

# モデル・リスクとそれへの対応

かとうとしやす よしぼとしなお  
加藤敏康 / 吉羽要直

## 要 旨

本稿では、モデル・リスクをプライシング・モデルの場合とリスク計測モデルの場合について分け、プライシング・モデルでは、「市場価格を的確に表現できないモデルや市場の主流ではないモデルを使うことによって、損失を被るリスク」、リスク計測モデルでは、「将来被る損失の可能性を誤って評価するリスク」と定義する。その上で、具体例や数値計算例を用いて、モデル・リスクの源泉を探り、対応策を検討する。

モデル・リスクの源泉としては、プライシング・モデルについては、モデルの仮定の誤り、パラメータ推定誤差、離散化等によって生じる誤差、市場データの誤差等が挙げられる。一方、リスク計測モデルについては、モデルで仮定されている分布と実際の分布との乖離、モデル全体のフレーム・ワークに関するロジックの誤り等が挙げられる。

モデル・リスクへの実務的な対応として、定性的な面では、管理体制（組織・権限・人材等）の強化が挙げられる。また、定量的な対応としては、プライシング・モデルでは、異なるモデルによるプライシングの格差を引当金として計上すること、リスク計測モデルでは、リスク・ファクターの変動にさまざまなパターンを想定したシナリオ分析を行うことやシナリオ分析で得られた情報を基にポジション・リミットを設定すること等が考えられる。

キーワード：モデル・リスク、プライシング・モデル、リスク計測モデル、管理体制、引当金、シナリオ分析、ポジション・リミット

本稿は、2000年1月から2月にかけて日本銀行で開催された「リスク計量に関する新たな取り組み」をテーマとする研究ワークショップへの提出論文に加筆・修正を施したものである。提出論文は加藤が日本銀行金融研究所研究第1課に在籍していたときに書かれたものである。森平爽一郎教授（慶應義塾大学）をはじめ、同ワークショップ参加者から貴重なコメントを多数頂戴したことを記して感謝したい。ただし、論文の内容や意見は筆者個人に属し、日本銀行または現在筆者が所属する機関の公式見解を示すものではない。

加藤敏康 東京三菱銀行 市場リスク管理部（E-mail: toshiyasu\_kato@btm.co.jp）

吉羽要直 日本銀行 金融研究所 研究第1課（E-mail: toshinao.yoshiba@boj.or.jp）

## 1. はじめに

近年の金融派生商品の発達は目覚ましいが、本邦でも金融ビッグ・バンを迎え今後新商品開発ラッシュが始まると想像される。複雑な金融商品はその評価やヘッジ、リスク計測といったリスク管理に高度なファイナンス工学の知識が求められ、商品の多様化やそれに伴う新しい市場の形成とともに管理ツールであるプライシング・モデルやリスク計測モデルも複雑なものとなってきた。こうした中、いくつかの大手金融機関が相次いでそうした複雑なモデルを使用したことに伴う損失を計上しており、モデルを利用することに伴う各種のリスクへの注目度が高まっている。

一般に、モデルを利用することに伴うリスクには多様な形態がありうる<sup>1</sup>。しかし、本稿では、モデル・リスクを、プライシング・モデルでは「市場価格を的確に表現できないモデルや市場の主流ではないモデルを使うことによって、損失を被るリスク」、リスク計測モデルでは「将来被る損失の可能性を誤って評価するリスク」と定義する。このため、市場価格の誤入力や、モデル開発段階のソフトウェアのバグなどはモデル・リスクからは除外する。

モデル・リスクの発生原因としては、ボラティリティ・スマイル（以下スマイル）や原資産価格分布の扱いが広く論じられている<sup>2</sup>。例えば、オプションの代表的なプライシング・モデルであるブラック＝ショールズ・モデル<sup>3</sup>（以下BSモデル）を考えてみると、原資産価格の変動が対数正規過程に従うという仮定を置いているが、実際の市場価格の変動は必ずしも対数正規過程に従っていない。

しかし、加藤・吉羽 [1999] が指摘したように、多くの実務家はBSモデルをその限界を承知しつつプライシング・ツール等として利用しているのが実態である。また、新金融商品の開発やリスク管理上で、モデルは必要不可欠なものとなっており、もはやモデル・リスクがあるからといってモデル自体を利用しないという選択肢は取りえなくなっている。

本稿の目的は、モデル・リスクが何に起因するのかを明らかにするとともに、その対応策を考察することである。本稿の構成は次のとおりである。まず2章では、モデル・リスク顕在化の具体例を示す。次に実際の数値例として、3章では長期為

1 例えば、Derman [1996] は、モデル開発におけるリスクとして次のようなものを挙げている。

- ・ 誤ったモデルを構築するリスク
- ・ モデルの発想は正しいが評価式を導く段階で誤るリスク
- ・ 誤った近似方法を使うリスク
- ・ ソフトウェアにバグが残るリスク
- ・ 誤ったデータを使用してしまうリスク

2 Simons [1997] は、原資産価格の分布やスマイルの評価がリスク管理上極めて重要であることを、Jorion [1999] は、Long-Term Capital Management（以下LTCM）の破綻は原資産価格の変動に不適当な分布を仮定したことが一因であると指摘している。

3 ブラック・ショールズ＝モデルの詳細は補論1を参照。

替オプションを、4章では株価バリア・オプションを、5章では金利におけるストラングル・ショート戦略を、おのおの扱う。そして6章では、ここまでで得られたインプリケーションを基にモデル・リスクの管理方法はどうかを検討する。最後に7章で、簡単な結びを述べる。

## 2. モデル・リスクの顕在化事例

モデル・リスクが顕在化するのとはどのような場合であろうか。具体例は、金融機関が内部で使用しているプライシング・モデルを修正し、時価を再評価した時点で損失が発生する場合であろう。市場からはこうしたモデル・リスクが顕在化した事例が聞かれる。そうした事例で何が原因でモデル・リスクが顕在化するに至ったかの詳細は不明であるが、本章では、報道された内容等をベースに、これらの事例の概要を紹介する<sup>4</sup>。

### (1) インデックス・スワップの例

インデックス・スワップとは、利払いの指標がLIBOR以外のスワップの総称であり、日経平均株価指数連動スワップなどもインデックス・スワップのカテゴリーに入る。インデックス・スワップは、対象となるインデックスに合わせてポジション管理やリスク管理を行う必要があり、さまざまなインデックスに対する理解やインデックス・スワップの市場構造の知識が欠かせない。

ある金融機関は、特殊なインデックス・スワップのポジションを多量に保有した。当時、市場における同スワップの評価には、数種類のモデルが使用されていた。当該金融機関は、その中でも主流と思われるモデルで取引を開始した。しかし、同スワップ市場が縮小していく過程で、いくつかの金融機関が市場から撤退し、その後は、一部の金融機関の使用する別のモデルが市場で支配的となっていった。

インデックス・スワップのポジションを多量に保有しながら、同スワップのプライシング・モデルの市場調査が遅れていた当該金融機関は、市場で主流となっているモデルの変化に気付かないまま、ポジションを維持していた。こうした結果、新モデル導入後の時価評価に伴い数十億円相当の損失を計上することとなった。

### (2) マルク・キャップの例

金利オプションの一種であるキャップ<sup>5</sup>は、一般的なOTC商品であり比較的流動

4 ここで取り上げる事例は、あくまでモデル・リスクの具体的なイメージをつかむことを目的に掲げたものであり、内容には筆者の推測も含まれている。

5 金利キャップ、スキュー構造等については加藤・吉羽 [1999] を参照。

性も高い。ブローカー・スクリーンには特定の行使価格・期間のキャップについて、キャップ価格からBSモデルで計算されるインプライド・ボラティリティが表示されている。そのボラティリティには、期間別・行使価格別にスキュー構造（以下スキュー）がある。任意のキャップの時価は、通常は市場で観測されるスキューから当該キャップの期間・行使価格に相当するボラティリティを推定（内挿）した上で計算される。

ある金融機関では、マルクのキャップ取引を行っていた。当時マルク・キャップ取引は、円・キャップに比べて、ブローカー・スクリーンでボラティリティを確認できる期間・行使価格は少なく、特に行使価格金利と市場金利水準がかけ離れているキャップ（以下ファー・アウト・ストライク）のボラティリティの推定は困難であった。

当該金融機関では内部のキャップ用プライシング・モデルとしてBSモデルを採用しており、ファー・アウト・ストライクのボラティリティの推定にはあえて行使価格に最も近いブローカー・スクリーン上の価格のボラティリティで代用していた。当然市場の実勢価格と評価価格に乖離が生じるため、一部のキャップ・ディーラーがこの乖離に目を付けて、積極的にファー・アウト・ストライクを取引し、内部管理上の評価益を計上していた。

しかし、当該金融機関では、市場価格との整合性確保のためのプライシング・モデルの改良が遅れたため、上記キャップ・ディーラーの取引が継続されたことによる内部管理上の評価益の蓄積が進み、結局内部モデルの改良が終わった時点で数百億円にも上る損失を計上することとなった。

### （3）LTCM・クレジット・スプレッドの例

LTCMは、エマージング・ボンド、ローン等を組み合わせたハイレバレッジのクレジット・スプレッド・ポジションを保有していた。しかし、スプレッドが縮小すると利益が出るポジションを取っていたため、平成10年のロシア危機によるクレジット・スプレッドの急拡大によって大きな損失を被った。

大きな損失が発生した理由として、流動性の枯渇でヘッジ取引やキャンセル取引ができなかったことやそもそも流動性を勘案したモデルを構築していなかったことが挙げられる。しかし、その他にもリスク計測に不可欠な原資産価格の分布に関する仮定が誤っていたことや原資産価格分布の推定に使うデータが誤っていたこと、つまりリスク計測モデルそのものも理由の1つであるとする見方もある（Jorion [1999]）。

### （4）まとめ

以上のモデル・リスクの例においては、  
・市場の流動性低下やプライシング・モデルの陳腐化



図1からわかるとおり、期間1年超のボラティリティは公表されていない。これは、通常為替オプションでは、期間1年超の取引はほとんどなく、取引されても少額であるためである。これには、以下のような背景がある。まず、オプションは、長期になるほどボラティリティに対するプレミアムの感応度が大きくなるので、短期オプションに比べてハイリスクの商品である。また、長期オプションは、流動性が小さいため迅速にクローズすることが必ずしもできない場合がある。さらに、Derman [ 1996 ] も指摘しているように、BSモデルにおける金利やボラティリティが一定との仮定は、特に取引対象期間が長期の場合には、図1からも明らかなように現実的ではないため、長期為替オプション評価は難しく、モデル・リスクが表れやすい。

