

金融と保険の融合について

もりもと ゆうじ
森本祐司

要 旨

本稿は、「金融と保険の融合」をキーワードとして、次の3つのトピックについてまとめたサーベイ研究である。

1. ART：実務面における融合の象徴的分野として、保険リスクの証券化などが挙げられる。こうした手法は一般にART(*alternative risk transfer*、代替的リスク移転)と呼ばれており、現在保険・金融双方で関心が高まっている。本稿では、ARTの定義、分類、商品概要、価格設定の考え方などをまとめる。
2. 保険数理と金融工学の融合：理論面、とくに価格理論において融合の萌芽が見え始めている。保険数理と金融工学がこれまでどのような発展経緯を辿り、昨今どのように関連を強めているかについて説明する。
3. EVT：リスク管理の高度化、金融リスクと保険リスクの統合管理に向けて、重要な役割を果たす可能性を期待されているEVT(*extreme value theory*、極値理論)について、基礎的な内容を解説した後、数値例等を示す。

本稿は、上記の各項目ごとに、それぞれ一章ずつを割当てている。これらの内容は、広い意味で密接に関連し合っているものの、本稿ではそれぞれ独立した解説として扱っており、読者の興味・関心に応じて、必要な章に焦点をあてて読むことが可能である。

キーワード：ART、集会的危険論、保険料計算原理、無裁定と完備、EVT

.....
本稿は、執筆者が日本銀行金融研究所研究第一課に在籍していたときに研究した内容をもとに作成した研究資料である。本稿の作成にあたっては、木島正明教授(東京都立大)、中川秀敏氏(東京大学大学院 数理科学研究科)および東京海上火災保険企業商品業務部開発グループの方々から貴重なコメントをいただいた。

ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所、または現在執筆者が所属する機関の公式見解を示すものではない。

森本祐司 東京海上火災保険株式会社財務企画部 (E-mail: yuji.morimoto@alum.mit.edu)

1. はじめに

昨今、金融分野と保険分野の融合¹が世界的にさまざまな面で見られる。例えば、保険会社と銀行・投資顧問などの提携・合併や、欧州にみられるバンカシュランス² (Bancassurance) 等、企業・業務としての融合、規制緩和による業際の垣根の低下等、制度面での融合、地震リスクの証券化等にみられる商品面での融合、保険リスクと金融リスクの統合管理のようなリスクの概念としての融合等、数多くの事例を挙げることができる。本稿では、そうした融合の流れに関連する次の3つのトピックを紹介、解説する。

ART：実務面の融合、とくに商品面での融合の象徴的存在として、保険リスクの証券化や金融リスクと保険リスクの統合的商品などが挙げられよう。これらは、代替的リスク移転 (alternative risk transfer、以下ART) と呼ばれ、保険および再保険分野で重要な役割を担いつつあるものである。ARTという用語は、まだ一般には馴染みが薄いと思われるが、投資銀行を始めとして、金融界からも強い関心が集まっている。

保険数理と金融工学の融合：商品・取引手法が融合する中で、その価格理論やヘッジ戦略の理論構築に実務家・研究者の関心が集まりつつある。

金融と保険の理論は、共通の数学的手法 (確率過程等) のうえに展開されており、その意味では従来から類似点があるともいえる。しかしながら、保険数理はリスクを甘受するなかでどのようにそれを制御するかという危険論として発展してきた一方、金融工学は金融派生商品の価格理論にみられるように、ある価格変動を複製することで完全にリスクがヘッジできることを前提として理論が展開されてきており、この点が両者の発想の違いとなっている。

2つの理論は現在、保険商品が流動化されていく中で、金融商品的色彩の強い保険商品をどのように価格付けするか、市場の完備性という従来の金融理論の前提が成立しない場合にいかにして金融商品の価格理論を再構築するかといった観点から、さまざまな形で融合の可能性が模索されている段階にある。

EVT：融合はリスク管理面にも及んでいる。Paul - Choudhury [1998] は「昨今見られるようなペースで金融と保険市場の収束が続けば、金融と保険のリスク管理の違いといった議論は、そう遠くない将来消滅しているかもしれない」と指摘している。両者のリスク管理を融合しうる可能性を秘めた理論の一つが、極値理

1 本稿では保険分野として、主として損害保険分野に焦点をあてている。生命保険分野についても融合の流れはあるが、本稿では深く立ち入らない。

2 フランスにおいて、銀行が保険業務へ業務分野を拡大する現象を表す用語。ドイツではアルフィナンツ (Allfinanz) と呼ばれる。

論 (extreme value theory、以下EVT) である。EVTは、その名のとおりに、確率分布の異常値 (最大値や最小値など) を分析する理論である。もともと水文学等で発達してきた分野であり、再保険などの例外を除いて金融・保険分野での適用例は従来ほとんど見られなかった。しかし、最近になって、いわゆるファット・テールな確率分布を対象とするリスク管理においては、EVTが威力を発揮すると考えられ、注目が集まりつつある。また、EVTは今後、システミック・リスクやマーケット・クラッシュの分析等にも応用される可能性があるだろう。

本稿の構成は以下のとおりである。2章ではARTについて、その定義、分類、商品例等をまとめる。3章では、金融と保険の理論面における融合について考察する。保険数理については、相対的に馴染みが薄いと思われることから、定義や一般的な定理等の数学的内容についても整理している。4章では、EVTについて基礎的な解説を行い、金融データを用いた簡単な数値例も示す。

これら3つのテーマは、金融と保険の融合という大きな流れの中で、さまざまに関連している。ただし、読者によって興味の対象が異なることや、とくに3章および4章は数学的記述も多いことから、各章を極力独立した内容として扱うように工夫した。興味・関心に応じて必要な章をピックアップして読んでいただききたい。

2. Alternative Risk Transfer (ART)

金融分野と保険分野の融合を商品面からみることのできる代表例にARTがある。ARTは、伝統的保険商品では達成できない (または達成困難な) リスクの移転を、さまざまな手段を通じて実現させるものである。概念自体は決して新しいものではないが、リスクの複雑化、コンピュータ技術の発達、保険業界の規制緩和とそれに伴う国際化等により、昨今とくに注目を集めている。

ARTには多種多様なものが含まれるが、ここでは主題に沿って金融と保険の融合に関連するもの、例えば、金融リスクと保険リスクを包括的にカバーする保険や、保険の証券化、保険デリバティブを中心に紹介する。したがって、ARTのすべてが網羅されているわけではない点をあらかじめ断っておく³。

(1) ARTとは

ARTに確立した定義は存在していない。alternative risk transferという言葉は、代替的 (alternative) とリスク移転 (risk transfer) という2つに分けられる。代替とは、伝統的保険の代替という意であるが、何が伝統的で、それをどう代替しているのか

3 ART全般について体系的にまとめられた文献としてはsigma [1999] が挙げられる。

がわかりにくい。こうした点を理解するには、保険の基本的概念および歴史的経緯に立ち戻る必要があると思われる。

リスク移転とは、リスク保有 (risk retention) の対極となる概念である。企業も個人も日常活動を行う際に、さまざまなリスクに曝されているが、それらに対し、個々のリスクの発生頻度と発生時の損害額およびヘッジ・コストを比較し、リスクを保有するか、第三者へ移転するかまたはその複合という選択をしている。

歴史的背景を振り返ると、保険は近代的企業の誕生よりも遙かに遅れて発生しており、再保険は保険会社の誕生よりもさらに遅れている⁴ことから、1980年代までの流れは、大きく捉えれば、リスク保有からリスク移転への動きであったと考えられる。ここでいうリスク移転は、いわゆる伝統的保険⁵である。

しかし、1980年代に発生した米国賠償危機等により、保険・再保険のキャパシティーの低下、保険料の高騰、引受拒否等といった事態が生じたことから、徐々に見直されるようになった。一般企業は伝統的なリスク移転の限界を知り、保険会社は再保険の限界を認識することとなったのである。

その結果、企業にとっては自家保険やキャプティブ⁶ (captive) 等、リスク保有への回帰 (1980年代以降) の流れが生じ、保険会社は保険リスクの証券化やデリバティブ等への展開 (1990年代以降) 、つまり金融市場を活用したキャパシティーの拡大を画策した。それらの手法は、従来の単純なリスク保有・移転ではないことから、代替的なリスク移転⁷、すなわちARTという分野となった。

上記のような流れに加え、伝統的保険の枠組みを超えた保険商品もARTの一角を成しており、ARTは多種多様な手法・商品を内包した分野となっている。

(2) ARTの分類

分類についても、定説は存在していない。ここでは、Schanz [1998] が提唱している次の分類を紹介する。Schanz [1998] はどういう手段でリスクを移転するのかという観点から、ARTを以下の3つに分類している。

1. Alternative Solutions : 第一は、商品による代替移転である。従来の保険の概念では扱っていなかったものを、新しい商品によってカバーするARTである。保険金支払のタイミングのずれによる投資収益変動リスクをカバーする商品や、金融リスクと保険リスクを包括的にカバーする商品、さらには災害発生時におけ

4 世界最古の再保険専門会社であるCogloneReの設立は1846年である。

5 誤解を恐れずに、伝統的保険のイメージを示すと次のようになろう。保険の対象は、通常保険の保険リスク (火災や風水災など) に限定される。これらをリスクごとに、保険会社と保険契約を締結することによってリスク移転を行う。保険契約期間は一部 (生命保険や積立型損害保険など) を除いて1年間である。保険会社はリスクの大半を大数の法則に基づいて保有し、一部を再保険会社に渡す。この世界では、保険会社、再保険会社以外に保険リスクが移転されることはない。

6 一般の保険会社のように、不特定多数の顧客を対象とするのではなく、特定の企業もしくは企業グループに属し、その企業 (グループ) のリスクのみを専門に引き受ける保険子会社のこと。

7 リスク保有への回帰も、これまでリスク移転していたものの再移転であると考えている。

る保険会社の資金調達を目的とした契約等を指している。

2. Alternative Risk Absorbers：第二は、リスクの受け皿を拡大・変更することによる代替移転である。保険のキャパシティーを増大化させることで、新たなるリスク移転への道を切り開くものである。この中で、昨今最も注目を集めているのが、保険の証券化などに代表される、金融市場を新しいリスクの受け皿としたARTである。
3. Alternative Sales Channels⁸：第三は、リスクの流通経路を変更することによる代替移転である。一般企業のリスク保有への流れに相当するもので、キャプティブを利用する形態がその典型である。なお、キャプティブの利点としては、従来、税務面・コスト面での優位性にスポットがあたっていたが、昨今は、社内のリスク管理意識の向上といった効用も指摘されている。

(3) ARTの具体例

本節ではARTの仕組みについて紹介する。ここでは、金融と保険の融合という観点から有用と思われる、ホリスティック・カバー（holistic covers）、保険リスクの証券化、保険デリバティブの3つに限定した。

イ. ホリスティック・カバー

ホリスティック・カバーとは、保険リスクとそれ以外のリスク（例えば金融リスク）を一契約でカバーするものである。統合的リスク管理手法（integrated risk management）、またはバランスシート・プロテクション（balance sheet protection）などとも呼ばれる。本商品の構造を理解することにより、金融と保険の統合リスク管理等の概念も整理できることから、ここではやや詳しく考察する。

ホリスティック・カバーのイメージ

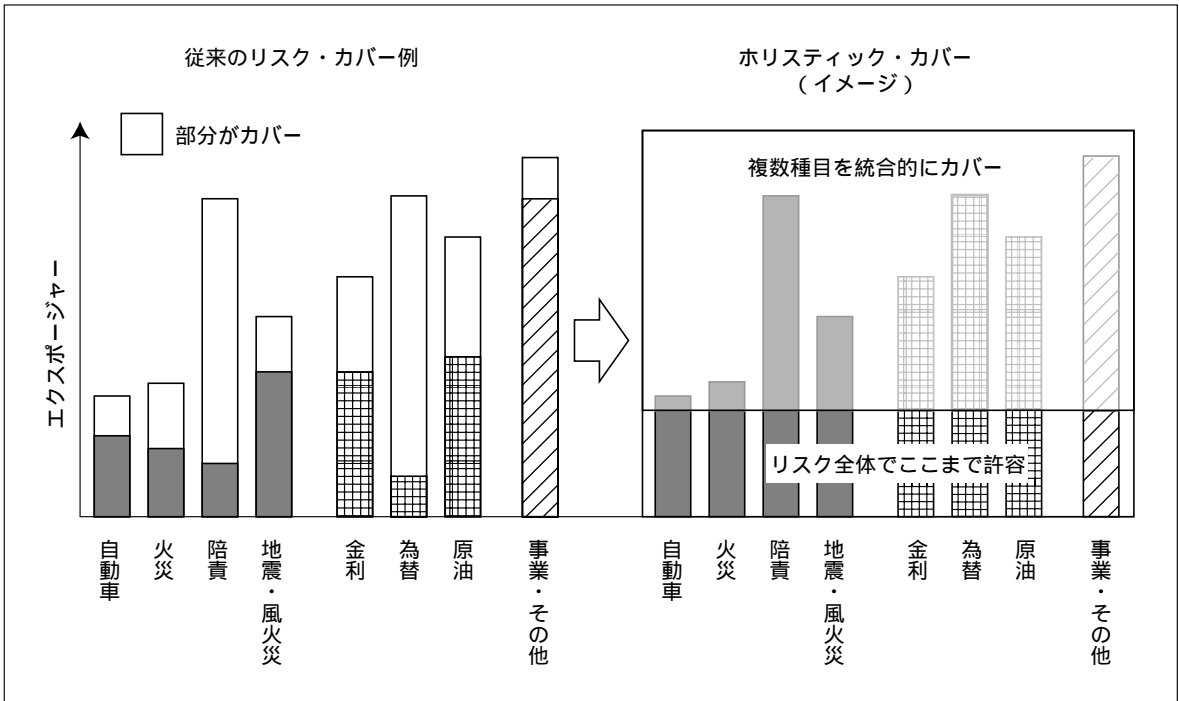
仕組みを理解するために、図表 2-1 にイメージ図を示した。従来は、個々のリスクに対し、企業は図表 2-1 の左図のように個別にカバーを手配していた（白抜き部分がカバー。残余部分は企業がリスク・テイクしている）。保険リスク部分は一般的な企業保険で、金融・商品価格リスクについては先物やスワップ等でヘッジしていると考えればよい。こうしたカバー手法は、それぞれの契約が単純であり、また会計・税務の観点でも透明性が高いという利点がある。また、企業の保険部門では保険リスクを担当、財務部門では金融リスクを担当するというように、社内の部門別管理が容易にできる。

しかし、個別リスクごとに対応しているため、保険契約やヘッジの更新などに手間がかかるといった実務的負担に加え、個別ヘッジの集積が会社全体の最適なヘッ

8 Alternative Sales Channels は本稿には直接関係ないことから、以下省略する。

ジとなっているのかという根本的な問題が残る。ホリスティック・カバーは、複数のリスクを包括的にカバーすることで、そうした問題を解決しようとするものである。ホリスティック・カバーのイメージを図表2-1の右側に示した。

図表2-1 ホリスティック・カバーのイメージ



ホリスティック・カバーの具体例⁹

ここでは、ホリスティック・カバーの効率性について、具体例を用いて示す。また、検証の過程で、ホリスティック・カバーは、いくつかの前提のもとでは個別ヘッジ・ツールの組合せによって複製できることも示す。

