バリュー・アット・リスクのリスク指標としての妥当性について
――理論的サーベイによる期待ショートフォールとの比較分析――

山井康浩（やまいやすひろ）／吉羽要直（よしばとしなお）

要　旨

バリュー・アット・リスク（以下、VaR）は、金融機関のリスク管理実務で最も標準的なリスク指標となっている。しかし、そのリスク指標としての妥当性に関しては、学界から定義上・理論上の問題点（損益額分布の形状によっては、(1) VaRが信頼区間外のリスクを捉えられないこと、(2) VaRが劣加法性を満たさないこと）が指摘されている。こうした中、VaRが抱えるこれらの問題点を内包しないリスク指標として、期待ショートフォールという概念が提唱されている。

本稿は、VaRと期待ショートフォールとの比較分析に関するこれまでの研究成果を、特にVaRが信頼区間外のリスクを捉えられない問題点（テイル・リスク）に焦点を当て、具体的な数値例を用いて解説する。ここでは、VaRがミスリーディングな情報を投資家に与え、期待効用を最大化する投資家に信頼区間外における損失がより大きくなるポジションをとるインセンティヴを与える可能性があることが示される。一方、期待ショートフォールはこうした問題を内包せず概念上VaRよりも優れたリスク指標であることが示される。

もっとも、期待ショートフォールの応用に際しては、推計値の安定性確保やバックテスティング手法の確立といった課題が残されていることから、今後も当面はリスク管理実務においてVaRが中心的役割を果たしていくと考えられる。VaRをリスク指標として用いる場合はその問題点が顕著となる状況に特に注意し、デスク・レベルでの肌目細かいリスク管理や与信集中度合いの把握・制限などの補完的対応を図ることによりリスク・プロファイルの把握に努めることが重要となる。

キーワード：バリュー・アット・リスク、期待ショートフォール、テイル・リスク、劣加法性

本稿の作成に当たっては、今野浩教授（東京工業大学）から大変貴重なコメントを頂戴した。もっとも、本稿で示された意見やあり得べき誤りは、すべて筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

山井康浩　日本銀行金融研究所研究第1課（E-mail: yasuhiro.yamai@boj.or.jp）
吉羽要直　日本銀行金融研究所研究第1課（E-mail: toshinao.yoshiba@boj.or.jp）

1．はじめに

バリュー・アット・リスク（以下、VaR）は、その概念的なわかりやすさ、計算の簡便さ、およびポートフォリオ分析への応用可能性の高さなどから、金融機関のリスク管理実務で最も標準的に使用されるリスク指標となっている。しかしながら、VaRのリスク指標としての妥当性に関しては、ここ数年、Artzner *et al.*［1997］をはじめとして学界から損益額分布の形状によっては、①VaRが信頼区間外のリスクを捉えられないこと、②VaRが劣加法性[1]を満たさないことといった定義上・理論上の問題点が指摘されており、実務界でもこうした問題点が意識され始めている[2]。

こうした中、チューリッヒ連邦工科大学のデルバエン等は、VaRが抱えるこれらの問題点を内包しないリスク指標として、期待ショートフォールという概念を提唱した[3]（Artzner *et al.*［1997］）。期待ショートフォールとは、損失額がVaR以上となることを条件とした損失額の条件付期待値と定義される。この定義によれば、期待ショートフォールは、上記①の問題点を内包しないし、理論的に劣加法性を満たしていることが導かれるので、②の問題点もない。このような性質から、期待ショートフォールは、VaRを代替するないし補完する可能性があるリスク指標として、学界・実務界の関心を呼び、積極的な議論が行われている。

本稿は、学界だけではなく実務界等の幅広い読者層を想定し、VaRと期待ショートフォールとの比較分析に関するこれまでの研究成果を、金融機関におけるリスク管理実務の観点から整理した解説資料である[4]。特に、これまでの議論の焦点となっているVaRの2つの問題点のうちテイル・リスクの問題について、具体的な数値例などにより詳しく解説することに主眼を置いている。

1 あるリスク指標ρが劣加法性を満たすとは、全体のポジションのリスク量が個別ポジションのリスク量の和を下回ることを指す。直観的には、「リスク指標はポートフォリオ分散効果によるリスク削減を織り込むべきである」という要請を定式化したものであると考えられる。つまり、2つの個別ポジションの損益額を表す確率変数をそれぞれX、Yとすると、$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ が任意のX、Yについて成立する時、リスク指標ρは劣加法性を満たすという。

2 VaRの理論的な問題点は、Artzner *et al.*［1999］、Basak and Shapiro［1999］、Danielsson［2000］、Rootzén and Klüppelberg［1999］等で指摘されている。また、実務界からは、以下のようにリスク指標としてのVaRの実務上の問題点を指摘する意見が示されている（日本銀行金融研究所［2000］）。

「例えば、信頼区間99%のVaRによりリスク管理を行う場合、信頼区間外で1%の確率で発生する損失の規模はVaRでは測定できない。これはリスク計測手法としてVaRを用いることによる問題点として注意する必要がある。」

3 期待ショートフォールの考え方を紹介したものとしては、Artzner *et al.*［1999］のほか、Kim and Mina［2000］、Ulmer［2000］、森本［2000］、金融監督庁・FISC［1999］等が挙げられる。

4 期待ショートフォールとVaRとの比較研究は、ポートフォリオ最適化への応用可能性に関する分野でも最近目覚ましい成果が挙がっている（Rockafeller and Uryasev［2000］）。しかし、本稿では、金融機関が抱えるリスクの計測・管理へのインプリケーションを引き出すことに主眼を置くこととし、主にポートフォリオ運用業務への応用を念頭に置いていると考えられるポートフォリオ最適化に関する研究成果の詳細には立ち入らない。

本稿での主な結論は以下のとおりである。

① VaRには、信頼区間外のリスクを捉えられないという問題点がある。その結果、ミスリーディングな情報を投資家に与え、期待効用を最大化する投資家に信頼区間外における損失がより大きくなるポジションをとるインセンティヴを与える可能性がある。

② 一方、期待ショートフォールは信頼区間外のリスクも織り込むことができるため、投資家にミスリーディングな情報を与える可能性が低く、概念上VaRに比べて優れたリスク指標である。

③ しかし、期待ショートフォールを実務に応用するには、推計値の安定性確保やバックテスティング手法の確立といった課題が存在し、今後これを解決していく必要がある。

本稿の構成は以下のとおりである。2章では、VaRと期待ショートフォールの定義とそれら2つのリスク指標が持つ意味を簡単に説明する。3章では、金融商品の損益額が正規分布に従うことが仮定し得る場合とそうでない場合における、2つのリスク指標の性質の説明を行う形で、Artzner *et al.*［1997］によるVaRに対する批判を紹介し、その批判に対する著者の考えを述べる。4章では、VaRが信頼区間外のリスクを捉えられないことによる問題点を、具体的な数値例を用いて詳述し、期待ショートフォールが概念上VaRに比べ優れたリスク指標であることを示す。5章では期待ショートフォールの実務への応用可能性について、VaRとの比較分析により検討を行う。ここでは、期待ショートフォールの応用に際しては、推計値の安定性確保やバックテスティング手法の確立といった課題が残されていることが指摘される。6章では、引き続きVaRをリスク指標として用いる際の留意点を列挙し、7章で結論を簡単に述べる。

2．バリュー・アット・リスクと期待ショートフォール

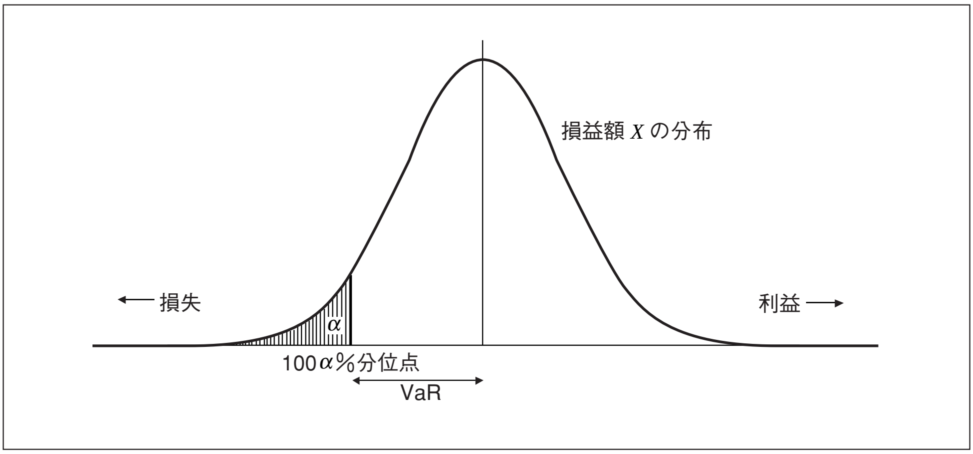
本章では、VaRと期待ショートフォールの定義とそれら2つのリスク指標が持つ意味を簡単に説明する。

(1) バリュー・アット・リスクの定義

VaRは、一般的に、「金融商品のポートフォリオから一定の確率で保有期間中に発生し得る最大損失額」として定義される。すなわち、数学的には、VaRは損益額

分布の下側100α％分位点（quantile）として定義される（図表1）[5]。

図表１　損益額分布とVaR



（2）期待ショートフォールの定義

デルバエン等は、リスク指標として、期待ショートフォール（expected shortfall〈この他、conditional VaR、mean excess loss、beyond VaR、tail VaRなどとも呼ばれる〉）の概念を提唱した（Artzner *et al.*［1997］）[6]。期待ショートフォールとは、損失額がVaR以上となることを条件とした損失額の条件付期待値である（図表2参照）。具体的な定義は以下のとおりである。

5 Artzner *et al.*［1999］が採用した定義を用いると、信頼水準100（1−α）％のバリュー・アット・リスク$VaR_{\alpha}(X)$は、ポジションの損益額をXとして、$VaR_{\alpha}(X) = -\inf\{x \mid P[X \le x] > \alpha\}$　となる。ここで、$\inf\{x \mid A\}$は事象Aが成立する条件のもとでのxの下限であり、$\inf\{x \mid P[X \le x] > \alpha\}$は損益額分布の下側100$\alpha$％分位点を表す（この表現方法により、損益額分布が離散的な場合にも対応できる）。ここでは、損失額は負値（利益額は正値）であることから、損失が発生する際のVaRを正値にするため分位点に−1を乗じている。
　なお、この定義では、信頼区間の範囲内では損失が発生しないようなポートフォリオの場合、100α％分位点が正となりVaRが負になる可能性がある。

6 期待ショートフォールとほぼ同様の考え方に基づくリスク指標が、Artzner *et al.*［1997］に先立つ20年前にFishburn［1977］で示されている。具体的には、下式のように損益額の閾値（t）を下回る範囲での損益額分布のモーメント（次数をγで表す）を使った一般的な形で議論が展開されている（期待ショートフォールは、次数を$\gamma=1$、閾値を$t=-VaR$として、これを（1−信頼水準）で割った値にVaRを足したものに相当）。

$$F_{\gamma}(t) = \int_{-\infty}^{t} (t-x)^{\gamma} dF(x) \qquad \gamma > 0$$

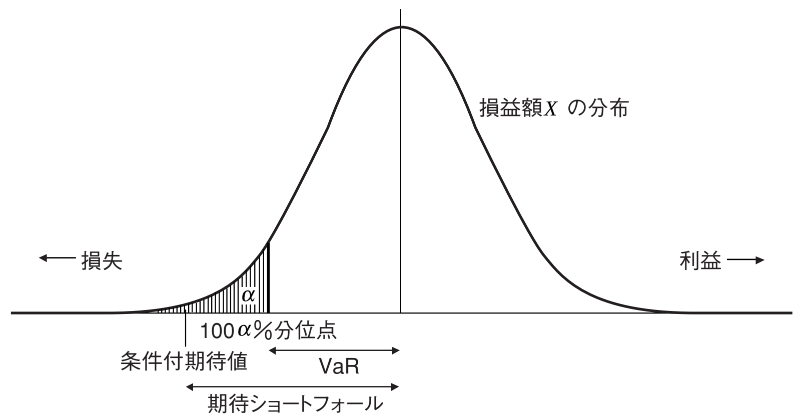
　ただし、$F(x)$は損益額を表す確率変数xの分布関数、tは閾値、γはモーメントの次数。もっとも、Fishburn［1977］では、後述する特定のリスク指標が持つ劣加法性やテイル・リスクといった観点からの分析は加えられていない。