### (1) アミン = ジャロー・モデル<sup>7</sup>

Amin and Jarrow [ 1991 ] は、2カ国の金利と同為替レートを変数として扱うことができる為替オプション・モデルを導出した（以下AJモデル）。表1は、AJモデルとBSモデルを使って1年超の円・ドル長期為替オプション（コール・オプション）のプレミアム（想定元本105.71円/\$）を比較したものである（平成11年10月15日時点<sup>8</sup>）。なお、表1の円・ドル為替レートとドル金利の相関係数はヒストリカル・データから求めた値（0.05）を使った。

表1の列項目はオプション満期までの期間を、行項目は行使価格を表しており、例えば、行使価格105.71円/\$（平成11年10月15日時点のスポット・レート）、期間5年のプレミアムは、AJモデル、BSモデルで、それぞれ5.48円/\$、5.49円/\$となっている。最大の差は0.08円/\$（行使価格158.57円/\$、期間5年）で、プレミアム（0.87円/\$、0.95円/\$）の約1割であるが、想定元本に対する割合は0.076%にすぎず、この程度の差はボラティリティのビッド・オファー・スプレッド内に収まる。つまり、2つのモデルによる計算値はほぼ等しいことになる。

次に、行使価格を105.71円/\$、期間を5年に固定し、円・ドル為替とドル金利の相関係数<sup>9</sup>の水準によって、オプションのプレミアムがどう変化するかを示したものが図2である。

7 アミン = ジャロー・モデルの詳細は補論2を参照。

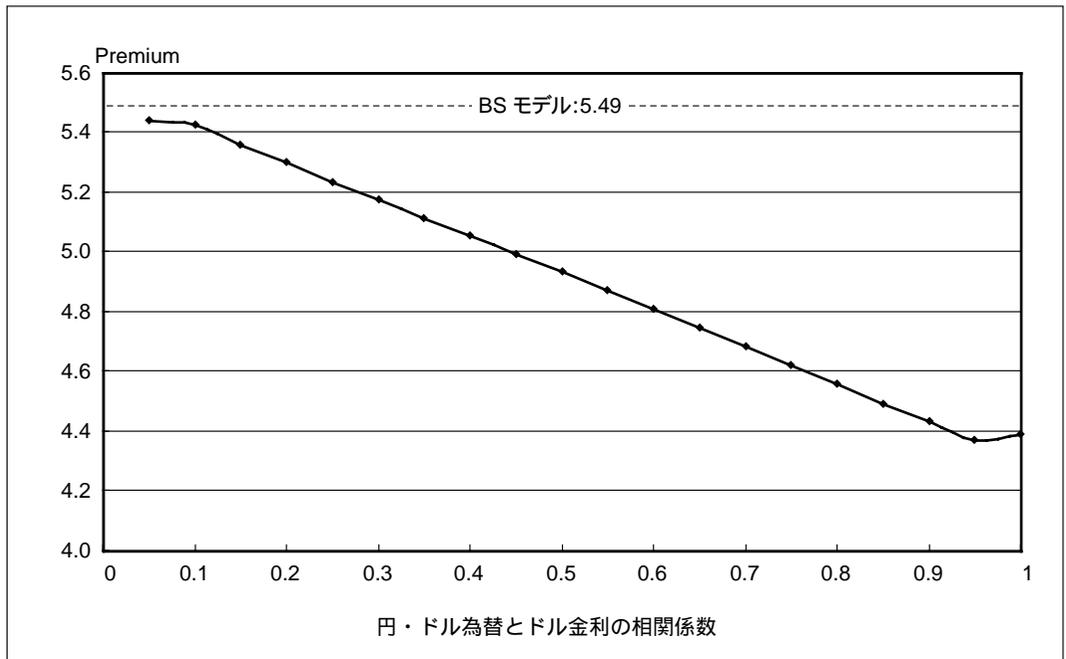
8 分析に使用したデータは、平成11年10月15日の円・ドル為替レート、ドル金利や円金利の金利期間構造、平成10年10月2日から平成11年10月15日までの円・ドル為替レート、ドル金利や円金利の分散・共分散（約1年間のヒストリカル・データ）である。ここで、ボラティリティはヒストリカル・ボラティリティで代用した。本来インプライド・ボラティリティを利用することが望ましいが、長期為替オプションは流動性が低くデータ取得が困難であること、また本章では、モデルによる計算結果の違いに焦点を当てていることから、あえてヒストリカル・ボラティリティを用いることとした。

9 プレミアムは、与えられた相関係数からAJモデルのパラメータを計算した上で、算出した。

表1 AJモデルとBSモデルのプレミアム（円/\$）比較  
（平成11年10月15日の例：コール・オプション）

行使価格	AJモデル					BSモデル				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
158.57	0.05	0.26	0.50	0.70	0.87	0.05	0.27	0.52	0.75	0.95
148.00	0.14	0.50	0.83	1.08	1.27	0.14	0.51	0.85	1.13	1.34
137.43	0.37	0.95	1.35	1.64	1.85	0.37	0.96	1.38	1.68	1.91
126.86	0.95	1.75	2.20	2.48	2.67	0.96	1.76	2.22	2.52	2.71
116.29	2.28	3.14	3.52	3.73	3.84	2.28	3.15	3.54	3.75	3.86
105.71	4.95	5.45	5.55	5.54	5.48	4.96	5.46	5.57	5.56	5.49
95.14	9.67	9.10	8.57	8.15	7.78	9.68	9.11	8.59	8.16	7.78
84.57	16.80	14.46	12.92	11.82	10.95	16.80	14.47	12.93	11.82	10.94
74.00	25.95	21.70	18.84	16.80	15.23	25.95	21.71	18.86	16.82	15.23
63.43	36.16	30.61	26.44	23.31	20.86	36.16	30.62	26.45	23.33	20.86
52.86	46.67	40.59	35.47	31.34	27.95	46.67	40.59	35.48	31.35	27.96

図2 AJモデルにおける相関係数とプレミアムの関係  
（行使価格105.71円/\$、期間5年、コール・オプション）



これから、AJモデルの場合、相関係数が1に近づくほどプレミアムは減少し、相関係数が0.05の時と1の時とではプレミアムに2割以上の違いがあることがわかる（想定元本比で1%弱の差）。

上述のように、表1では、円・ドル為替レートとドル金利の相関係数を0.05と固定して計算したため、AJモデルとBSモデルの計算値に大きな差が出なかった。しかし、BSモデルでは相関関係を織り込んでいないため、プレミアムは一定となってしまう（図2）。つまり、長期為替オプションにBSモデルを用いると、為替レートと金利の相関係数の水準によっては、大きなミスプライスを生じさせる危険性があることになる。

## （2）インプリケーション

AJモデルは、金利やボラティリティの期間構造、金利や為替レートの相関、およびそれらの時間変動を記述した相対的に精緻なモデルである。従って、AJモデルはBSモデルに比べて、より現実に即した仮定を基に構築されていると考えることができる。このため、長期為替オプションの評価には、BSモデルよりも、AJモデルのようなモデルを利用することが望ましい。

ただし、長期為替オプションの場合、市場価格を入手することが困難である以上、そのモデルで評価した時価で実際に取引できるかどうかはわからない。また、パラメータの推定を誤ることでミスプライシングにつながる危険性も高まる。

## 4. 株価バリア・オプション

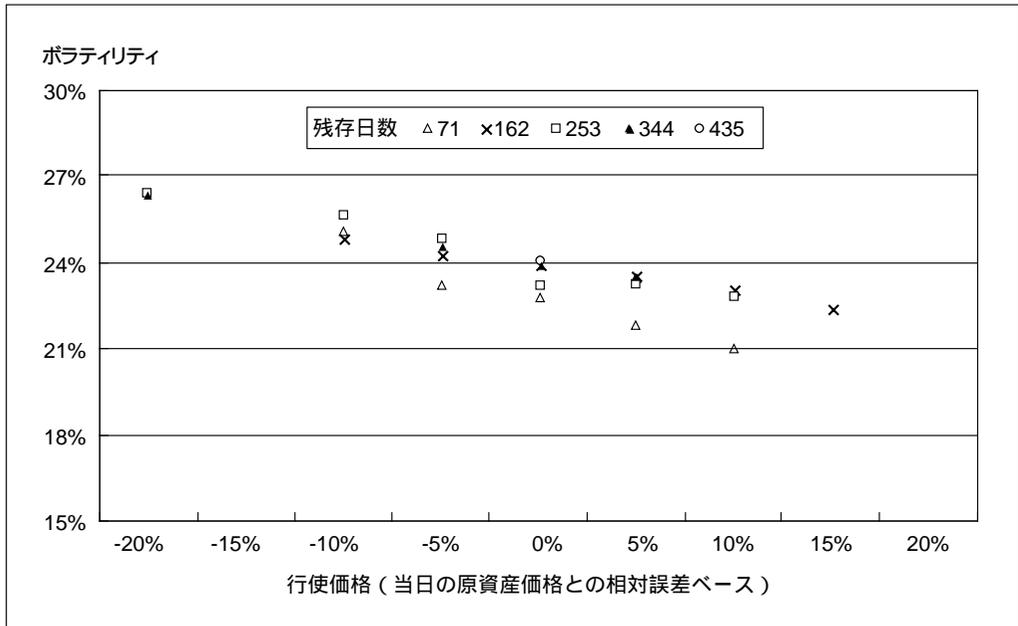
本章では、構造が複雑なエキゾティク・オプションの1つであるバリア・オプション（株価バリア・オプション）を取り上げる。

株式は、一般的に為替レートや債券に比べてボラティリティが大きく、またスキューやスマイルといったボラティリティ構造も明確に表れる。図3に、日経平均株価指数OTCオプションのボラティリティ構造（5種類の残存日数）を示す<sup>10</sup>。

図3の横軸は、当日の原資産価格とオプションの行使価格の相対誤差（%表示）、縦軸はその行使価格でのプレーンなコール・オプションやプット・オプション（以下ノーマル・オプション）に適用するボラティリティである。一般に株式オプションでは、行使価格が小さいオプションほどボラティリティが高く、行使価格が高いオプションほどボラティリティが低いというスキューを持つ。また、満期が近いオプションの方が、そうでないオプションよりもスキューの傾きが大きく、図3にもそうした構造があることがわかる。