例として企業Aを考える。計算を単純化するため、次のような前提を置く。

A社は株価リスクと1つの保険リスクのみを保有している。

A社は、上記リスクについてヘッジ・プランを検討しているが、2つのリスクを完全にヘッジするのは過大なコストがかかることから、年間10億円までの損失は許容すると判断している。

まず、個別リスクごとのヘッジの集積で対応する場合を考える。A社のトータル・コストは、各ヘッジ・コストの合計であるから、個別のヘッジ・コスト、すなわち株価リスクについてはオプション・プレミアムを、保険リスクについては保険

9 本節での計算手法は、Swiss Re New Markets [1998] を参考にした。

料を計算する必要がある。計算にあたり次の前提を置いた¹⁰。

オプション・プレミアム

ブラック=ショールズ式に基づくオプション時価を計算

保有株価時価（ 株価想定元本 ）は50億円

日経平均（現時点で15,000円と仮定）に完全にリンク（ $\beta=1$ ）

一年無リスク金利0.5%

ボラティリティー20%

保険料

事故発生率に基づく保険金支払額の期待値を計算

保険事故発生数はポアソン分布（ $\lambda=0.03$ ）に従う¹¹

一事故当たり保険金額は対数正規分布（平均約60億円）に従う

以上の前提のもと、許容損失額¹²を変化させて、ヘッジ・コストを計算した。図表 2-2 は、完全にヘッジした場合、5 億円まで損失を許容した場合、10億円まで損失を許容した場合の計算結果である。

図表 2-2 個別リスクごとのヘッジ・リスト

	完全ヘッジ	許容損失5億円	許容損失10億円
オプション・プレミアム	384.9百万円	172.0百万円	56.3百万円
保険料	176.5百万円	161.8百万円	148.0百万円

次に、A社が選択可能なヘッジの組合せおよびそのコストについて考える。選択可能な組合せは、各ラインの許容損失額の合計が10億円を超えないものである。例えば、それぞれの許容損失額を5億円と考えれば、ヘッジ・コストの合計額は $161.8 + 172.0 = 333.8$ 百万円となる。同様に、株価リスクについては10億円を許容損失額とし、保険リスクについては完全にヘッジすることも考えられる。この場合のヘッジ・コスト合計額は $176.5 + 56.3 = 232.8$ 百万円となる。簡単な検証により、個別リスクをヘッジするという組合せのなかでは、このヘッジ・コスト（232.8百万円）が最小であることがわかる。

しかし、これらのヘッジは、損失額合計が10億円以下であればそれは許容するというA社のヘッジ目的と比較すると、余分なヘッジ部分が必ず存在する。例えば、保険リスクが6億、株価リスクが3億顕在化したとしよう。この場合、トータルの

10 株式オプション・プレミアムはブラック=ショールズ式（つまりリスク中立確率をベースにした期待値）である一方、保険料は純保険料ベース（つまり観測確率をベースにした単純な期待値）であり、ベースが揃っていない。例えば、保険料について安全付加保険料率を考慮すればベースを揃えられるが、ここではイメージをつかむことが目的であるため、簡便な計算方法を採用した。

11 約33年に1度程度の事故発生頻度を想定していることになる。

12 保険でいえば免責条項（例えば損失額のうち5億円までは支払わないという条項）付きの契約を意味し、株価の場合は、アウト・オブ・ザ・マネーのプット・オプションとなる。上記例では、許容損失額5億円の場合、行使価格は13,500円となり、10億円の場合は12,000円となる。

損失額は9億円であり許容範囲内であるが、それぞれの許容損失額を5億円としてヘッジを行った場合は保険金として1億円発生してしまう。

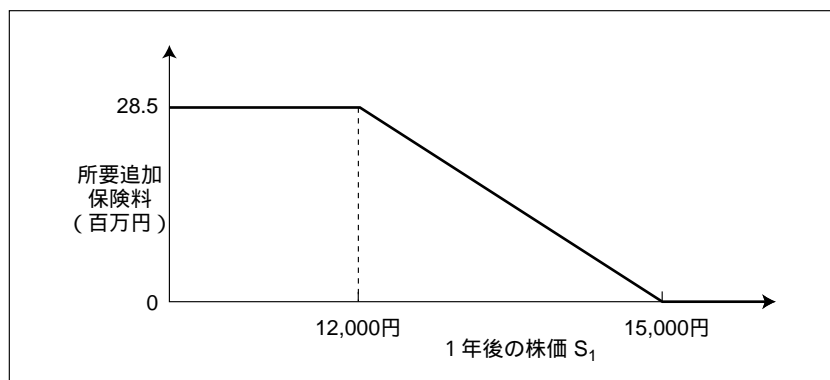
ホリスティック・カバーでは、余分なヘッジ部分を除去するために、トータルの損失額が10億円を超えた場合のみ、保険金が支払われるように設計されている。ホリスティック・カバーのコストが、個別ヘッジの集積と比較してどの程度効率的であるかをみるために、ここではいくつかの前提のもと、株価指数オプションおよび保険商品の組合せで、ホリスティック・カバーを複製し、その複製ポートフォリオから価格を計算することで比較を行う。

まず、株価リスクを許容損失額10億円としてヘッジを行う。よって行使価格12,000円のプットオプションを購入する。

次に、保険リスクの損失許容額を、1年後の株価に対応させてみる。1年後の株価が12,000円以下であれば、株価リスクからの損失が10億円を超えるため、保険リスクの許容損失額は0となる。逆に15,000円以上のときは、株価リスクは顕在化しないので、保険リスクの許容損失額として10億円全額使用可能である。株価が12,000円以上15,000円以下となった場合、保険リスクの許容損失額Dは、1年後の株価 S_1 に応じて、 $D = \{(S_1 - 12,000) \div 3,000\} \times 10$ 億円と表される。

以上を勘案し、保険リスクのヘッジについて考える。まず、1年後の株価に関わらず、許容損失額10億円のヘッジは必要であるので、その保険を購入する。次に、1年後の株価に応じて、保険リスクの許容損失額を減らす必要が生じた場合には、不足保険料分を1年後（つまり事後的）に支払うとする¹³。図表2-2から、許容損失額ゼロの場合と10億円の場合で、保険料の差は28.5百万円であることがわかるので、保険料が許容損失額に対して線形的に変化すると仮定すれば¹⁴、図表2-3が1年後の株価と追加保険料の関係を示していることとなる。

図表 2-3 1年後の株価と追加保険料の関係



13 厳密には、1年分の金利を上乗せする必要があるが、ここでは簡便さを優先して省略した。

14 実際に計算すると線形にはならず、わずかに下に凸の曲線となる。ただし、誤差は微小であり、線形近似とにおいてもそれほど問題は生じない。

このペイオフは、次の2つの株価指数オプション取引により達成される。

- ・プットの買い（行使価格15,000円、想定元本142.5百万円¹⁵）
- ・プットの売り（行使価格12,000円、想定元本142.5百万円）

ブラック - ショールズ式で両オプション価格を計算すると、それぞれ11.0百万円と1.6百万円となり、ネットでは9.4百万円となる。以上から、

保険リスクのヘッジ（許容損失額10億円）	148.0百万円
株価リスクのヘッジ（許容損失額10億円）	56.3百万円
上記プットオプションの売買	9.4百万円
合計	213.7百万円

が全体のヘッジ・コストとなる。このヘッジ・コストは、個別リスクの組合せのなかで最小であったヘッジ・コスト232.8百万円よりも低くなっている。

ただし、上記の計算例は近似的な要素が含まれている。保険リスクの許容損失額と保険料が線形関係にあるという前提に加え、保険リスクと株価リスクが無相関という前提も置かれており、注意が必要である¹⁶。こうした問題をクリアにするためには、ホリスティック・カバーを保険リスクと金融リスクの複合オプションとして考え、両者の相関を取り入れたモデルを構築することなどが考えられる¹⁷。

ロ. 保険リスクの証券化（ILS）

保険リスクの証券化とは

保険リスク証券（insurance linked securities、以下ILS¹⁸）は、保険リスクが内包されている証券である。証券化という観点では、資産担保証券（ABS）やモーゲージ担保証券（MBS）等があるが、それらは資産の証券化であったのに対し、ILSは負債の証券化という点でこれまでになかった概念を提供している。

ARTのなかで昨今最も注目を集めているのが、このILSであろう。発行体（主として保険会社）にとっては保険リスク移転先の飛躍的拡大、長期間の再保険確保に加え、リスク移転先の信用リスク回避が可能となる。とくに地震・ハリケーン等巨大リスクを再保険に出す場合、その発生が再保険会社の財務内容にどのような影響を及ぼすかをあらかじめ推定することが公的情報のなかではきわめて困難であった

15 日経平均が12,000円に下落したとき、28.5百万円のペイオフを生み出す必要があることから、

$$\text{想定元本} = \{28.5 \text{百万} / (15,000 - 12,000)\} \times 15,000$$

となり、ここから想定元本142.5百万円が導出できる。

16 保険リスクと株価リスクの相関をどう考えるかは難しい。事故発生頻度と株価は無相関とも考えられるが、保険金額はインフレ等の影響を受ける可能性があることから、無相関とはいえない。

17 相関パラメーターについては、過去データに基づく客観的推定が困難である場合も多いことから、いくつかのシナリオを設定し、相関に対するモデルの頑健性を試す等のテストを行う必要がある。

18 ILSという呼称は最近広く用いられつつある。ただし、主として地震や風水災といった、発生確率は小さいものの発生した場合の損害が大きいリスク（これを一般にcatastrophe riskという）を対象としている場合には、CATボンドと呼ばれることも多い。

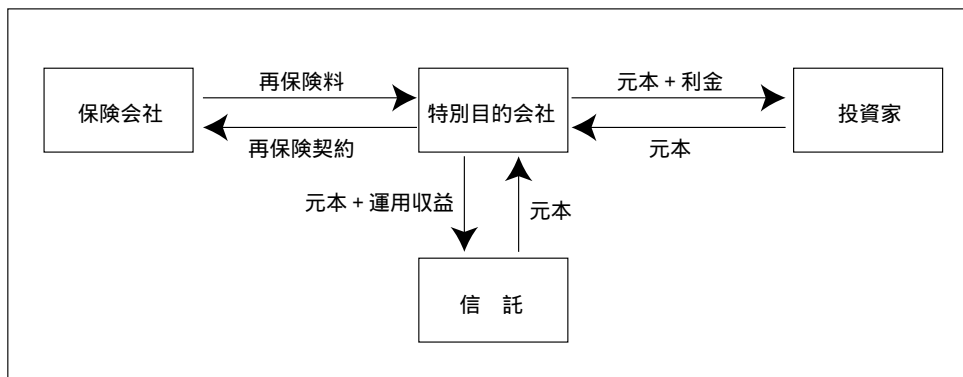
ことから、信用リスクの回避は保険会社にとって大きなメリットといえよう。

一方、投資家においても、ハイ・イールドであり、ポートフォリオの分散効果が期待できる（武田 [1998] 等を参照）。こうした点が、注目を集める所以である。

証券の一般的仕組み

ILSを発行する保険会社¹⁹は、特別目的会社（special purpose vehicle/company）を設立するのが通例である。特別目的会社は、保険会社と再保険契約を締結する一方、投資家に対して証券を発行する。債券の満期までにあらかじめ定められた事象が発生すれば、元利金の一定割合が没収されるというリスクを投資家が負う。没収割合は、元本全額から、利金のみまでさまざまな実例がある。投資家から集められた元本は信託において安全資産に投資され、投資家にはそこから得られた収益と保険会社からの再保険料が利金として支払われる（図表 2-4）。

図表 2-4 ILSのストラクチャー例



ILSでは、元利金の一定割合が没収される事象の決め方がきわめて重要なファクターである。この事象はリスク指標と呼ばれ、特定の保険会社の実損額を指標とする場合、保険業界の保険金支払額に関するインデックスを使用する場合、それ以外の客観的な指標を用いる場合の3つに大別される。

保険会社の実損額を指標とする場合、発行する側としては被った損失が填補されるので、最も望ましい形態である。しかし、モラル・ハザード（保険金支払軽減の努力を怠る）や逆選択（保険契約ポートフォリオ中、収益性が悪いと思われるものだけを対象とする）が生じる危険性がある。また、投資家側は損失の実態が完全には見えないことから、過大なプレミアムを要求する可能性もある。

業界全体の損害額に関するインデックスを用いる場合には、こうした問題はほと

19 ILSの発行者は保険会社に限らないが、ここでは説明の簡便性のため、保険会社と呼んでいる。

んど発生しない。業界全体の損害額インデックスの例としては、米国のPCS²⁰などが有名である。ただし、このようなインデックスが存在している地域・リスク対象は限られていることに加え、当該保険会社が必要とするカバーとインデックスとの乖離から生じるベース・リスクを被ることになる。

最後の客観的指標は、例えば地震のマグニチュードのように、損害規模と関連した客観指標をベースとして支払額を決めるものである。この場合、指標に関する客観性・信頼度が高いうえに、米国のPCSのような特殊なインデックスが存在していない地域の保険リスクも対象とすることができる。ただし、保険事故を引き起こす原因となる事象に関する数値を指標化しているだけであり、実際に支払うべき保険金とのベース・リスクは一段と広がることとなる。

ILSのプライシング

ILSのプライシングは、次に掲げる保険デリバティブのプライシング同様、重要かつ興味深い問題である。ここでは保険リスクの計量について簡単に述べる。

一般に保険リスクを扱ううえでは事故の発生頻度と発生時の損害額の推定が重要となる。このうち、より困難なのは損害額の推定であるといわれている。

損害額の推定方法として、すぐに思いつく手法は、過去に起きた同種の自然災害の被害データを集め、インフレ率等で現在価値に換算したり、人災に関わる部分については人口増加率を勘案するといった調整を施す等の手法であろう。しかし、人口増加には地域間格差もあり、また建物の材質・構造も大きく変化していることから、同手法での推定には限界がある。

上記問題点を解決するために、過去に起きた自然災害と同じ規模の災害が現時点で発生したと仮定して、各地域での被害額の推定を行う手法が考えられる。ただし、直接過去の自然災害を用いようとすると、1つの自然災害のデータを適用できるのはそれが実際に発生した地域に限定される。そこで、過去の自然災害の主要パラメーター（台風であれば、中心気圧や速度など）を分析し、それぞれのパラメーターに適当な確率分布をあてはめて、それらをもとに架空の自然災害を発生させるという方法が考えられる。現在はこの手法が最も多く使われている²¹。

こうした評価はきわめて複雑である。最近では保険リスクを専門に分析・リスク評価・コンサルティングを行ったり、解析用ソフトウェアを提供する会社が出現している。ILSの発行にあたり、価格の正当性・透明性を確保する観点から、リスク評価をこうしたコンサルティング会社に依頼することが多い。

20 全米を9つの地域に分け、そこである特定の期間（通常3カ月）に発生した自然災害損失の累計値をインデックス化したもの。なお詳細についてはCanter, Cole and Sandor [1996] を参照のこと。

21 究極的には、自然災害の発生メカニズムとそれがもたらす被害のプロセスそのものをモデル化し、シミュレーションするという方法も考えられる。しかし、こうした分析はかなり複雑であり、現時点ではあまり現実的な選択肢とはいえないようである。