期待ショートフォールの定義

金融商品のポートフォリオの損益額を表す確率変数をX、信頼水準100（1–α）%のVaRを$VaR_\alpha(X)$とすると、これに対応する期待ショートフォール$ES_\alpha(X)$は以下のように定義される[7]。

$$ES_\alpha(X) = E[-X \mid -X \geq VaR_\alpha(X)]\ . \tag{1}$$

図表 2　損益額分布、VaRと期待ショートフォール



（3）VaR、期待ショートフォールを用いた所要自己資本算出

イ．VaR

自社の全ポートフォリオのリスクをカバーするための所要自己資本の算出にVaRを用いることは、金融機関の内部管理では非常に一般的であるほか、自己資本規制でも一部採用されている。これは、「信頼水準100（1–α）%のVaRを予め与えられた自己資本の範囲内に収める」ことをメルクマールとすることが、「損失額が自己資本を上回り自社が倒産する確率を100α%以内に抑える」ことと等しいので、所要自己資本の算出根拠としての意味付けを理解しやすいことに起因していると考えられる。

7 $E[x \mid B]$は事象Bが成立する条件のもとでの確率変数x の条件付期待値である。VaRを超える範囲内では通常損益額X は負値であることから、この損益額に–1を乗じた–X は正値となる。

ロ．期待ショートフォール

一方、期待ショートフォールは、「VaRの信頼区間外における損失額の条件付期待値」、つまり「損失がVaRを超える場合に平均的にどの程度の損失を被るか」を表す。したがって、「信頼水準100（1–α）％ のVaRを超えて発生する損失額の平均値を自己資本によりカバーする」形で所要自己資本を算出することは、“VaR≤期待ショートフォール”という関係があるので、VaRの場合に比較して多めの自己資本を必要とすることを意味する。したがって、期待ショートフォールはVaRに比べて保守的な所要自己資本の算出を行うことを意味する。

ただし、通常の損益額分布では、期待ショートフォールが分布の下側何％分位点に当たるかを事前に知ることはできない。したがって、期待ショートフォール自体を所要自己資本算出の根拠とすると、VaRに基づくリスク管理のように「ある確率水準を予め定め、自社が倒産する確率をその水準以内に抑える」という意味付けはできなくなる。

3．分布の非正規性とVaRの問題点

デルバエン等は、損益額分布が正規分布と異なる度合いが強くなると、VaRの2つの問題点（分布の形状によっては、①信頼区間外のリスクを捉えられないこと、②劣加法性を満たさないこと）がクローズアップされることを示した（Artzner *et al.*［1997］）。本章では、それら2つの問題点についての解説を行う。

（1）損益額が正規分布に従う場合のVaRに基づくリスク計測

損益額が正規分布に従う場合、期待ショートフォールは分布の標準偏差の定数倍となる（VaRは標準偏差の定数倍で表されるので、期待ショートフォールはVaRの定数倍でもある[8]）。例えば、信頼水準99%では、VaRは標準偏差の2.33倍となり、期待ショートフォールは標準偏差の2.67倍となる。つまり、VaRを計算すれば自動的に期待ショートフォールを求めることができる。したがって、損益額が正規分布に従

8 損益額が正規分布に従う場合、期待ショートフォールが標準偏差の定数倍となることは以下のように示される。

$$ES_\alpha(X)=E[-X\,|-X\geq VaR_\alpha(X)]=\frac{E[-X\cdot I_{\{X\leq -VaR_\alpha(X)\}}]}{\alpha}=-\frac{1}{\alpha\sigma_X\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-VaR_\alpha(X)}t\cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma_X^2}}dt$$

$$=-\frac{1}{\alpha\sigma_X\sqrt{2\pi}}\left[-\sigma_X^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma_X^2}}\right]_{-x}^{-VaR_\alpha(X)}=\frac{\sigma_X}{\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{VaR_\alpha(X)^2}{2\sigma_X^2}}=\frac{\sigma_X}{\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{q_\alpha^2\sigma_X^2}{2\sigma_X^2}}=\frac{e^{-\frac{q_\alpha^2}{2}}}{\alpha\sqrt{2\pi}}\sigma_X$$

ただし、$I_{\{A\}}$ は、A が真の時に1、偽の時に0をとる定義関数、q_αは、標準正規分布の上側100α%分位点である。

例えば、信頼水準99%では、この式より期待ショートフォールは標準偏差の2.67倍となるが、これは信頼水準を99.6%とした時のVaRに相当する。

う場合には、VaRを計算することでVaRを超える損失額に関する情報（損失額の条件付期待値）が得られるので、デルバエン等が指摘した①の問題は当てはまらないことがわかる。また、②の問題もこの場合には該当しないことが次のように確認できる。2種類の異なる資産からなるポートフォリオ（例えば、株と為替からなるポートフォリオ）を考えよう。さらに、2つの資産の損益額が正規分布に従うと仮定する。そうすると、おのおのの資産の標準偏差の和とポートフォリオの標準偏差を比較すると、前者は後者以上となる[9]。さて、この場合、VaRは標準偏差の定数倍で表されるので、おのおのの資産のVaRの和はポートフォリオのVaR以上となる。したがって、損益額が正規分布に従う場合には、VaRについて劣加法性が成立する[10]。

（2）損益額が正規分布に従わない場合のVaRに基づくリスク計測 — デルバエン等のVaRに対する批判

損益額が正規分布以外の分布に従う場合は、期待ショートフォールを分布の標準偏差等の関数として表すことは一般的にはできない。したがって、その場合の期待ショートフォールは、VaRとは独立に求める必要がある。このことは、期待ショートフォールだけでなく、VaR以上の損失額についての任意の情報にも当てはまる。つまり、VaRのみを求めても、VaR以上の損失額に関する情報（その一例が期待ショートフォール）は一般的には得られないことになる（上記①の問題点）。

さらに、損益額が正規分布以外の一般の分布に従う場合に、VaRについて常に劣加法性が成立するか否かはアプリオリには与えられない。すなわち、分布の形状によっては、劣加法性が成立しない可能性があり、全体のポジションのVaRが個別ポジションのVaRの総和を上回るという事態が生じ得る（上記②の問題点）。

デルバエン等のリスク指標としてのVaRに対する批判は、これら①、②の問題点である（Artzner *et al.*［1997］）が、実際にこうした問題が顕現化する具体例として、デルバエン等は、デジタル・オプションのショート・ポジションの例と、大口与信がある場合の信用リスク計測の例の2つを挙げている（Artzner *et al.*［1999］）。

9 2つの確率変数が標準偏差を持つ時、その標準偏差が劣加法性を満たすことは以下のように示すことができる。確率変数X、Yの標準偏差をσ_X、σ_Y、XとYの共分散をσ_{XY}とすると、相関係数は1以下（$\sigma_{XY} \leq \sigma_X \sigma_Y$）であるため（証明は、竹内［1963］＜第4章 p. 37＞参照）、確率変数$X+Y$の標準偏差σ_{X+Y}について、以下のように劣加法性が満たされる。

$$\sigma_{X+Y} \equiv \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY}} \leq \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_X \sigma_Y} = \sigma_X + \sigma_Y .$$

10 実際には、損益額分布（分散が存在するとする）が楕円分布族（楕円分布族の定義等詳細は池田［2000］第3章を参照）に含まれる場合には、VaRが劣加法性を満たすことが、Embrechts *et al.*［1999］によって示されている（正規分布やt-分布、パレート分布なども楕円分布族に含まれる）。しかし、ここでは説明の簡便化のために、損益額が正規分布に従うか否かで場合分けを行い劣加法性について論じることとする。

（例1）デジタル・オプション[11]のショート・ポジション

株価を原資産とし同一の満期を持つ2つのヨーロピアン・デジタル・オプションを考える。オプションA（当初のプレミアムuドル）では、満期での株価がUを上回った時のみオプションの売り手は買い手に1,000ドル支払う。オプションB（当初のプレミアムlドル）では、満期での株価がL（ここでは$L<U$と仮定する）を下回った時のみオプションの売り手は買い手に1,000ドルを支払う。オプションのペイオフは原資産価格の非線形関数であることからも明らかなように、オプションの損益額分布は、原資産の損益額分布が正規分布であったとしても、正規分布とはならない。

さて、行使価格L（U）をおのおの満期時点の原資産価格が下回る（上回る）確率が0.8%となるように定める。オプションAを1単位売っているトレーダーAとオプションBを1単位売っているトレーダーBを考える。トレーダーAの信頼水準99%のVaRを計算すると、株価がUを上回り1,000ドルの支払いが生じる確率が0.8%と信頼水準の範囲に入らないため、この損失は最大損失額としては認識されず、当初の受取プレミアムのみが考慮されてVaR（オプションA）は$-u$ドルとなる[12]。一方、トレーダーBの信頼水準99%のVaR（オプションB）も、同様の理由から$-l$ドルとなる。

このように、満期時点の株価水準によっては1,000ドルの損失（受取プレミアムは除く）を余儀なくされるリスクが99%信頼水準のVaRでは全く考慮されないことになる。

また、オプションAとオプションBのポジションを合算した場合、株価がLを下回るまたはUを上回る確率は1.6%となりVaRの信頼水準内に入ってくるため、合算ポジションのVaR（オプションA+B）は$1000-u-l$ドルとなる。したがって、VaR（オプションA）＋VaR（オプションB）＝$-u-l$であることを用いると、VaR（オプションA＋B）＞VaR（オプションA）＋VaR（オプションB）となり、この場合のVaRは劣加法性をも満たしていないことがわかる。

図表3　デジタル・オプションのペイ・オフとVaR

株価	確率	オプションA	オプションB	オプションA+B
$S_T<L$	0.8%	u	$-1,000+l$	$-1,000+u+l$
$L\leq S_T\leq U$	98.4%	u	l	$u+l$
$U<S_T$	0.8%	$-1,000+u$	l	$-1,000+u+l$
VaR		$-u$	$-l$	$1,000-u-l$

11 通常のオプションは原資産価格が権利行使価格を上回った（下回った）時に、その差額を受け取る権利であるのに対し、デジタル・オプションは原資産価格が権利行使価格を上回った（下回った）時に、予め定められた原資産価格に依存しない一定額を受け取る権利である。

12 脚注5を参照。ここでは、99%の信頼水準の範囲内ではuの利益が保証されているため、VaRは負値となる。

（例2）大口与信がある場合の信用リスク計測

市場に100銘柄の1年物社債（いずれもクーポンは2%）が存在し、複利利回り（2%）、デフォルト率（1%）、デフォルト時の回収率（ゼロ）は満期まで一定であると仮定する[13]。また、それぞれの社債のデフォルト事象は独立に発生するとの仮定も置く。

まず、100本の社債に分けて1万ドルずつ計100万ドル投資する場合を考える。この場合、1年間に少なくとも2つ以上の社債がデフォルトして当該ポートフォリオに損失が発生する[14]確率は約26％（＝1－すべての社債がデフォルトしない確率－1つの社債のみデフォルトする確率＝$1-0.99^{100}-100\cdot0.99^{99}\cdot0.01$）であることから、信頼水準95%のVaRは正となることは明らかである。一方、1つの社債に100万ドル投資する場合を考えると、この社債にデフォルトが発生して損失を被る確率は1%であるため、信頼水準95%のVaRはクーポン収入を考慮した－2万ドルとなり、リスクはないとして認識されてしまう。このように、前者の分散化ポートフォリオのリスクが、後者の集中化ポートフォリオのそれを上回ることになり、この場合でもVaRの劣加法性は満たされない。

(3) 期待ショートフォールによるリスク計測 — デルバエン等の主張

上述のように、期待ショートフォールは、信頼区間外の損失を平均値の形で取り込んでおり、信頼区間の外の情報を把握している。また、期待ショートフォールは、基本的に劣加法性を満たすという性質を持つと指摘されている[15]（Artzner *et al.*［1997］、Artzner *et al.*［1999］、Pflug［2000］）。

こうしたことから、デルバエン等は、損益額分布の非正規性が顕著な状況では、リスク指標としてVaRを用いることには問題があり、リスク管理上より優れた性質（信頼区間外のリスクを織り込んでいる、劣加法性を満たす）を持った期待ショートフォールを用いるべきであると結論づけている（Artzner *et al.*［1997］）。

(4) デルバエン等の主張に対する著者の考え

ここでは、デルバエン等によるVaRに対する批判について、金融機関におけるリスク管理実務の観点（規制当局の観点を含む）からみた著者の考え方を述べる。予め著者の考え方のエッセンスをまとめると以下のとおりである。

13 この仮定により、社債保有時の損失は、社債が保有期間中にデフォルトした場合にのみ発生することとなる。

14 2つの社債がデフォルトした場合、デフォルトがない場合のクーポン収入の合計20,000ドルに対して、デフォルトにより未回収となる金額はクーポン部分も含めると20,400ドルとなることから、ネット損失額は400ドルとなる。3つ以上の社債がデフォルトした場合はネット損失額はさらに拡大する。