10 OTC株価指数オプションのインディケーションはプレミアムで表示されている。図3では、トラディショナル社のインディケーションにBSモデルを用いてインプライド・ボラティリティを計算した。

図3 ボラティリティ・スキュー（平成11年9月30日の例）



株価指数オプションの時価評価やリスク管理を行うためには、こうした市場データと整合的なモデルを使う必要があるが、実際には為替オプションの場合と同様にBSモデルが使われることが多い。これは、市場で取引されているオプションのほとんどはノーマル・オプションであるという背景に基づくものである。

しかし、バリア・オプションのようなエキゾティク・オプションの場合には、ノーマル・オプションのボラティリティをそのまま適用して時価評価やリスク管理を行うことは明らかに危険である。以下では、数値計算手法の1つであるインプライド・バイノミアル・ツリー・モデル（格子法の種類）によるバリア・オプションのプライシングを行い、その結果を基に考察を行う。

### (1) インプライド・バイノミアル・ツリー・モデル<sup>11</sup>

インプライド・バイノミアル・ツリー・モデル（以下IBTモデル）は、図3のようなボラティリティのスキューや期間構造をプライシングにより的確に取り込むために構築されたモデルである。本章の数値計算例に採用したIBTモデルは、Derman and Kani [ 1994 ] によるモデルである<sup>12</sup>。図4に、通常の2項格子モデルとIBTモデルの格子構造を示す。

11 インプライド・バイノミアル・ツリー・モデルの概要は補論3を参照。

12 Derman and Kani [ 1994 ] のモデルは、インプライド・ボラティリティ・ツリーと呼ばれることもある。インプライド・ボラティリティ・ツリーについては、Dupire [ 1994 ] も参照。

図4 格子構造比較（概念図）

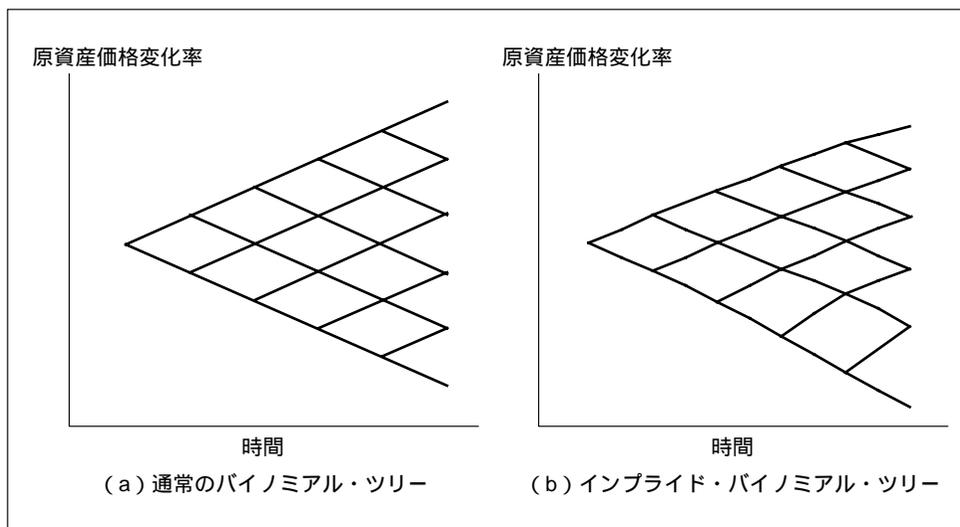


図4 (b)の2項格子 (IBT) は、図4(a)のCox, Ross and Rubinstein [ 1979 ] が導入したバイノミアル・ツリーに比べて格子が歪んでいる。IBTでは、通常のバイノミアル・ツリーと同様にリスク中立性を前提にしながらも、市場データとの整合性をより確保させるため格子を歪ませているのである。

このIBTモデルを利用して、バリア・オプションの一種であるダウン・アウト・プット・オプションを分析する。ダウン・アウト・プット・オプションは満期までに一度でもバリア価格（以下ノックアウト価格）に到達した場合に権利（原資産を売る権利）が消滅<sup>13</sup>してしまうエキゾティク・オプションの一種である。ダウン・アウト・プット・オプションは、原資産価格に対するオプション価格の変化率が、ノックアウト価格付近で大きくなるという特徴を有する。

図5に、ダウン・アウト・プット・オプションをブラック＝ショールズ・タイプ（以下BSタイプ）の解析解<sup>14</sup>とIBTモデルでおのおの計算したプレミアムを示した。原資産価格は17,605.46円で、ノックアウト価格は15,000円である。なお、図中のBSタイプ（ストライク）は、行使価格でのボラティリティをBSタイプの解析解に代入して計算したプレミアムであり、BSタイプ（ノックアウト）はノックアウト価格でのボラティリティで同様に計算したプレミアムである。

13 バリア価格に到達したか否かについては、日中の株価変動で判断するタイプ、終値のみで判断するタイプや週末値で判断するタイプ等がある。

14 BSタイプの解析解とは、ここではBSモデルと同様の枠組みで計算されたオプション・モデルのことを指す。詳細は補論1を参照。

図5 ダウン・アウト・プット・オプションのプレミアム比較(1)(平成11年9月30日の例)

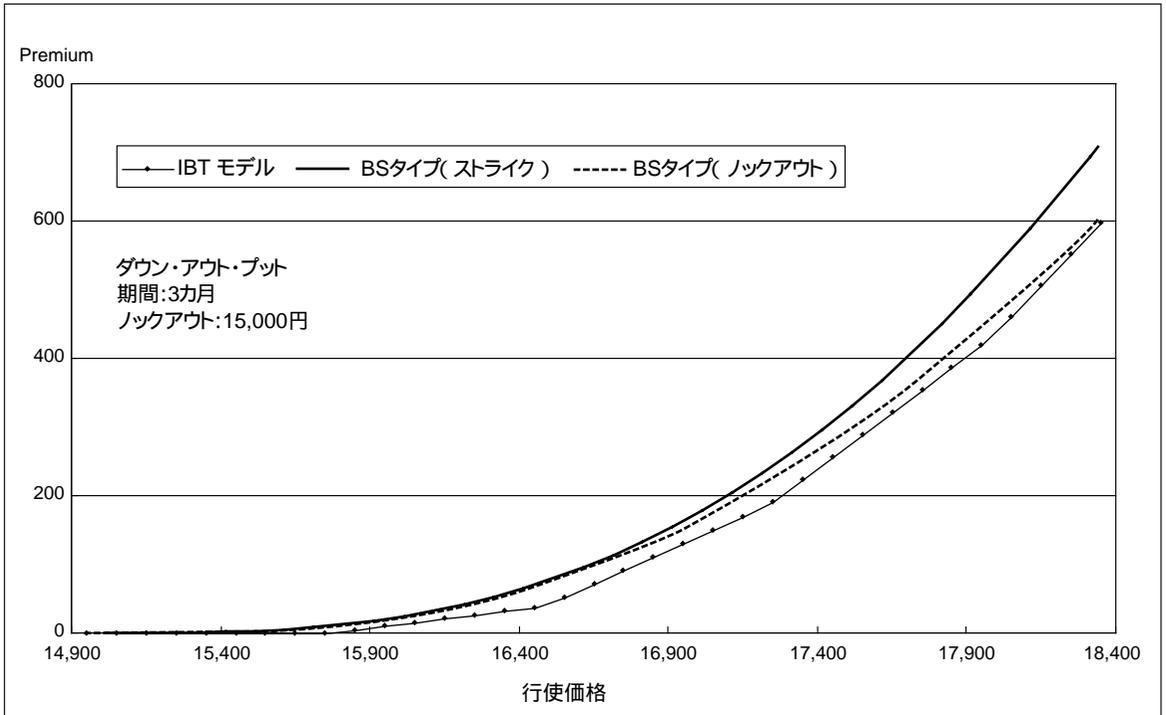


図5からIBTモデルで算出されたプレミアム<sup>15</sup>は、BSタイプ(ノックアウト)のプレミアムよりも小さく、行使価格が高くなるほど、BSタイプ(ノックアウト)のプレミアム水準に近づいていくことがわかる。これは、IBTモデルでは、BSタイプ(ノックアウト)に比べて、より原資産価格がノックアウト価格に到達する可能性を評価していることになり興味深い。

## (2) IBTモデルの問題点

上述したように、IBTモデルは市場とより整合するように組み立てられているが、その取り扱いに当たってはさまざまな留意点がある。図6にIBTモデルにおける格子の分割数とプレミアムの関係を示す。

一般に格子法では、格子の分割数が少ないと計算されたプレミアムが不安定となる。図6から、ノーマル・オプション、ダウン・アウト・プット・オプションともに、分割数が大きくなるに従ってプレミアムが安定することがわかる。また、ダウン・アウト・プット・オプションは、ノーマル・オプションに比べ、プレミアムが安定化するには分割数を多くすることが必要なことがわかる。

