4．3つの基本的な証券

信用リスクのある金融商品の価格を表現するためには、4章1節で説明する3つの基本的な証券を利用することができる。無裁定条件と金融市場の完備性が成立するとの仮定のもとで、ほとんどの信用リスクのある金融商品はこれら3つの基本的な証券の組合せとして表現することができる。以下、4章1節で3つの基本的な証券とその評価式を示す。4章2節では、評価式の証明を行う。

（1）3つの基本的な証券とその評価式

信用リスクのある金融商品を表現するには、以下の3つの基本的な証券を利用することができる。

1. $X1_{\{\tau>T\}}$
時刻 T までにデフォルトが生じなかった場合に X の支払いがある証券。ただし、 X は$\mathcal{G}_T$ー可測な確率変数とする。

2. $Y_s 1_{\{\tau>s\}}$
デフォルト時刻τ まで連続的にY_sが支払われる証券。ただし、$\{Y_s\}_{0\le s\le T}$は$\{\mathcal{G}_t\}$ー適合な確率過程とする。

3. $Z_\tau 1_{\{\tau\le T\}}$
時刻T までにデフォルトが生じた場合にデフォルト時点τ でZ_τが支払われる証券。ただし、$\{Z_s\}_{0\le s\le T}$は$\{\mathcal{G}_t\}$ー適合な確率過程とする。

つまり、信用リスクのある金融商品のプライシングに必要な将来のキャッシュ・フロー情報は、予め決められた時刻に発生する支払い（X, Y_s）とデフォルト時の支払い（Z_τ＜例えば回収額＞）に関するものである。

以下、これら証券の理論価格に関する期待値計算の結果を示す。仮定として、無リスク短期金利過程$\{r_s\}(=\{R(X_s)\})$を$\{\mathcal{G}_t\}$ー適合とし、以下の3つの期待値について、

$$E[\exp\{-\int_t^T r_s ds\}|X|]<\infty$$

$$E[\int_t^T |Y_s|\exp\{-\int_t^s r_u du\}ds]<\infty$$

$$E[\int_t^T |Z_s\lambda_s|\exp\{-\int_t^s (r_u+\lambda_u)\,du\}ds]<\infty$$

という関係が満たされるとする。

また、デフォルト過程$\{1_{\{\tau\le s\}}\}$に対応するフィルトレーション

$$\mathcal{H}_t=\sigma(1_{\{\tau\le s\}}:0\le s\le t),\quad 0\le t\le T$$

を定義する。これは、$\mathcal{H}_t$は「時点tまでにデフォルトが起こったか否か、起こったならいつ起こったのか」という情報を表すものと考えることができる。

さらに、別のフィルトレーションとして

$$\mathcal{F}_t=\mathcal{G}_t\vee\mathcal{H}_t,\quad 0\le t\le T$$

を定義する。ただし、記号$\vee$は2つのσー加法族を合わせたσー加法族を与える演算

子で、σ一加法族 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$に対して、$\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$は、

$$A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B} \Rightarrow A\cup B\in \mathcal{A}\vee\mathcal{B}$$

を満たす最小のσ一加法族と定義される。直観的には、$\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$は情報 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$を合わせた情報と考えることができる。$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee\mathcal{H}_t$の例では、$\mathcal{F}_t$は、時刻$t$までの状態変数の履歴に関する情報とデフォルト事象が発生したか否かに関する情報を合わせたものである。

以上の設定のもと、上述の3つの証券に関して、

$$E[\exp\{-\int_t^T r_s ds\}X 1_{\{\tau>T\}}|\mathcal{F}_t] = 1_{\{\tau>t\}} E[\exp\{-\int_t^T(r_s+\lambda_s)ds\}X|\mathcal{G}_t] \quad (11)$$

$$E[\int_t^T\exp\{-\int_s^u r_u du\}Y_s 1_{\{\tau>s\}}ds \mid \mathcal{F}_t] = 1_{\{\tau>t\}}E[\int_t^T\exp\{-\int_t^s(r_u+\lambda_u)du\}Y_s ds \mid \mathcal{G}_t] \quad (12)$$

$$E[\exp\{-\int_t^\tau r_s ds\}Z_\tau 1_{\{t<\tau\leq T\}}|\mathcal{F}_t] = 1_{\{\tau>t\}}E[\int_t^T\exp\{-\int_t^s(r_u+\lambda_u)du\}\lambda_s Z_s ds \mid \mathcal{G}_t] \quad (13)$$

という評価式が成立する。これら評価式の導出は後述する。

期待値演算をリスク中立測度のもとで行えば、これらは、おのおのの証券の時刻tでの理論価格を与える。デフォルト事象を上述のようにコックス過程で表現すると、これら証券の価格は、無リスク金利$\{r_s\}$と強度$\{\lambda_s\}$を使って表されることがわかる。