15 期待ショートフォールが劣加法性を満たすことについては、Pflug［2000］が期待ショートフォールの凸性と正の同次性を用いて簡潔に証明を行っている。

「まず、劣加法性を満たすか否かという点は、リスク管理実務の観点からすれば、リスク管理担当者の考え方によって、その重要性は変わり得る。

一方、VaRが信頼区間外の事象を捉えられないという点は、①金融機関のソルベンシーが脅かされる状況に関する問題であることに加え、②問題の発生が必ずしも特殊なケースに限られないことから、リスク管理担当者が常に注意を払うべき重要な問題である。」

イ．劣加法性について

VaRのリスク指標としての妥当性を評価する際に注意すべきは、その評価が「何をリスク指標として重視するか」に依存している点である。VaRなど単一のリスク指標では、損益額が正規分布に従うことがアプリオリに仮定できない場合、分布の性質のすべてを表すことはできないのは自明である。したがって、VaRなど単一のリスク指標を用いることは、リスク管理実務上何らかの問題が生ずる可能性をおのずと内包していることになる。このため、VaRのリスク指標としての妥当性の評価は、こうした可能性が現実化する危険性を考慮しつつ、VaRがリスク管理担当者にとってリスク管理実務上重要であるリスクを十分に捉えているか否かによって行われるべきものである。

こうした観点に立つと、あるリスク指標が2節で示したデジタル・オプションの例のように劣加法性を満たしていない場合もあり得るが、このようにリスク指標が劣加法性を満たさない場合があるからといって、そのリスク指標を用いるべきではないと単純に結論づけることはできないと考えられる[16]。例えば、総資産1億円のある企業が、資産を全額換金したうえ、新たに債券に投資する場合のリスクを考える。投資対象は、東京の地震災害による損害にリンクした災害リンク債[17]Aとロサンゼルスの地震災害による損害にリンクした災害リンク債Bであるとする。この際、企業経営者は、1億円すべてを災害リンク債Aに投資するのと、50百万円ずつを災害リンク債A、Bにそれぞれ投資するのとどちらのリスクが高いと考えるのが妥当であろうか。企業経営者にとって劣加法性（分散投資によるリスク量の削減）が望ましいとすると、投資が集中している前者の方がハイリスクであるという結果になる。しかし、仮に投資を行う企業の自己資本が50百万円以下で、企業経営者が「自己資本が払底して自社が倒産する」ことをリスクと捉えるならば、後者の方が自社が倒産する確率が高い（東京で巨大地震が発生する確率よりも、東京またはロサンゼルスで巨大地震が発生する確率の方が高い[18]）という意味で、ハイリスクである

16 Rootzén and Klüppelberg［1999］も同様の主張を行っている。

17 災害リンク債とは、災害による損害を補償する再保険を組み込んだ債券を指す。投資家からみると、再保険料相当額がクーポンに組み込まれるため、通常の債券に比べ高いクーポンを得ることができる。ただし、予め定められた災害が発生した場合には、投資家に対して元本の一部または全部の償還が行われない。

18 例えば、東京、ロサンゼルスで大地震が発生する確率はそれぞれ1%で独立であるとすると、「少なくとも東京またはロサンゼルスのどちらかで大地震が発生する確率」は約2%となる。

と判断されることとなろう。こうした場合、劣加法性は経営陣にとってあまり意味を持たないであろう。

一方で、劣加法性の問題が極めて重要となる局面も考えられる。例えばArtzner *et al.*［1997］が例として挙げたように、オプション等の金融取引所がVaRを基準に取引証拠金の算定を行う場合、VaRの劣加法性が成立しない状況では、投資家は単純に口座を分割することで必要証拠金を容易に削減することができる。これは差入証拠金を少なくする抜け穴を投資家に提供していると考えることもでき、取引所の立場からは回避すべき事象であるとする考え方もあり得る。さらに、単純に部署ごとのVaRを合算してこれを「保守的に見積もられた」会社全体のVaRとするやり方は、劣加法性が満たされない場合は必ずしも保守的ではなくなってしまう（単純合算したVaRが会社全体の真のVaRを下回るケースが存在するため）。こうした場合はVaRが劣加法性を満たさない問題は重要である。

ロ．VaRが信頼区間外の事象を捉えられない点

一方、VaRが信頼区間外の事象を捉えられない点は、リスク管理上極めて重要であり、この問題は、金融機関のソルベンシーが脅かされるような状況に関心の高い金融機関のリスク管理担当者および規制・監督当局にとっては極めて重要な関心事項である[19]。

このため、本稿では以下、損益額分布が正規分布ではない場合にVaRが持つとされる問題点のうち、信頼区間外の事象を捉えられない点に焦点を当て、これまでの既存研究のサーベイを交えて考察を進めることとする。

4．VaRのテイル・リスク

VaRの問題点に関する既存研究（Basak and Shapiro［1999］、Klüppelberg and Korn［1998］、Lotz［1999］）[20]は、VaRが信頼区間外の事象を捉えられないことに伴う問題点として、以下の2点を指摘している。

① VaRが一定値以下となるようリスク管理を行ったとしても、信頼区間外の損失が大きくなる場合があるという意味で、VaRがリスクに関するミスリーディングな情報を投資家に与える場合があること。

19 日本銀行金融研究所［2000］およびBIS・グローバル金融システム委員会［2000］参照。また、例えばグリーンスパンは、この点に関連して、“In estimating necessary levels of risk capital, the primary concern should be to address those disturbances that occasionally do stress institutional insolvency—the negative tail of the loss distribution that is so central to modern risk management.” と述べている（Greenspan［2000］参照）。

20 Basak and Shapiro［1999］の詳細については、本章の3節参照。Lotz［1999］は、各資産のデフォルト事象がポアソン過程に従う与信ポートフォリオを対象に考察を行い、投資家がVaRを最小化するようポートフォリオを組み替えた場合、期待ショートフォールは逆に増大する可能性があることを示した。

② 特にこの場合、VaRに基づくリスク管理は、信頼区間の外における損失がより大きくなるポジションをとるインセンティヴを合理的な投資家（期待効用を最大化する投資家）に与える可能性があること。

また、これらの研究では、こうした問題点がオプションを含むポートフォリオおよび与信ポートフォリオで発生する可能性があることが示されている。BIS・グローバル金融システム委員会［2000］でも、VaRが信頼区間外における損失を把握できないリスクを「テイル・リスク」として指摘し、ストレス･テストを行う必要性の1つの根拠として挙げている。本稿でも以下、このVaRが信頼区間外の損失を把握できないリスクを一般的に「テイル・リスク」と呼ぶこととする。

以下では、3つの事例（オプション・ポートフォリオ、与信ポートフォリオ、株式・債券に対する動学的ポートフォリオ投資）によりVaRのテイル・リスクの問題点について説明する。

（1）オプション・ポートフォリオとテイル・リスク（具体例1）

ここでは、単純なヨーロピアン・オプションを例に用いてテイル・リスクの説明を行う。この例では、ポートフォリオにオプション性のあるポジションが含まれた場合の、①テイル・リスクが発生するメカニズム、②VaRによるリスク管理がテイル・リスクを増大させるインセンティヴを与えるメカニズム、の2つを説明する。

まずモデルの説明を行う。ここでは、計算の簡単化のために、投資家の投資対象が特定の株式を原資産とするヨーロピアン・プット・オプション（満期1年）のショート・ポジションに限定されており、オプション売却に伴う受取プレミアムは無リスク金利で運用すると仮定する。投資家は、このヨーロピアン・プットのショート･ポジションにおいて、行使価格と売却量を操作変数として投資の意思決定を行う。また、原資産の現在価格を100ドル、年率ボラティリティを30%とする。株価過程は1/30年をワン･ステップとした離散的な２項ツリー過程（現実の価格上昇確率を0.6と仮定）に従うとする。また、無リスク金利は5%とする。このヨーロピアン・オプションのプレミアムは、オプションのペイ･オフのリスク中立確率による期待値を無リスク金利により割り引いた値となる。

このポジションの最終利益は、当初に受け取るオプション・プレミアムの無リスク金利での運用益とオプションの最終的なペイ･オフの合計となる。したがって、行使価格をKとするプット・オプションのプレミアムを$p(K)$、状態iでの株価をS_i、その状態が発生する現実の確率をP_i、オプションの売却量をxとし、投資家の効用関数$u(W)$を対数型、すなわち、$u(W)=\ln(W)$とすると、投資家の期待効用$E[u(W)]$は以下のように表すことができる[21]（ただし、投資家は当初3,000ドルの現金資産を持っているとする）。

21 ここで$E[\cdot]$は現実の確率のもとでの期待値を表す演算子である。

$$E[u(W)] = \sum P_i \cdot \ln\{W_0 + x \cdot e^r \cdot P(K) - x \cdot \max[K - S_i, 0]\}. \tag{2}$$

W：終期における資産価値
W_0：初期における資産価値

また、VaRは株価の下側α%分位点における損失額として得ることができる[22]。また、期待ショートフォールも、損失額がVaR以上となることを条件とした損失額の条件付期待値として得ることができる。

以下の5つの最適化問題を解くことで、VaRおよび期待ショートフォールによるリスク管理が投資家の最適化行動に与える影響を分析した[23]。

① リスク管理指標による制約なし

$$\max_{\{x,K\}} E[u(W)].$$

② 信頼水準95%のVaRを5ドル以内に抑えるとの制約

$$\max_{\{x,K\}} E[u(W)],$$
$$\text{subject to} \quad VaR\text{（信頼水準 95\%）} \leq 5\text{ドル}.$$

③ 信頼水準95%の期待ショートフォールを7ドル以内に抑えるとの制約

$$\max_{\{x,K\}} E[u(W)],$$
$$\text{subject to} \quad \text{期待ショートフォール（信頼水準 95\%）} \leq 7\text{ドル}.$$

④ 信頼水準99%のVaRを5ドル以内に抑えるとの制約

$$\max_{\{x,K\}} E[u(W)],$$
$$\text{subject to} \quad VaR\text{（信頼水準 99\%）} \leq 5\text{ドル}.$$

⑤ 信頼水準99%の期待ショートフォールを7ドル以内に抑えるとの制約

$$\max_{\{x,K\}} E[u(W)],$$
$$\text{subject to} \quad \text{期待ショートフォール（信頼水準 99\%）} \leq 7\text{ドル}.$$

22 このモデルでは損益額分布が離散的であるため、累積確率分布における累積確率がちょうど5%となる事象は存在しない。したがって、脚注5の定義により、VaRに相当する事象を、累積確率分布において累積確率が5%を超えた直後の事象にとってVaRの計算を行っている。

23 ここでは、行使価格の上・下限をこの2項ツリーモデル上で株価が取り得る値の範囲である35～288ドルに設定した。また、期待効用関数を対数型と仮定していることから、ポートフォリオ価値が負値とならない制約――オプションの売却量の上限を60とする――を置いた。

これら最適化の結果を図表4および図表5に示した。まず、制約がない場合（①）の最適ポジションは、ディープ・イン・ザ・マネー（現在の株価100ドルに対して行使価格288ドル）のオプションを21単位売却するポジションとなった。

一方、信頼水準95%のVaRを一定額以内に抑える制約のもと（②）では、最適ポジションは、ファー・アウト・オブ・ザ・マネーのオプションを60単位売却するポジションとなった。行使価格（72ドル）はVaRの信頼区間の範囲内で大幅な損失が発生しないように信頼区間の外（株価72ドル以下）の水準に選ばれる。一方、オプションの売却量は、プレミアム稼得のために制約なしの場合に比べて多くなっており、この結果、信頼区間の外で大幅な損失が発生するポジションとなっていることがわかる（図表6参照）。つまり、VaRを一定金額以内に抑えるという制約が課された場合、合理的な投資家にとって、信頼区間外で大幅な損失が生じるポジションが最適なポジションとなる[24]。この間、信頼水準95%の期待ショートフォールを一定額以内に抑える制約のもと（③）では、株価下落時のペイ・オフの条件付期待値を一定以上にするとの制約から、ディープ・イン・ザ・マネーのプット・オプション（行使価格288ドル）をごく少額売却するという極めてリスクの小さいポジションとなっている。

図表4　各リスク管理方法下でのポートフォリオのプロファイル（信頼水準95%）

		制約なし（①）	VaRによるリスク管理*（②）	期待ショートフォールによるリスク管理**（③）
ポジションの性質	売却量	21	60	0.23
	行使価格	288	72	288
リスク指標（単位：ドル）	VaR	570	5	6
	期待ショートフォール	643	213	7