<sup>15</sup> 本章のIBTモデルの計算では、図6で示した計算を除いて格子の分割数を30とした。

図6 分割数比較（平成11年9月30日の例）

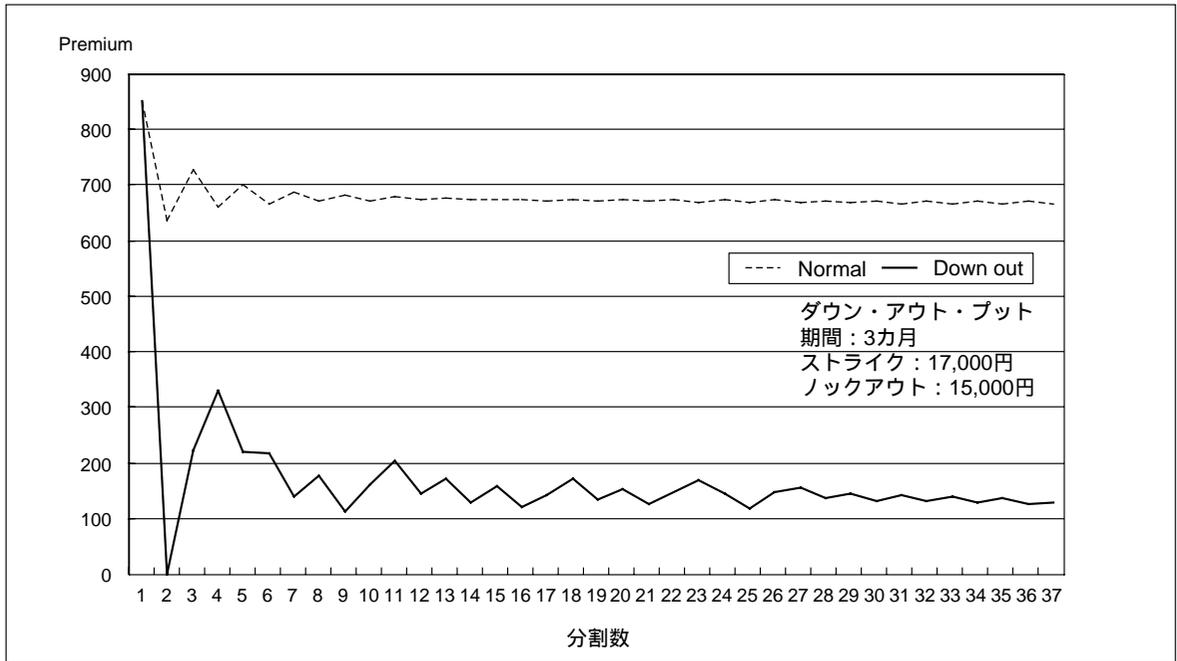
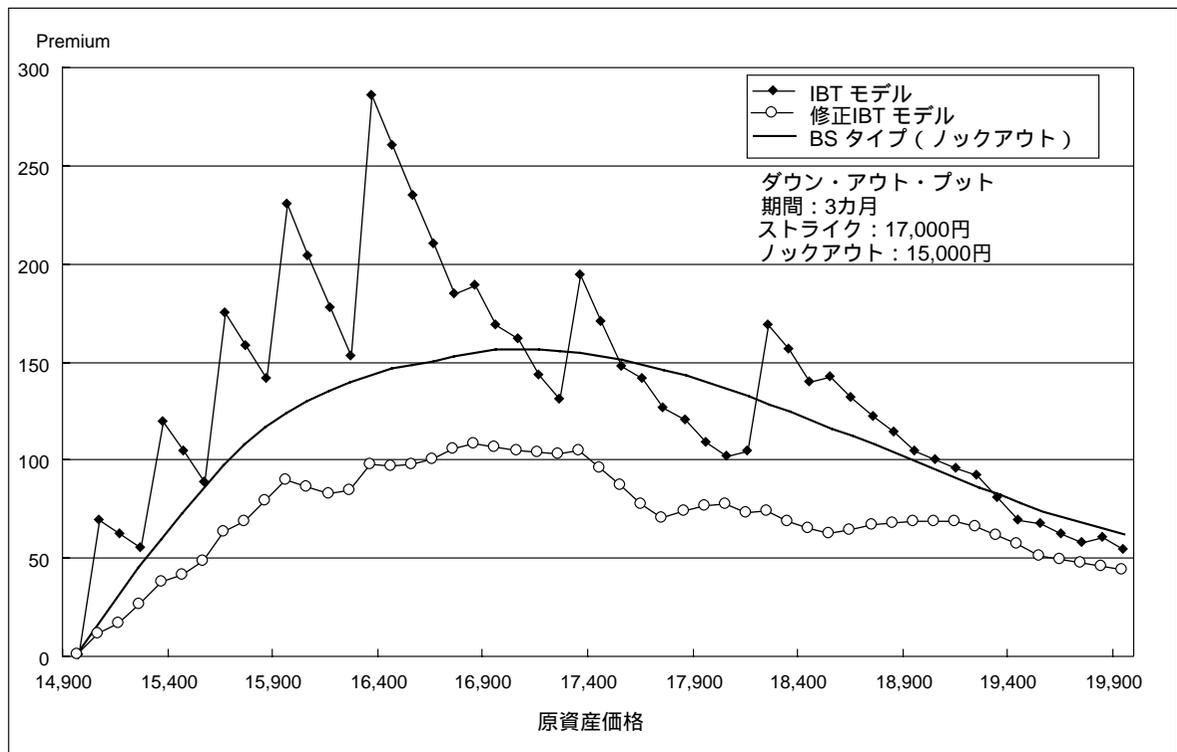


図7 ダウン・アウト・プット・オプションのプレミアム比較（2）（平成11年9月30日の例）



格子法で計算したプレミアムは、図7のように、原資産価格に対して不連続な関数となる。これは、格子法では、ダウン・アウト・プット・オプションの消滅を格子点上で判断するため、ロックアウト価格が格子点上に乗っていない場合に計算結果にブレが生じることによるものである。イン・ザ・マネーでは、特にブレが大きい傾向があることがわかる。

この問題を回避するために考案されたモデルが、図7の修正IBTモデル<sup>16</sup>である。この修正モデルでは、ロックアウト価格を挟んで隣り合う格子点それぞれをロックアウト価格とみなして計算した2種類の格子点上のオプション価格を、隣接する格子点の価格とロックアウト価格との差で線形按分することでプレミアムを近似する<sup>17</sup>。図7は、IBTモデルと修正IBTモデルで計算したダウン・アウト・プット・オプションのプレミアムを比較した図である。

図7をみると、修正IBTモデルで計算されたプレミアムは比較的滑らかであり、この点ではポジション管理上使いやすいモデルであるといえる。しかし、BSタイプ（ロックアウト）に比べると、プレミアムは $1/2 \sim 2/3$ と常に小さくなっており、この点は、図5の結果と比べても大きな乖離になっている。

以上からIBTモデルと修正IBTモデルは、構造および計算過程に、次のような特徴を持つことがわかる。

- ・ 計算結果は、BSモデルに比べて市場と整合的
- ・ 離散形式なので離散区間（分割数）に結果が左右される
- ・ 分割数を増やすと計算負荷が飛躍的に大きくなる
- ・ 市場データが少ない場合信頼性に欠ける
- ・ データ・ハンドリング負荷が高く恣意性を排除できない

### (3) インプリケーション

IBTモデルは、市場で頻繁に取引されている金融商品の価格を基に、市場と整合性の取れた時価を算出するモデルである。しかし、IBTモデルも、実際に計算を行う段階で離散化、バリア価格の調整といった近似を行っているため、必ずしも理論どおりの時価を計算できない可能性がある。

また、IBTモデルでも、各市場データを取得する時間の相違、データ表示アップデートのタイミングやビッド・オファー・スプレッド等の影響でその時点の市場実勢と整合しない時価を算出してしまう危険もある。さらに、図3から読み取れるとおり、市場データは常に広範囲に入手できるものではなく、多くの場合、補間作業が必要となる。IBTモデルでは、このデータ補間の影響をより強く受けてしまう可能性もある。

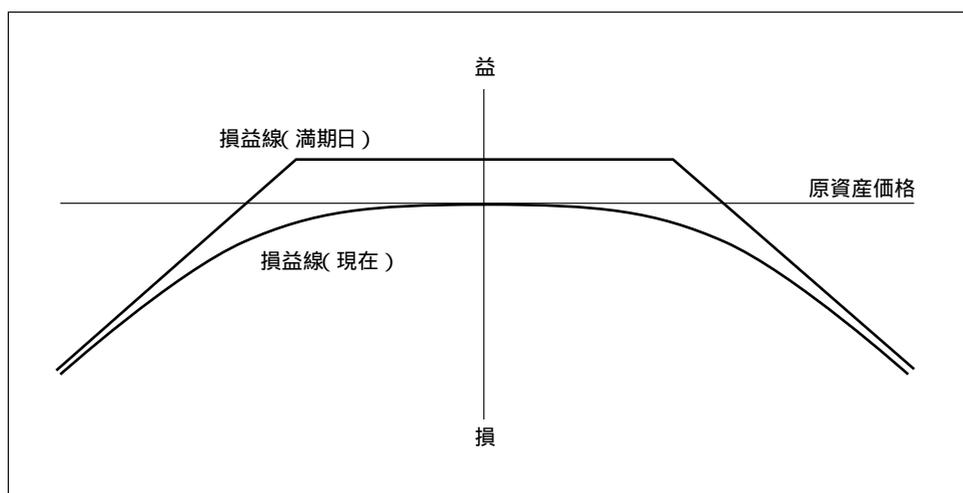
16 Derman, Kani, Ergener and Bardhan [ 1995 ] の手法を参考にした。

17 まず、ロックアウト価格を挟む格子点価格でバリアがないとして格子点上のオプション価値を計算する。次に、それぞれの格子点のオプション価値をロックアウト価格と格子点価格との距離（価格差）に応じて線形按分し、按分した両格子点上のオプション価値を合算して内側の格子点上のオプション価値とする修正方法。

## 5. ストラングル・ショート戦略

オプション戦略の1つにストラングル戦略がある。ストラングルは、行使価格の異なるコールとプットを組み合わせで作られる（同じ行使価格のコールとプットを組み合わせで作られるのがストラドルである）。一般にストラングルは、オプションの買い手は原資産価格の急激な変化に対するヘッジを目的に、オプションの売り手は原資産価格がウィンドウ（プットとコールの行使価格差で満期日に受払が生じない原資産価格の範囲）内に収まることを見越したプレミアム取得を目的に組成される。図8はストラングル・ショート・ポジションの損益図である。

図8 ストラングル・ショート



トレーダーは、顧客のヘッジニーズに応えるため、ショート・ポジションになるケースが多く<sup>18</sup>、また積極的に広いウィンドウのストラングル・ショート戦略を採用してプレミアム稼ぎを狙うトレーダーもいる。