さて、上式の導出を行う前に、これらの基本的な証券の組合せによって、信用リスクのある金融商品の価値が表現できる具体例を示す。

（例１）クレジット・デフォルト・スワップ

クレジット・デフォルト・スワップでは、リファレンス資産（債券）が満期Tまでにデフォルトをきたした場合に、スワップの売り手が買い手に対して元本（1円）から回収額（L_s円）を控除した金額1－L_s円を支払う。$t=0$とし、この時点までにデフォルトが発生していないとすると、このキャッシュ・フローの現在価値p_1は、

$$p_1 = E[\exp\{-\int_0^\tau r_u du\}(1-L_\tau)]$$

であるが、これは（13）式より、

$$p_1 = E[\int_0^T\exp\{-\int_0^s(r_u+\lambda_u)du\}\lambda_s(1-L_s)ds]$$

となる（$t=0$における自明な条件$\mathcal{G}_0$は省略した＜以下同様＞）。

一方、買い手は、売り手に対して固定レート（プレミアム＜保証料＞）をデフォルト時ないし満期まで支払う。ここでは、この固定レート（SPとする）が連続的に支払われると仮定しよう。このキャッシュ・フローの現在価値をp_2円とすると、

$$p_2 = E[\int_0^T \exp\{-\int_0^s r_u du\} SP 1_{\{\tau > s\}} ds]$$

であるが、これは（12）式より、

$$p_2 = E[\int_0^T \exp\{-\int_0^S (r_u + \lambda_u) du\} SP ds]$$

となる。スワップの契約は、契約時点での支払いと受取りのキャッシュ・フローの現在価値が等しくなるように行われるので、$p_1 = p_2$が成立する[11]。すなわち、

$$E[\int_0^T \exp\{-\int_0^s (r_u + \lambda_u) du\}\{SP - \lambda_s(1 - L_s)\} ds] = 0$$

が成り立つ。ここから、金利スワップのアナロジーとして、デフォルト・スワップは固定レートSPと変動レート$\lambda_s(1-L_s)$を交換する取引であるとみなすことができる。

次に、変動レート$\lambda_s(1-L_s)$の意味を考える。5章の結論を先取りすると、以下のような議論が可能である。ある企業が発行する割引債（現時点0、満期T）の価格を$q(0, T)$とする。満期までにデフォルトが発生しなかった場合には、満期時点に1円が支払われ、満期までの時刻t $(0 < t \leq T)$にデフォルトが発生した場合には、デフォルト時点にL_t $(0 \leq L_t < 1)$円だけが支払われるものとする。2章と同様、満期Tに1円が支払われるデフォルトのない割引債の現時点の価格$S^0(0, T)$を

$$S^0(0, T) = E[\exp\{-\int_0^T r_u du\}]$$

とする。5章の結果によると、無リスク金利過程とデフォルト過程が独立であると仮定し、デフォルトが発生した場合の回収率δ_tを回収額とデフォルト直前の債券価格の比で定義すると、$q(0, T)$は

$$q(0, T) = E[\exp\{-\int_0^T (1 - \delta_u) \lambda_u du\}] S^0(0, T)$$

11 この定式化では、デフォルト・スワップ契約のカウンターパーティがデフォルトするリスクは捨象した。

と書ける。したがって、当該割引債と無リスク金利とのスプレッドを$y(0,T)$とおくと、

$$\exp\{-y(0,T)T\}=E[\exp\{-\int_0^T(1-\delta_u)\lambda_u du\}]$$

が得られる。さらにδ_tとL_tとの差が無視し得る場合には、変動レート$\lambda_s(1-L_s)$は、満期Tの事業債（割引債）のクレジット・スプレッドに（積分の指数の期待値として）等しいことが導かれる。

以上のようにクレジット・デフォルト・スワップの固定レートは、幾つかの仮定を置けば、市場で観測される事業債のクレジット・スプレッドと等しいとの結論を得ることができる。

（例２）クレジット・スプレッド・オプション

クレジット・デフォルト・スワップ契約を将来時点T、行使レートKで締結できる権利（クレジット・スプレッド・オプション）を考える。ただし、時点Tまでにデフォルトが発生した場合には当該権利が消滅するものとする。T' をデフォルト・スワップの満期、SP_tをt時点のデフォルト・スワップの市場レートとする。

オプションの満期時点Tにおける、行使レートKによるキャッシュ・フローの価値p_Kは、（例1）と同様の議論により、

$$p_K=E[\int_T^{T'}\exp\{-\int_T^s(r_u+\lambda_u)du\}Kds|\mathcal{G}_T]$$

で与えられる。また、市場レートSP_Tによるキャッシュ・フローの価値p_{SP_T}も

$$p_{SP_T}=E[\int_T^{T'}\exp\{-\int_T^s(r_u+\lambda_u)du\}SP_T ds|\mathcal{G}_T]$$

と求められる。したがって、時点Tにおけるオプションの価値C_Tは、

$$C_T=\max(p_{SP_T}-p_K,0)=\max(SP_T-K,0)E[\int_T^{T'}\exp\{-\int_T^s(r_u+\lambda_u)du\}ds|\mathcal{G}_T]$$

で与えられる。

当該オプションの現在価値をp_3とすると、

$$p_3=E[\exp\{-\int_0^T r_u du\}C_T 1_{\{\tau>T\}}]$$

である。式中の$1_{\{\tau>T\}}$は、「時点Tまでにデフォルトが発生した場合には当該権利が消滅する」という条件に対応している。この式には、(11) 式が適用できて、結局

$$p_3 = E[\max(SP_T - K, 0)\int_T^{T'} \exp\{-\int_0^s (r_u + \lambda_u) du\} ds]$$