* 信頼水準95%のVaRが5.0以下となるように最適化を実施。
** 信頼水準95%の期待ショートフォールが7.0以下となるように最適化を実施。

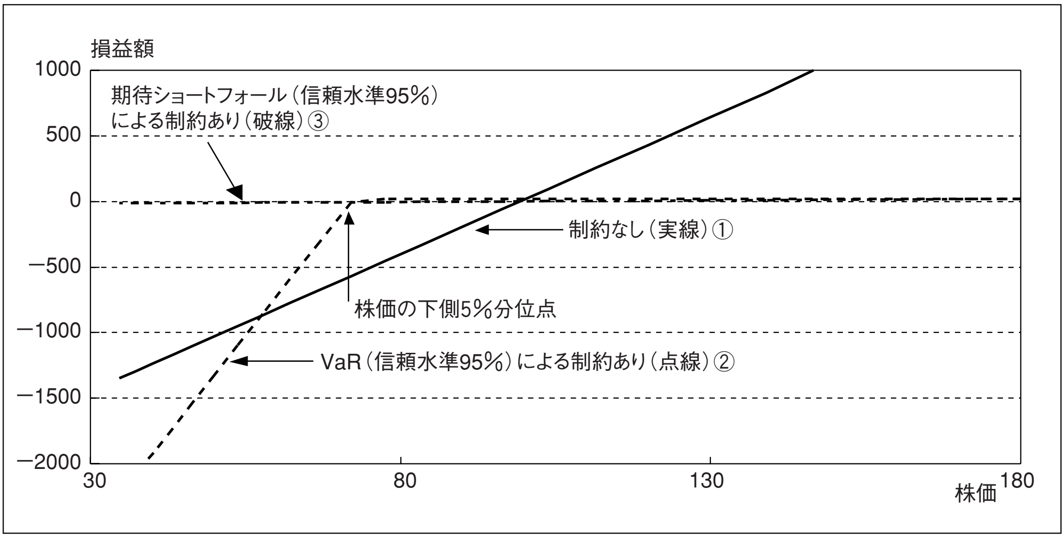
図表5　各リスク管理方法下でのポートフォリオのプロファイル（信頼水準99%）

		制約なし（①）	VaRによるリスク管理*（④）	期待ショートフォールによるリスク管理**（⑤）
ポジションの性質	売却量	21	60	0.18
	行使価格	288	62	288
リスク指標（単位：ドル）	VaR	774	5	7
	期待ショートフォール	816	123	7

* 信頼水準99%のVaRが5.0以下となるように最適化を実施。
** 信頼水準99%の期待ショートフォールが7.0以下となるように最適化を実施。

24 Ahn *et al.*［1999］でも、オプション・ポジションのVaRを最小化した場合、そのポジションはアウト・オブ・ザ・マネーのオプションのショート･ポジションから構成されることが示されている。

図表6　各ポートフォリオの株価に対するペイ・オフ（信頼水準95%）

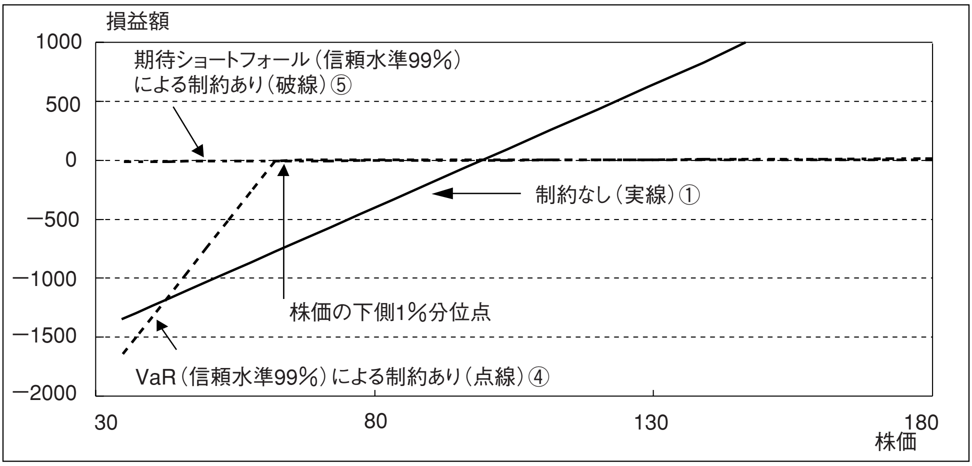


一方、信頼区間を99%に引き上げた場合のVaRを一定額に抑える制約のもと（④）では、②の場合に比べて行使価格がVaRの信頼区間より外側に引き下げられた（売却量は不変）。したがって、このオプション・ポジションの場合、VaRの信頼水準を引き上げるだけではテイル・リスクを回避することはできないこととなる（図表7参照）。

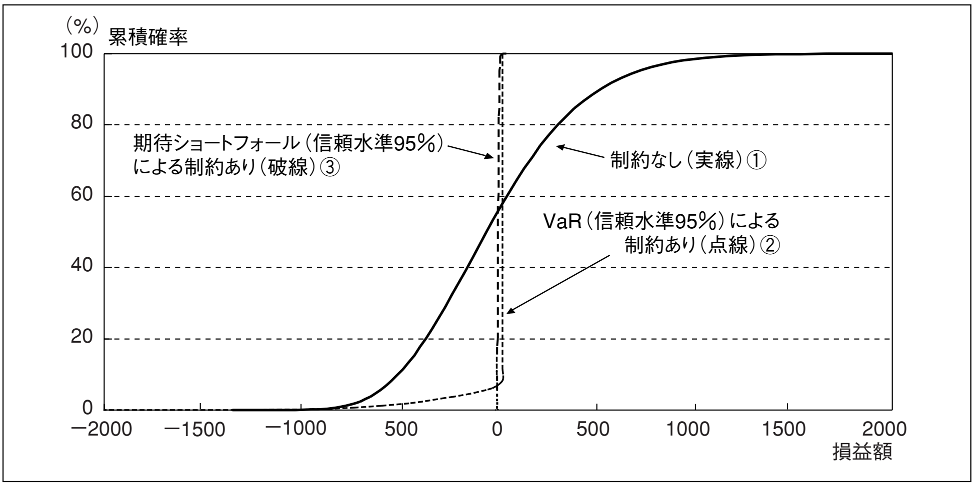
こうした状況は、図表8と図表9に掲げた損益額の累積確率分布[25]をみるとより明らかになる。VaRによる制約が課された状況では制約がない場合に比べて、分布のサイド（分布の中心部分と裾部分の間）が薄くなり平常時の損失が抑えられることによりVaRが引き下げられる一方、分布の裾が厚くなりVaRの信頼区間外での損失が拡大していることがわかる。

25 図をみやすくするため、信頼水準95%の場合のみ累積確率分布をプロットした。

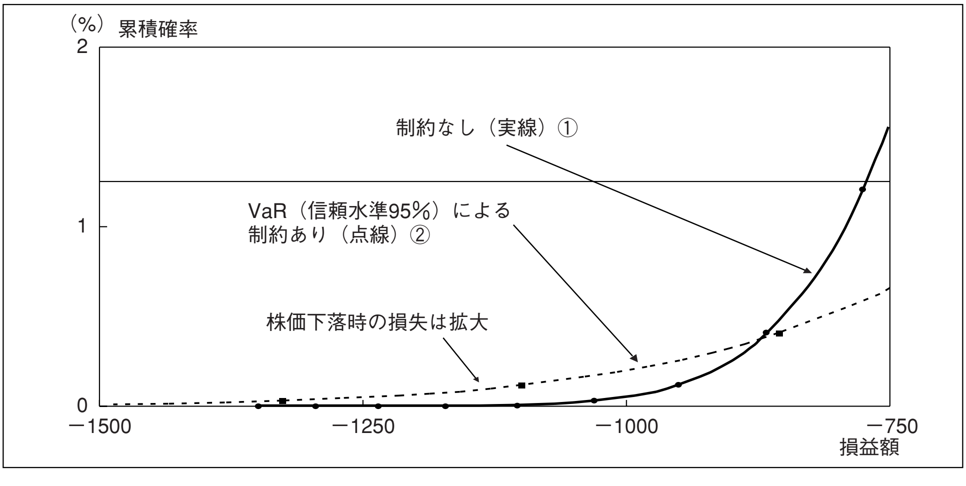
図表 7　各ポートフォリオの株価に対するペイ・オフ（信頼水準99%）



図表 8　投資家の損益額の累積確率分布（信頼水準95%）



図表 9　投資家の損益額の累積確率分布：左裾部分の拡大図（信頼水準95%）



(2) 与信集中とテイル・リスク(具体例2)

次に、与信ポートフォリオでも、テイル・リスクの問題が発生することをモデルを用いて示す。このモデルでは、与信ポートフォリオの損益額分布の非正規性が顕著なためにテイル・リスクが発生する。特に、与信ポートフォリオでは、与信の集中がリスク量を決める重要なファクターとなることが示される。

まず、モデルの説明を行う。ここでは、投資家が図表10に挙げられた4種類の証券(①デフォルト率4.0%の1種類の債券のみからなる集中化ポートフォリオA、②デフォルト率0.5%の1種類の債券のみからなる集中化ポートフォリオB、③デフォルト率5.0%の100種類の債券からなる分散化ポートフォリオ、④安全資産)に保有資産1億円を投資するとしよう。ここでは、簡単のため各債券の満期を1年で、デフォルト事象発生は独立であるとし、デフォルト時の回収率は10%と仮定する。さらに、各債券の複利利回りはクーポンと同水準であり、複利利回り、デフォルト率、回収率は満期まで一定であると仮定する。

図表10 各与信ポートフォリオのプロファイル

	組入債券数	クーポン	デフォルト率*	回収率
集中化ポートA	1	4.75%	4.00%	10%
集中化ポートB	1	0.75%	0.50%	10%
分散化ポート	100	5.50%	5.00%	10%
安全資産	1	0.25%	0.00%	——

*すべてのデフォルト事象は独立に発生すると仮定。

集中化ポートフォリオA･Bともにデフォルトを起こさず、かつ分散化ポートフォリオの債券がnだけデフォルトする確率[26]は、$0.96 \cdot 0.995 \cdot 0.05^{n} \cdot 0.95^{100-n} \cdot {}_{100}C_{n}$、集中化ポートフォリオA・Bともにデフォルトを起こし、かつ分散化ポートフォリオの債券がnだけデフォルトする確率は、$0.04 \cdot 0.005 \cdot 0.05^{n} \cdot 0.95^{100-n} \cdot {}_{100}C_{n}$として表される。したがって、投資家の効用関数が対数型であるとすると、期待効用は以下のように表すことができる。

26 集中化ポートフォリオAがデフォルトを起こさない確率は0.96 (=1－4%)、同様に、集中化ポートフォリオBがデフォルトを起こさない確率は0.995、分散化されたポートフォリオの債券がnだけデフォルトする確率は$0.05^{n} \cdot 0.95^{100-n} \cdot {}_{100}C_{n}$であることから導かれる。ただし、${}_{m}C_{n}$は$m$個から$n$個を選ぶ組合せの数である。

$$
\begin{aligned}
E[u(W)] = & \sum_{n=1}^{100} 0.96 \cdot 0.995 \cdot 0.05^{n} \cdot 0.95^{100-n} \cdot {}_{100}C_{n} \\
& \times \ln\left[1.0475 \cdot X_1 + 1.0075 \cdot X_2 + 1.055 \cdot X_3 \cdot \frac{100-0.9n}{100} + 1.0025 \cdot (W_0 - X_1 - X_2 - X_3)\right] \\
& \sum_{n=1}^{100} 0.04 \cdot 0.995 \cdot 0.05^{n} \cdot 0.95^{100-n} \cdot {}_{100}C_{n} \\
& \times \ln\left[1.0475 \cdot 0.1 X_1 + 1.0075 \cdot X_2 + 1.055 \cdot X_3 \cdot \frac{100-0.9n}{100} + 1.0025 \cdot (W_0 - X_1 - X_2 - X_3)\right] \\
& \sum_{n=1}^{100} 0.96 \cdot 0.005 \cdot 0.05^{n} \cdot 0.95^{100-n} \cdot {}_{100}C_{n} \\
& \times \ln\left[1.0475 \cdot X_1 + 1.0075 \cdot 0.1 \cdot X_2 + 1.055 \cdot X_3 \cdot \frac{100-0.9n}{100} + 1.0025 \cdot (W_0 - X_1 - X_2 - X_3)\right] \\
& \sum_{n=1}^{100} 0.04 \cdot 0.005 \cdot 0.05^{n} \cdot 0.95^{100-n} \cdot {}_{100}C_{n} \\
& \times \ln\left[1.0475 \cdot 0.1 \cdot X_1 + 1.0075 \cdot 0.1 \cdot X_2 + 1.055 \cdot X_3 \cdot \frac{100-0.9n}{100} + 1.0025 \cdot (W_0 - X_1 - X_2 - X_3)\right].
\end{aligned}
\tag{3}
$$