本章では、ストラングル・ポジションのリスク計測を行い、その問題点を探る。

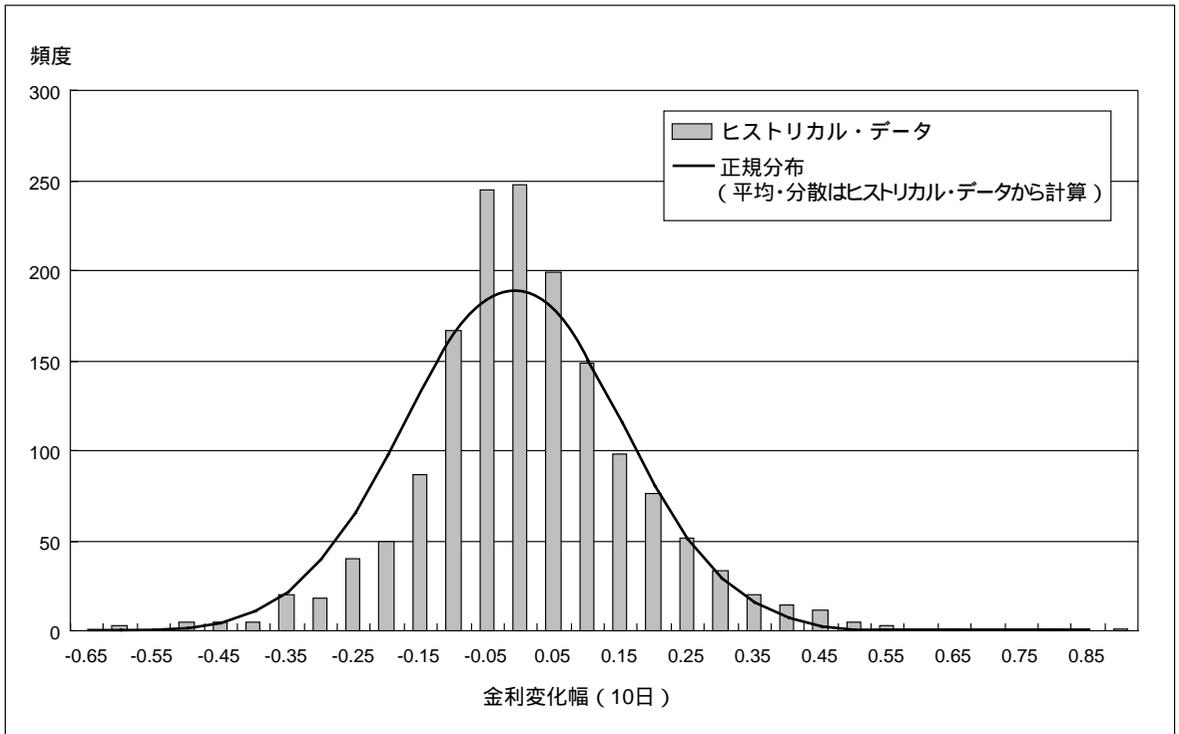
### (1) 金利分布

図9は5年スワップ・レートの10日変動ヒストグラムである。データの範囲は平成5年11月から平成11年11月の約6年間であるが、この期間の金利変動の分布は、バリュウ・アット・リスク手法（以下VaR）で一般的に利用される、正規分布と異なる

18 一般には、顧客のヘッジ・ニーズの受け手として、トレーダーがオプションのショート・ポジションを抱える場合が多い。ただし本邦では、顧客がプレミアム獲得を狙いショート・ポジションを取る場合も少なくない模様である。

る分布となっていることがわかる。この期間の分布は正規分布に比べて重心が右にシフト（歪度0.28）しており尖度が5と正規分布の3に比べ高い。また、すそ野が広く（ファット・テール）99%点が - 0.41と0.43（正規分布の99%点は $\pm 0.38$ ）となっている。

図9 5年スワップ・レートの10日変動分布（平成5年11月15日～平成11年11月25日）

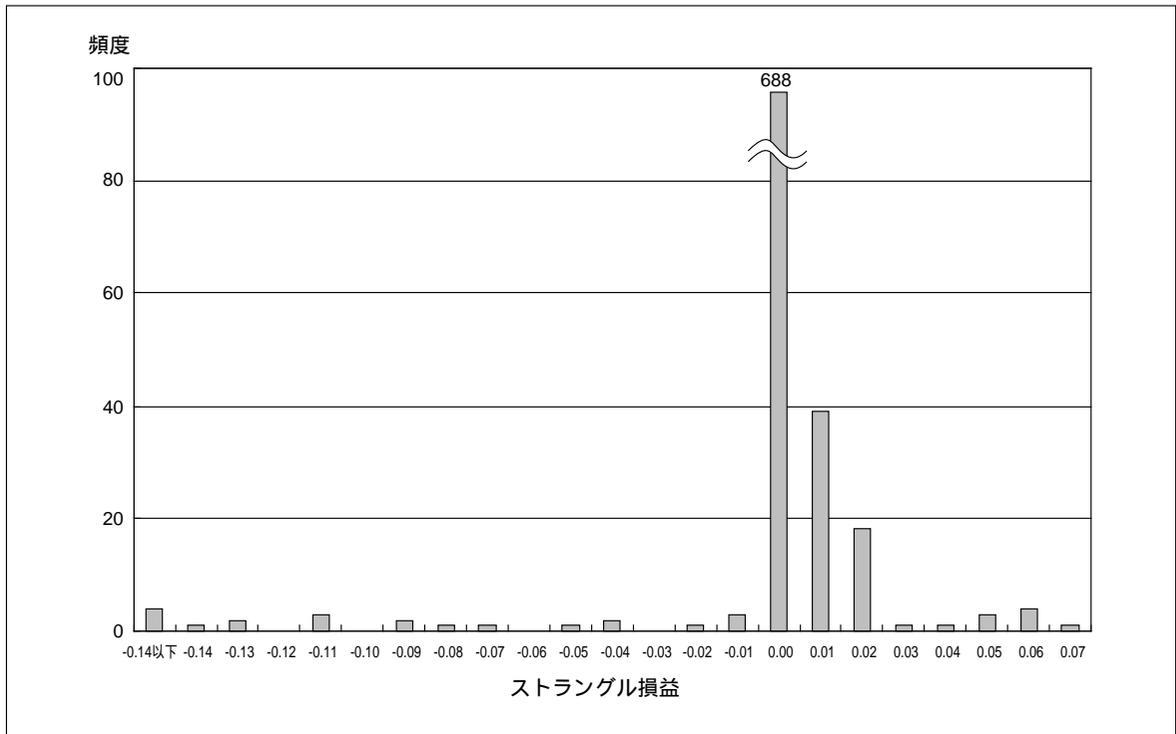


## (2) リスク量比較

ストラングル・ショート戦略の例として、5年スワップ・レートを原資産とするオプションを考える。残存10日間（営業日ベース）で現時点の金利水準から $\pm 0.30\%$ 離れた金利水準を行使価格とするコールとプットを売却し、満期まで持ち切ったとしよう。図10および表2は、平成8年下期から平成11年上期の毎営業日に同様のストラングル・ショート取引を1単位ずつ行った時の損益のヒストグラムである<sup>19</sup>。

<sup>19</sup> コール・プットともに直前の10日ヒストリカル・ボラティリティとドリフト・ゼロのBSモデルを使ってオプションが売却できたと仮定した（市場ではスマイルがあるため、さらに高いプレミアムが取得できた可能性はある）。なお、本章では、5年スワップ・レートそのものを原資産とするオプションを想定して分析を行った。

図10 金利ストラングル・ショート戦略損益（頻度分布）（平成8年10月1日～平成11年9月30日）



このストラングル・ショート戦略では、1単位当たり0.00～+0.01の利益となった日が全体の9割弱を占め、非常に狭い範囲に損益分布の大部分が集中していることがわかる。全期間累計の損益は+0.39の利益<sup>20</sup>で、半期ベースでは、平成11年上期に+0.39と最大の利益を記録、平成10年下期には後述するように - 0.63と最大の損失を被った。特に損益の変動が大きかった時期は平成10年下期であり、この時期に±0.05超の変動のほぼ全てが集中している。個々の取引で最大の損失は、同期の - 0.23であった。

20 損益の再運用は考慮していない。

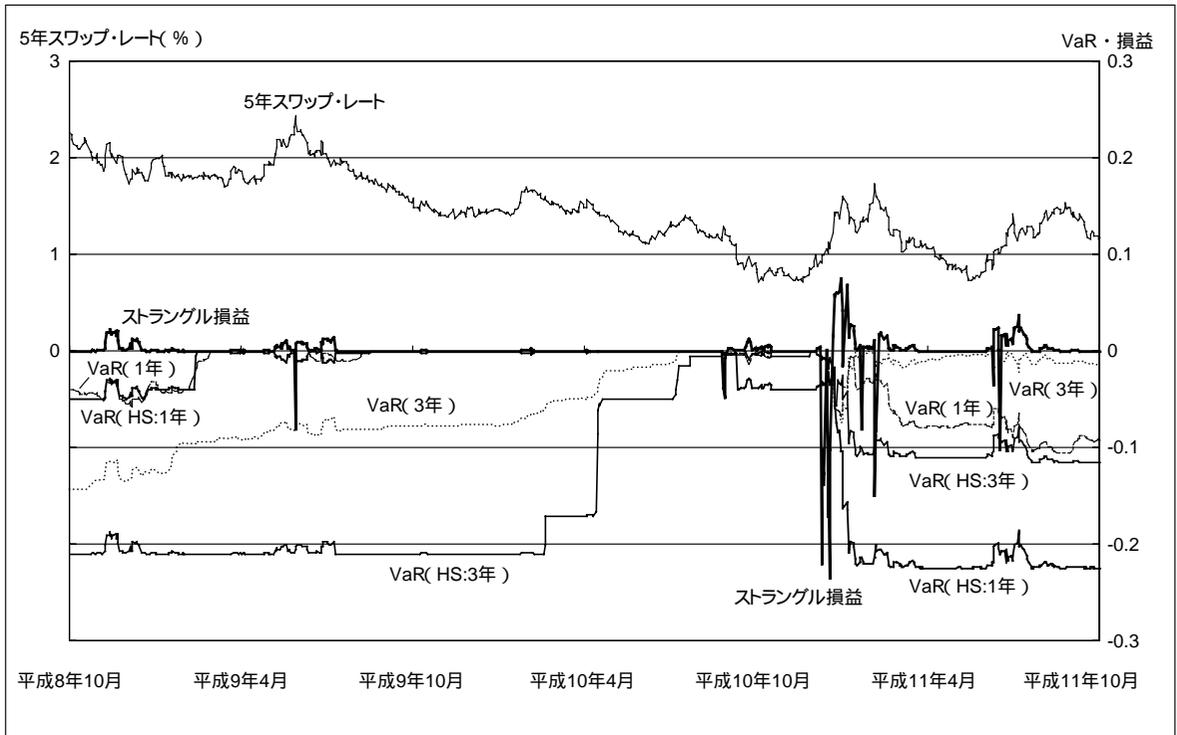
表2 金利ストラングル・ショート戦略の損益（期間別）  
（平成8年10月1日～平成11年9月30日）

データ区間	平8下	平9上	平9下	平10上	平10下	平11上	計
-0.14以下	0	0	0	0	4	0	4
-0.14	0	0	0	0	1	0	1
-0.13	0	0	0	0	2	0	2
-0.12	0	0	0	0	0	0	0
-0.11	0	0	0	0	2	1	3
-0.10	0	0	0	0	0	0	0
-0.09	0	1	0	0	1	0	2
-0.08	0	0	0	0	1	0	1
-0.07	0	0	0	0	1	0	1
-0.06	0	0	0	0	0	0	0
-0.05	0	0	0	1	0	0	1
-0.04	0	0	0	1	0	1	2
-0.03	0	0	0	0	0	0	0
-0.02	0	0	0	0	1	0	1
-0.01	0	0	1	1	1	0	3
0.00	116	121	129	121	92	109	688
0.01	8	9	0	2	10	10	39
0.02	6	0	0	0	3	9	18
0.03	0	0	0	0	0	1	1
0.04	0	0	0	0	1	0	1
0.05	0	0	0	0	3	0	3
0.06	0	0	0	0	4	0	4
0.07	0	0	0	0	1	0	1
日数	130	131	130	126	128	131	776
損益額	0.37	0.23	0.03	-0.01	<b>-0.63</b>	0.39	0.39