が得られる。この場合の具体的な価格の導出には、例えばクレジット・スプレッド自体等のモデル化を行うことが必要となる。

（2）評価式の導出

次に、3つの基礎的証券の評価式である（11）～（13）式を導出する。まず、その準備として、以下の関係が成立することを示す。

$$E[1_{\{\tau \geq T\}} | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] = 1_{\{\tau > t\}} \exp\{-\int_t^T \lambda_s ds\} \tag{14}$$

（証明）

$$\begin{aligned}
E[1_{\{\tau \geq T\}} | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] &= E[1_{\{\tau \geq T\}} | \mathcal{G}_T \vee \{\{\tau \leq t\}, \{\tau > t\}\}] \\
&= 1_{\{\tau \leq t\}} E[1_{\{\tau \geq T\}} | \mathcal{G}_T, \{\tau \leq t\}] + 1_{\{\tau > t\}} E[1_{\{\tau \geq T\}} | \mathcal{G}_T, \{\tau > t\}] \\
&= 1_{\{\tau \leq t\}} P(\tau \geq T | \mathcal{G}_T, \{\tau \leq t\}) + 1_{\{\tau > t\}} P(\tau \geq T | \mathcal{G}_T, \{\tau > t\}) \\
&= 0 + 1_{\{\tau > t\}} P(\tau \geq T | \mathcal{G}_T, \{\tau > t\}) \\
&= 1_{\{\tau > t\}} \frac{P(\{\tau \geq T\} \cap \{\tau > t\} | \mathcal{G}_T)}{P(\tau > t | \mathcal{G}_T)} \\
&= 1_{\{\tau > t\}} \frac{P(\tau \geq T | \mathcal{G}_T)}{P(\tau > t | \mathcal{G}_T)} \\
&= 1_{\{\tau > t\}} \exp\{-\int_t^T \lambda_s ds\}
\end{aligned}$$

ただし、式中の条件 $\{\tau \leq t\}$ は、$\mathcal{H}_t = \sigma(1_{\{\tau \leq s\}} : 0 \leq s \leq t)$ の部分族で、$1_{\{\tau \leq t\}} = 1$を満たすものである。数学的には $\{\tau \leq t\} = \{H \in \mathcal{H}_t : \forall \omega \in H, \tau(\omega) \leq t\}$ と表すことができる。$\{\tau > t\}$ も、同様に、$\{\tau > t\} = \{H \in \mathcal{H}_t : \forall \omega \in H, \tau(\omega) > t\}$ と表される。
（証明終）

イ．(11) 式の証明

$$E[\exp\{-\int_t^T r_s ds\}X1_{\{\tau>T\}}|\mathcal{F}_t]=1_{\{\tau>t\}}E[\exp\{-\int_t^T (r_s+\lambda_s)ds\}X|\mathcal{G}_t] \quad (11)$$

(証明)

$$\begin{aligned}E[\exp\{-\int_t^T r_s ds\}X1_{\{\tau>T\}}|\mathcal{F}_t] &= E[E[\exp\{-\int_t^T r_s ds\}X1_{\{\tau>T\}}|\mathcal{G}_T\vee\mathcal{H}_t]|\mathcal{F}_t] \\ &\qquad (\because \mathcal{F}_t=\mathcal{G}_t\vee\mathcal{H}_t\subset\mathcal{G}_T\vee\mathcal{H}_t) \\ &= E[\exp\{-\int_t^T r_s ds\}XE[1_{\{\tau>T\}}|\mathcal{G}_T\vee\mathcal{H}_t]|\mathcal{F}_t] \\ &= E[\exp\{-\int_t^T r_s ds\}X1_{\{\tau>t\}}\exp\{-\int_t^T \lambda_s ds\}|\mathcal{F}_t] \\ &\qquad (\because 14) \\ &= 1_{\{\tau>t\}}E[\exp\{-\int_t^T (r_s+\lambda_s)ds\}X|\mathcal{F}_t].\end{aligned}$$

最後の条件付き期待値 $E[\exp\{-\int_t^T(r_s+\lambda_s)ds\}X|\mathcal{F}_t]$ では、期待値の条件を $\mathcal{G}_t$ に交換することができる。まず、$E[\exp\{-\int_t^T(r_s+\lambda_s)ds\}X|\mathcal{G}_t\vee\sigma(E_1)]$ を考える。$\sigma(\exp\{-\int_t^T(r_s+\lambda_s)ds\}X)\vee\mathcal{G}_t$ と $\sigma(E_1)$ が独立である[12]ことから、

$$E[\exp\{-\int_t^T(r_s+\lambda_s)ds\}X|\mathcal{G}_t\vee\sigma(E_1)]=E[\exp\{-\int_t^T(r_s+\lambda_s)ds\}X|\mathcal{G}_t] \quad (15)$$

である。また、

$$\mathcal{G}_t\subset\mathcal{G}_t\vee\mathcal{H}_t\subset\mathcal{G}_t\vee\sigma(E_1) \quad (16)$$

であるので[13]、結局、

$$E[\exp\{-\int_t^T(r_s+\lambda_s)ds\}X|\mathcal{F}_t]=E[\exp\{-\int_t^T(r_s+\lambda_s)ds\}X|\mathcal{G}_t]$$

が成立する。以上より (11) 式が示された。
(証明終)

12 $\sigma(\exp\{-\int_t^T(r_s+\lambda_s)ds\}X)\vee\mathcal{G}_t\subset\mathcal{G}_T$ であるが、定義より $\mathcal{G}_T$ と $\sigma(E_1)$ は独立なので、