W ：終期におけるポートフォリオ価値
W_0：初期のポートフォリオ価値
X_1 ：集中化ポートフォリオAへの投資額
X_2 ：集中化ポートフォリオBへの投資額
X_3 ：分散化ポートフォリオへの投資額

VaRは以下の手続きによって得ることができる。まず、①各事象が発生した時の損益額を降順に並べる。次に、②この損益額の大きいものから小さいものに向かって各事象の発生確率を合計して累積確率を計算する。③この累積確率が信頼水準を超える直前の損益額に－1を乗じたものをVaRとする。

次に、期待ショートフォールは以下の手続きで得ることができる。まず、①損益額に－1を乗じたものがVaR以上となる場合を取り出し、損益額に－1を乗じたものと発生確率との積の和をとる。②この和を損失がVaR以上となる確率で除し、これを期待ショートフォールとする。

ここでは、以下の5つの最適化問題を解くことで、VaRおよび期待ショートフォールによるリスク管理が投資家の最適化行動に与える影響を分析した。

① リスク管理指標による制約なし

$$\max_{\{X_1, X_2, X_3\}} E[u(W)].$$

② 信頼水準95%のVaRを3百万円以内に抑えるとの制約

$$\max_{\{X_1, X_2, X_3\}} E[u(W)],$$
$$\text{subject to} \quad VaR\text{（信頼水準 95\%）} \leq 3\text{百万円}.$$

③ 信頼水準95%の期待ショートフォールを3.5百万円以内に抑えるとの制約

$$\max_{\{X_1,X_2,X_3\}} E[u(W)],$$
$$\text{subject to}\quad \text{期待ショートフォール（信頼水準 95\%）} \leq 3.5\text{百万円}.$$

④ 信頼水準99%のVaRを3百万円以内に抑えるとの制約

$$\max_{\{X_1,X_2,X_3\}} E[u(W)],$$
$$\text{subject to}\quad VaR\text{（信頼水準 99\%）} \leq 3\text{百万円}.$$

⑤ 信頼水準99%の期待ショートフォールを3.5百万円以内に抑えるとの制約

$$\max_{\{X_1,X_2,X_3\}} E[u(W)],$$
$$\text{subject to}\quad \text{期待ショートフォール（信頼水準 99\%）} \leq 3.5\text{百万円}.$$

これら最適化の結果は、図表11～16に示した。ここでは、制約なしの最適ポートフォリオ（①）との比較により、それぞれの制約のもとでの最適ポートフォリオの特徴について述べる。

まず、信頼水準95%のVaRによる制約下での最適ポートフォリオ（②）の特徴としては、集中化ポートフォリオAに対する投資額が大幅に増加している点が挙げられる。このメカニズムは、図表13および図表14の累積確率をプロットしたグラフをみることで明らかになる。まず、VaRによる制約を受けて、投資家は確率95%の範囲内で発生する最大損失額を引き下げるため、分散化ポートフォリオに対する投資額を引き下げる。ここで投資額引下げに伴い発生した資金は、集中化ポートフォリオか安全資産に投資する必要がある。一方、集中化ポートフォリオAへの投資がVaRに与える影響をみると、そのデフォルト確率が4%とVaRの信頼区間の範囲外にあるため、集中化ポートフォリオAへの残高を大きくしてもVaRの値には大きな影響を与えないことがわかる。したがって、分散化ポートフォリオの残高を減らして得た資金は、より高いリターンを求めて集中化ポートフォリオAに向かうことになる[27]（図表11）。この結果、VaRは減少する一方、集中化ポートフォリオAへの投資額が増加した結果、VaRの範囲外で大幅な損失を被る可能性が高まったことになる。つまり、VaRによるリスク管理の導入により、与信集中が促進されたことになる。

一方、期待ショートフォールによる制約を設けた場合（③）は、集中化ポートフォリオへの投資度合いは低下していることがわかる。これは、期待ショートフォールによる制約が非常に低い確率で発生する損失までも考慮対象にしているため、集中化ポートフォリオへの投資を抑制するインセンティヴを投資家に与えるためである。

さらに、VaRの信頼水準を99%とした場合（④）、デフォルト確率（4%）が信頼区間の範囲内に入る集中化ポートフォリオAへの投資は大幅に減少している一方、集中化ポートフォリオBへの投資が増大していることがわかる（図表12）。これは、集中化ポートフォリオBのデフォルト率が0.5%とVaRの信頼区間の範囲外にあるた

27 この結論は、集中化ポートフォリオへの投資損益率の水準に依存している。仮に集中化ポートフォリオのクーポンが低い場合は、分散化ポートフォリオの残高を減らして得た資金は安全資産に向けられ、与信集中は進行しない。したがって、VaRによるリスク管理の導入が与信集中を促進するか否かは、投資可能な与信ポートフォリオの投資損益率に依存していることがわかる。

図表11　各リスク管理方法での最適ポートフォリオ（信頼水準95%）

		制約なし（①）	VaRによるリスク管理*（②）	期待ショートフォールによるリスク管理**（③）
ポート構成	集中化ポートA（デフォルト率4%）	7.4%	20.1%	2.9%
	集中化ポートB（デフォルト率0.5%）	0.0%	0.0%	2.0%
	分散化ポート	92.6%	79.9%	95.1%
	安全資産	0.0%	0.0%	0.0%
リスク指標（単位：百万円）	VaR	3.35	3.00	2.75
	期待ショートフォール	5.26	14.35	3.50

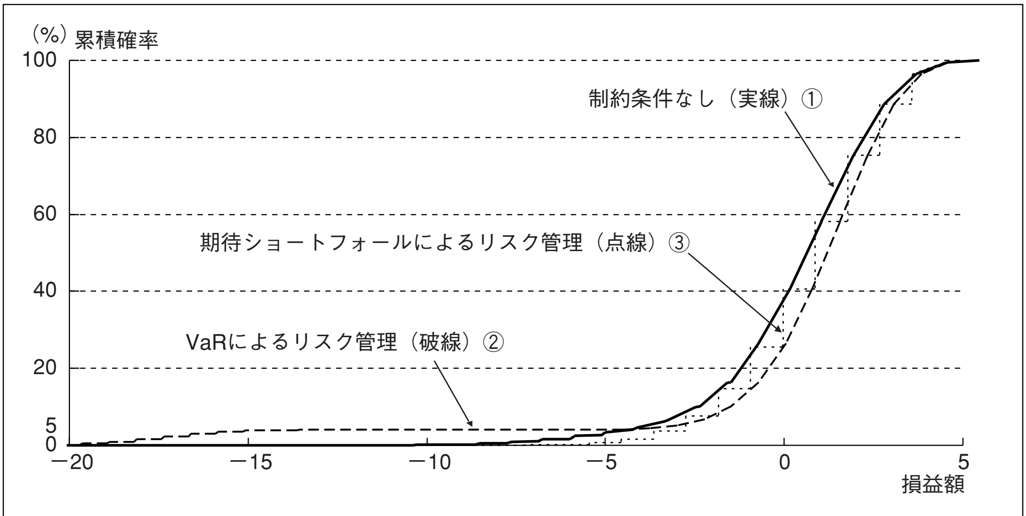
* VaRが3.0以下となるように最適化を実施。
**期待ショートフォールが3.5以下となるように最適化を実施。

図表12　各リスク管理方法での最適ポートフォリオ（信頼水準99%）

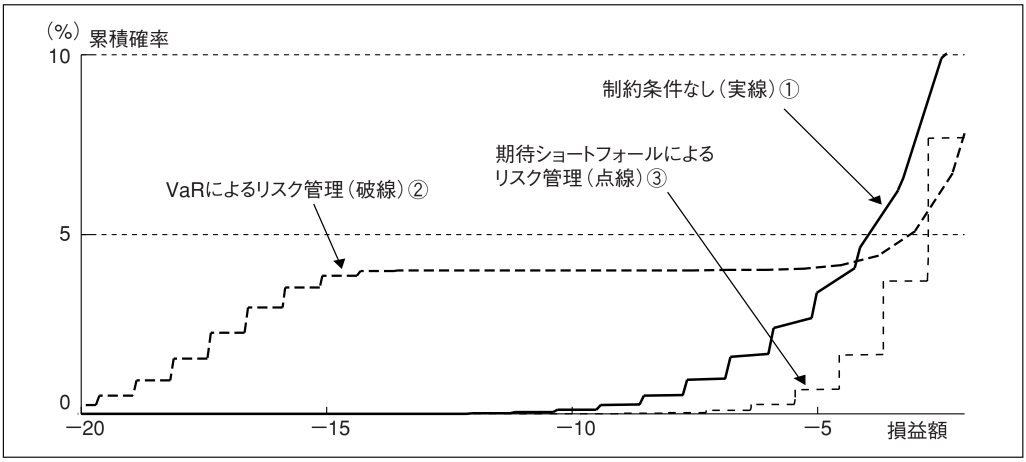
		制約なし（①）	VaRによるリスク管理*（④）	期待ショートフォールによるリスク管理**（⑤）
ポート構成	集中化ポートA（デフォルト率4%）	7.4%	0.7%	0.7%
	集中化ポートB（デフォルト率0.5%）	0.0%	18.8%	0.5%
	分散化ポート	92.6%	64.9%	65.6%
	安全資産	0.0%	15.6%	33.2%
リスク指標（単位：百万円）	VaR	6.77	3.00	3.13
	期待ショートフォール	7.83	7.33	3.50

* VaRが3.0以下となるように最適化を実施。
**期待ショートフォールが3.5以下となるように最適化を実施。

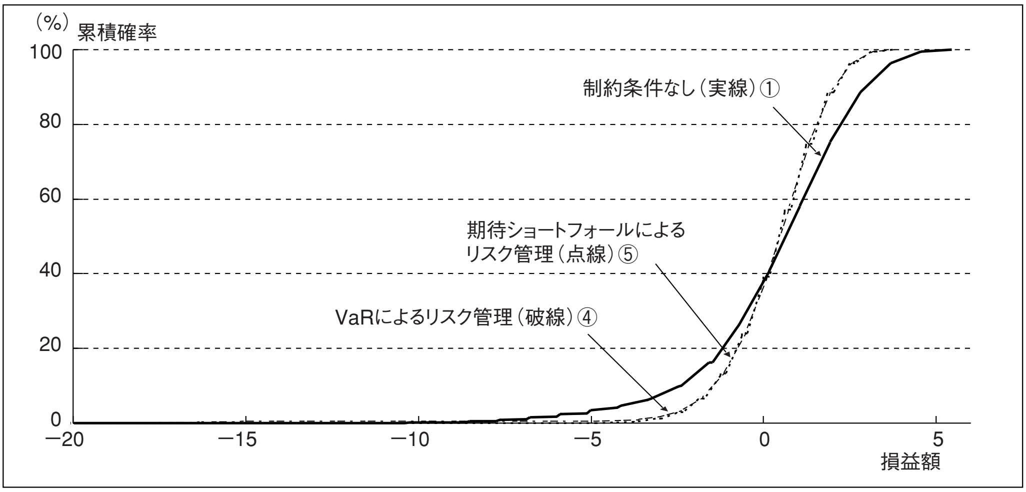
図表13　投資家の損益額の累積確率分布（信頼水準95%）



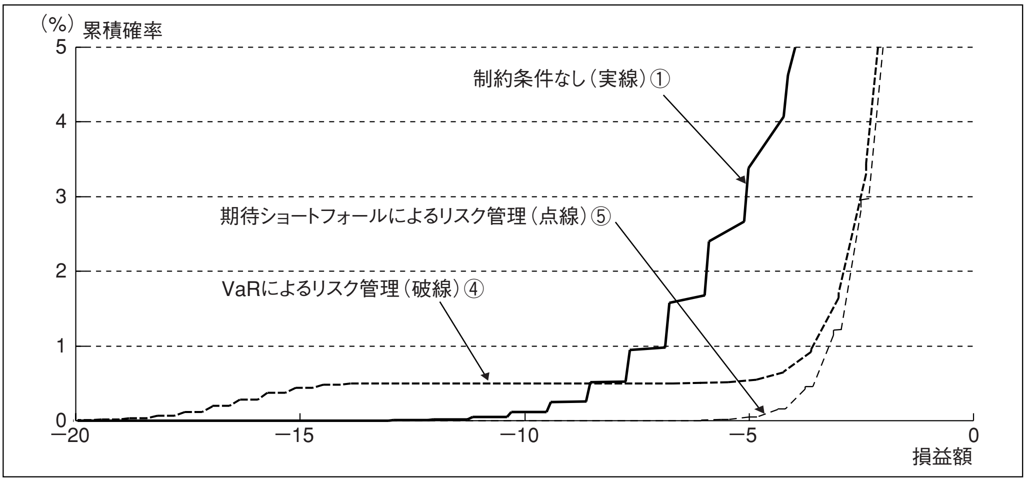
図表14　損益額の累積確率分布（信頼水準95%、左裾部分の拡大図）



図表15　投資家の損益額の累積確率分布（信頼水準99%）



図表16　損益額の累積確率分布（信頼水準99%、左裾部分の拡大図）



めにVaRに影響を与えない形で投資が進められたことを示している。さらに、累積確率分布のグラフ（図表15、16）をみると、VaRによるリスク管理では集中化ポートフォリオBへの投資額増加により低い確率で発生する損失が大幅に増大していること、すなわち、VaRによるテイル・リスクが顕現化していることがわかる。したがって、単純に95%の信頼水準を99%に引き上げただけではテイル・リスクを把握できないことがわかる。一方、期待ショートフォールによるリスク管理（⑤）では、テイルでの損失は大幅に抑制されており、テイル・リスクは顕現化しないことがわかる。