次に、このストラングル・ショート戦略の損益とVaRとの関係を図11に示す。

平成6年からの5年もの円スワップ・レートの動きは、平成6年にいったん上昇した後、概ね低下傾向となり、平成10年下期に反転上昇、その後は1%を挟んだ比較的狭いレンジで推移している。図11から、本章のストラングル・ショート戦略の損益は、金利の反転時期で大きく変化、中でも平成10年下期で特に大きな変動が連続していたが、それ以外の期間ではほとんど変化がないことがわかる。

図11 金利ストラングル・ショート戦略のリスク量・損益推移（平成8年10月1日～平成11年9月30日）



図中のVaRはシナリオ法とヒストリカル・シミュレーション法で計算した<sup>21</sup>。VaR(1年)とVaR(3年)は、正規分布を仮定し、それぞれ直近1年間と3年間のヒストリカル・ボラティリティ<sup>22</sup>の99%(2.33 $\sigma$ )信頼区間の Worst・シナリオで計算したものである。一方、VaR(HS:1年)とVaR(HS:3年)は、ヒストリカル・シミュレーション法の99%点を直近1年と3年のヒストリカル・データから計算したものである。5年スワップ・レートのボラティリティは、平成6年の金利反発上昇後一貫して低下したため、正規分布を仮定しているVaR(1年)とVaR(3年)は平成10年下期までに徐々に低下した。VaR(HS:3年)も変動の大きかった平成7年のデータがヒストリカル・シミュレーションに使うデータから外れたことによって、平成10年上期までに急激に低下した。平成10年下期以降は、逆に市場の変動から、各VaRは上昇し最も急激な増加をみせたのはVaR(HS:1年)であった。

平成10年下期の金利反発でストラングル・ショート戦略の損益は大きく変動したため、VaR超過の回数・幅ともに突出したものになっている(表3参照)。

21 オプションのVaRを計測する代表的な方法は、デルタ+ガンマ+ベガ法、シナリオ法、シミュレーション法である。ただし、ここでは、はVaR計測方法として問題が多いことから、を用いて分析を行った。なお、のVaR計測方法についてはハル[1998] pp.746-750を参照。

22 1年間を250日、3年間を750日として計算。

表3 金利ストラングル・ショート戦略のVaR超過回数  
(平成8年10月1日～平成11年9月30日)

リスク計測手法	データ区間	平8下	平9上	平9下	平10上	平10下	平11上	計
VaR(3年)	超過日数	0	1	0	3	13	2	19
	最大超過幅		-0.00		-0.05	-0.23	-0.09	
VaR(1年)	超過日数	0	1	0	3	12	1	17
	最大超過幅		-0.08		-0.05	-0.23	-0.03	
VaR(HS:3年)	超過日数	0	0	0	3	9	1	13
	最大超過幅				-0.05	-0.23	-0.01	
VaR(HS:1年)	超過日数	0	1	0	3	8	0	12
	最大超過幅		-0.08		-0.05	-0.20		

表3から、バーゼル銀行監督委員会による市場リスク規制（以下市場リスク規制）で求められているバック・テストを行うことができる。規制上のバック・テストでは、直近1年間の日次のトレーディング損益がVaR（信頼区間99%）を超過する回数をみる。それが4回以下の場合はグリーンゾーン、5～9回はイエローゾーン、10回以上はレッドゾーンとされている。超過回数が多いと規制上の自己資本の積み増しが求められる<sup>23</sup>。表3から、本章のストラングル・ショート戦略は平成10年下期でレッドゾーンであることがわかる<sup>24</sup>。

### (3) インプリケーション

本章では、ストラングル・ショート戦略を題材にリスク計測モデルを実証的に分析し、その問題点を呈示した。オプションは原資産価格に対し非線形なペイオフを有するため、線形なペイオフとなる場合に比べリスク計測が複雑となる。

リスク計測モデルでは、多くの場合、原資産価格の分布に正規分布や対数正規分布を仮定する。ヒストリカル・シミュレーション法においても、ヒストリカル・データと同様の分布が将来に発生するとの仮定を置いていることになる。このように、リスク計測モデルではモデルの中に仮定を置かざるをえず、仮定が実際の分布と異なるモデル・リスクは必然的に内包されている。

23 市場リスク規制では、日次の損益とVaR値を用いて、過去12カ月間のバック・テストを決算期ごとに実施することが求められている。バック・テストの結果から、マルチプリケーション・ファクターの3に加えるプラス・ファクターを判定する。バック・テストの結果が、グリーンゾーンであればプラス・ファクターは0、レッドゾーンであれば1となり、イエローゾーンは5,6,7,8,9の超過回数に応じてそれぞれプラス・ファクターが0.4,0.5,0.65,0.75,0.85となる。こうして決められたマルチプリケーション・ファクター+プラス・ファクター(3~4)に保有期間10営業日・信頼区間99%のVaRを乗じてマーケット・リスク額とする。

24 本章の分析では、10営業日の損益と保有期間10営業日のVaRを比較している。

## 6. モデル・リスクへの実務的な対応

前章までにおいては、モデル・リスクを、プライシング・モデルとリスク計測モデルで、おのおの定義した上で、その内容を検討した。その要点を整理すると以下のとおりである。

### ・プライシング・モデルのモデル・リスク

定義：「市場価格を的確に表現できないモデルや市場の主流ではないモデルを使うことによって、損失を被るリスク」

市場価格が取得できる場合は、内部のプライシング・モデルによる評価を市場価格に合わせることでリスクが顕在化する。この場合、ヘッジのズレなどの形で徐々に実現損益が蓄積していく。一方、市場価格が取得できない場合は、内部のプライシング・モデルを市場で主流なモデルに変更した時点でリスクが顕在化する。

一般的に、プライシング・モデルのモデル・リスクの源泉には、モデルの前提や仮定の誤り、デフォルト確率、相関係数などの直接観測できないパラメータ推定の誤り、離散化等の近似により生じる誤差、市場データの誤差、等が挙げられる。3章の例は、[図 3-1](#)、[図 3-2](#) に相当し、4章の例は、[図 4-1](#)、[図 4-2](#) に相当すると考えられる。

なお、モデル・リスクによる損失が発生した大部分のケースは、[図 4-1](#) のケースと考えることができ、[図 4-2](#) のケースは少数と考えられる。また、市場価格を頻繁に取得できる場合には、モデル・リスクは比較的抑制しやすいと考えられる。

### ・リスク計測モデルのモデル・リスク

定義：「将来被る損失の可能性を誤って評価するリスク」

2章(3)や5章でみたように、原資産価格分布の前提を誤ったり、保有期間や信頼区間を適切に設定しなかったことにより、VaRを正確に算出できず、予想以上に損失を被ってしまうことがモデル・リスクの例である。また、逆に、自己資本を大幅に積み増してしまうような過剰な対応もモデル・リスクが顕在化した例であると考えられる。

市場リスク量の計測で使用されているVaRモデルは、信頼区間外の損失額を測定できないなどの問題を内包している。また、リスク計測モデルでは、計算を簡略化するためのリスク・ファクターの設定や計算方法などのリスク計測モデル全体のフレーム・ワークのロジック部分もモデル・リスクの源泉となりうる。

こうしたモデル・リスクへの実務的な対応は、モデル・リスクの大きさとモデル・リスク管理に掛かるコストとのトレード・オフで決定される。例えば、モデル審査を必要以上に厳しくすれば、モデル開発セクションの新商品開発意欲がそがれるであろうし、また、ある商品について極めて少額なポジションしか造成しないの

であれば、当該商品のプライシング・モデルの検証に極端に大きなコストを掛ける必要がないという考え方もありえよう。さらに、計算負荷を考慮して、日々のリスク管理には相対的に簡便なモデルを利用し、定期的により精緻なモデルでポジションの評価やモデル自体の検証を行うような体制もありえよう。従って、モデル・リスク管理においても、最低限必要な対応策を構築した上であれば、商品、取引方針、市場やポジション額といった要素を勘案して、柔軟な運用を行うことも考えられる。

以下では、モデル・リスクの管理に最低限必要と考えられる実務的な対応方法を検討する。

## (1) モデル・リスクの管理体制

まず本節では、金融機関にとって必要と考えられるモデル・リスクの管理体制を考察する。

### ・組織・権限・人材

金融機関の経営陣は、モデル・リスクに対する十分な認識を持ち、単なる参考情報としてではなく経営判断に活かす必要がある。また、モデル使用セクション（例えばトレーディング・セクション）から独立したモデルを管理するためのセクションが必要である。モデル管理担当者には、金融機関内部で使用されている各種のモデルを調査したり、必要に応じてモデルの改良を命じることができる権限を付与しなければならない。さらに、モデル管理担当者には、モデルの本質を理解し、モデルの分析・検証を十分に行える人材を配置する必要がある。

2章(2)のマルク・キャップの例では、金融機関はごくありふれた金融商品であるにもかかわらずモデルによる損失を発生させた。この事例の場合、モデル・リスクの管理セクションに、モデルの検証を行える人材を配置し、さらにモデルを変更させる明確な権限を与えておけば、損失の発生を防ぐことができた可能性がある。

### ・モデル審査

トレーディング・セクション（以下フロント）ないしモデル開発セクションが新しいモデルを開発した場合には、独立したモデル審査セクションが当該モデルを審査することが必須である。フロント等が開発したモデルを何のチェックもないままで使用させることは極めて危険であり、審査セクションが、フロントとは全く独立に、当該モデルの理論的背景（仮定）の妥当性、そのモデルを使って算出した価格と市場価格の整合性やヘッジの有効性等を十分にチェックする必要がある。また、こうした審査体制は、社内ルールで明確に定める必要がある。

このような審査体制を事前に整えておけば、3章の長期為替オプションの計算例で示したような、当該オプションのプライシングに不用意にBSモデルを適用し続けるような事態は回避できると考えられる。

- ・モデルの定期的なレビュー

一度内部的に承認されたモデルを、その後レビューすることなしに、使い続けることも危険である。モデルで仮定されている原資産価格分布の形状が変わるなどの市場動向の変化等を受けて、モデルの微調整を行う必要があるからである。また、モデル審査の際に行う各種チェック（そのモデルを使って算出した理論価格と市場価格の整合性やヘッジの有効性）も、定期的に行うことが重要である。