$\sigma(\exp\{-\int_t^T(r_s+\lambda_s)ds\}X)\vee\mathcal{G}_t$ と $\sigma(E_1)$ も独立である。

13 (16) 式は以下のように示される。デフォルト時刻 τ の定義 (10) 式から、$\{X_s\}_{0\le s\le t}$ と E_1 の値が一意に決まると、$\{1_{\{\tau\le s\}}\}_{0\le s\le t}$ も一意に決まることがわかる。このことから、$\mathcal{H}_t=\sigma\{1_{\{\tau\le s\}}\}_{0\le s\le t}$ は $\sigma(X_s)_{0\le s\le t}\vee\sigma(E_1)=\mathcal{G}_t\vee\sigma(E_1)$ －可測であり、$\mathcal{F}_t=\mathcal{G}_t\vee\mathcal{H}_t$ も同様である。したがって、$\mathcal{H}_t\vee\mathcal{G}_t$ の要素はすべて $\mathcal{G}_t\vee\sigma(E_1)$ に含まれている。

ロ．（12）式の証明

$$E\left[\int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Y_s 1_{\{\tau>s\}} ds \mid \mathcal{F}_t\right] = 1_{\{\tau>t\}} E\left[\int_t^T \exp\{-\int_t^s (r_u+\lambda_u) du\} Y_s ds \mid \mathcal{G}_t\right] \tag{12}$$

（証明）

$$E\left[\int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Y_s 1_{\{\tau>s\}} ds \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$= E\left[E\left[\int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Y_s 1_{\{\tau>s\}} ds \mid \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t\right] \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$= E\left[\int_t^T E\left[\exp\{-\int_t^s r_u du\} Y_s 1_{\{\tau>s\}} \mid \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t\right] ds \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$= E\left[\int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Y_s E\left[1_{\{\tau>s\}} \mid \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t\right] ds \mid \mathcal{F}_t\right]$$

（$E[1_{\{\tau>s\}} | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] = 1_{\{\tau>t\}} \exp\{-\int_t^s \lambda_u du\}$ が（14）式と同様にして示されるので、）

$$= E\left[\int_t^T \exp\{-\int_t^s (r_u+\lambda_u) du\} Y_s 1_{\{\tau>t\}} ds \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$= 1_{\{\tau>t\}} E\left[\int_t^T \exp\{-\int_t^s (r_u+\lambda_u) du\} Y_s ds \mid \mathcal{F}_t\right]$$

（$\sigma(\int_t^T \exp\{-\int_t^s (r_u+\lambda_u) du\} Y_s ds) \vee \mathcal{G}_t$ と $\sigma(E_1)$ が独立であるので、（11）式の証明の後半と同様に、フィルトレーションの交換ができて、）

$$= 1_{\{\tau>t\}} E\left[\int_t^T \exp\{-\int_t^s (r_u+\lambda_u) du\} Y_s ds \mid \mathcal{G}_t\right]$$

（証明終）

ハ．（13）式の証明

（13）式を証明する前に、以下の準備をしておく。まず、デフォルト過程をN_tと表記する。すなわち$N_t \equiv 1_{\{\tau \le t\}}$である。このとき、

$$M_t = N_t - \int_0^t \lambda_s 1_{\{\tau>s\}} ds$$

で表される確率過程 $\{M_t\}$ が $\{\mathcal{F}_t\}$ ーマルチンゲールであることが知られている（ドゥーブーマイヤー分解）[14]。この関係は、

$$dN_t = dM_t + 1_{\{\tau>t\}} \lambda_t dt$$

のように微分形で書くことができる。

14 青沼・中川［1999］あるいは確率過程の標準的な教科書を参照。

これを利用して、(13) 式を示す。

$$E[\exp\{-\int_t^\tau r_s ds\} Z_\tau 1_{\{t<\tau\le T\}} | \mathcal{F}_t] = 1_{\{\tau>t\}} E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s (r_u+\lambda_u) du\} Z_s \lambda_s ds | \mathcal{G}_t] \tag{13}$$

(証明)
(13) 式左辺の期待値演算子の中の要素は、

$$\exp\{-\int_t^\tau r_u du\} Z_\tau 1_{\{t<\tau\le T\}} = \int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s dN_s$$

のように積分形で書き直すことができる。この積分形に先のドゥーブーマイヤー分解を適用すると、

$$\int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s dN_s = \int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s dM_s + \int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s \lambda_s 1_{\{\tau>s\}} ds$$

となる。この式の右辺第1項は、$\{M_t\}$ が $\{\mathcal{F}_t\}$ ーマルチンゲールであることから、

$\{\int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s dM_s\}$ も $\{\mathcal{F}_t\}$ ーマルチンゲールで、

$$E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s dM_s | \mathcal{F}_t] = E[\int_T^T \exp\{-\int_T^s r_u du\} Z_s dM_s | \mathcal{F}_t] = 0$$

となる。よって (13) 式は、

$$E[\exp\{-\int_t^\tau r_s ds\} Z_\tau 1_{\{\tau>t\}} | \mathcal{F}_t] = E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s \lambda_s 1_{\{\tau>s\}} ds | \mathcal{F}_t] = \int_t^T E[\exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s \lambda_s 1_{\{\tau>s\}} | \mathcal{F}_t] ds$$