ここでは、簡単な例により分析を行った結果、VaRによるリスク管理が与信の集中を促進し、VaRの信頼区間外での損失を増加させる場合があることがわかった。一方、期待ショートフォールによるリスク管理は、VaRの信頼区間外の損失をもカバーするため、与信の集中により信頼区間外でのリスク・テイクを抑制する効果があることも示された。

(3) 動学的投資戦略におけるテイル・リスク（具体例３）

ここでは、VaRによるテイル・リスク発生の3つめの例として、投資家が株式（リスク証券）と債券（安全証券）とを連続時点で動学的に取引を行う場合について、Basak and Shapiro［1999］に従って説明を行う（以下ではBasak and Shapiro［1999］の数式などを簡便化して説明を行う[28]が、ややテクニカルな数学的記述も含まれているため、3節をとばして4節に進むことも可能である）。

Basak and Shapiro［1999］は、動学的最適化問題を解くことによって、合理的な投資家がVaRに基づくリスク管理を行った場合、VaRの信頼区間外でリスクをとるような投資戦略がこの投資家にとって最適な投資戦略となることを示した。このモデルでは、資産価格が対数正規分布（幾何ブラウン運動）に従うことが仮定されているが、投資家がダイナミックに取引を行うことで非線形のポジションを組んで正規分布に従わない損益分布を生成できることから、テイル・リスクが発生する。

当初（時点 $t=0$）資産$W(0)$を保有していた投資家が、最終時点（時点 $t=T$）における保有ポートフォリオの価値$W(T)$に依存する期待効用を最大化するケースを考える。投資家の効用関数は対数型であるとし、最終的な保有ポートフォリオの価値$W(T)$を用いて、$u(W(T))=\ln W(T)$で表されるとする。投資家の効用は最終的な保有ポートフォリオの価値のみによって決められることから、投資家は保有資産を消費するインセンティヴを持たない。また、投資家はこのポートフォリオの資金の引出しおよび追加を一切行わないとする。さらに、投資家は保有資産を連続時点で売買できるものと仮定する。簡単化のため、存在する金融商品は無リスク証券（債券）Bとリスク証券（株式）Sのみであり、それぞれ以下の価格過程に従うと仮定する。

28 ここでは、直観的な説明を重視しており、解の導出過程の詳細などは省略している。詳細は、Basak and Shapiro［1999］を参照。

$$dB(t) = B(t)rdt, \tag{4}$$

$$dS(t) = S(t)[\mu dt + \sigma dw(t)], \tag{5}$$

ただし、$w(t)$ は標準ブラウン過程、r、μ、σ はすべて定数。

ここで、以下の式で表される状態価格密度$\xi(t)$を考える。

$$\xi(t) \equiv \exp\left[-\left\{r + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2\right\}t - \frac{\mu - r}{\sigma}w(t)\right]. \tag{6}$$

この時、投資家が当初の保有資産をすべて債券と株式からなるポートフォリオに運用し、このポートフォリオの資金の引出しあるいは追加を一切行わないという条件（予算制約）を数式で表すと、以下のようになる。

$$E[\xi(T)W(T)] \leq W(0). \tag{7}$$

ここでは、$\xi(T)$ は一種のディスカウント・ファクターであると考えることができ、最終的なポートフォリオ価値をこのディスカウント・ファクターで割り引いたものの期待値が当初の資産額以下であるという条件が予算制約を表していると解釈できる。

したがって、この投資家の最適化問題は以下の形で表される。

$$\begin{aligned}&\max_{W(T)} E[\ln W(T)]\\&\qquad \text{subject to } E[\xi(T)W(T)] \leq W(0).\end{aligned} \tag{8}$$

この最適化問題の解は、若干の計算により、次式として得られる。

$$W(T) = \frac{W(0)}{\xi(T)}. \tag{9}$$

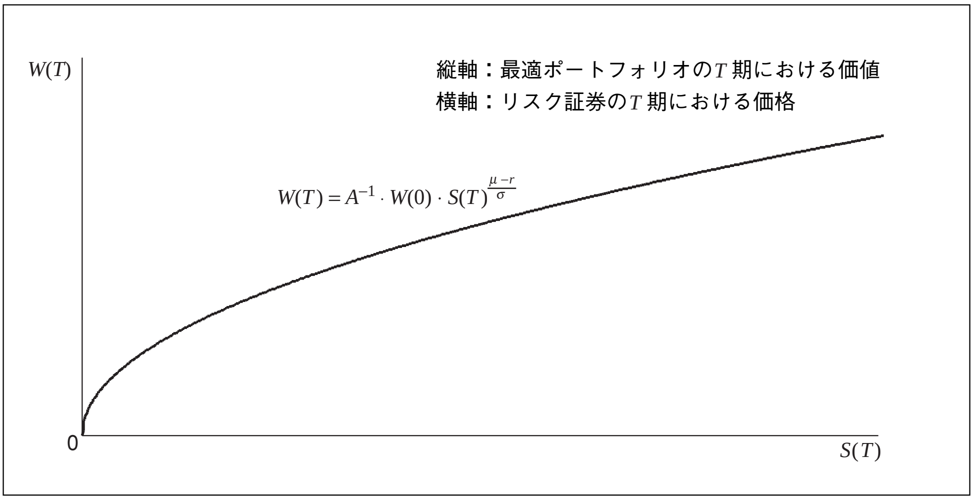
(5)式、(6)式、(9)式より、$W(T)$ は次のようになる。

$$W(T) = \frac{W(0)}{\xi(T)} = \frac{W(0)}{A \cdot S(T)^{-\frac{\mu - r}{\sigma}}} = A^{-1} \cdot W(0) \cdot S(T)^{\frac{\mu - r}{\sigma}}, \tag{10}$$

ただし、$A>0$ は定数。

したがって、最適なポートフォリオのT期での価値は、リスク証券のT期での価格で表せることがわかった。これを概念図で表すと図表17のようになる。

図表17　最適ポートフォリオのT期における価値



ここで、こうした投資家の最適化問題に、VaRに基づくリスク管理を導入することを考える。

VaRは、「保有期間中に一定の確率でポートフォリオに発生し得る最大損失額」として定義される。したがって、信頼水準100$(1-\alpha)$%のVaRを$VaR(\alpha)$として、この定義を数式で表すと以下のようになる。

$$P(W(0) - W(T) \leq VaR(\alpha)) \equiv 1-\alpha. \tag{11}$$

VaRに基づくリスク管理では、(11) 式で定義されるVaRが自己資本の水準を下回るようにポートフォリオ運営がなされるとする。すなわち、この自己資本の水準を$Capital$として、

$$VaR(\alpha) \leq Capital, \tag{12}$$

となる。ここで、当初の富の金額$W(0)$ から自己資本$Capital$を差し引いた金額を$\underline{W}$とする。この$\underline{W}$は、自己資本をすべて使い果たしてしまうようなT期におけるポートフォリオ価値、つまり、これを下回るとデフォルトが発生するポートフォリオ価値を表している。これを用いると、(12) の制約式は、

$$VaR(\alpha) \leq W(0) - \underline{W}, \tag{13}$$

と表される。

（11）式および（13）式により、

$$P(W(T) \geq \underline{W}) \geq 1-\alpha, \tag{14}$$

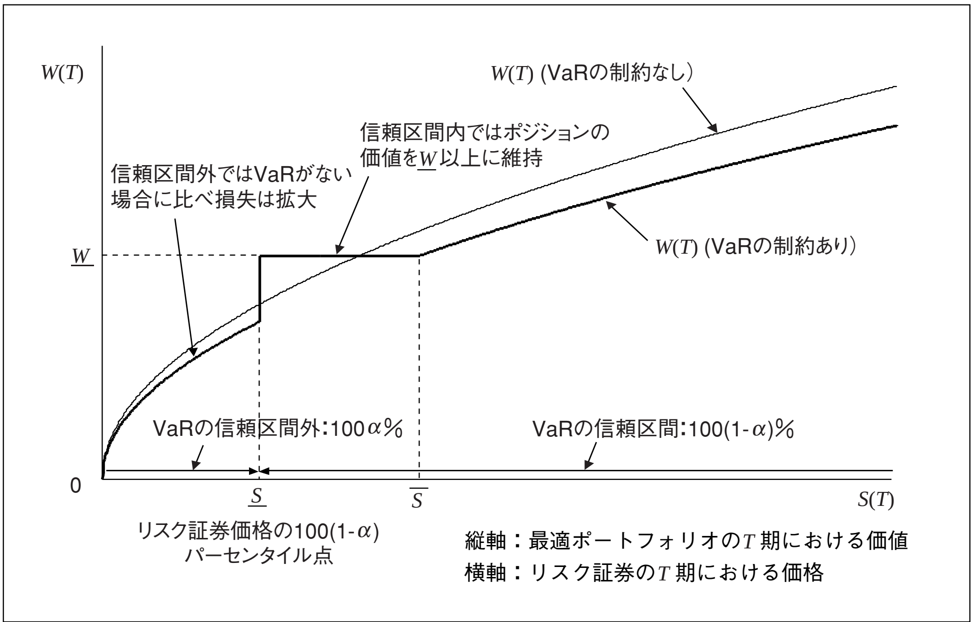
が成り立つ。これは、最終的なポートフォリオの価値が自己資本を使い果たしてしまう水準を下回る確率が100α%以下となるようにポートフォリオを運営することを表している。したがって、VaRによるリスク管理は、(14)式により表現される。

以上から、VaRに基づくリスク管理を行っている投資家の最適化問題は以下の形で表される。

$$\begin{aligned} &\max_{W(T)} E[u(W(T))], \\ &\qquad \text{subject to} \;\; E[\xi(T)\,W(T)] \leq W(0), \\ &\qquad\qquad P(W(T) \geq \underline{W}) \geq 1-\alpha. \end{aligned} \tag{15}$$

この最適化問題の解を図式的に表すと図表18のようになる。まず、VaRの信頼区間内では、最低限$\underline{W}$のポートフォリオ価値を維持する必要があることから、この$\underline{W}$がポートフォリオ価値のボトムとなるようポートフォリオが運営される。一方、予算制約式を満たすためには、最適ポートフォリオに比べて、この信頼区間内で維持される$\underline{W}$の分だけ他の状態のポートフォリオ価値は減少している必要がある。したがって、信頼区間外と株価が上昇した時のポートフォリオ価値は低下する形になる。

図表18　VaRによるリスク管理下の最適ポートフォリオのT期における価値



したがって、VaRに基づくリスク管理は、もともと最悪時の損失に備えたものでありながら、実際には、それを導入することで、投資家は、リスク証券（株式）価格が信頼区間外に下落した場合により大幅な損失が発生するポジションをとるようになってしまうのである[29]。

一方、期待ショートフォールに基づくリスク管理では、ある閾値を上回る範囲での損失額の条件付期待値が一定値η（典型的には自己資本など）を下回るようにポジション運営が行われる。閾値を$\underline{W}$としてこれを数学的に表すと以下のようになる[30]。

$$E[W(0)-W(T)\,|\,W(T)\leq \underline{W}\,]\leq \eta. \tag{16}$$

ここで、$\varepsilon \equiv \eta - W(0) + \underline{W}$とすると、

$$E[\,\underline{W}\,-W(T)\,|\,W(T)\leq \underline{W}\,]\leq \varepsilon. \tag{17}$$

これは、一定値$\underline{W}$を下回る範囲で、この$\underline{W}$と最終的な富$W(T)$との差額の条件付期待値が、ε以内に抑えられることを示している。

Basak and Shapiro［1999］では、最適化問題の解をより簡便に得るために、(17)式にさらに修正を加え、以下の形で期待ショートフォールに基づくリスク管理の定式化を行っている[31]。

$$E[\xi(T)(\underline{W}-W(T))1_{\{W(T)\leq \underline{W}\}}]\leq \varepsilon. \tag{18}$$