プライシングにおいては、その他にもいくつか考慮すべき点がある。例えば、地震等の発生確率に関して、時間依存確率（time-dependent probability）の問題が挙げられる。地震、とくに大地震は、その発生メカニズムから考えて、長期の周期性があると想定される。それが正しいと仮定すれば、地震発生に関する条件付確率は、地震が発生していないという条件下では徐々に上昇し、逆にある程度の規模の地震が発生した後は大きく低下することになる。したがって、債券発行時点で、現在どのような状況に置かれているかの分析もきわめて重要となる。

このことは、既発債の価格にも影響する可能性がある。例えば、元利金没収レベル以下で比較的大規模な地震が発生し、それを受けて投資家が債券満期までに再度大地震が起こる可能性は低くなったと考えたとすれば、当該債券の魅力は劇的に上昇し、価格が急騰する可能性がある。

その他の自然災害、例えば台風や竜巻などは、地震のように発生確率が時点に依存していることはないと考えられる。しかし、例えばエルニーニョ等が台風発生に与える影響や、台風発生の季節性といった問題は、証券のプライシングには重要な要素である²²。

最近の発行例

図表 2 - 5 に1998年以降の主な発行例を掲載した。1998年の発行例は、損害保険に関するILSに限定しても²³、14もの発行例が確認されており、1997年以前での発行数10例と比較すると急激な伸びであることがわかる。

表中、いくつかスワップ契約が見られる。スワップの場合、債券発行と比較してコストを抑えられるという利点がある一方、カウンター・パーティーが限定されるため高額のリスク転嫁には向かないことや、元本の移動がないために信用リスクが生じ、その結果、長期契約ではかえって割高になるといった問題点もある。転嫁するリスクのプロファイルによっては有効な手段となろう。

このほか、Toyota Motor Creditの発行した証券は、対象リスクが巨大自然災害でなくリース車の契約満了時における残存価格の変動である点が特徴的である。あらかじめ見込んでいた残存価格と比べて、実際のリース車の価値が9%以上下がっていた場合、その下落分の9割が証券を購入した投資家の負担となる（日吉[1998]）。

また、オリエンタル・ランドの地震債券は、東京湾沿いに集中する同社の施設に対する地震リスクを、保険会社を経由せず資本市場によってヘッジしているものである。地震リスクを事業会社が直接ヘッジした世界で最初の事例である。

22 こうした要素を考慮したうえで、個別のILSのプライシングについて考察を加えた論文として、Schmock [1998] がある。Schmock [1998] は、ウィンターツール（Winterthur）社が1997年に発行した保険リスク付転換社債について、さまざまな推定手法で価格を計算し、各モデルの問題点・頑健性などを検証している。

23 図表 2 - 5 にはないが、生命保険の証券化もいくつか行われている。

図表 2 - 5 1998年以降に発行された主なILS（損害保険関連）

発行会社名	リスク相当額 ²⁴	元本	期間	対象リスク	リスク指標
Centre Solutions	\$72.0百万	\$83.5百万	0.9～11.9年	フロリダ風水災	実損填補
三井海上 ^a	\$30.0百万	\$30.0百万	3年	南関東の地震	客観指標
USAA	\$450.0百万	\$450.0百万	1～1.5年	東海岸ハリケーン	実損填補
安田火災	\$80.0百万	\$80.0百万	5～7年	日本の台風	実損填補
AXA ^b	\$40.0百万	\$40.0百万	1年	PCS(カリフォルニア地震)	インデックス
Toyota Motor Credit	\$566.0百万	\$566.0百万	1～3年	リース車の残存価格	実損填補
Mosaic Re	\$45.0百万	\$54.0百万	1～2.5年	保険会社の実損	実損填補
XL MidOcean Re ^a	\$100.0百万	\$100.0百万	1年	米国風水災・地震	実損填補
Allianz ^b	\$150.0百万	\$150.0百万	3+3年	ドイツの風害・雹害	実損填補
Societe General ^a	\$25.0百万	\$25.0百万	1年	PCS(米国の地震)	インデックス
AXA ^b	\$25.0百万 ^c	\$25.0百万 ^c	1年	PCS(カリフォルニア地震)	インデックス
Societe General ^a	\$15.0百万	\$15.0百万	1年	PCS(米国の地震)	インデックス
Centre Solutions	\$54.0百万	\$56.6百万	1～2年	フロリダ風水災	実損填補
Mosaic Re	\$50.0百万	\$59.0百万	0.9～2年	保険会社の実損	実損填補
オリエンタル・ランド	\$100.0百万	\$200.0百万	5年	南関東の地震	客観指標

出典：Swiss Re New Markets社

：a：スワップ契約、b：債券オプション契約、c：推定額

八. 保険デリバティブ

保険デリバティブとは

保険デリバティブは、保険に関連する指数にリンクした派生商品のことである。上場デリバティブという意味では、1992年にシカゴ商品取引所（Chicago Board of Trade）に上場されたISO（Insurance Services Office）が提供するインデックスにリンクした先物・オプションが始まりである。その後、ISOが1995年のカリフォルニア・ノースリッジ地震の損失を十分反映できなかったことがきっかけで、同先物・オプションのインデックスがPCS（Property Claims Service）に変更された。

上場デリバティブとしては、上記に加え、1996年に法人登録されたバミューダ商品取引所（Bermuda Commodities Exchange）におけるオプションがある。ここではGuy Carpenter Catastrophe Index（GCCCI）という指数が用いられている²⁵。この指数は、特定の保険会社（計40社前後）の保険金支払額・保険料収入をもとに計算される。対象となるリスクは米国内で発生するハリケーン・竜巻等風水災リスクによる

24 リスク相当額は、投資家が被りうる最大損失額。

25 この指数はGuy Carpenter社の100%子会社であるIndexCo社によって発表されている。

個人財産損害である。なお、PCSオプションと比較すると、

ある期間中に特定の対象地域について発生した損失額をベースにインデックスが計算されるのはPCSと同様であるが、リスク総額以外に、単一の事象から生じた最大損失額および第二損失額もインデックスとなっている

取り扱われているオプションはデジタル・オプション²⁶であるという点が異なっている。

また、シカゴ商業取引所（Chicago Mercantile Exchange、以下CME）では、1999年9月より天候デリバティブに関する先物・オプションが上場された。ここで扱われているのは、気温を指数化したディグリー・デイ（degree days）²⁷指数を基準とした取引である。この取引は、上記2つと異なり、保険会社が被った損害を指数化したものではなく、ILSのところでも述べた客観指標を用いている点が特徴である。したがって、市場参加者は保険会社のみならず、気温の変動が収益増減に影響すると考えられるエネルギー関連、農業、飲料関係等の企業が利用するものと考えられる。

上記3つと多少毛色が異なるのが、1996年11月より開始されたカタストロフ・リスク取引所（Catastrophe Risk Exchange、以下CATEX）というニューヨークの取引所であろう。ここでは、リスクのスワップ取引が行われる。例えば、ある保険会社がカリフォルニアの地震リスクを別の特定のリスクと交換したい場合、その旨を取引ネットワーク上に公開すると他のCATEX参加者が閲覧し、希望すればその会社と交渉することができる。交渉は互いに匿名で行うことも可能である。以上から、CATEXは取引所というより情報交換所といえよう。当事者間のニーズが一致すれば、複雑なストラクチャーも可能である。しかし、相対取引ベースであるため、カウンター・パーティー・リスクは残ることとなる。

さらに、OTCデリバティブ取引も行われている模様である²⁸。ただし、そのマクロ的な取引状況を窺い知ることは難しい。Considine [1999]によると、上述した天候デリバティブは、1997年から取引が開始された模様である。その後、取引は大幅に拡大し、日本経済新聞²⁹によると、35億ドル程度にまで取引高が上昇したとのことである。ただし、CMEに上場されたことにより、今後は上場取引の方が好まれる（信用リスクがない）と考えられることから、OTCの取引は、ストラクチャーの複雑なもの等に限定されていくものと思われる。

26 原資産がある水準を上回って（下回って）いた場合、ある一定額が支払われるという契約のこと。バイナリー・オプションともいう。

27 ある標準的な気温（例えば18度）に対し、定められた期間の気温がどの程度ずれているかを表す指標。上昇方向にずれる場合をHDD（heating degree-days）、逆をCDD（cooling degree-days）という。例えば、30日CDDスワップを契約し、当該期間の平均気温が20度であれば、 $60 (= 2 \times 30)$ degree days に一単位当たりの約定金額を乗じたものを支払う。なお、こうした天候デリバティブの詳細については、Considine [1999]を参照されたい。

28 上記ILSにおけるスワップ取引もOTCデリバティブであるが、あくまで資本市場を用いたリスク移転であり、契約の流れがILSと同様であることから、ILSに分類するのが慣行のようである。

29 1999年6月28日朝刊「天候デリバティブ米で取引急増」より。

保険デリバティブのプライシング

保険デリバティブは、市場性のある商品なのでプライシングの研究対象となり得るが、次に述べるように市場での取引が活発でないことから、実データを用いた分析には限界がある。実務ではさまざまなプライシング技術が用いられているようではあるが、公表された研究報告は少ない。そのなかで、Christensen [1999] は、PCSオプションについて、市場参加者が指数効用関数に従うという前提のもとで、価格モデルおよび技術的な問題点について分析が加えられている。また、Considine [1999] には、天候デリバティブの簡潔なプライシング手法が紹介されている。

市場の現状

現時点では、どの市場も取引量は少額にとどまっている。理由としては、指数の計算根拠に対する信頼度、ベシス・リスクの存在等が挙げられている。

(4) ARTの今後

本節ではとくにILSと、金融リスク・保険リスクの融合商品について、今後どのように推移していくかについて考察する。

ILSは、上述したようにここ数年、発行数・発行額ともに増加傾向にあり、損害保険に関連するリスクに関してだけでも、トータルで発行数が24例、リスク相当額は20億ドルを上回っている。今後の需要・供給両面のニーズを勘案すると、ILSを利用して移転されるリスク量はさらに増えると予想される。

需要面とは、保険会社および再保険会社が、今後どの程度金融市場に保険リスクを移転したいか、ということである。いい換えれば、保険リスクは十分に保険会社・再保険会社で吸収されているか、ということになる。sigma [1997] は、自然災害のリスクがどの程度保険でカバーされているかを分析し、地震や洪水に対する備えが低いことを指摘している。例えば東京の大震災については、カバー率が5%であると推測している。こうした部分をカバーするためには、さらなるキャパシティーが必要となる。つまり、ILSの需要面でのニーズは高いと考えられる。

供給面のキャパシティーはどうか。一般にILSは、株式等の金融商品との相関がほとんどないと考えられていることから、投資家がこれをポートフォリオに組み入れるニーズはあると考えられる。こうした点を勘案し、sigma [1996] では、米国の投資銀行およびその他の投資家について、ILSへの投資額が米国株式時価総額の0.5~1.0%程度となるのが最適であるというシミュレーション結果から300~400億ドル程度のニーズはあると推測している。1998年末の株価時価総額が計算当時(1995年末)と比して倍増していることを勘案すると、単純計算では1,000億ドル近い吸収力を持っている可能性があることになる。

金融と保険リスクの融合商品についても、企業のリスク管理意識の向上やリスク管理技術の高度化などにより、取引ニーズが高まってくるものと予想される。

リスク管理意識の向上の一例としては、コーポレート・ファイナンスのなかで最適なリスク・ファイナンスを求めるといった概念が挙げられよう。これは、冒頭で述べたリスク保有かリスク移転かという問題を意識的に解決しようとするもので、例えば地震リスクについて、地震保険を付保するか、地震発生をトリガーとするコミットメントラインを設定するか、または何もせず地震発生時に融資を求めるか、さらには地震発生時の損失を減らすべく保有設備の補強を行うか、といった財務上の意思決定を扱うものである。

一方、リスク管理技術では、ダイナミック・フィナンシャル分析 (dynamic financial analysis) と呼ばれる手法が注目を集めている。これは元来、損害保険会社が自らの資産と負債を分析し、その結果を踏まえてどのように価格を決定し、決定された価格が需給にどのような影響を与えるか、さらにはどのように販売を行うべきかといった営業政策までもトータルに考えるために提言されている手法である。名称のダイナミックはこうした一連の意思決定の相互作用を動学的に考えることから来ている。ただし、昨今では金融リスクや保険リスクをトータルに捉えた分析手法というようなより広い概念として捉えられるようになってきている。

こうした概念・技法の浸透により、金融リスクと保険リスクの一元管理がさらに加速されることとなり、ARTの必要性はさらに高まることになる。

3. 保険数理と金融工学の融合

ARTのような商品の登場は、金融・保険それぞれの分野の研究者および実務家達に、新鮮かつ重要な技術的テーマを提供することとなった。とくに重要な問題は、金融と保険のリスクが両方内包されている商品のプライシング、ヘッジ、リスク管理等はどのように行うべきかというものである。

金融商品についての価格理論は、とくに1970年代のオプション価格理論の登場以来、高度な数学が駆使され、金融工学もしくは数理ファイナンスという学術分野まで確立するという飛躍的發展を遂げている。一方、保険商品については、アクチュアリーが保険数学のなかで価格設定やリスク把握手法の考え方を進展させてきた。とくに、保険ビジネスが持つ確率的要素を解析する危険論 (risk theory) 、なかでも契約全体の確率的動向を勘案した集合的危険論 (collective risk theory) は、昨今の保険数理理論において重要な役割を果たしている。

金融工学と集合的危険論は、理論の鍵となるのが確率過程論であるという共通点がある。確率過程は、主に20世紀に築き上げられた理論であるが、その主要な適用例が保険および金融である。両者が基礎モデルとして用いるブラウン運動とポアソン過程は、現代の確率過程論で中心的な役割を担っている。

しかしながら、両者の価格理論へのアプローチには大きな違いがあり、その結果、理論の融合に向けて接近しようという動きはほとんどみられなかった。比較的最近になるまで、保険数理の世界で金融工学理論を適用した研究は限られていたし、ファイナンスの世界では保険数理の応用はほとんど見受けられなかった。

それが、上記にみられる金融商品と保険商品の融合や、さらには信用リスク・モデル等において、ジャンプを含んだモデル（保険では一般的なモデル）が導入されるにつれ、両者の技術的ギャップは徐々に埋まりつつある³⁰。

本章では、それぞれの理論展開の経緯・内容を対比させながら簡単にまとめた後、今後どのように理論的な統合が図られていくかについて、考察を加える³¹。

（１）保険数理の歴史的経緯

本節では、集合的危険論にポイントを絞って、その歴史的経緯を述べる。一般にこのような保険数学については金融の分野で相対的に馴染みが薄いと思われるが、昨今信用リスク・モデルへの応用がみられ始めていることから、ここで基礎的なサーベイを行っておく意義があると考え³²。

以下、集合的危険論について、その歴史的背景も含めて簡潔に述べた後、集合的危険論の基本モデルとその一般化を扱い、最後に集合的危険論の枠組みのなかで保険料をどのように決められるか（保険料計算原理）について説明する。

イ．集合的危険論とは何か

保険数学は17世紀末の生命表による年金原価計算に端を発している。古典的保険数学理論は、同種のリスクを数多く抱えることで、個々のリスクは不安定であっても、全体としては安定したポートフォリオになるという、大数の法則を基本としている。しかしながら実際には、とくに損害保険会社においてときとして巨大なリスクの顕在化に見舞われてきた。産業の発達に伴うリスクの巨大化がこの傾向に拍車をかけることとなった。