と変形できる。積分の中の条件付き期待値については、$t \le s$ であるので、(11) 式が利用できて、

$$E[\exp\{-\int_t^\tau r_s ds\} Z_\tau 1_{\{t<\tau\le T\}} | \mathcal{F}_t] = \int_t^T 1_{\{\tau>t\}} E[\exp\{-\int_t^s (r_u+\lambda_u) du\} Z_s \lambda_s | \mathcal{G}_t] ds$$

$$= 1_{\{\tau>t\}} E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s (r_u+\lambda_u) du\} Z_s \lambda_s ds | \mathcal{G}_t]$$

が導かれる。
(証明終)

5．ダフィー等によるプライシング・モデル

信用リスクのある金融商品のプライシング・モデルについては、ダフィー等によるものをはじめとして多くの研究業績がある。ここでは、4章で示した3種類の基本的な証券のプライシングの考え方を用いて、実際のプライシングで使用されることが多いダフィー等によるモデル（Duffie and Singleton［1999］）の整理を行う。

(1) ダフィー等の定式化

ある企業が発行する割引債の価格を考える。予め決められた満期$T\,(>0)$までにこの企業にデフォルトが発生しなかった場合には、満期時点に1円が債券保有者に支払われ、満期までの時刻$t\;(0\le t\le T)$にデフォルトが発生した場合には、デフォルト時点に$L_t\;(0\le L_t<1)$円だけが支払われるものとする。

ここでも、デフォルト事象に関して4章と同様の定式化を行う。すなわち、状態変数を$\{X_s\}_{0\le s\le T}$,デフォルト時刻を$\tau\,(\ge 0)$として、3つのフィルトレーション

$$\mathcal{G}_t=\sigma(X_s:0\le s\le t),\quad 0\le t\le T$$

$$\mathcal{H}_t=\sigma(1_{\{\tau\le s\}}:0\le s\le t),\quad 0\le t\le T$$

$$\mathcal{F}_t=\mathcal{G}_t\vee\mathcal{H}_t,\quad 0\le t\le T$$

を定義する。また、無リスク金利$\{r_t\}$、デフォルト時回収額$\{L_t\}$およびデフォルトの強度$\{\lambda_t\}$をそれぞれ$\{\mathcal{G}_t\}$−適合な確率過程とし、期待値計算はリスク中立測度で行うものとする。

このとき、上述の割引債の時刻$t\;(0\le t\le T)$における理論価格$q(t,T)$は、

$$q(t,T)=E\left[1_{\{t<\tau\le T\}}\exp\{-\int_t^\tau r_u du\}L_\tau+1_{\{\tau>T\}}\exp\{-\int_t^T r_u du\}\,|\,\mathcal{F}_t\right] \qquad (17)$$

のように条件付き期待値の形で表すことができる。ここで、期待値の中の第1項は、デフォルトが発生した場合に回収されるL円の割引価値を表し、第2項は、デフォルトが発生しなかった場合に満期に償還される1円の割引価値を表す。

この価格式は次のようにして、4章で解説した3つの基本的な証券に対応させることができる。まず、右辺の第1項は、デフォルト時の支払いを表すので、4章の3番目の証券に対応させて、

$$E\left[1_{\{t<\tau\le T\}}\exp\{-\int_t^\tau r_u du\}L_\tau\,|\,\mathcal{F}_t\right]=1_{\{\tau>t\}}E\left[\int_t^T\exp\{-\int_t^s R_u du\}L_s\lambda_s ds\,|\,\mathcal{G}_t\right]$$

と整理できる。また、第2項は、デフォルトが発生しなかった場合の満期での支払いを表すので、1番目の証券に対応させて、

$$E[1_{\{\tau>T\}}\exp\{-\int_t^T r_u du\}|\mathcal{F}_t]=1_{\{\tau>t\}}E[\exp\{-\int_t^T R_u du\}|\mathcal{G}_t]$$

となる。ただし、$R_u=r_u+\lambda_u$とおいた。したがって、(17) 式は

$$q(t,T)=1_{\{\tau>t\}}E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s R_u du\}L_s\lambda_s ds+\exp\{-\int_t^T R_u du\}|\mathcal{G}_t] \qquad (18)$$

と計算される。

ダフィー等はさらに、回収率δ_tを、「デフォルト直前の債券価格／デフォルト時の回収額」と定義し、幾つかの条件のもとで（18）式が

$$q(t,T)=1_{\{\tau>t\}}E[\exp\{-\int_t^T (r_u+(1-\delta_u)\lambda_u)du\}|\mathcal{G}_t] \qquad (19)$$

と変形できることを示した（略証は次節参照）。

（19）式の興味深い点は、回収率やデフォルト強度が無リスク金利過程と独立であると仮定した場合に、デフォルトのある割引債の理論価格とデフォルトのない割引債の理論価格の関係が明示的に示される点である。すなわち、（19）式の右辺は、

$$q(t,T)=1_{\{\tau>t\}}E[\exp\{-\int_t^T r_u du\}\times\exp\{-\int_t^T (1-\delta_u)\lambda_u du\}|\mathcal{G}_t]$$

と変形できるが、無リスク金利と回収率・デフォルト強度が独立であれば、積の期待値が期待値の積に等しく、

$$q(t,T)=1_{\{\tau>t\}}E[\exp\{-\int_t^T r_u du\}|\mathcal{G}_t]\times E[\exp\{-\int_t^T (1-\delta_u)\lambda_u du\}|\mathcal{G}_t]$$