条件付期待値の定義より、

$$\begin{aligned} &E[\xi(T)(\underline{W}-W(T))1_{\{W(T)\leq \underline{W}\}}] \\ &\quad = E[\xi(T)(\underline{W}-W(T))\,|W(T)\leq \underline{W}\,]\,P(W(T)\leq \underline{W}\,), \end{aligned} \tag{19}$$

が成り立つことから、(18)式左辺は、$\underline{W}-W(T)$ に状態価格密度$\xi(T)$を乗じてその条件付期待値をとり、これにポートフォリオの価値$W(T)$が閾値$\underline{W}$を下回る確率$P(W(T)\leq \underline{W}\,)$を乗じたものである。

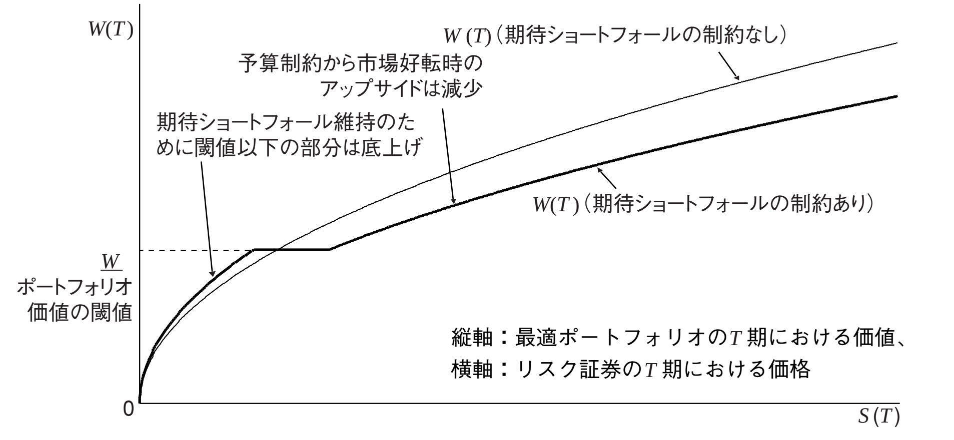
ここでは、(18)式左辺を期待ショートフォールに類似した指標として「修正期待ショートフォール」と呼ぶこととし、以下ではこの「修正期待ショートフォール」を期待ショートフォールとみなして考察を行うこととする。

29 Basak and Shapiro［1999］では、こうしたVaRに基づくリスク管理のもとでの投資家の最適化行動の結果、VaRに基づくリスク管理が行われない場合に比べ、株価下落時の株価ボラティリティが大幅に上昇することを、一般均衡の枠組みで示している。

30 $\underline{W}=W(0)-VaR(\alpha)$とすると、期待ショートフォールと同じとなる。ただし、$VaR(\alpha)$は投資家の投資戦略によって変化するため、$W(0)-VaR(\alpha)$を閾値とすると最適化問題が極めて複雑となってしまう。このため、ここでは閾値を一定値$\underline{W}$として定式化を行う。

31 (18)式で1_AはAという条件を満たすとき1、その他の場合には0をとる定義関数である。

図表19　期待ショートフォールに基づくリスク管理のもとでの最適ポートフォリオのT期における価値



期待ショートフォールによる制約条件のもとでの投資家による最適化問題は以下のように表される。

$$\max_{W(T)} E[u(W(T))],$$

$$\text{subject to} \quad E[\xi(T)\,W(T)] \leq W(0), \tag{20}$$

$$E[\xi(T)\,(\underline{W} - W(T))1_{\{W(T) \leq \underline{W}\}}] \leq \varepsilon .$$

この最適化問題の解を図式的に表すと図表19のようになる。まず、株価が閾値を下回る部分におけるポートフォリオ価値の期待値が維持されるようポートフォリオ運営がなされることから、この部分のポートフォリオ価値は全体的に底上げされる。一方、予算制約式を満たすため、この底上げ分はいずれかの部分で補填される必要があり、最適ポートフォリオに比べて株価が高い部分でのポートフォリオ価値は減少する。

したがって、期待ショートフォールに基づくリスク管理を行った場合、株価が大幅に下落する場合でもポートフォリオ価値自体の下落を防ぐような動学的投資戦略がとられることになる（ただし、これに見合う形で株価上昇時のポートフォリオ価値のアップサイドは限定される）。したがって、期待ショートフォールに基づくリスク管理には、株価下落時のダウンサイド・リスクを減少させる効果があり、「最悪時に備えるためのリスク管理指標」として、VaRに比べ望ましい性質を持っていることがわかる。

また、この例は、1節におけるオプション・ポートフォリオに関する1時点でのみの売買を前提とする分析結果が、オプション性のある一般的なポジションにも当てはまることも示している。つまり、ここでは、株式と債券を連続時点で動学的に取引する場合におけるテイル・リスクの発生が示されているが、連続時点で動学的

に取引することにより任意のヨーロピアン・オプションのペイ・オフを複製できることから、この分析は静態的なオプション・ポートフォリオの分析をも包含している。したがって、1節の例で得た結果は、オプション性のある一般的なポジションにも当てはまる。

(4)「分布の裾の操作」とテイル・リスク

ここまでの例から､オプション・ポートフォリオおよび与信ポートフォリオでは、VaRが信頼区間外のリスクを捉えられないために、以下のような形でテイル・リスクが発生することが確認できた。

①VaRを抑制しても信頼区間外の損失が増大する場合があること。つまり、VaRがリスクに関するミスリーディングな情報を与える場合があること。

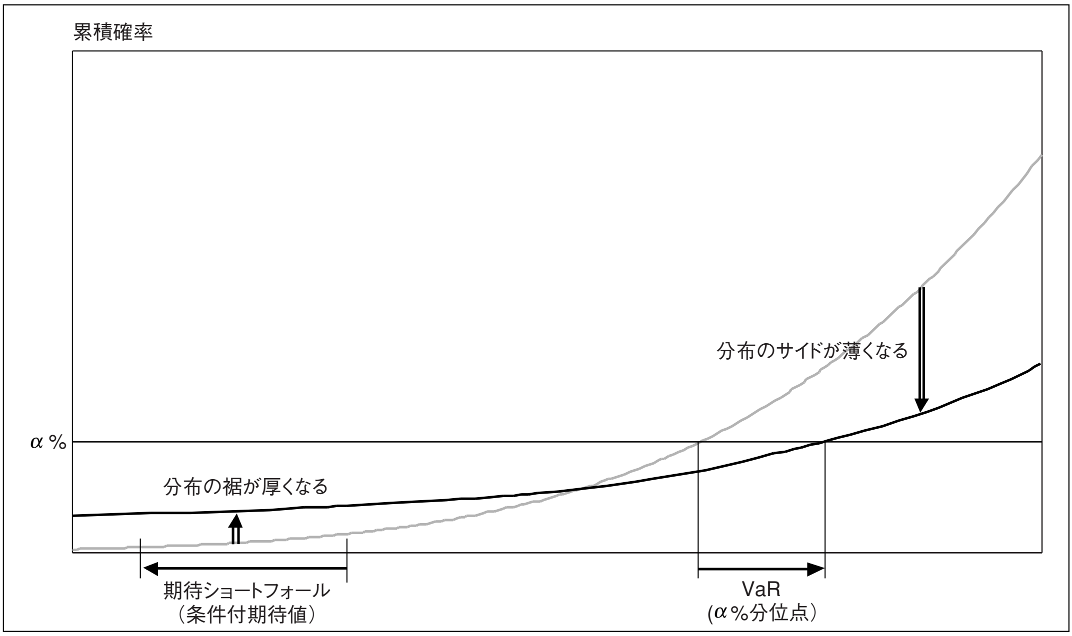
②特にこの場合、VaRが信頼区間の外での損失がより大きくなるポジションをとるインセンティヴを合理的な投資家に与える可能性があること。

このように、VaRのテイル・リスクが問題となるケースの特徴としては、以下の点が挙げられる（図表20参照)。

①ファー・アウト・オブ・ザ・マネーのオプションのショート・ポジションや、与信の集中など、(平常時の損益変動は小さいが）比較的小さい確率で大きな損失が生じるような資産が投資機会として存在すること。

②こうした場合、分布の裾を厚くする一方で分布のサイド（中心部分と裾部分の間）を薄くするような操作ができること（こうした場合を、本稿では「分

図表20　テイル・リスクが発生する損益額の累積確率分布



布の裾が操作可能」と呼ぶこととする)。

こうした条件が満たされると、裾を厚くする一方でサイドを薄くするようなポートフォリオを組成することにより、VaRを引き下げることが可能となる。こうした状況では、VaRは損益額分布のリスクを必ずしも的確に表現していないと考えられ、VaRによるリスク管理は、合理的な投資家(VaRに基づくリスク管理による制約を所与として期待効用を最大化する投資家)をミスリードすることとなる。

さらに、もう1つ注意すべき点として、信頼水準を引き上げても、投資家はその引き上げられた新しい信頼区間のさらに外でリスクをとるインセンティヴを持つことになり、VaRでリスク管理を行っている限りこれは解消しない点である。1節および2節いずれの例においても、信頼水準を95%から99%に引き上げても、その信頼区間の外側でのリスクをとるようなポジションが改めて組成され、テイル・リスクを増加させる一方でVaRを引き下げることが可能となった。したがって、上記のように、裾の操作によりテイル・リスクが発生する状況では、VaRのみを用いたリスク管理は投資家をミスリードすることがある。

一方、期待ショートフォールは、裾の部分の損失額を平均値として取り込んでいることから、投資家をミスリードする可能性は低いことがわかる。

5. 期待ショートフォールの実務への応用可能性

これまで述べたように、VaRには信頼区間外の損益を把握できないという問題点があり、損益額分布の裾の操作が可能な状況では投資家をミスリードする可能性がある。一方、期待ショートフォールはVaRの信頼区間外の損益も織り込むことができ、投資家に対して信頼区間の外で大幅な損失を被るようなポジションをとるインセンティヴを与える可能性が低い。さらに、最近の研究成果では、シミュレーション法によるリスク計測を行い、これによりポートフォリオ管理を行う場合、VaRによるリスク計測・管理ではポートフォリオの最適化が難しい一方、期待ショートフォールではポートフォリオ最適化が比較的容易に行えるとの結果(Rockafeller and Uryasev［2000］)が得られている。したがって、期待ショートフォールは、概念上VaRよりも優れたリスク指標であるといえる。

しかしながら、期待ショートフォールをリスク管理実務に応用するためには、いくつか検討を要する事項が残されている。まず、VaRと期待ショートフォールの長所と短所について整理した結果を図表21に示した。これまで述べてきたように、期待ショートフォールには、VaRの信頼区間外の損益額分布に関する情報を損益額の平均値として織り込めるというメリットがあるが、実務上は、①期待ショートフォールを実際に安定的に推計できるか否か十分な検証が進んでいない、②バックテスティングの方法が確立していない、といった問題点がある。

まず、期待ショートフォールの算出には、分布の裾の平均値をとる必要があるため、分布の裾で稀に発生する損益をいかに正確に推計するかという難しい問題に直

面することとなる[32]。特に、ポートフォリオの期待ショートフォールを算出する場合、損益額分布の裾の形状が重要となるが、ここでは資産価格間で通常みられる相関関係は崩れている可能性が高いため、相関関係を一定とおく通常のモンテカルロ・シミュレーションでは、分布の裾における損失額の条件付期待値である期待ショートフォールを正確に推計することは困難であると考えられる[33]。さらに、期待ショートフォールのバックテスティングはVaRのバックテスティングに比べて難しいと考えられる。VaRのバックテスティングでは実際の損益額がVaRを上回る頻度（バイオレーション）とVaRの信頼水準とを比較することによってモデルの妥当性が検証される。一方、期待ショートフォールでは、VaRを上回ることを条件とした損失額の平均の実現値と、事前に推計された期待ショートフォールとを比較することが必要である。この分布の裾における平均値を安定的に推計するためには多数のデータが必要であるため、期待ショートフォールはVaRに比べバックテスティングが困難であると考えられる。

図表21　VaRと期待ショートフォールとの比較

	VaR	期待ショートフォール
長所	・VaRによるリスク管理は自社の倒産確率と結び付いた形で理解することが可能 ・バックテスティングが比較的容易 ・業界標準的なリスク管理指標であり、算出のためのインフラ（ソフトウェアやシステムなど）が充実	・VaRで捉えられない信頼区間外のリスクも織り込んでいる ・分布の裾の操作が可能な状況でも、投資家に歪んだインセンティヴを与える可能性は低い ・劣加法性を満たしている ・シミュレーション法でリスク計測を行った場合、ポートフォリオの最適化が容易
短所	・信頼区間外のリスクを織り込んでいない（テイル・リスクの存在） ・分布の裾が操作できる状況では、テイル・リスクにより投資家に歪んだインセンティヴを与える ・劣加法性を満たしていない ・シミュレーション法によりリスクを計測した場合、ポートフォリオ最適化が困難	・期待ショートフォールを用いると、「自社が倒産する確率を予め定めた一定値以内に抑える」という扱いができなくなる ・算出、バックテスティング方法が必ずしも確立していない ・算出のためのインフラ（ソフトウェアやシステムなど）が整っていない