こうしたレビューを定期的に行っていれば、2章(1)のインデックス・スワップの事例におけるような多額の損失の発生は、早期にモデルを改良することによって防ぐことができたと考えられる。

- ・フロントとのコミュニケーション

モデル管理担当者においては、モデルが市場に基づいて構築されているものであるため、市場動向についての十分な理解が必要となる。また、同様に、フロントがどのようなリスク・プロファイルを持つポジションを造成しているかについても常に目を配る必要がある。市場に最も近く、市場に関するさまざまな情報を最も多く入手しているのは、フロントである。従って、モデル管理担当者は、日頃からフロントとのコミュニケーションを密にして、市場動向やポジションのリスク・プロファイルを把握・理解するように努める必要がある。

例えば、5章でみたように、ストラングル・ショート戦略のようなポジションは、オプションの組み合わせにより非線型性を持つことから、リスク量の計測に当たってはそうした非線型性も考慮する必要がある。このため、フロントのポジション運営方針や内容を常時把握することで、事前にどのようなリスクが発生しうるかを認識し、リスク計測モデルの構築や運用を行うことが可能となる。

## (2) 管理体制以外のモデル・リスクへの対応策

次に本節では、前節で指摘した管理体制に加えて有効であると考えられるモデル・リスクへの対応策について述べる。以下に掲げる具体的な対応策は、損失引当金、シナリオ分析、ポジション・リミットである。

- ・損失引当金

プライシング・モデルのモデル・リスクに対しては、損失を吸収する引当金が有効であると考えられる。

格子法やモンテカルロ法などの数値計算法を使用してプライシングを行う場合を考える。これらの手法では、分割数や乱数系列数を単純に増加させるのは必ずしも得策ではないことがある<sup>25</sup>。このような場合、プライシングにおいて当該金融機関が許容できる範囲の精度を確保した後は、その精度を超える計算誤差について引当金で対応することが考えられる。例えば、通常のモンテカルロ法では、乱数系列数 $N$ 回に対して計算誤差<sup>26</sup>は $N^{-1/2}$ のオーダーになることが知られているので、乱数系列数を10,000回としてプライシングを行っている場合、評価額の数%を引当金として積むことが考えられる<sup>27</sup>。

また、ボラティリティ等のデータが市場から入手できないような場合も、引当金を計上しておくことが考えられる。例えば、ある金融商品について、日次ベースではボラティリティ入手が困難でも月次ベースでは取得できるのであれば、ボラティリティ取得日(月1回)以外の日のプライシング誤差に備えるために引当金を積むことが考えられる。

このような対応で、4章でみたような、格子法において分割数が少ないために時価が不安定になる状態や、広範囲にボラティリティが取得できない状況に、備えることができる。

#### ・シナリオ分析

フロントは、通常の市場状況を念頭に置いてプライシング・モデルを利用している。このため、市場が急に大きく変動し、モデルのパラメータ等の妥当性が薄れるような場合に対しての備えが必要となる。このためには、市場に大きな変動が発生した過去の事例(シナリオ)で、モデルに入力するパラメータがどのように変動したか、またプライシング・モデルによる価格と市場価格との乖離がどのように変動したかを分析することは、こうした備えの1つになると考えられる。

また、一般的なVaRモデルでは、ポジション・クローズにかかるコストを勘案していないため、大きなポジションを保有していたり、流動性が低い商品を保有している場合のリスクをどう勘案するかが問題となる。この場合、保有期間や信頼区間に関する仮定を変更したり、リスク・ファクターの変動にさまざまなパターンを想定したシナリオ分析を行うことが考えられる。

5章では、ヒストリカル・シミュレーション法によるVaRは、データ観測期間の影響から、その水準が大きく変わりうることを示した。VaRモデル自体のこのような問題点を補完するために、シナリオ分析は有効であると考えられる。

25 格子法やモンテカルロ法等の数値計算手法では、分割数や乱数系列数を無限大にすれば、計算結果は一般的には理論値に近づいていく。しかし、単純に分割数や乱数系列数を増やしても計算負荷が増し、時間を要するという問題がある。特にトレーディング業務においては、迅速なプライシングが必要となるので、分割数や乱数系列数の増加は必ずしもよい解決法とは言えない。

26 モンテカルロ法の誤差等は、津田 [ 1995 ] pp.91-113、木島・長山・近江 [ 1996 ] pp.143-155に詳しい。

27  $10,000^{-1/2} = 1\%$

## ・ポジション・リミット

モデル・リスクを低減させる対応策の1つとして、ポジション・リミットの設定が考えられる。例えば、ある商品について、モデルによる評価が複雑で、モデル・リスクが相対的に高いと判断されるような場合には、当該商品のポジションに対して、そのモデル・リスクを考慮に入れたリミットを設定することが考えられる。

例えば、プライシング・モデルに対する対応として、頻繁に取引されない金融商品に対し、内部モデルと市場で使用されている別のモデルとの乖離が発生することを前提に、ポジション・リミットを設定することが考えられる。このような対応で、2章(1)(2)や3章のような、市場価格と評価価格の乖離から被る損失を抑えることが可能となる。また、リスク計測モデルに対する対応としては、シナリオ分析で得られた情報を基にポジション・リミットを設定することで、2章(3)や5章で示したような、モデルで仮定している原資産価格分布が誤っていることに起因するリスクを軽減できる。

ポジション・リミットの管理は、モデルのレビューを行うよりも、簡便でコストも低い。従って、モデルのレビューを補完する意味でも、モデル・リスクに対する機動的な対応として有効と考えられる。

## 7. おわりに

本稿では、モデル・リスク顕在化の具体例を示し、市場データを使い実証的にモデルの問題点を分析した。さらに具体例と実証的分析から得られたインプリケーションを基にモデル・リスクへの実務的な対応方法を検討した。

具体的には、インデックス・スワップ、マルク・キャップ、LTCMを例にとりモデル・リスクのイメージをつかみ、長期為替オプション、株価バリア・オプション、ストラングル・ショート戦略の分析からモデル・リスクのポイントを指摘した後、実務的な観点からモデル・リスクへの対応方法を検討した。

モデル・リスクに対する定性的な対応として、管理体制の強化を考察した。具体的には、組織・権限・人材、モデル審査、モデルの定期的なレビュー、フロントとのコミュニケーションに分けて検討を行った。

一方、定量的な対応としては、プライシング・モデルでは、異なるモデルによるプライシングの格差を引当金として計上したり、その格差を基にポジション・リミットを設定すること等を挙げた。リスク計測モデルにおける定量的な対応としては、リスク・ファクターの変動にさまざまなパターンを想定したシナリオ分析やシナリオ分析で得られた情報を基にポジション・リミットを設定すること等を挙げた。

モデル・リスクは金融機関にとって無視しえないリスクであり、今後定量的な面を含めた対応がますます必要になってくると考えられる。

## 補論1 . ブラック = ショールズ・タイプ

Black and Scholes [ 1973 ] は、証券の価格の変動過程に対数正規過程を仮定した上で、この証券を原資産とするオプションのプレミアムを与える解析解を導出した ( BSモデル )。このBSモデルと同様の枠組みで構築された各種のモデルを包括してBSタイプと呼ぶことがある。

本文中で用いたBSタイプのオプション評価式を以下に記述する<sup>28</sup>。

( ノーマル・オプション )

$$\text{Normal Call} = Se^{-qT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2),$$

$$\text{Normal Put} = Ke^{-rT}N(-d_2) - Se^{-qT}N(-d_1),$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (\text{A-1})$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

( ダウン・アウト・プット・オプション )

$$\text{Down and Out Put} = \text{Normal Put} - \text{Down and In Put},$$

$$\text{Down and In Put} = -Se^{-qT}N(-x_1) + Ke^{-rT}N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + Se^{-qT}(H/S)^{2\lambda}$$

$$[N(y) - N(y_1)] - Ke^{-rT}(H/S)^{2\lambda-2}[N(y - \sigma\sqrt{T}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{T})], \quad (\text{A-2})$$

$$\lambda = \frac{r - q + \sigma^2/2}{\sigma^2}, \quad y = \frac{\ln[H^2/(SK)]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T},$$

$$x_1 = \frac{\ln(S/H)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}, \quad y_1 = \frac{\ln(H/S)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}.$$

ただし、

$N(\cdot)$  : 標準正規分布の累積密度関数、

$S$  : 原資産価格、

$K$  : 行使価格、

$H$  : バリア価格 ( $K > H$ )、

$T$  : オプション満期までの時間、

$r$  : 国内通貨の無リスク金利 ( 為替オプションの場合 )、

$q$  : 海外通貨の無リスク金利 ( 為替オプションの場合 )、

$\sigma$  : 原資産価格のボラティリティ。

28 エキゾティック・オプション評価式の詳細はハル [ 1998 ] pp.637-655を参照。

ダウン・アウト・プット・オプションの価格はノーマルのプット・オプションの価格からダウン・イン・プット・オプションの価格を控除することで得られる。BSタイプのオプション評価式では原資産価格以外のボラティリティや金利といったパラメータは満期まで一定であると仮定している。

## 補論2 . アミン = ジャロー・モデル

BSモデルでは金利やボラティリティをオプション満期まで一定であると仮定している。金利は、為替レートに比べボラティリティが小さいため、短期オプションであれば大きな問題は発生しない。しかし、長期オプションでは金利の期間構造や変動を無視しえないため、それらを盛り込んだモデルを使う必要がある。Amin and Jarrow [ 1991 ] は、2カ国金利と為替の確率的変動を明示的に取り込んだモデルを構築した。AJモデルでは、当該国おのおののフォワード金利をHJMモデル<sup>29</sup>・タイプの2ファクター・モデルで、為替レートはその収益率が対数正規過程に従うとする4ファクター・モデル(2つのフォワード金利モデルと同じもの)で記述できると仮定する。また、それぞれファクターのボラティリティ関数の関係で金利・為替の分散・共分散を記述する。

$$\begin{aligned}
 df_d(t,T) &= \alpha_d(t,T)dt + \sum_{i=1}^2 \sigma_{di}(t,T, f_d(t,T))dW_i(t), \\
 df_f(t,T) &= \alpha_f(t,T)dt + \sum_{i=2}^3 \sigma_{fi}(t,T, f_f(t,T))dW_i(t), \\
 dS_d(t) &= \mu_d(t)S_d(t)dt + \sum_{i=1}^4 \delta_{di}(t)S_d(t)dW_i(t).
 \end{aligned}
 \tag{A-3}$$