となる。一方、満期Tに1円が支払われるデフォルトのない割引債の時点tにおける理論価格$S^0(t,T)$が

$$S^0(t,T)=E[\exp\{-\int_t^T r_u du\}|\mathcal{G}_t]$$

と表されることから、デフォルトのある割引債の理論価格は、デフォルトのない割引債の理論価格と回収率およびデフォルト強度を使って

$$q(t,T)=1_{\{\tau>t\}}E[\exp\{-\int_t^T (1-\delta_u)\lambda_u du\}|\mathcal{G}_t]S^0(t,T)$$

と書ける。

このように、ダフィー等のプライシング・モデルは、基本的に4章で示した考え方に含まれることがわかる。ただし、ダフィー等はやや特殊な回収率の定義を導入することによって、（19）式に示されているように数式を幾分簡単な形に整理するこ

とに成功している。

(2)(19)式の証明の概略

(19)式の証明の概略を以下に示す[15]。

まず、$\{\mathcal{G}_t\}$–適合な確率過程$\{Y_t\}_{0\leq t\leq T}$を、

$$Y_t = E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s R_u du\} L_s\lambda_s ds + \exp\{-\int_t^T R_u du\} \mid \mathcal{G}_t] \qquad (20)$$

と定義すると、$q(t,T) = 1_{\{\tau>t\}} Y_t$である。$\lim_{\Delta t\downarrow 0} q(\tau - \Delta t, T) = \lim_{\Delta t\downarrow 0} 1_{\{\tau>\tau-\Delta t\}} Y_{\tau-\Delta t} = Y_\tau$

であるので、Y_τ はデフォルト直前の割引債の理論価格を表しているものと考えることができる。

また、$\{\mathcal{G}_t\}$–適合な確率過程$\{Z_t\}$を

$$Z_t = E[\int_0^T \exp\{-\int_0^s R_u du\} L_s\lambda_s ds + \exp\{-\int_0^T R_u du\} \mid \mathcal{G}_t] \qquad (21)$$

とおくと、$\{Z_t\}_{0\leq t\leq T}$は$\{\mathcal{G}_t\}$–マルチンゲールである[16]。また、回収率δ_tを

$$\delta_t = \frac{L_t}{Y_t}$$

と定義すると、(20)式、(21)式から、Y_tとZ_tの間に

$$\exp\{-\int_0^t R_u du\} Y_t = Z_t - \int_0^t \exp\{-\int_0^s R_u du\} Y_s \delta_s \lambda_s ds \qquad (22)$$

という関係が成立する。さらに$\{\mathcal{G}_t\}$–適合な確率過程$\{V_t\}_{0\leq t\leq T}$を

$$V_t = \exp\{\int_0^t \delta_u\lambda_u du\} \exp\{-\int_0^t R_u du\} Y_t$$

と定義すると、(21)式などを使って、

$$dV_t = \exp\{\int_0^t \delta_u\lambda_u du\} dZ_t \qquad (23)$$

15 本節は、青沼・中川［1999］を参考にした。

16 Z_tの条件付き期待値の中身に注目する。ここには時刻tが含まれておらず、確率過程$\{R_s\}$、$\{L_s\}$、$\{\lambda_s\}$の0からTまでの積分から構成されている。これらの積分がすべて$\mathcal{G}_T$—可測であることを考えると、Z_tの条件付き期待値の中身は（確率過程でなく）$\mathcal{G}_T$—可測な確率変数と考えることができる。$\mathcal{G}_T$—可測な確率変数の$\mathcal{G}_t$（$0\leq t\leq T$）に関する条件付き期待値は$\{\mathcal{G}_t\}$—適合な確率過程であり、かつマルチンゲールであることが知られている。このことから、$\{Z_t\}$はマルチンゲールであることがわかる。このような種類のマルチンゲールはドゥーブのマルチンゲールと呼ばれている（例えば、森村・木島［1991］を参照）。

が示される。$\{Z_t\}$が$\{\mathcal{G}_t\}$−マルチンゲールであることから、$\{V_t\}$は$\{\mathcal{G}_t\}$−ローカル・マルチンゲールであることがわかる。ここで $E[\sup_{0\le t\le T}|V_t|]<\infty$ を仮定すると、$\{V_t\}$は$\{\mathcal{G}_t\}$−マルチンゲールである[17]。したがって、

$$V_t = E[V_T \mid \mathcal{G}_t]$$

が成立する。$Y_T = 1$は、$\{V_t\}_{0\le t\le T}$の定義（(20) 式）より直ちに導かれ、

$$V_T = \exp\{-\int_0^T (r_u + (1-\delta_u)\lambda_u)du\}$$

であるので、

$$V_t = E[\exp\{-\int_0^T (r_u+(1-\delta_u)\lambda_u)du\} \mid \mathcal{G}_t] = \exp\{-\int_0^t (r_u+(1-\delta_u)\lambda_u)du\}Y_t$$

より

$$Y_t = E[\exp\{-\int_t^T (r_u+(1-\delta_u)\lambda_u)du\} \mid \mathcal{G}_t]$$

が求まる。

したがって、

$$q(t,T) = 1_{\{\tau>t\}}Y_t = 1_{\{\tau>t\}}E[\exp\{-\int_t^T (r_u+(1-\delta_u)\lambda_u)du\} \mid \mathcal{G}_t]$$