このようなリスクに直面している保険会社のポートフォリオを分析対象とするのが集合的危険論である。この理論では、保険契約集団を考え、時間の経過とともに生じる確率的事象がその集団の収支変動等にどのような影響を与えるかについて考察する。分析の対象は、保険会社が破産する確率、またそれに備えるための保険料水準または責任準備金水準、初期段階の資本金水準等である。

30 両者を扱ったテキストとしてRolski, Schmidli, Schmidt and Teugels [1999]がある。ただしこの本は、主として保険の確率過程を扱っている。

31 本章全体の構成について、Embrechts, Frey and Furrer [1998]を参考にした。

32 より詳しく理解するには、Bühlmann [1970]、Gerber [1979]等を参照されたい。

ロ. 集合的危険論の基本モデル

集合的危険論の基本モデルは、ルンドベルイ (Lundberg) クラメール (Cramér) という 2 人の学者の貢献によって発展したため、クラメール - ルンドベルイ・モデルと呼ばれている。ルンドベルイは、(損害保険の) 保険金の発生を次のように定義される斉時ポアソン過程でモデル化することを提案した。

定義：計数過程³³ $N = \{N(t)\}_t$ が次の条件を満たすとき、強度 (intensity) $\lambda > 0$ を持つ斉時ポアソン過程 (homogeneous Poisson process) という。

(a) $N(0) = 0$, a.s.³⁴

(b) N は独立増分を持つ。すなわち、任意の時点 $0 \leq s < t$ に対し、増分 $N(t) - N(s)$ は、 s 時点までの履歴 $\{N(u), u \leq s\}$ と独立である。

(c) N は定常増分を持つ。すなわち、任意の時点 $0 \leq s < t$ に対し、増分 $N(t) - N(s)$ の確率分布は、時点 s に依存せず区間の長さ $t - s$ にもみ依存し、パラメーター $\lambda(t - s)$ のポアソン分布に従う。

ポアソン過程は、ブラウン運動と同様独立かつ定常増分を持つ。独立かつ定常増分を持ち、ある種の滑らかさ³⁵を有している確率過程をレヴィ (Lévy) 過程と呼ぶが、ブラウン運動と斉時ポアソン過程は、レヴィ過程の代表例である。

保険への適用において、 $N(t)$ は t 時点までの累積保険事故発生数を意味する。これにより k 番目の保険事故発生時点 A_k は、

$$A_k = \inf \{ t \geq 0 : N(t) \geq k \} \quad (1)$$

と定義できる。

($k - 1$) 番目の事故と k 番目の事故の発生間隔を T_k とおく、すなわち

$$T_1 = A_1, T_k = A_k - A_{k-1}, k = 2, 3, \dots$$

とおくと、 $N(t)$ が斉時ポアソン過程の場合、各 T_k は互いに独立な指数分布 (平均 $1/\lambda$) に従うことがわかる。

次に、各保険事故における保険金額の分布を考える。特定の分布形を前提とせず、 k 番目の事故における保険金額 X_k は有限の平均 μ を持ち、分布関数 F に従う (X は必ず正であるから $F(0) = 0$) という仮定だけをおく。また、任意の 2 つの保険金額は互いに独立とする。以上から、 t 時点までの総保険金額 $S(t)$ は、

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k \quad (2)$$

33 ある事象が時点 t までに生じた回数を変換する確率過程 $N = \{N(t)\}_t, t \geq 0$ のこと。

34 「ほとんど確実に (almost surely)」の略。数学的には、確率 1 で発生する事象のことである。

35 サンプルパスが右連続かつ有限な左極限が存在すること。

となる。このような確率過程 $S(t)$ を一般に複合ポアソン過程 (compound Poisson process) といい、その分布関数は次のように書ける³⁶。

$$G_t(x) \equiv P(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) F^{n*}(x), \quad x, t \geq 0 \quad (3)$$

$P(A)$ は事象 A の発生確率を表す。この分布を実際に計算するのは簡単でない。

収入保険料 ($I(t)$) については、確率過程を用いず一定割合で増加する、すなわち $I(t) = ct$ とする。定数 c は、単位時間当たりの収入保険料を表している。

さらに、保険の引受開始時点 ($t = 0$) における初期出資を $u \geq 0$ と置く。

以上が基本的なパーツである³⁷。このセットアップにより、保険会社の収支は次のような危険過程 $U(t)$ に従うことになる。

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0 \quad (4)$$

これをクラメール=ルンドベルイ・モデルという。

集会的危険論で中心的に扱われるのが、破産確率および破産時点である。有限時間 T までの破産確率を次のように定義する。

$$\psi(u, T) = P(U(t) < 0, 0 \leq \exists t \leq T) \quad (5)$$

とくに $T = \infty$ とおいた場合の破産確率を $\Psi(u)$ と書く。また、破産時点を

$$\tau(T) = \inf \{ t : 0 \leq t \leq T, U(t) < 0 \} \quad (6)$$

と記す (ここで右辺の $\{ \}$ 内が空集合の場合、 $\tau(T) = \infty$)。ここで、

$$c - \lambda\mu > 0 \quad (7)$$

が成立している場合には、 $\lim_u \Psi(u) = 0$ となることが知られている。つまりこの状態では、初期出資が厚ければ破産しないということになる。 $\lambda\mu$ は単位時間当たりの純保険料、つまり保険金額の期待値であるから、条件(7)は単位時間当たりの収入保険料 c が純保険料より大きいことを示している。よって、条件(7)を net profit 条件と呼び、以下ではつねに成立していると仮定する。また、

36 ここで、 $F^{n*}(x)$ は F の n 回たたみ込み (確率分布 F に従う事象を独立に n 回発生させたとき、発生値の合計が x 以下である確率) を表す。 $n=0$ の場合は、 $F^{0*}(x) = 0, x < 0, F^{0*}(x) = 1, x \geq 0$ と定義する。

37 このモデルは現実を完全に記述しているモデルとはいえない。例えば、事故の発生頻度における季節性やインフレなどが考慮されていない。ここでは拡張を行う前に、基本モデルの特性について考えてみる。

$$c = (1+\rho)\lambda\mu \quad (8)$$

を満たす ρ を安全付加保険料率 (safety loading) という。条件(7)が成立していれば、 $\rho = c/\lambda\mu - 1$ は正となる。

上記モデルでは、破産確率 $\Psi(u)$ について次の定理が成立する。

定理：クラメール=ルンドベルイ・モデルでは、次式が成立する。

$$1 - \Psi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1+\rho)^{-n} F_I^{n*}(u), \quad u \geq 0 \quad (9)$$

ここで F_I は次式で定義される分布関数 (ただし $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$)、

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy \quad (10)$$

初期資本 $u=0$ のとき、 $\Psi(0) = 1/(1+\rho) = \lambda\mu/c$ となり、破産確率は純保険料 / 収入保険料となる。したがって、純保険料を収入保険料とした場合には、いつか必ず破産する。この結果が保険金額の分布形に依存しないというのは興味深い点である。

上記(9)の $\Psi(u)$ の数式を簡略化することは可能だろうか。例として、保険金額が平均 μ の指数分布にしたがっている場合、定理から、

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{\rho}{\mu(1+\rho)} u\right) \quad (11)$$

と書けることがわかる。ただし、このように解けるのは例外的なケースである。そこで、不等式もしくは極限式で $\Psi(u)$ を評価することを考え、まず、次のような定数 $\nu > 0$ が存在する場合を考える。

$$\frac{c}{\lambda} = \int_0^{\infty} \exp(\nu y) \bar{F}(y) dy = \frac{m_X(\nu) - 1}{\nu} \quad (12)$$

ここで、 $m_X(\nu)$ は分布 F の積率母関数を表す。 $\nu > 0$ はルンドベルイ指数 (Lundberg exponent) と呼ばれるが、この時、次の定理が成立する。

定理：（クラメル=ルンドベルイの定理）

ルンドベルイ指数 $\nu > 0$ が存在する場合、任意の $u \geq 0$ に対し、

$$\Psi(u) \leq \exp(-\nu u) \quad (13)$$

が成立する。さらに、

$$\int_0^{\infty} x \exp(\nu x) \bar{F}(x) dx < \infty \quad (14)$$

となる場合には、次の極限式が成立する。

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \exp(\nu u) \Psi(u) = \frac{c - \lambda \mu}{\lambda m'_X(\nu) - c} \quad (15)$$

この定理により、破産確率の評価式（13）や極限式（15）が得られる。ただし、前提となるルンドベルイ指数が存在するには、分布の右裾が少なくとも指数的に減少している必要があるが、この条件を満たす分布は、指数分布やガンマ分布などに限定される。保険金額はファット・テールな分布に従うことが多いため、上記不等式や極限式は使えないことも多い。

もう少し広い範囲の分布をカバーするために、区間 $[0, \infty]$ で定義された F_I が、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_I^{2^*}(x)}{1 - F_I(x)} = 2 \quad (16)$$

を満たすとする。この場合、次の定理が成立する。

定理：式（16）が満たされるとき、次式が成立する。

$$\Psi(u) \sim \frac{1}{p} \bar{F}_I(u), \quad u \rightarrow \infty \quad (17)$$

F_I の右裾は、ゆっくり減少する（ $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(\varepsilon x) \bar{F}_I(x) = \infty$ が成立）ことが知られており、パレート分布、対数正規分布、ワイブル分布等、多くの分布 F に対し、 F_I がこの条件を満たす。

これまでは極限的な破産確率 $\Psi(u)$ についてみてきたが、有限時間での破産確率 $\Psi(u, T)$ についてもさまざまな評価手法が考案されている。なかでも拡散近似（diffusion approximation）と呼ばれる手法³⁸は、金融と保険の融合にも深く関わりを持つものであり、さまざまな研究が試みられている。

.....
38 拡散近似についてはGrandell [1991] のAppendix A.4等を参照のこと。

八. モデルの一般化

ここまでの議論は、基本的なクラメル - ルンドベルイ・モデルに限定されていた。より現実的な分析を行うためには、モデルの一般化が必要となる。本節では、クラメル - ルンドベルイ・モデルにおいて斉時ポアソン過程と仮定されていた保険事故発生数について、いくつかの一般化事例を紹介する。

非斉時ポアソン過程

まず、ポアソン過程 $\lambda > 0$ の強度を時間の関数とする。これは例えば、契約の増加による単位時間あたり平均事故発生数の増加をモデルに内包しようというものである。モデルを構築するために、まず連続非減少関数 $A(t)$ ($A(0) = 0$) を考える。次に、独立増分を持つ計数過程 $N(t)$ を考え、 $N(t) - N(s)$ が $A(t) - A(s)$ を強度とするポアソン分布に従うとする。この $N(t)$ は非斉時ポアソン過程 (inhomogeneous Poisson process) と呼ばれ、 $A(t)$ は強度測度 (intensity measure) または平均値関数 (mean value function) と呼ばれる。 $A(t)$ に対して

$$A(t) = \int_0^t \alpha(s) ds \quad (18)$$

という関係を満たす $\alpha(s)$ を強度関数 (intensity function) と呼ぶ³⁹。 $\alpha(s)$ は s 時点の瞬間的な事故発生数を表していると解釈できる。契約数の増加によって事故発生数が増加すると考えている場合、 $\alpha(s)$ が s 時点での契約数に比例していると考えられるのが自然であろう。したがって、 s 時点の瞬間的な純保険料は $\mu\alpha(s)$ と表されるので、付加保険料率を一定と仮定すると、 t 時点までの保険料 $I(t)$ は、

$$I(t) = \int_0^t (1+\rho)\mu\alpha(s) ds = (1+\rho)\mu A(t) \quad (19)$$

と表される。したがって、式(4)は

$$U(t) = u + I(t) - S(t) = u + (1+\rho)\mu A(t) - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k \quad (20)$$

と書けるが、これは $A^{-1}(t) = \sup\{s | A(s) \leq t\}$ を用いると、

$$\tilde{U}(t) \equiv U(A^{-1}(t)) = u + (1+\rho)\mu t - \sum_{k=1}^{\tilde{N}(t)} X_k \quad (21)$$

ただし、 $\tilde{N}(t)$ は強度 1 の斉時ポアソン過程 (標準斉時ポアソン過程)

39 この強度関数は信用リスク・モデルなどで使われているハザード関数 (hazard function) のことである。信用リスク・モデルについては、木島 [1998] 等を参照されたい。

と表される。式(21)の右辺はクラメル-ルンドベルイ・モデルに帰着されるので、これを用いて破産確率等を計算すればよいことになる。 A^{-1} はoperational time scaleと呼ばれる。つまり、時間とともに保険料・保険事故とも増大していくと考える代わりに、単に時間の測定単位が変化したと考えるのである。

確率的変動を持つ強度

次に、強度 λ を確定的な関数によって変換するのではなく、確率的に変動させることを考える。例えば、事故の発生数については、年によってかなりのばらつきがある⁴⁰ことから、 λ を確率変数とすることが考えられるが、これを混合ポアソン過程(mixed Poisson process)と呼ぶ。正式な定義は次のとおりである。

定義：Lを正の値を取る確率変数(つまり $P(L>0)=1$)とし、その分布関数をFとする。また、 $\tilde{N}(t)$ をLと独立な標準斉時ポアソン過程とする。このとき、確率過程 $N \equiv \tilde{N} \circ L \equiv (\tilde{N}(Lt))_t$ を混合ポアソン過程という。

このとき、 $0 \leq s < t$ に対し増分 $N(t) - N(s)$ は

$$P(N(t) - N(s) = k) = \int_0^{\infty} \frac{\{L(t-s)\}^k}{k!} \exp\{-L(t-s)\} dF(L) \quad (22)$$

を満たす。混合ポアソン過程は斉時ポアソン過程と比べ、平均が同じであれば分散が大きい。これが保険事故発生数のばらつきを表現していることになる。また、混合ポアソン過程は定常増分過程ではあるが、増分の独立性は成立しない。

混合ポアソン過程で最も有名なのは、Lの密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \alpha^v x^{v-1} e^{-\alpha x} \quad (23)$$

$$\text{ここで、} \Gamma(v) = \int_0^{\infty} x^{v-1} e^{-x} dx \quad (\text{ガンマ関数})$$

となるガンマ分布を想定するモデルである⁴¹。この場合、上記Nは負の二項過程(negative binomial process)またはポーヤ過程(Pólya process)と呼ばれる。この場合N(t)は負の二項分布に従うことがわかる。

さらに一般化し、パラメーターが時間によって変動する確率過程であると考えられるモデルを二重確率ポアソン過程(doubly stochastic Poisson process)という。

40 斉時ポアソン過程においても、ある単位時間における事故発生数には、ばらつきが生じる。ただし、斉時ポアソン過程に従う場合、ポアソン分布の特性から、分散は平均 λ と一致することが分かっているが、ここでは観測されたデータから計算される分散が、 λ と比べてかなり大きい場合を考えている。

41 Credit Suisse Financial Products社の信用リスク管理モデルCreditRisk⁺のなかで、デフォルト率に変動性を持たせるために同モデルが応用されている。詳細は、Credit Suisse Financial Products [1997]を参照のこと。

定義： $\Lambda(t)$ をランダム測度⁴²とし、 $\tilde{N}(t)$ を $\Lambda(t)$ と独立な標準斉時ポアソン過程とする。このとき、確率過程 $N = \tilde{N} \circ \Lambda \equiv \{\tilde{N}(\Lambda(t))\}_t$ を二重確率ポアソン過程、またはコックス過程 (Cox process) という。