ただし、フォワード金利に関する添字  $f, d$  を、海外・国内の金利に対応する添字であるとして、

- $f_k(t, T)$  :  $t$  時点で観測する  $T$  時点のフォワード金利 ( $k: d, f$ )、
- $\alpha_k(t, T)$  : フォワード金利のドリフト ( $k: d, f$ )、
- $\sigma_{ki}(t, T, f_k(t, T))$  : フォワード金利のボラティリティ ( $k: d, f$ ) (2ファクター)
- $S_d(t)$  : 為替レート、
- $\mu_d(t)$  : 為替レートのドリフト、
- $\delta_{di}(t)$  : 為替レートのボラティリティ (4ファクター)
- $W_i(t)$  : ウィナー過程<sup>30</sup>。

29 ヒース = ジャロー = モートン・モデル : 金利期間構造モデルの1つ。詳細はHeath, Jarrow and Morton [ 1992 ] を参照。

30 (A-3)において4つのウィナー過程は互いに独立であるとする。為替レートの4つのウィナー過程のうち2つを海外・国内のフォワード金利のウィナー過程で同一とし、フォワード金利同士でも1つのウィナー過程を同じとして為替レートやフォワード金利の変動を関連づけている。

この時、以下の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \text{var}(df_d(t,T)) &= [\sigma_{d1}(t,T, f_d(t,T))^2 + \sigma_{d2}(t,T, f_d(t,T))^2]dt, \\ \text{var}(df_f(t,T)) &= [\sigma_{f2}(t,T, f_f(t,T))^2 + \sigma_{f3}(t,T, f_f(t,T))^2]dt, \\ \text{cov}(df_d(t,T), df_f(t,T)) &= [\sigma_{d2}(t,T, f_d(t,T))\sigma_{f2}(t,T, f_f(t,T))]dt, \\ \text{var}\left(\frac{dS_d(t)}{S_d(t)}\right) &= \left[ \sum_{i=1}^4 \delta_{di}^2(t) \right] dt, \\ \text{cov}\left(\frac{dS_d(t)}{S_d(t)}, df_d(t,T)\right) &= \left[ \sum_{i=1}^2 \sigma_{di}(t,T, f_d(t,T))\delta_{di}(t) \right] dt. \end{aligned}$$

各ボラティリティ関数を確定的な関数であるとする、コール・オプションの価格は次のように表される。

$$\begin{aligned} \text{Call} &= P_f(0,T)S_d(0)N(h) - KP_d(0,T)N(h - \zeta), \\ h &= \frac{\ln\left(\frac{P_f(0,T)S_d(0)}{KP_d(0,T)} + \frac{1}{2}\zeta^2\right)}{\zeta}, \\ \zeta^2 &= \sum_{i=1}^4 \int_0^T [a_{fi}(v,T) + \delta_{di}(v) - a_{di}(v,T)]^2 dv, \\ a_{ki}(t,T) &= -\int_t^T \sigma_{ki}(t,u, f_k(t,u))du, \\ P_k(t,T) &= \exp\left[-\int_t^T f_k(t,u)du\right]. \end{aligned} \tag{A-4}$$

AJモデルは、BSモデルと異なり金利やボラティリティの期間構造やその変動を明示的にモデルに組み込んでいる。しかし、本稿では、オプション満期までの金利・為替のボラティリティ・分散・共分散は一定であると仮定してヒストリカル・データから計算を行った。これは、長期の為替オプション市場が小さく価格データが入手しづらいこと等に基づくものである。

## 補論3 . インプライド・バイノミアル・ツリー・モデル

BSモデルが仮定している世界では原資産価格の挙動は以下で表される。

$$dS = \mu_c S dt + \sigma_c S dW(t). \quad (\text{A-5})$$

ここで $S$ は原資産価格、そのドリフト $\mu_c$ とボラティリティ $\sigma_c$ は期間中一定としている。また、 $W(t)$ はウィナー過程である。Cox, Ross and Rubinstein [ 1979 ] は、このような原資産価格の挙動を前提にバイノミアル・ツリーを使ってオプション価格を導出している。IBTモデルの基本構造はコックス等のバイノミアル・ツリーと同様だが、時間をいくつかの小区間に分割しその小区間の中で原資産価格の挙動を以下の幾何ブラウン運動に従うとしている点が特徴である。

$$dS = \mu(t) S dt + \sigma(S, t) S dW(t). \quad (\text{A-6})$$

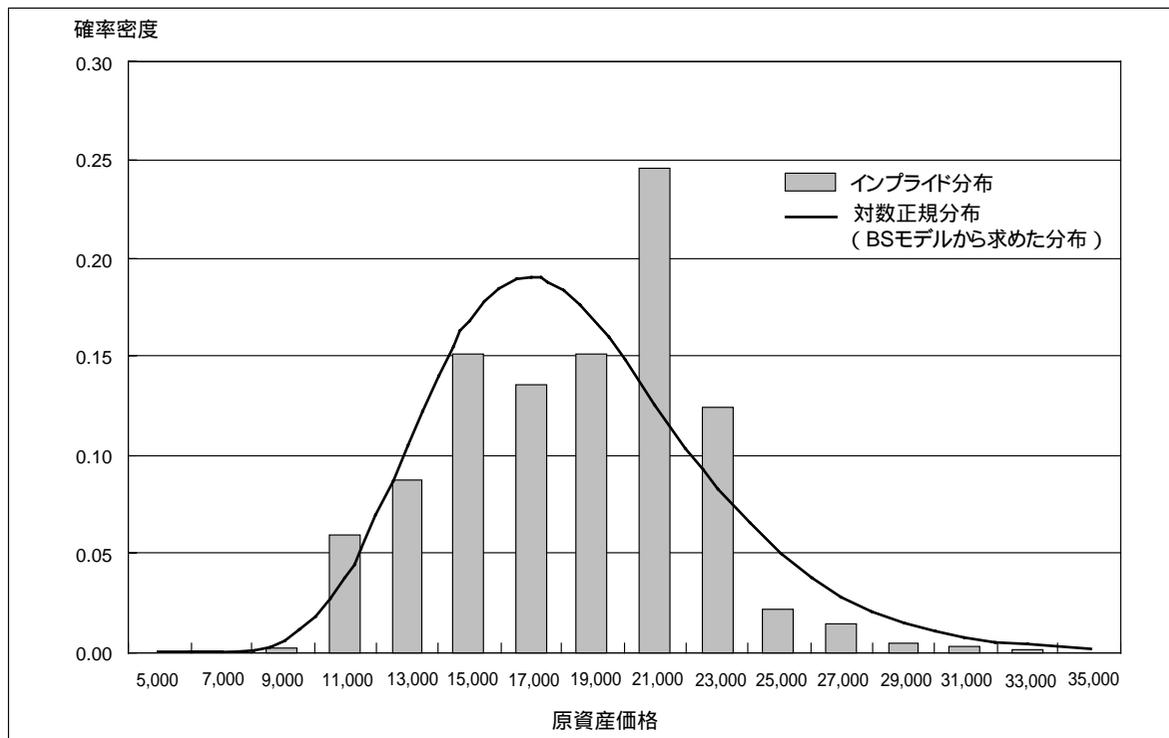
IBTモデルは、市場の金利期間構造、スマイルやスキューなどの現象に対処するため開発されたモデルである。このため、(A-6)の関数 $\mu(t)$ と $\sigma(S, t)$ は市場のオプション価格に整合するように決定される。また、通常のバイノミアル・ツリーでは、

1ステップの原資産価格の上昇率を $u = e^{\sigma_c \sqrt{\Delta t}}$ 、下落率を $d = e^{-\sigma_c \sqrt{\Delta t}}$ 、原資産価格のドリフトを $a = e^{\mu_c \Delta t}$ とした上で、上向き推移確率を $p = (a - d)/(u - d)$ 、下向きの推移確率を $1 - p$ とすることによって、図4(a)のような整った格子を組み立てる。これに対して、IBTモデルでは前向きの計算法 (forward induction) を使って格子を組み立てる。すなわちスタートとなる原資産価格から次のステップに移るために市場で取引されているオプション価格と次のステップの原資産価格の整合性が取れるように原資産価格の確率過程を記述するパラメータ、 $\mu(t)$ 、 $\sigma(S, t)$ を決定する<sup>31</sup>。このため通常のバイノミアル・ツリーと異なり図4(b)に示されるような歪んだ格子構造となる。

図A-1に平成11年9月30日の市場データからIBTモデルによって推測された原資産価格分布を示す。

31 IBTモデルの格子作成等の詳細はDerman and Kani [ 1994 ] やRubinstein [ 1994 ] を参照。

図A-1 IBTモデルのインプライド原資産価格分布（平成11年9月30日の例）



図A-1から、IBTモデルを利用して得られたインプライド原資産価格分布は対数正規分布と異なることがわかる。

## 参考文献

- 加藤敏康・吉羽要直、「金利派生商品モデルの実務的活用について」、IMES Discussion Paper No.99-J-24、日本銀行金融研究所、1999年
- 木島正明・長山いづみ・近江義行、『ファイナンス工学入門第 部、数値計算法』、日科技連、1996年
- 津田孝夫、『モンテカルロ法とシミュレーション3訂版』、培風館、1995年
- ハル, ジョン、『フィナンシャルエンジニアリング第3版』、金融財政事情研究会、1998年
- Amin, K.I. and R.A. Jarrow, "Pricing Foreign Currency Options under Stochastic Interest Rates," *Journal of International Money and Finance*, Vol.10, 1991, pp.310-329.
- Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, Vol.81, 1973, pp.637-654.
- Cox, J., S. Ross and M. Rubinstein, "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, Vol.7, 1979, pp.229-264.
- Derman, E., "Model Risk," *Risk*, Vol.9, May, 1996, pp.34-37.
- and I. Kani, "Riding on a Smile," *Risk*, Vol.7, Feb., 1994, pp.32-39.
- , , D. Ergener and I. Bardhan, "Enhanced Numerical Methods for Options with Barriers," *Financial Analysts Journal*, Nov./Dec., 1995.
- Dupire, B., "Pricing with a Smile," *Risk*, Vol.7, Jan., 1994, pp.18-20.
- Heath, D., R. Jarrow and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claim Valuation," *Econometrica*, Vol.60, No.1, 1992, pp.77-105.
- Jorion, P., "How Long-Term Lost its Capital," *Risk*, Vol.12, Sep., 1999, pp.31-36.
- Rubinstein, M., "Implied Binomial Trees," *The Journal of Finance*, Vol.69, 1994, pp.771-818.
- Simons, K., "Model Error," *New England Economic Review*, Federal Reserve Bank of Boston, Nov./Dec., 1997, pp.17-28.