が導かれる。これによって、ダフィー等が示した信用リスクのある金融商品（割引債）の価格を表現する（19）式が成立することが示された。

6．結語

本稿では、デフォルト事象をコックス過程の枠組みで捉えた場合に、信用リスクのある金融商品の価格がどのように記述できるかをランドの定式化にしたがって解説した。そこでは、3つの基本的証券を定義し、それらの理論価格を無リスク金利過程とデフォルトの強度過程を使って数学的に記述する枠組みが示された。この枠組みは、無裁定条件と金融市場の完備性のもとでの信用リスクのある金融商品のプライシング理論を理解するうえで有用であるといえる。

一方、信用リスクのある金融商品のプライシングを実際に行う場合には、実務上

17 例えば、森村・木島［1991］を参照。

の制約（データの制約等）から、理論モデルに何らかの仮定を置くことでモデルを扱いやすくすることが多い。この意味で、本稿で解説したような理論モデルがそのまま使用されることはほとんどない。しかし、本稿で示したようなプライシング理論を数学的内容を含めて理解しておくことは、こうした実務上の制約や各種仮定がモデルの扱いに与える影響等を認識・評価するためには重要であると考えられる。

補論：確率過程論の用語集

本稿の数学的な議論の理解の一助として、確率過程論の用語集を添付する。さらなる詳細については、楠岡［1998］などの教科書を参照されたい。

Ω：標本空間

試行の結果起こり得る事象全体の集合。Ωの要素はωと表記される場合が多い。

$\mathcal{F}$：事象群（σ−加法族）

Ωの部分集合の族で、以下の3つの性質

$$\cdot\ \Omega \in \mathcal{F} \tag{A-1}$$

$$\cdot\ A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F} \tag{A-2}$$

$$\cdot\ A_1 \in \mathcal{F}, A_2 \in \mathcal{F}, \ \ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \tag{A-3}$$

を満たすもの。事象群は、これらの性質を満たしさえすればよいので、1つしか存在しないとは限らない。このような性質を満たす部分集合の族 $\mathcal{F}$ をσ−加法族と呼ぶ。

部分集合の族から生成される最小の σ − 加法族

標本空間Ωとその部分集合の族$C = \{A_i \subset \Omega : i = 1, 2, \ldots\}$が与えられたとき、$C$の要素およびΩに対し“^{C}”（補集合をとる）、“∪”、の操作を可算回繰り返して得られる集合全体の族を$\sigma(C)$と書く。$\sigma(C)$は σ−加法族の性質（A-1）〜（A-3）を満たし、「Cから生成される最小のσ−加法族」と呼ばれる（「最小」というのは、この要素のうち1つでも欠けるとσ−加法族としての性質を満たさなくなってしまうということ）。

（例：$C = \{A\}$ のとき、$\sigma(C) = \{\phi(= \Omega^C), A, A^C, \Omega\}$）

Cの要素数は非可算でもよい。

P：確率測度

$\mathcal{F}$の要素（すなわちΩの部分集合）から実数への写像で3つの性質

$$\cdot\ A \in \mathcal{F} \Rightarrow 0 \le P(A) \le 1 \tag{A-4}$$

$$\cdot\ P(\Omega) = 1 \tag{A-5}$$

$$\cdot\ A_i \cap A_j = \phi, \ (i \ne j) \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{A-6}$$

を満たすもの。確率測度はこれらを満たしさえすればよいので、1つしか存在しないとは限らない。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$：確率空間

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$を合わせて確率空間と呼ぶ。

X：確率変数

Ωの要素ωから実数への関数で、任意の実数 x に対して、

$$\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \qquad \text{(A-7)}$$

を満たすもの。

確率変数Xから生成される最小のσ－加法族

Ωの部分集合$\{\omega : X(\omega) \leq x\}$の族から生成される最小の σ－加法族。上述の「部分集合の族から生成される最小の σ－加法族」に準ずる表現を使うと

$$\sigma(X) \overset{def}{=} \sigma(\{\{\omega : X(\omega) \leq x\} : x \in R\}) \qquad \text{(A-8)}$$

のように定義される。すなわちは$\sigma(X)$は、$X : \Omega \mapsto R$ を確率変数として定義できる最小のσ－加法族である。

可測

Ω上のσ－加法族$\mathcal{G}$について、確率変数Xが$\mathcal{G}$－可測であるとは、$\sigma(X) \subseteq \mathcal{G}$であることをいう。

σ－加法族の独立

$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$を$\mathcal{F}$ の部分σ－加法族とする。$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$が独立であるとは、$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$の任意の要素$g_1 (\in \mathcal{G}_1), g_2 (\in \mathcal{G}_2)$について

$$P(g_1 \cap g_2) = P(g_1)P(g_2) \qquad \text{(A-9)}$$

が成立することである。

確率変数の独立

「2つの確率変数X_1，X_2が独立」とは、X_1，X_2それぞれより生成される最小のσ－加法族$\sigma(X_1)$，$\sigma(X_2)$が独立であることである。

分布関数

単調非減少な関数 $F : R \mapsto R[0,1]$が確率変数Xの分布関数であるとは、

$$F(x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}) \qquad \text{(A-10)}$$

を満たすことである。

確率変数の期待値

確率変数Xの測度Pによる期待値$E[X]$は、

$$E[X] \overset{def}{=} \int_{\Omega} XdP = \int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega) \tag{A-11}$$