ランダム測度 $\Lambda(t)$ がある正の値を取る確率過程 $\lambda(t)$ を用いて、

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda_s(s) ds \quad (24)$$

と表せる場合、 $\lambda(t)$ を強度過程 (intensity process)⁴³ という。このとき、 $0 \leq s < t$ とすると、増分 $N(t) - N(s)$ について

$$P(N(t) - N(s) = k) = E \left[\frac{1}{k!} \left\{ \int_s^t \lambda(u) du \right\}^k \exp \left\{ - \int_s^t \lambda(u) du \right\} \right] \quad (25)$$

が成立する。ここで、 $\lambda(t) = L$ (L は混合ポアソン過程の定義で用いた確率変数) とおけば、混合ポアソン過程となることから、混合ポアソン過程は、二重確率ポアソン過程の特別な場合であることがわかる。

混合ポアソン過程、二重確率ポアソン過程ともに、破産確率の導出は必ずしも容易でなく、ある程度限定された条件のもとでしか求めることができない。

事故発生間隔の一般化

次に、発生間隔に関する一般化を考える。斉時ポアソン過程では、事故発生間隔は指数分布にしたがっていたが、これを一般の分布に拡張した確率過程を再生過程 (renewal process) という。定義は次のとおりである。

定義：ある点過程⁴⁴ N において、その発生間隔 $(T_k)_{k \geq 1}$ が互いに独立で、 T_2, T_3, \dots が同じ分布 G に従うとき、 N を再生過程と呼ぶ。 T_1 も G に従う場合、通常再生過程 (ordinary renewal process) という。

さらに、 G が平均 $1/\lambda$ を持ち、 T_1 の分布 G_0 が $G_0(x) = \lambda \int_0^x \bar{G}(s) ds$ を満たすとき、定常再生過程 (stationary renewal process) という。

42 確率過程 $\Lambda(t)$ が、確率1で $\Lambda(0)=0$ となり、任意の $t > 0$ に対して、 $\Lambda(t) < \infty$ で、非減少なサンプルパスを持つとき、その確率過程をランダム測度 (random measure) という。

43 信用リスク・モデル等で用いられるハザード過程 (hazard process) のこと。

44 点過程の厳密な定義は Rolski, Schmidli, Schmidt and Teugels [1999] 等を参照のこと。簡単には、あるランダムな事象の発生間隔に対する確率過程であると考えて差し支えない。

再生過程も、混合ポアソン過程や二重確率ポアソン過程と同程度に一般化を進めたモデルではあるが、破産確率の導出については、再生過程の方が比較的容易に計算できることが知られている⁴⁵。

経済ファクターの導入

これまでの議論のなかでは、期待インフレ率を加味した現在価値の概念をはじめとする経済ファクターについて触れていなかった。しかし、最近では保険モデルの中に金融モデルの要素が取り入れられており、例えば、Delbaen and Haezendonck [1989] は、無裁定市場のもとで、経済的ファクターを組み込めるようなフレームワークを構築している。この辺りから金融への融合が徐々に始まっている。

二. 保険料計算原理

集会的危険論の考察から、純保険料を保険料とした場合、保険会社は必ず破産することがわかる。それでは適正な保険料はどのように決められるのだろうか。これを考察しているのが保険料計算原理 (premium calculation principles) である。

保険料計算原理は、ある単位時間の保険金総額を表す確率変数 S から単位時間保険料 c という実数への汎関数 H として定義される。つまり、 $c=H(S)$ となる。こうした汎関数 H にはいくつかの種類が提案されている。

最も単純なのは、 $c=E[S]$ とする純保険料原理 (net-premium principle) である。ただし、上記のとおり、この原理ではいつか必ず破産することから保険事業そのものが成立しない。そこで純保険料をベースとして、そこに何らかの付加保険料を導入する原理が存在する。次の4つが代表例である。

$$\text{期待値原理 (expectation principle) : } \quad c = E[S] + \delta E[S]$$

$$\text{分散原理 (variance principle) : } \quad c = E[S] + \delta \text{Var}[S]$$

$$\text{標準偏差原理 (standard deviation principle) : } \quad c = E[S] + \delta \sqrt{\text{Var}[S]}$$

$$\text{半分散原理 (semi-variance principle) : } \quad c = E[S] + \delta E[\{(S - E[S])_+\}^2]$$

一方、効用理論によって定義されている考え方もいくつかある。一般には、保険会社にある効用関数 $u(x)$ を想定して、その下で保険料と保険金支払が均衡する、つまり $u(x) = E[u(x+c - S)]$ が成立するという前提において保険料計算原理を導くことになる。例えば、指数効用関数 $u(x) = (1 - \exp(-\delta x))/\delta$ を選んだ場合には、保険料計算原理は次のようになることが簡単に示される。

45 詳細は Embrechts, Frey and Furrer [1998] 等を参照されたい。

指数原理 (exponential principle) :
$$c = \frac{\log E[\exp(\delta S)]}{\delta}$$

また、バリュー・アット・リスク (VaR) と同様にパーセンタイル値に着目した次の原理も興味深い。

分位原理 (quantile principle) :
$$c = F^{\leftarrow}(1-\delta)$$

ここで、 S は分布 F に従うとし、 $0 \leq \delta \leq 1$ 、 $F^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \in \mathbf{R} : F(x) \geq y\}$ (分位関数) である。例えば $\delta = 0.05$ とおけば、保険料は上位5%の損失額と同等となる。

最後に、金融の価格理論との関連で研究者の間で注目を集めている考え方として、エッシャー原理を掲げておく。

エッシャー原理 (Esscher principle) :
$$c = \frac{E[X \exp(\delta X)]}{E[\exp(\delta X)]}$$

この原理は直観的にはわかりにくい⁴⁶が、Bühlmann [1980] が均衡理論を用いて同原理を導いているので、簡単に紹介する。まず、 n 人の経済主体およびある確率空間 (Ω, F, P) を考え、その確率空間において発生した事象 (保険事故) $\omega \in \Omega$ によって経済主体 i が被る損失額を $X_i(\omega)$ とする。さらに、この経済主体間は保険契約を互いに交わすことができ、それにより、事象 ω の発生で経済主体 i が得られる保険金額を $Y_i(\omega)$ とする⁴⁶。また、このとき保険料は、ある確率変数 φ により、

$$\text{Price}[Y_i] \equiv \int_{\omega \in \Omega} Y_i(\omega) \varphi(\omega) dP(\omega) = E[Y_i \varphi] \quad (26)$$

で表されるとする。ここで、任意の $\omega \in \Omega$ に対して $\sum_{i=1}^n Y_i(\omega) = 0$ が成立しているとき、 Y をリスク交換 (risk exchange) と呼ぶ。リスク交換が成立しているとき、全経済主体のトータルのリスク量は変わらない (保険リスクについて閉じている)。以下、リスク交換は常に成立していると仮定する。

この設定のもと、経済主体 i の効用を u_i とおいて、その期待値が保険リスクについて最大化される、つまり

$$\int_{\omega \in \Omega} u_i \left[-X_i(\omega) + Y_i(\omega) - \int_{\omega' \in \Omega} Y_i(\omega') \varphi(\omega') dP(\omega') \right] dP(\omega) \quad (27)$$

を最大化するような (φ, Y) の組を均衡と定義する。ここで、 u_i として上記の指数効用関数を選び、 $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ と置くと、いくつかの計算手順を踏むことにより、

46 経済主体 i は、保険の出し手となることもできる。その場合、 $Y_i(\omega)$ は負の値となる。

$$\varphi(\omega) = \frac{e^{\delta Z(\omega)}}{E[e^{\delta Z}]} \quad (28)$$

となることがわかる。よって、あるリスク X について、その保険料は

$$\frac{E[Xe^{\delta Z}]}{E[e^{\delta Z}]} \quad (29)$$

で与えられる。ここで X と $Z-X$ が独立だと仮定すれば、(29) 式は

$$\frac{E[Xe^{\delta Z}]}{E[e^{\delta Z}]} = \frac{E[Xe^{\delta X} e^{\delta(Z-X)}]}{E[e^{\delta X} e^{\delta(Z-X)}]} = \frac{E[Xe^{\delta X}] E[e^{\delta(Z-X)}]}{E[e^{\delta X}] E[e^{\delta(Z-X)}]} = \frac{E[Xe^{\delta X}]}{E[e^{\delta X}]} \quad (30)$$

となり、ここにエッシャー原理が導出される。

このエッシャー原理には別の解釈も存在する。それを説明するために、エッシャー変換 (Esscher transform) について述べる。エッシャー変換とは、確率測度 P を、次のようにして測度 Q に変換することである。

$$dQ(x) = \frac{e^{hx}}{E[e^{hX}]} dP(x) \quad (31)$$

この変換で求められた測度 Q のもとで、保険金額 S の期待値を計算し保険料とする方法がエッシャー原理ということになる⁴⁷。これは、リスク中立確率を求めてそのもとでの期待値を価格とする金融派生商品の価格計算手法と同じであり、このためエッシャー原理は昨今注目を集めている。

(2) 金融工学の歴史的経緯

かたや金融の世界における確率過程の導入は、バachelier (Bachelier) が1900年に書いた論文にさかのぼる。ただし、昨今の金融工学において幅広く活用されているモデルは、ブラック=ショールズ・モデルに端を発する派生商品理論によるところが大きい。その内容については、さまざまな本に紹介されていることから、本節ではブラック・ショールズ以降の流れを簡単に記すにとどめる。

イ. 基本モデル (無裁定と完備)

保険理論同様、金融の価格理論においても、原資産価格がどのように変動するかについてモデル化することが必要である。例えば、ブラック=ショールズ・モデル S_t では、原資産価格が幾何ブラウン運動、つまり

47 ただし、単に測度変換をして期待値をとる、というだけでは理念的な背景が見当たらない。上記均衡モデルの理由付けがあって意味付けを行うことができるわけである。

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (32)$$

(ここで W_t は標準ブラウン運動) に従うと考えている。その他のモデルでも、ある確率微分方程式で書かれたモデルが起点となっていることが多い。

ただし、金融、とくに派生商品の価格理論は、伝統的な保険価格理論にはない、次の2つの概念が存在する。

1. 無裁定 (no-arbitrage) : リスクを取ることなく超過収益は得られないという前提である。換言すれば、無裁定市場ではフリーランチはないということになる。無裁定市場を、市場が viable であるともいう。

厳密には、可予測⁴⁸ (predictable) で自己充足的⁴⁹ (self-financing) な戦略 ϕ に従うポートフォリオの t 時点の価値 $V_t(\phi)$ ($0 \leq t \leq T$) が、初期値 $V_0(\phi) = 0$ かつ最終値 $V_T(\phi) \geq 0$ (ただし $P(V_T(\phi) > 0) > 0$) を満たす場合⁵⁰、その戦略を裁定戦略といい、裁定戦略が存在しない市場を無裁定市場という。

2. 完備 (complete) : 派生証券の価格理論では、ある資産の派生証券を、その原資産と無リスク資産を用いた自己充足的な戦略で複製することから始まる。自己充足的な戦略で構築されたポートフォリオの満期時点の価値を派生商品の価値と同じにできるとき、その派生商品は複製可能 (replicable⁵¹) であるという。任意の派生商品が複製可能であるとき、市場は完備であるという。

この2つに密接に関連するのが、マルチンゲール理論である。マルチンゲール理論は多くのテキストで紹介されていることから、ここでは省略する。無裁定・完備性とマルチンゲール理論は次のように関連付けられる⁵²。

定理 : 市場が無裁定であることと、確率測度 P と同値⁵³ な確率測度 P^* が存在して、無リスク資産で割り引いた資産価値 (= 相対価格) がマルチンゲールとなる⁵⁴ ことは同値である。無裁定市場が完備であるためには、そのような確率測度 P^* が一意に定まることが必要十分である。

48 可予測は previsible ともいわれる。数学的定義は Lambertson and Lapeyre [1996] 等を参照されたい。

49 ポートフォリオを組み替える際に、資金の流出や流入がないこと。

50 Harrison and Pliska [1981] は、許容可能 (admissible) な戦略、すなわち可予測かつ自己充足的であり、ポートフォリオ価値がつねにゼロ以上な戦略を考え、初期値ゼロの許容可能戦略において、最終価値の期待値が正となる場合を裁定取引としている。

51 Harrison and Pliska [1981] は達成可能 (attainable) という用語を用いている。

52 これは、Harrison and Pliska [1981] による離散時間での定理である。より一般化された設定のもとでは、上記定理は多少の修正が必要となる。

53 確率測度 P と Q が同値であるとは、 $P(A) > 0 \iff Q(A) > 0 (\forall A \in \mathcal{F})$ となることである。

54 より一般化された設定のもとでは、ローカル・マルチンゲールとなる。

無裁定で完備な市場であれば、一意に定まる同値マルチンゲール測度 P^* を用いて派生商品の複製戦略を定めることができ、無裁定条件から、その複製のための初期コストがまさに派生商品の価格となる。

上記理論と相俟って、金融価格理論に重要な役割を果たすのが、確率解析もしくは確率積分の理論である。これは確率過程の世界における微積分の役割を果たしている。この基礎理論は伊藤によって構築されており、ファイナンスの世界でも「伊藤の補題」や「伊藤公式」の名が広く知られる結果となった。

ブラック=ショールズによる幾何ブラウン運動のモデル化の場合、同値な確率測度 P^* として、原資産の相対価格が P^* -マルチンゲールとなるものを構築できることがわかる。マルチンゲール表現定理から、 P^* が一意に定められることもわかるので、市場は完備である。金融工学のモデルの多くでは、同様の手順により価格ならびにヘッジ戦略を求める。

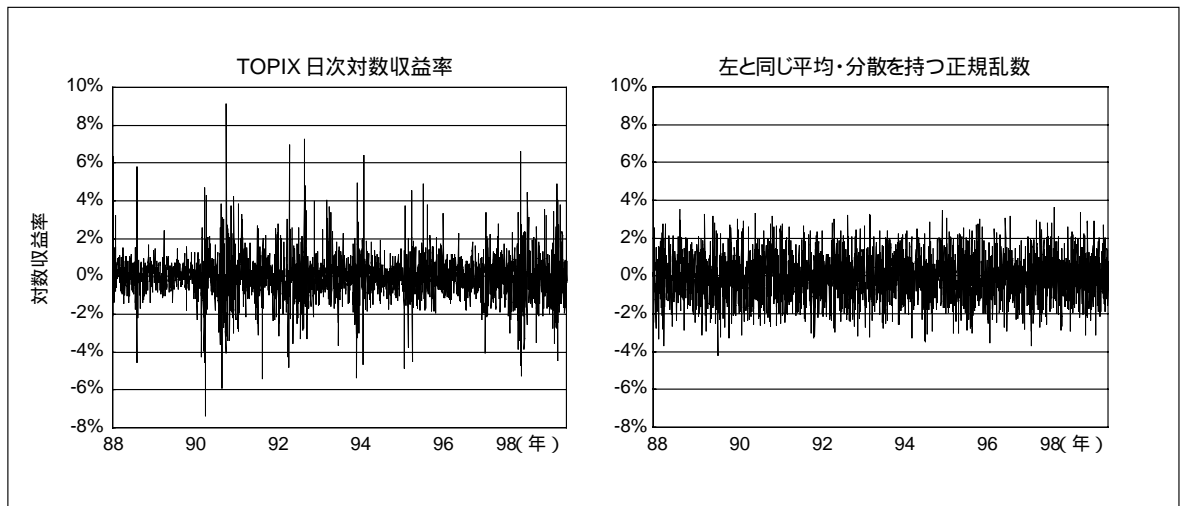
ロ. 一般化：非完備な市場

上記モデル化は、理想的な市場を前提としている。取引コストや税など市場の摩擦は一切認められず、売買単位も無限分割可能であると仮定されている。また、ヘッジ戦略は市場に何らインパクトを与えないことが想定されている。