32 分布の裾の推計には、極値理論（extreme value theory）の利用が考えられる。極値理論による期待ショートフォールの計測例については、Neftci［2000］、Scaillet［2000］などを参照。

33 ヒストリカル・シミュレーションで期待ショートフォールを求めるとしても、裾の部分の十分なデータ確保が困難な場合が多いと考えられる。

6．VaRをリスク指標として用いる際の実務上のインプリケーション

4章までに述べてきたように、期待ショートフォールはVaRに比べて概念上優れたリスク指標であり、理論的にはこれを活用するのが望ましい。しかし、5章で述べたように、期待ショートフォールを実務に応用するためには、推計値の安定性確保とバックテスティング方法の確立という課題が残されており、これをVaRに代える形で本格的に実務に導入するのは現状は難しいと考えられる。したがって、当面は金融実務において標準的なリスク指標となっているVaRをその限界を十分に踏まえながら活用していくことになろう。ここでは、VaRをリスク指標として利用する場合に注意すべき点を、これまでの議論を基に、リスク管理実務に対するインプリケーションとして列挙する。

（1）ポートフォリオの特性に応じVaRによるテイル・リスクの大きさが決まる

損益額が正規分布に従わない場合のリスク測定で最も留意すべき点は、「リスクを単一の指標で表すことはできない」という点である。損益額が正規分布に従わない場合、VaRは分布の形状（特に裾部分）に関する情報の1つを与えているに過ぎない。特にVaRからは「信頼区間の外側でどの程度の損失が発生しているのか」という情報が得られない点が重要であり、VaRを用いてリスクの測定・管理を行う場合はこの点に注意する必要がある。

具体的にこの問題が顕現化してテイル・リスクが発生し得る状況としては、4章で示したように、小さい確率で大幅な損失が発生するような資産をポートフォリオに含んでいる状況が考えられる。こうした意味で、特に、オプションを含むポートフォリオ、与信ポートフォリオを扱う場合は注意する必要がある。

したがって、VaRを利用する際には、それぞれの持つポートフォリオの特性を踏まえたうえで、VaRのみに頼る危険性を認識しておく必要がある。

（2）VaRに基づくリスク管理は信頼区間外で大幅な損失が生じるポジション運営を行うインセンティヴを与える可能性がある

4章でもみたように、小さい確率で大幅な損失が発生するような資産をポートフォリオに含んでいる場合は、分布の裾を厚くする一方、分布のサイドを薄くするという操作によりVaRを引き下げることが可能となる。さらにこの場合、VaRによるリスク管理は、合理的な投資家に信頼区間の外で大きな損失が発生するポジション運営を行うインセンティヴを与える可能性がある。この問題は、VaRの信頼水準を引き上げても解決されない。

したがって、金融機関が内部リスク管理において、各部署あるいはトレーダーにVaRによるリスク枠の配分を行う場合や、規制当局がVaRによって測定されたリス

ク量に対して規制を行うような場合には、こうしたVaRによるリスク管理が与えるインセンティヴを念頭に置き、VaRとは別の管理手法や規制を組み合わせる必要があると考えられる。

(3) ストレス・テストに対するインプリケーション

BIS・グローバル金融システム委員会［2000］では、ストレス・テストの利用状況について述べる中で、以下の2点がストレス・テスト利用の重要な側面であることを指摘している。

① ストレス時の損失額と経営体力との比較・分析

「... 経営者に対し（レバレッジの程度や性質といった）リスクテイク量とリスク許容量の間の戦略的な関係を理解させる必要があり、ストレステストは、そのための情報を収集・集約する役割を担っている...。」

②テイル・リスクの計量化

「大規模な損失が企業にとって特に深刻なコストを強いるとすれば、経営者は過剰なテイル・リスクを有する危険なポートフォリオを持たないためにストレステストを利用することができる。」

VaR的な発想でストレス時のロスを算出する方法、すなわち、非常に高い水準（例えば99.99%）のもとで最大損失を算出する方法や過去のストレス時のシナリオを用いて損失額を算出する方法は、前者のシナリオに基づくストレス時の損失額と経営体力との比較という意味ではある程度妥当性があると思われる一方、後者のテイル・リスクの管理（VaRの信頼区間外で生じる損失の検出）という意味では不十分である。この場合は、期待ショートフォールのように分布の裾部分を考慮する手法によりストレス時の損失額を測定し、ポートフォリオの脆弱性を調べる必要がある。特に、分布の裾部分の一部しか考慮しない手法に基づくストレス・テストで算出した損失額をリスク枠算出の根拠とした場合、トレーダーに信頼区間の外で大幅な損失を被るポジションをとるインセンティヴを与えてしまう可能性があることは認識する必要がある。

(4) デスク単位における肌目細かいリスクの管理の重要性

こうしたVaRの問題点に対しては、実務的な観点から、「トレーディング・デスク・レベルでは、VaRだけではなく、多様なリスク指標等によってリスク管理を行っている。したがって、VaRのテイル・リスクの問題はこうしたデスク・レベルで従来から行われているリスク管理により十分対応できる」との考え方もあると思われる。

この考え方の妥当性は、「デスク・レベルでのテイル・リスクの小ささが、全社ベースでのテイル・リスクの小ささを意味するか否か」に依存する。すなわち、仮にデスク・レベルでのリスク管理により個別ポジションのテイル・リスクが抑えら

れるとしても、合算したポジションのテイル・リスクが大きくなるとすれば、デスク・レベルでのリスク管理を行っても、全社的な観点に立てば、テイル・リスクは抑えることができないことになる。

これに対しては、期待ショートフォールの劣加法性を手掛かりとして1つの考え方を示すことができる。これまで述べてきたように、期待ショートフォールはテイル・リスクも織り込んだリスク指標の1つであり、テイル・リスクの1つの代理変数と考えることができる。一方、期待ショートフォールは一般的に劣加法性を満たすことから、全体のポジションの期待ショートフォールは、個別ポジションの期待ショートフォールの和を上回ることはない。このことから、全体のポジションのテイル・リスクは個別ポジションのテイル・リスクの和を上回ることはないと考えることができる。したがって、デスク・レベルで個別ポジションのテイル・リスクを適切に管理することは、全社レベルでもテイル・リスクが適切に管理されることにつながるため、デスク・レベルで従来から行われているリスク管理により全社レベルのテイル・リスクは管理できるとの結論が示唆される。このことは、VaRなどの単一のリスク指標のみならず、ポジションの損益曲線図などリスク・プロファイルの詳細なモニターによりデスク・レベルで肌目細かいリスク管理を行う必要性と有効性を示唆している。

（5）与信ポートフォリオにおける与信集中管理の重要性

4章2節の例で述べたように、与信ポートフォリオでは、与信集中がテイル・リスクの主因となっていた。また、Credit Suisse Financial Products［1997］でも、VaRの信頼区間外のリスク管理については、「シナリオ分析によって計量化を行い、与信集中度合いに制限を設けることによってコントロールすべき（quantified using scenario analysis and controlled with concentration limits）」としている。したがって、与信ポートフォリオ管理でVaRを用いる際は、VaRが与信集中リスクを十分に捉え切れない場合があり得ることに十分に注意を払い、VaR以外に与信の極端な集中を回避する管理体制を構築する必要がある。

7．おわりに

本稿では、期待ショートフォールとの比較によりVaRのリスク指標としての妥当性を検討し、VaRの問題点として最も重要なのは、VaRが信頼区間外の損失を把握できない点であることを指摘した。こうした問題点は、①VaRがミスリーディングな情報を投資家に与える可能性があること、②この場合、VaRによるリスク管理は、信頼区間外における損失がより大きくなるポジションをとるインセンティヴを合理的投資家に与える可能性があること、といった形（テイル・リスク）でリスク管理の失敗につながることを示した。一方、期待ショートフォールにはこうした問題が

発生する可能性は小さく、VaRに比べて概念上優れたリスク指標であることを示した。しかしながら、今のところ期待ショートフォールの算出方法やバックテスティング方法の十分な検証が進んでいないことから、今後も当面はリスク管理実務においてVaRが中心的役割を果たしていくと考えられる。VaRを用いてリスク管理を行う際は、オプションを含むポートフォリオおよび与信ポートフォリオなどVaRの問題点が顕著となる状況に注意を払い、①デスク·レベルでの肌目細かいリスク管理、②与信集中度合いの把握・制限などの補完的対応を図ることによりリスク・プロファイルの把握に努めることが重要である。

今後の研究課題としては、①期待ショートフォール推計値の安定性の検証、②バックテスティング手法の確立のほか、③どのような金融資産ポートフォリオにVaRに基づくリスク管理を適用した際にテイル・リスクが顕現化するのかを明確にすることが挙げられる。テイル・リスクが発生するような損益額分布の特性が事前にわかっていれば、この部分にVaRに基づくリスク管理と何らかの補完的な管理（期待ショートフォールの計測、ポジション・リミット等）を組み合わせることで、テイル・リスクを適切に管理することができると考えられる。4章では簡単なモデルを手掛かりとして、小さい確率で大きな損失が発生するような資産が投資機会として存在し、「裾の操作が可能」な場合にテイル・リスクが顕現化することを示したが、実務上あるいは理論上テイル・リスクについてさらに詳しく考察するためには、数学的により一般化して検討することが必要であると考えられる。

参考文献

池田昌幸、『金融経済学の基礎』、朝倉書店、2000年

金融監督庁・FISC、「リスク管理モデルに関する研究会報告書」、1999年

竹内 啓、『数理統計学』、東洋経済新報社、1963年

日本銀行金融研究所、「FEワークショップの模様 ――リスク計量に関する新たな取り組み――」、『金融研究』第19巻第3号、日本銀行金融研究所、2000年、79〜102頁

BIS・グローバル金融システム委員会、「大規模金融機関におけるストレステスト：ストレステストの現状とテスト結果の集計に関する論点」、2000年

森本祐司、「金融と保険の融合」、『金融研究』第19巻別冊第1号、日本銀行金融研究所、2000年、289〜342頁

Ahn, D, J. Boudoukh, and M. Richardson, “Optimal Risk Management Using Options,” *Journal of Finance*, Vol. 54, No. 1, February 1999, pp. 359-375.

Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath, “ Thinking Coherently,” *Risk*, Vol. 10, No. 11, November 1997, pp. 68-71.

———, and ———,“Coherent Measures of Risk,” *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3, July 1999, pp. 203-228.

Basak, S., and A. Shapiro, “ Value-at-Risk Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices,” working paper, The Rodney White Center for Financial Research, 1999.

Credit Suisse Financial Products, *Credit Risk*$^{+}$: *A Credit Risk Management Framework*, 1997.

Danielsson, J., “ The Emperor has no Clothes: Limits to Risk Modelling,” Working Paper Series W00:04, Institute of Economic Studies, University of Iceland, June 2000.

Embrechts, P., A. McNeil, and D. Straumann “Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls,” Preprint, ETH Zürich, 1999.

Fishburn, P. C., “Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns,” *American Economics Review*, Vol. 67, No. 2, March 1977, pp. 116-126.

Greenspan, A., “Remarks at the 36th Annual Conference on Bank Structure and Competition,” Federal Reserve Bank of Chicago, 2000.

Kim, J., and J. Mina, *RiskGrades Technical Document*, RiskMetrics Group, May 2000.

Klüppelberg, C. and R. Korn, “Optimal Portfolios with Bounded Value-at-Risk,” Working Paper, Munich University of Technology, 1998.

Lotz, C. M. J., “Optimal Shortfall Hedging of Credit Risk,” Working Paper, Faculty of Economics, University of Bonn, 1999.

Neftci, S. N., “Value at Risk Calculations, Extreme Events, and Tail Estimation,” *Journal of Derivatives*, Spring 2000.

Pflug, G. C., “Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk,” *Probabilistic Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 2000, pp. 278-287.

Rockafeller R. T. and S. Uryasev, “Optimization of Conditional Value-at-Risk,” *Journal of Risk*, Vol. 2, No. 3, Spring 2000, pp. 21-41.

Rootzén, H., and C. Klüppelberg, “A Single Number Can’t Hedge Against Economic Catastrophes,” Working Paper, Munich University of Technology, 1999.

Scaillet, O., “Nonparametric Estimation and Sensitivity Analysis of Expected Shortfall,” Working Paper, IRES, 2000.

Ulmer, A., “Picture of Risk,” RiskMetrics Group, 2000.