で定義される。

条件付き期待値

Xを$\mathcal{F}$−可測な確率変数とする。Xの$\mathcal{G}\,(\subseteq \mathcal{F})$に関する条件付き期待値は、$\mathcal{G}$の任意の要素 g に対し、

$$E[Y1_g] = E[X1_g] \tag{A-12}$$

あるいは

$$\int_g YdP = \int_g XdP \tag{A-13}$$

を満たす$\mathcal{G}$−可測な確率変数Yとして定義され、$Y = E[X|\mathcal{G}]$と表記される。ただし、1_gは$\mathcal{G}$−可測な確率変数で、

$$1_g(\omega) = \begin{cases} 0, & (\omega \notin g) \\ 1, & (\omega \in g) \end{cases} \tag{A-14}$$

で定義される。このような確率変数Yは、一意に存在することが知られている。

確率過程

Ωの要素ωと時刻$t\,(\in[0,\infty))$から実数への関数で、ωを1つ与えたときの軌跡$X.(\omega)$が右連続左極限であるもの。すなわち、すべての$t\,(\in[0,\infty))$について$X_t(\omega)$, $\lim_{\Delta t \downarrow 0} X_{t+\Delta t}(\omega)$が、すべての$t\,(\in(0,\infty))$について$\lim_{\Delta t \uparrow 0} \mathrm{X}_{t+\Delta t}(\omega)$が、それぞれ存在し、$X_t = \lim_{\Delta t \downarrow 0} X_{t+\Delta t}(\omega)$を満たすもの。

確率過程$X.(\cdot)$に$t\,(\in[0,\infty))$を与えたときのX_tは確率変数である。

フィルトレーション

σ−加法族の増大列、すなわち、$0 \le s < t < \infty \Leftrightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t\,(\subseteq \mathcal{F})$を満たすような$\{\mathcal{F}_t;\, t \in [0,\infty)\}$をフィルトレーションという。

適合

確率過程$X.(\cdot)$に時刻$t\,(\in[0,\infty))$を与えた確率変数X_tがすべての$t\,(\in[0,\infty))$について$\mathcal{F}_t$−可測であるとき、確率過程$\{X_t\}$は$\{\mathcal{F}_t\}$−適合であるという。

確率過程 $\{X_s\}_{0\leq s\leq t}$ から生成される最小の$\sigma-$加法族

すべての $X_s(0\leq s\leq t)$を可測にするような最小の$\sigma-$加法族。$\sigma(X_s: 0\leq s\leq t)$と表記する。$0\leq t\leq T$ について、$\mathcal{F}_t=\sigma(X_s: 0\leq s\leq t)$とすると、$\{\mathcal{F}_t: t\in[0, T]\}$はフィルトレーションで、$\{X_t\}$は$\{\mathcal{F}_t\}-$適合である。

マルチンゲール

フィルトレーション付き確率空間（$\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}$）において、$\{\mathcal{F}_t\}-$適合な確率過程$\{M_t\}$がすべての $0\leq s<t<\infty$に対して

$$E[|M_t|]<\infty \tag{A-15}$$

$$E[M_t|\mathcal{F}_s]\equiv M_s \tag{A-16}$$

を満たすとき、$\{M_t\}$は（$P,\{\mathcal{F}_t\}$）$-$マルチンゲールであるという（確率測度Pが明らかな場合には単純に $\{\mathcal{F}_t\}-$マルチンゲールと表記することもある）。

停止時

確率変数τが、すべての t（$\in[0,\infty)$）について

$$\{\omega: \tau(\omega)\leq t\}\in\mathcal{F}_t \tag{A-17}$$

を満たすとき、τを停止時という。ただし、$\mathcal{F}_t$ はフィルトレーション。

ローカル･マルチンゲール

$\{M_{t\wedge\tau_n}\}$がマルチンゲールになるような、停止時の列 $0\leq\tau_0\leq\tau_1\leq\ldots,\leq\tau_n\uparrow\infty$が存在するとき、$\{M_t\}$をローカル･マルチンゲールという。ただし、実数$a, b$に対し、$a\wedge b=\min(a, b)$。なお、マルチンゲールならばローカル･マルチンゲールである。

参考文献

青沼君明・中川秀敏、「クレジット･デリバティブの評価モデル」、Private Communication、1999年

小田信之、「信用リスクを反映した金融商品のプライシング」、『金融研究』第18巻第1号、日本銀行金融研究所、1999年3月

楠岡成雄、「確率と確率過程」（岩波講座 応用数学［基礎13］）、岩波書店、1998年

森村秀典・木島正明、「ファイナンスのための確率過程」、日科技連、1991年

Aonuma, Kimiaki and Hidetoshi Nakagawa,"Valuation of Credit Default Swap and Parameter Estimation for Vasicek-Type Hazard Rate Model,"*mimeo*.

Duffee, Gregory, "Treasury Yields and Corporate Bond Yields Spreads: An Empirical Analysis," Working paper, Federal Reserve Board, 1996.

Duffie, Darrell, and Kenneth J. Singleton, "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds," *Review of Financial Studies*, 12, 1999.

Harrison, M. and S. Pliska, "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading," *Stochastic Processes and Their Application*, 11, 1981.

Lando, David, "On Cox Processes and Credit Risky Securities," Working paper, Department of Operations Research, University of Copenhagen, 1998.