原資産価格の推移についても、株価は幾何ブラウン運動に従う等の前提が置かれており、その場合株価の対数収益率が正規分布に従うはずであるが、ほとんどすべての実証研究において、この仮定は棄却されている。

図表 3-1 の左側は、1988年から1998年までのTOPIXの日次対数収益率データ、右側はそれと同じ平均・分散をもつ互いに独立な正規乱数を表示している。グラフから、TOPIXの対数収益率に関する特性として、ときどき大きなジャンプがあることや、分散にむらがあることなどがわかる。

図表 3-1 (左) TOPIXの日次対数収益率、(右) 同じ平均・分散を持つ正規乱数



こうした特徴をモデルに加味するアプローチがいくつか提唱されている。前者の特質を考慮したモデルの例としては、ジャンプ拡散モデル (jump-diffusion model) と呼ばれるものがあり、後者を考慮したモデルの代表例が、確率ボラティリティー・モデル (stochastic volatility model) である。これらのモデルの詳細は、多くの文献に研究成果として発表されているのでここでは省略する。

ただし、ここで一つ問題が生じる。より現実化されたモデルを原資産の振舞いに導入すると、市場が非完備となってしまうのである。非完備な場合、派生商品を完全に複製することはできず、複製費用を用いた価格付けもできない。

それに対し、いくつか興味深いアイデアが出されている。そのなかの1つが優複製⁵⁵ (superreplication) または優ヘッジ (superhedging) と呼ばれるものである。これは、満期時点で派生商品の価値を少なくとも下回らない戦略 (これを優複製戦略または優ヘッジ戦略という) のうち、初期コストが最小となる戦略の価値をもって派生商品の価格とするという考え方である。一見魅力的な概念だが、残念ながら必ずしも実用的とはいえない。例えば、ある非完備な市場下でコール・オプションの優複製価値を求めると、現時点の原資産と同じになる。つまり、コール・オプションのヘッジに、原資産が必要となってしまうのである。

優複製戦略の条件を多少緩和させた分位ヘッジ (quantile hedging) 概念を提供しているのが、Föllmer and Leukert [1999] である。彼らは、VaRと同様の概念を用い、ある確率 (例えば95%) で派生商品の価値を上回るような戦略のうち、初期コストが最小となる戦略を見つけ出し、その価値をもって派生商品価格としている。Sekine [1999] は、この概念を信用リスクに応用し、信用リスクのある債券の価格付けについて考察している。また、Föllmer and Leukert [1998] では、上記概念をさらに進め、ヘッジの結果発生する損失の期待値、もしくは損失を損失関数によって重み付けを行なったものの期待値を最小化するような戦略を提案している。この概念を彼らは効率的ヘッジ (efficient hedge) と呼んでいる。

それ以外のアイデアとして、複製ポートフォリオと派生商品の差から生じるリスクを最小化しようとする考え方がある。これはリスク最小化アプローチなどと呼ばれる。こうした戦略の存在に関する議論は、Schweizer [1991] 等に詳しい⁵⁶。

(3) 融合の流れ

以上みてきたように、これまでの保険数理と金融工学は、使っているツールこそ確率過程という共通のものであるが、アプローチは大きく異なっている。一言でいえば、金融 (派生商品) 理論においては、派生商品を完全にヘッジするために必要な複製費用として価格を算出していたのに対し、保険数理ではリスクテイクを所与のものとし、どのような初期資本 (さらには責任準備金や支払備金)・破産確率を

55 文献によっては「超複製」と訳されている。

56 小林 [1996] は、同手法の詳細およびその他の非完備市場におけるデリバティブ価格理論についてのサーベイを行っている。

選択するか、ということを考え、そのなかで望ましい保険料計算原理はどれであるかということを考えている。

しかしながら、融合の流れのなかで、両者統合の動きがいくつか見られる。保険の世界では、無裁定条件を仮定し、マルチンゲール理論を用いたプライシング概念がいくつか登場している (Delbaen and Haezendonck [1989]、Sondermann [1991])。

ここでは、Delbaen and Haezendonck [1989] を簡単に紹介する。彼らは満期 T を持つある保険契約集団を考え、その集まりでの t 時点までの発生保険金額 X_t は複合ポアソン過程に従うと仮定した。さらに、 t 時点において残存しているリスク ($X_T - X_t$) をある保険料 p_t で常に売却可能であるという仮定を置いた。以上から、 t 時点でのこのポートフォリオの価値は $S_t = p_t + X_t$ となる。このポートフォリオはいつでも売却可能であることから、無裁定を意味しており、 S_t をマルチンゲールとするような測度 Q が存在する。彼らはこの測度の1つを導出し、その測度下でも保険金額過程は複合ポアソン過程に従うことを示した。ただし市場は非完備なので、同値マルチンゲール測度は無限に存在する。彼らは、算出されたマルチンゲール測度に応じて、複数の保険料計算原理が導出されることを示した。

その後、保険デリバティブの登場により、保険商品の金融工学的アプローチはより多くみられるようになってきている。例えば、Meister [1995] は、非完備な保険デリバティブの価格を、指数効用関数と市場均衡理論を用いて導き (その結果、エッシャー原理が導出される)、さらにそのヘッジについてリスク最小化戦略を用いた手法を提言している。ただし、保険デリバティブそのものの取引量が少ないことから、データを用いた実証分析はうまくいかないようである。

逆に、金融分野においては、保険数理を応用してプライシング理論を展開した例はまだ多くない。ただし、上記のような非完備市場での価格付けを考える際には、優複製という戦略を取らなければリスクを甘受することとなり、その意味で保険価格理論と同様になる。したがって、何らかの金融資産価格原理なるものを仮定する必要があり、保険数理のコンセプトを応用できる可能性がある。

なかでも、エッシャー原理は、上述したような特徴から、リスク中立確率による期待値換算を多用する金融理論に当てはまりやすい。例えば、Gerber and Shiu [1994] は、原資産がさまざまな確率過程 (ポアソン過程、ガンマ過程等) に従うときに、そのオプション価格がどのように振る舞うかについてエッシャー変換を用いて研究している。Bühlmann, Delbaen, Embrechts and Shiryaev [1998] は、無裁定ではあるが非完備という市場において、派生商品のプライシングというエリアにおいて、(金融と保険) 両分野の間に存在している方法論的ギャップの橋渡し役として、(条件付) エッシャー変換を用いている。

このほか、金融のリスク管理については、とくに信用リスクの計量分析において保険数理の成果を適用するケースが散見される。Credit Suisse Financial Products社が1997年に発表した信用リスク管理ツールCreditRisk⁺ や、スイス銀行 (SBC、現UBS) の信用リスク対応会計ACRA (Actuarial Credit Risk Accounting) などが有名である。

4. Extreme Value Theory (EVT)

本章では、極値理論 (extreme value theory、以下EVT) について解説する。はじめに、EVTの基本的な理論について説明した後、より具体的に理解するために数値例を示し、最後に応用研究例を紹介する⁵⁷。極値の分析は今後金融・保険双方において重要度を増すと考えられ⁵⁸、その意味でEVTも注目されている。

(1) EVTとは

EVTを簡単に定義すれば、極値 (最大値など) がどのような確率的振舞いをするのかを研究対象とする理論ということとなろう。これは決して新しい理論ではなく、古くは水文学や気候学などを中心に発達してきたものである。

(2) EVTの基礎理論

EVTで着目するのは極端な値、すなわち最大値や上位 $\alpha\%$ といった値である。本節では次節での応用の準備として、最大値およびある閾値を超過したデータに関する理論について説明する。

イ. 最大値の確率的性質

まず記号を定義する。分析データは互いに独立で同一の分布関数 F に従う⁵⁹ 確率変数であると仮定し、 n 個の観測値を X_1, X_2, \dots, X_n と記す。また、最大値を

$$M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (33)$$

と定義する。ここで考えたいのは、最大値の確率分布、すなわち最大値がある値 x を超えない確率であるが、この計算は簡単であり、

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \{F(x)\}^n \quad (34)$$

となる。ここで、分布の右端 (right endpoint) を

$$x_F \equiv \sup\{x \in \mathbf{R} : F(x) < 1\} \quad (35)$$

57 本稿の解説にあたっては、Embrechts, Resnick and Samorodnitsky [1998] を参考にした。なお、EVTについてより詳しく学ぶには、Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [1997] 等を参照のこと。

58 例えば、1995年に開催されたResearch Conference on Risk Measurement and Systemic RiskのLuncheon Addressにおいて、グリーンズパンFRB議長は“Work that characterizes the statistical distribution of extreme events would be useful”と述べている。

59 以下、このことをiid (independent and identically distributed) と記す。

と定義すると（例：[0,1]の一様分布では $x_F = 1$ 、正規分布では $x_F = \infty$ ）

$$P(M_n \leq x) \rightarrow \begin{cases} 0 & x < x_F \\ 1 & x \geq x_F \end{cases} \quad n \rightarrow \infty \quad (36)$$

となるので、 M_n の単調増加性から、

$$M_n \rightarrow x_F \text{ a.s.}, \quad n \rightarrow \infty \quad (37)$$

となる。これはほとんど自明の結果である。正規分布で考えれば、試行回数を増やせば最大値は無限に大きくなるといっているに過ぎない。そこで次に、

最大値から適当な値を引いたり割ったりして正規化した

$$(M_n - d_n) / c_n \quad (38)$$

が、ある一定値に収束したり、ある分布に近づいたりしないか

ということを考える。

これは、確率・統計の世界で古くから行われてきた和の振舞いを理解するために用いたアプローチと同じである。やや余談になるが、和に対するアプローチを再認識することが、なぜ従来の確率・統計手法を単純にEVTにあてはめられないのかを理解する鍵となると考えられるので、次に簡単に説明する。

□. 和の確率的性質

われわれが通常扱う確率・統計のツールとしては、平均、分散などがあるが、これらは観測値の和を適当に正規化したものと考えることができる。 n 個の観測値の和を $S_n (= X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ とすると、標本平均は S_n をデータ数 n で割ったものであるし、標本分散は観測値の2乗の和をデータ数で割ったものから平均の2乗を引いたものである。

よく知られている大数の法則は、 S_n/n が $n \rightarrow \infty$ とすると X_n の母平均に収束していく⁶⁰ことを示している。ここではより一般化された法則を紹介しておく。

60 この収束が確率収束の場合を大数の弱法則、概収束の場合を大数の強法則と呼ぶ。

定理：(Marcinkiewicz = Zygmundの大数の強法則)

$p \in (0, 2)$ とする。ある定数 $a \in \mathbb{R}$ が存在して、

$$\frac{S_n - an}{n^{1/p}} \rightarrow 0, \text{ a.s. } n \rightarrow \infty \quad (39)$$

となるためには $E[|X|^p] < \infty$ が必要十分である。その場合、 a は、

$$a = \begin{cases} 0 & p \in (0, 1) \text{ のとき} \\ \mu & p \in [1, 2) \text{ のとき} \end{cases} \quad (40)$$

と選ぶことができる。ここで、 $\mu = E[X]$ である。

ここで $p=1$ の場合が、一般に用いられる大数の強法則である。(39)式は、和から適当な値(上記では an)を引いたり、適当な値(上記では $n^{1/p}$)で割ったりすることによって正規化された値が、ある値に収束している例である。 $p=2$ の場合は、(39)式は成立せず、代わりに中心極限定理が対応する。

中心極限定理も和の正規化に関する定理である。この定理は、元の分布によらず、 $(S_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})$ は標準正規分布に収束すると説明される場合が多いが、これは分散が存在する場合のみあてはまる。金融や保険のようにファット・テールを扱う場合には、分散の存在を仮定できないため、一般形に拡張する必要がある。

そのために、2つの定義を用意する。1つ目は、安定分布(stable distribution)である。分布関数 F に従う確率変数 X とそのiidな n 個の和 S_n について、

$$S_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X + \gamma_n \quad (41)$$

となる⁶¹ような定数 α, γ_n が存在するとき、 F を安定分布といい、 G_α と記す。このときの α を特性指数(characteristic exponent)という。(41)式における X の係数をより一般的に c_n と置いても、結局は、 $n^{1/\alpha}$ に帰着することがわかる。また α は $(0, 2]$ に属する。安定分布の代表的な例としては正規分布($\alpha=2$ の場合) コーシー分布($\alpha=1$ の場合)がある。任意の α に対する安定分布の特性関数はよく知られているが、密度関数は級数展開等の複雑な形でしか得られない⁶²。

もう一つは吸引域(domain of attraction)である。一般に、

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} G_\alpha, \quad n \rightarrow \infty \quad (42)$$

61 $\stackrel{d}{=}$ は分布として等しいことを示す。

62 これら安定分布に関する証明・詳細については例えば Feller [1966] を参照されたい。

を満たす⁶³定数、 $a_n \in \mathbf{R}$ 、 $b_n > 0$ が存在するとき、 F は G_α の吸引域に属するといいい、 $F \in DA(G_\alpha)$ と記す。 $\alpha < 2$ の場合、 $F \in DA(G_\alpha)$ には分散が存在しないことがわかる。ただし、 $\alpha = 2$ の場合、 $F \in DA(G_2)$ に分散が存在するとは限らない。

以上より、次の定理が成立する。

定理： $F \in DA(G)$ とする。 $E[X^2] = \sigma < \infty$ のときは、

$$\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} \Phi, \quad n \rightarrow \infty \quad (43)$$

(ここで Φ は標準正規分布の分布関数)となる。 $E[X^2] = \infty$ のときは、ある適当な $a_n \in \mathbf{R}$ と緩慢変動関数⁶⁴ $L(x)$ が存在して、次式が成立する⁶⁵。

$$\frac{S_n - a_n}{n^{1/\alpha}L(n)} \xrightarrow{d} G_\alpha, \quad n \rightarrow \infty \quad (44)$$

(43)式および(44)式は、適当に正規化した和がある分布に収斂していくことを示している。しかも収斂先の分布は必ず安定分布である。

和の挙動は平均的な事象、もしくは平均からあまり外れていない事象を記述するのに適している。しかし、平均から大きく乖離したものをわざわざ和の挙動の理論を経由して類推するのは合理的であろうか。むしろ、上記のような理論を乖離した値についても構築し、その理論に基づいて推測した方がより精度が高まると考えるのが自然な発想であろう。これがEVTの原点である。

八. 最大値の確率的性質 (再び)

Fisher-Tippettの定理

話を最大値の確率的性質に戻す。最大値について大数の強法則と同様の結果を得るのは難しい (Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [1997] の3.5節を参照) が、中心極限定理については類似した次の定理が知られている。これが最大値に関するEVTの基本定理である。証明は、Resnick [1987] 等に掲載されている。

63 d は分布への収束を表す。

64 関数 $f(x)$ が緩慢変動 (slowly varying) するとは、 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(tx) / f(x) = 1$ が任意の $t > 0$ に対して成立することである。後に述べる正則変動の $\rho = 0$ に相当する。

65 a_n の具体的な形状についてはEmbrechts, Klüppelberg and Mikosch [1997] 等を参照のこと。

定理：(Fisher=Tippettの定理)

式(33)で定義される M_n について、ある確率分布 H と、定数 $c_n > 0$ と $d_n \in \mathbf{R}$ が存在して、

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H, \quad n \rightarrow \infty \quad (45)$$

となるならば、確率分布 H は次の確率分布のどれかと同じ型⁶⁶である。これらの分布は極値分布 (extreme value distributions) と呼ばれる。

フレシェ (Fréchet) 分布 $\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0 \quad (46)$

ワイブル (Weibull) 分布 $\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{-\alpha}), & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0 \quad (47)$

ガンベル (Gumbel) 分布 $\Lambda(x) = \exp\{-\exp(-x)\}, \quad x \in \mathbf{R} \quad (48)$

c_n を標準化定数 (normalizing constant)、 d_n を中心化定数 (centering constant) と呼び⁶⁷、2つを合わせて正規化定数 (norming constant) という。

上記3つと同じ型の確率分布は、次のような3パラメーターを持った1つの式で表現できる。これを一般極値分布 (generalized extreme value distribution、以下GEV) と呼び、 $H_{\xi; \mu, \sigma}$ と記す。 μ, σ をとくに考えない場合は、 H_ξ と記す。

$$H_{\xi; \mu, \sigma}(x) = \exp \left\{ - \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)_+^{-1/\xi} \right\}, \quad x \in \mathbf{R} \quad (49)$$

μ, σ もそれぞれ中心化定数、標準化定数と呼ばれる。 ξ を形状パラメーター (shape parameter) という。 $\xi = 0$ のときは、上記式で $\xi = 0$ とすればよく、その結果、

$$H_{0; \mu, \sigma}(x) = \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}, \quad x \in \mathbf{R} \quad (50)$$

となる。上記3つの分布との対応は次のとおりとなる。

$$\xi > 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 1/\xi, \quad \mu = 1, \quad \sigma = 1/\alpha \quad \rightarrow \quad \Phi_\alpha$$

$$\xi = 0 \quad \rightarrow \quad \mu = 0, \quad \sigma = 1 \quad \rightarrow \quad \Lambda$$

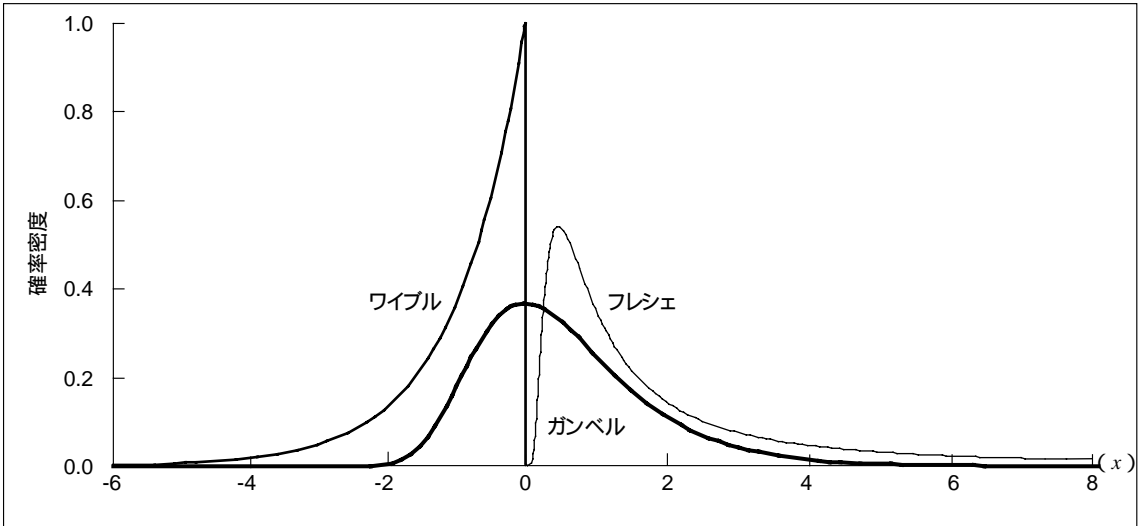
$$\xi < 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = -1/\xi, \quad \mu = 1, \quad \sigma = -1/\alpha \quad \rightarrow \quad \Psi_\alpha$$

66 ここで、「確率分布FとGが同じ型である」とは、適当なパラメーター $a > 0$ と $b \in \mathbf{R}$ が存在して、任意の x について $G(x) = F\{(x-b)/a\}$ が成立することである。

67 各々、位置パラメーター (location parameter)、尺度パラメーター (scale parameter) とも呼ばれる。

図表 4-1 に 3 つの極値分布の密度関数を図示した。

図表 4-1 極値分布の密度関数例 ($\alpha = 1$ の場合)



図を見るとわかるとおり、3 つの分布は、GEV という共通型で表現できるものの、形状がかなり異なっており、またその特性もかなり異なる。

一般に知られているほとんどすべての分布、とくに連続的な分布は、3 つの極値分布型のどれかに収斂する⁶⁸。ある極値分布 H に収斂する分布の集合を最大値吸引域 (maximum domain of attraction) といい、 $F \in MDA(H)$ と記す。1 つの分布が属する最大値吸引域は 1 つ、つまり正規化定数を変えても、極値分布型そのものは変わらない。ワイブル分布に収斂するもの ($F \in MDA(\psi_\alpha)$) は、右端 x_F (式 (35) 参照) が有限の値を取る分布であり、フレシエ分布は逆に右端が緩やかに減少するファット・テールな分布の最大値の収斂先である。

図表 4-2 に、それぞれの極値分布の最大値吸引域に含まれる分布例を示した。この中で興味深いのは対数正規分布である。一般に、対数正規分布はファット・テールの代表例として考えられており、保険の損失額分布としても用いられている。しかし、この表から、フレシエ分布の最大値吸引域に属する分布ほどはファット・テールではないことがわかる。

図表 4-2 極値分布の最大値吸引域に属する分布

フレシエ分布 Φ_α	ガンベル分布 Λ	ワイブル分布 Ψ_α
コーシー分布	正規分布	一様分布
パレート分布	対数正規分布	ベータ分布
	指数分布	

68 ポアソン分布・幾何分布等の離散分布は、極値分布を持たない例外的な分布である。

最大値吸引域と正規化定数

ここでは、ある分布がどの最大値吸引域に属し、その際の正規化定数はどのように決められるかについて説明する。まず、EVT全体の理論構成において重要な役割を果たしている、正則変動 (regularly varying) の定義を導入する。(0,∞) で定義された正の関数 $f(x)$ が ∞ で正則変動するとは、任意の $t > 0$ に対し、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = t^\alpha \quad (51)$$

となる α が存在することである。このとき、 $f \in \mathbf{R}_\alpha$ 、 $f \in RV_\alpha$ 等と記す。 $\alpha = 0$ の時は、脚注64の緩慢変動に相当する。上記定義は、右辺の t^α が恣意的に決定されているように思われるが、左辺の極限が t の関数で書ける場合は、その関数は必ず t^α 以外にあり得ない。正則変動を利用すると、最大値吸引域の特性がうまく表現でき、そこから正規化定数を導くことが可能となる。

まず、ワイブル分布へ収束する場合 ($F \in MDA(\Psi_\alpha)$) を述べる。

定理： $F \in MDA(\Psi_\alpha)$ となるには、 $x_F < \infty$ かつ $\bar{F}(x_F - 1/x) \in \mathbf{R}_{-\alpha}$ となる必要十分である。正規化定数は、それぞれ次のとおり。

$$d_n = x_F, \quad c_n = x_F - F^{\leftarrow}(1 - 1/n)$$

ここで $F^{\leftarrow}(t)$ は分位関数⁶⁹(quantile function) であり次式で定義される。

$$F^{\leftarrow}(t) \equiv \inf\{x \in \mathbf{R} : F(x) \geq t\}, \quad 0 < t < 1 \quad (52)$$

例えば、 F が $[0, 1]$ の一様分布の時、 $x_F = 1 < \infty$ であり、 $t > 0$ に対し、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x_F - 1/(tx))}{\bar{F}(x_F - 1/x)} = \frac{1/(tx)}{1/x} = t^{-1}$$

となるので、 $F \in MDA(\Psi_1)$ となる。

次に、正規化定数の d_n の式の意味を考える。ワイブル分布の形状 (図表 4-1) を勘案すると、正規化された最大値は負値となっている。したがって、中心化定数 d_n として、最大値が超えられない値である x_F を用いるのは妥当であろう。

標準化定数 c_n はどう考えればよいだろうか。 $F^{\leftarrow}(1 - 1/n)$ は、 n が 100 ならば 99 パーセンタイルを表しており、データ数に応じた最大値のおおよその期待値を示している。つまり c_n は、平均的な最大値と x_F の距離を表していると考えられ、その値で割るということは、現時点の最大値と x_F までの距離の標準化を行っていると同理解できよう。

フレシェ分布に収束する場合 ($F \in MDA(\Phi_\alpha)$) のときは次のとおりである。

69 分位関数は、いわゆるパーセンタイルであり、 $t = 0.99$ ならば 99 パーセンタイルが得られる。

定理： $F \in MDA(\Phi_\alpha)$ となるには、 $\bar{F}(x) \in \mathbf{R}_{-\alpha}$ となる必要十分である。
 正規化定数は、それぞれ次のとおり。

$$d_n = 0, \quad c_n = F^{\leftarrow}(1-1/n)$$

例えば、パレート分布 $F(x) = 1 - (a/x)^b$ (ただし、 $a > 0, b > 0$) に対し、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{a/(tx)\}^b}{(a/x)^b} = t^{-b}$$

となるから $F \in MDA(\quad_b)$ となる。

標準化定数 c_n は、上述したように $F^{\leftarrow}(1-1/n)$ が最大値の期待値と考えられることから、 c_n は平均的な最大値と $d_n = 0$ との距離を表していると考えられ、標準化しているイメージは容易に得られよう。 c_n が n の増加関数となっているが、これはデータが増えるにつれて最大値の拡散度合が増大することを示しており、ファット・テールの特徴を捉えているといえる。

ガンベル分布に収束する場合 ($F \in MDA(\Lambda)$) のときは複雑である。

定理： $F \in MDA(\Lambda)$ となるには、 $z < x_F$ が存在して、任意の $z < x < x_F$ に対し、

$$\bar{F}(x) = c(x) \exp \left\{ - \int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \right\} \quad (53)$$

となる必要十分である。ここで、 $c(x)$ と $g(x)$ は可測関数で、各々

$$\lim_{x \rightarrow x_F} c(x) = c_1 > 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_F} g(x) = 1$$

を満たし、 $a(x)$ は絶対連続な正の関数で

$$\lim_{x \rightarrow x_F} a'(x) = 0$$

となる。正規化定数は、それぞれ次のとおり。

$$d_n = F^{\leftarrow}(1-1/n), \quad c_n = a(d_n)$$

(53) 式における c, g, a の選び方は一意ではない。なお、 a については次のような関数を選ぶことが可能であるということがわかっている。

$$a(x) = \int_x^{x_F} \frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(x)} dt, \quad x < x_F \quad (54)$$

以下、実際の最大値がどのような分布となるか、正規化定数はどのような値を取るか、どの程度の速さで実際の最大値分布に収束していくか等についてイメージをつかむため、元の分布 F が標準正規分布の場合を例にとってみることにする。

最大値吸引域と正規化定数：正規分布の場合

まず、正規化定数を求める。正規分布の場合、 d_n を求めるには何らかの近似解を用いるか、ニュートン法等の数値計算法を用いることになる。

一方、 c_n を求めるには、 $a(x)$ を計算する必要があるが、正規分布の場合、上記(54)式は簡単な計算により

$$a(x) = \int_x^\infty \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty \exp(-k^2/2) dk}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp(-k^2/2) dk} dt = -x + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} \quad (55)$$

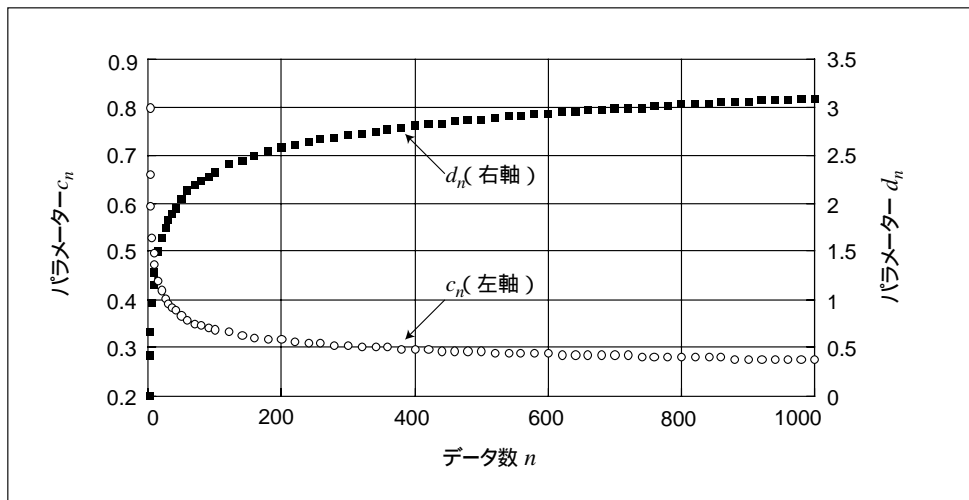
となる(ここで、 φ は標準正規分布の密度関数、 Φ は分布関数を表す)。

このようにして計算された c_n と d_n を図表4-3に示した。グラフを見ると、 c_n はわずかずつであるが減少している。つまり正規分布の最大値は、データが増大するにつれ、わずかずつ収斂していくことがわかる。

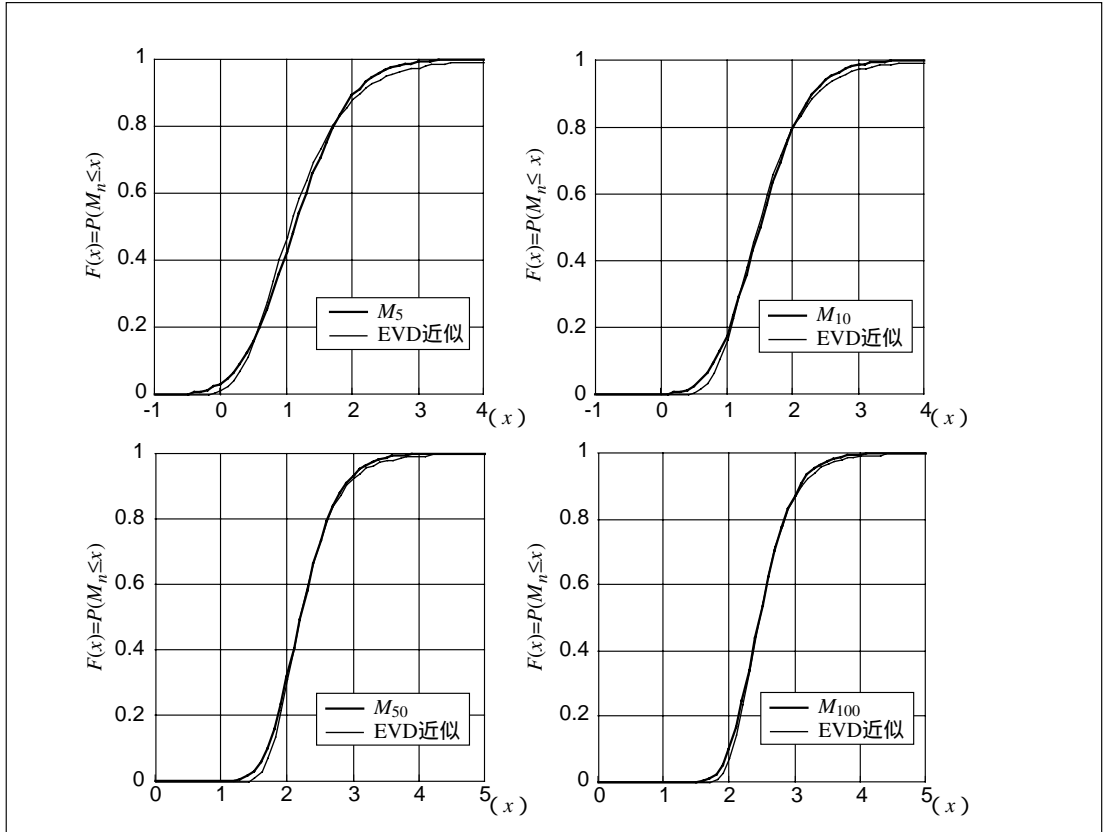
次に、これらの正規化定数を用いて、正規分布の最大値がどのように極値分布に収斂していくかを見る。図表4-4に、 M_n の分布と $c_n \Lambda + d_n$ を掲載した。

図表4-4から、極値分布による近似分布関数(細い実線で表示)は、かなりあてはまりがよいことがわかる。とくに、 $n=100$ のグラフはほぼ一致している。また、 n が増加するにつれてグラフの傾斜が急になっているが、これは先程標準化定数のグラフのところでも述べた傾向、すなわちデータ数の増大とともに、最大値の散らばり具合がわずかずつ収斂する傾向を示している。

図表4-3 標準正規分布の M_n に関する n と正規化定数の関係



図表 4-4 M_n の分布関数と極値分布による近似分布関数の比較
 (標準正規分布、左上: $n=5$ 、右上: $n=10$ 、左下: $n=50$ 、右下: $n=100$)



二. 超過データの確率的性質

最大値と同様に重要な分析対象として、ある閾値 u を超過したデータの確率的振舞いがある。例えば、ある水準を超過するような損失額はどのような確率分布にしたがっているのか、ある水準を超えて発生する損失額の平均値はいくらか、といった問題である。

超過データを数学的に扱うために、次の定義を導入する。

定義：右端（式（35）参照） x_F を持つ分布 F に従う確率変数 X を考える。
 ある $u < x_F$ に対し、

$$F_u(x) \equiv P(X-u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad u \leq x \leq x_F \quad (56)$$

閾値 u に対する X の超過分布関数（excess distribution function）という。
 また、

$$e(u) = E(X-u | X > u) \quad (57)$$

を平均超過関数（mean excess function）という。

F_u は excess-life または 残余寿命 (residual lifetime) 分布関数とも呼ばれる。保険の世界では超過損害額 (excess-of-loss) 分布関数ともいわれる。

データ分析に際して平均超過関数を用いることが多い。これについては、次の式を理解していると便利である。

$$e(u) = \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^{x_F} (x-u) dF(x) = \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^{x_F} \bar{F}(x) dx \quad (58)$$

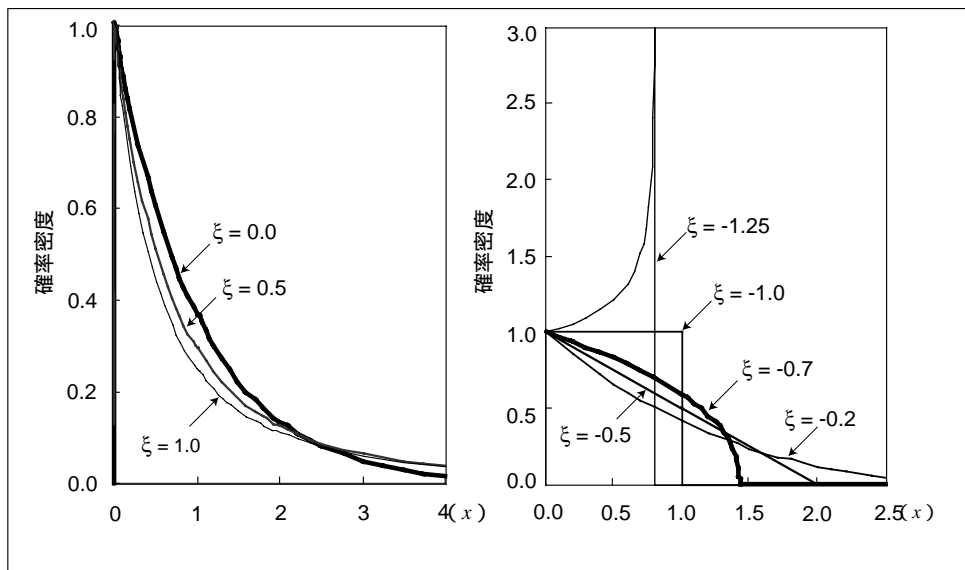
例えば、 X が指数分布 ($\bar{F}(x) = \exp(-\lambda x)$) に従う場合には、 $e(u) = 1/\lambda$ となる。これは、ある u を超過したという条件下での超過幅の期待値が、 X の期待値に一致することを示している。これは指数分布の無記憶性という性質による。

一方、最終的に観察したいのは F_u である。これがどのような性質を有するかを調べるために、 u を右端 x_F に近づけた場合、 F_u がどのような分布に収斂していくかを見る。その結果は、後述する Pickands - Balkema - de Haan の定理によって、一般パレート分布 (generalized Pareto distribution、以下 GPD) に近づいていくことが示される。定理を述べる前に GPD について説明する。GPD の分布関数 $G_{\xi; \beta}(x)$ は次のように表される。

$$G_{\xi; \beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x / \beta)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \text{ のとき} \\ 1 - \exp(-x/\beta) & \xi = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (59)$$

ここで、 $\beta > 0$ であり、分布関数の定義域は、 $\xi \geq 0$ のとき $x \geq 0$ 、 $\xi < 0$ のとき $0 \leq x \leq -1/\xi$ である。GPD も GEV 同様、中心化定数を入れてより一般化することも可能だが、中心化定数がゼロの場合を扱うことが多いので、省略するのが普通である。因みに、 $\xi = 0$ のときは指数分布に一致する。

図表 4-5 GPD の確率密度関数 ($\beta = 1$ 、左: $\xi \geq 0$ 、右: $\xi < 0$)



図表 4-5 に $\beta=1$ として、 ξ を変化させた場合の GPD の確率密度関数をプロットした。グラフの左側が $\xi \geq 0$ の場合で、右側が $\xi < 0$ である。右側のグラフは値に応じてかなり独特の形状となることがわかる。

GPD を用いると、次のことがいえる。

定理：(Pickands - Balkema - de Haan の定理)

分布関数 F について、 $F \in MDA(H_\xi)$ であるためには、ある適当な正の関数 $\beta(u)$ が存在して、

$$\lim_{x \uparrow x_F} \sup_{0 < x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0 \quad (60)$$

となることが必要十分である。

式 (60) は一見難解だが、 u を大きくするにつれて、超過分布関数 F_u が GPD に収斂していくことを意味している。この定理から、超過データの分布と最大値の分布には密接な関係があることがわかる。よって、超過データを観測することにより、最大値について何か示唆を得られる可能性がある。

式 (60) のうち、 ξ については最大値吸引域のパラメーターと一致するので、前節で用いた手法によって求めることが可能である。

$\beta(x)$ については、 $\xi = 0$ の場合とそれ以外に分けて考える。 $\xi = 0$ (すなわち $F \in MDA(\quad)$) のときは、 $a(x)$ を用いることができる。 $\xi \neq 0$ のうち、 $\xi > 0$ の場合は、 $\bar{F}(x)$ に対して正則変動関数の表現定理⁷⁰を用いることにより、

$$\bar{F}(x) = c(x) \exp \left\{ \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\}, \quad z < x < \infty \quad (61)$$

と表現できる (ただし、 $z > 0$ であり、関数 a と c はそれぞれ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c \in (0, \infty), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a(x)/x = \xi^{-1}$$

を満たす必要がある) が、ここで得られる $a(x)$ を $\beta(x)$ とすればよいことが知られている。 $\xi < 0$ の場合も、 $\bar{F}(x_F - 1/x)$ に対して、(61) 式の表現を適用し、その $a(x)$ を $\beta(x)$ とすればよい。

次に、 u の値を大きくした場合の GPD の超過分布関数への収斂度合い、いい換えれば GPD がどの程度超過分布関数の近似となっているかをみる。元の分布 F としては先程同様、標準正規分布を採用する。標準正規分布の場合、 $\xi = 0$ であることがわかっているので、 $\beta(x)$ は (55) 式を使えばよい。

70 詳細については、Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [1997] の付録 A3.3 を参照。

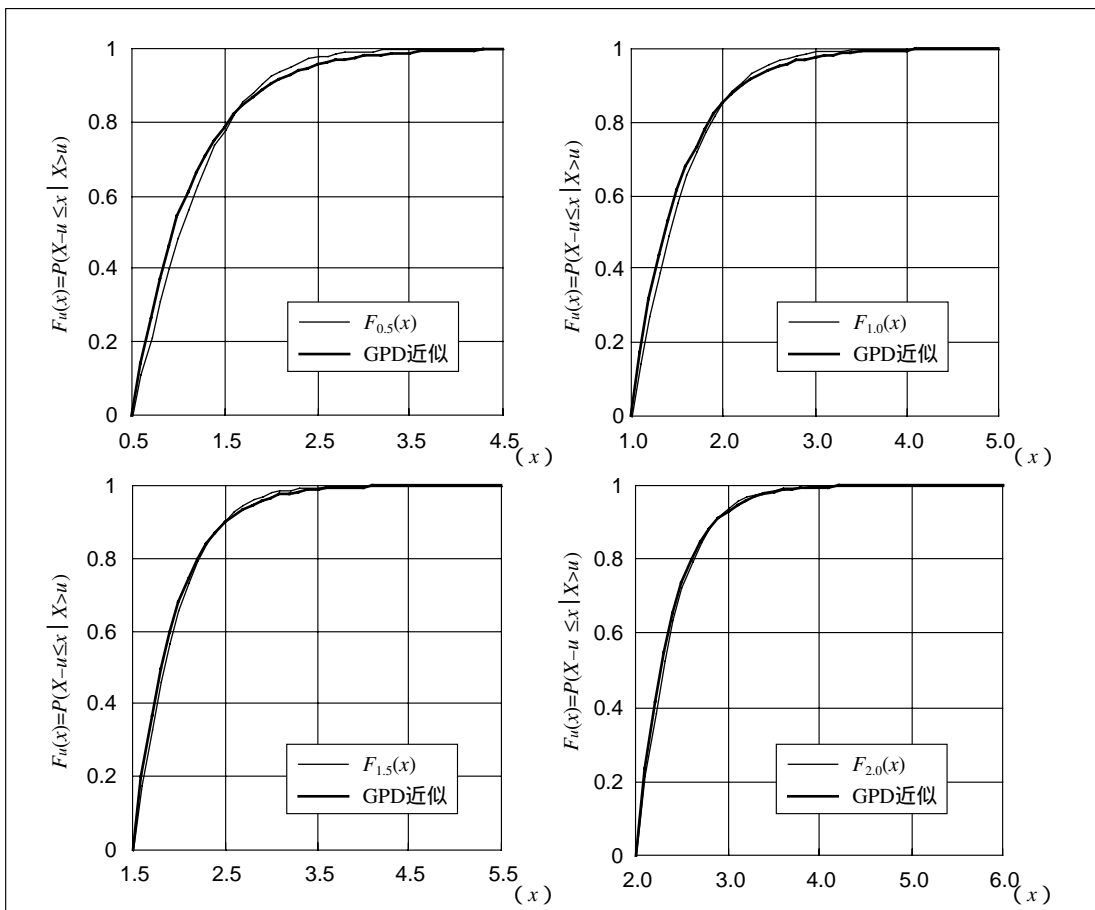
図表 4-6 は、 $u=0.5$ 、 1.0 、 1.5 、 2.0 の場合について、超過分布関数およびGPD近似による分布関数を掲載した。グラフから、 u が大きくなるにつれて、近似の役割を十分に果たしていることがわかる。

GPDへの収縮を用いると、中心からかなり離れたところの分布形を推定することが可能となる。例えば、ある u に対し、それより x 以上大きなデータ（すなわち、 $u+x$ を超過するデータ）が発生する確率 $\bar{F}(u+x)$ は、上記 F_u の定義から、

$$\bar{F}(u+x) = \bar{F}(u) \bar{F}_u(x) \quad (62)$$

となることがわかる。よって、右辺を推定し、それを左辺の近似関数と考えればよい。右辺にある2つの分布関数のうち、 $\bar{F}(u)$ については、 u を超過するデータ数を N_u 、全データ数を N として、 N_u/N を推定値とすることができる。ただし、安定した推定値を得るためには、 u を超過するデータ数がある程度以上存在している必要があるため、あまり大きな u を選ぶことはできない。一方、 $\bar{F}_u(x)$ は上記定理が

図表 4-6 u の値を変えた場合の超過分布関数 $F_u(x)$ とGPD近似
(標準正規分布、左上： $u=0.5$ 、右上： $u=1.0$ 、左下： $u=1.5$ 、右下： $u=2.0$)



ら、データからGEVもしくはGPDの特性を利用することで、パラメーター ξ が推定できれば、その推定値からGPDの分布形が得られるのでそれを用いればよい。その前提として、上記定理の近似が成立していること、つまり上の例でもみたように u が十分に大きいことが必要となる。したがって、この2つの相反するニーズを満たす適当な u の搜索がポイントとなる。

パラメーター推定のうち、従来から主として行われているのは、GEVを用いた推定方法である。代表的なものとして、ヒル推定量 (Hill estimator) が挙げられる。これは、Hill [1975] によって提案された推定量で、 $F \in MDA(\Phi_\alpha)$ のとき、すなわち、ファット・テールのデータにおいて威力を発揮する⁷¹。一方、直接GPDを用いた手法としては、POT (peaks-over-threshold) 手法がある⁷²。ファット・テールの推定においては、両者ともそれほど差異はないといわれている。以下の数値例では、POT手法を用いる。

(3) 数値例

ここまでで解説してきたEVTの手法を現実の問題にどのように適用可能かを具体的にみるために、本節では実際の株価データに対し、POT手法を用いて中心から外れた値が従う分布に関する簡単な分析を試みることにする。

データとしては、TOPIXの日次対数収益率 (1988年～1998年) を再度用いる。図表4-7は、同データの基本統計量とヒストグラムである。

図表4-7の基本統計量の中で、とくに歪度と尖度から、単なるブラウン運動とは考えにくいことがわかる。尖度が3より大きいことから、裾は正規分布よりも厚いと考えられる⁷³。また、歪度が正の値をとっており、右への歪みがみられることから、相対的に裾の右側がファット・テールとなっている可能性がある⁷⁴。

通常データの解析同様、EVTにおいてもデータをさまざまな角度から眺め、検証を行う必要がある。まず、裾の状況をより詳しく分析する。そのために用いられる

71 ヒル推定量を用いたVaR等の推定としては、Danielsson and de Vries [1997] を参照されたい。

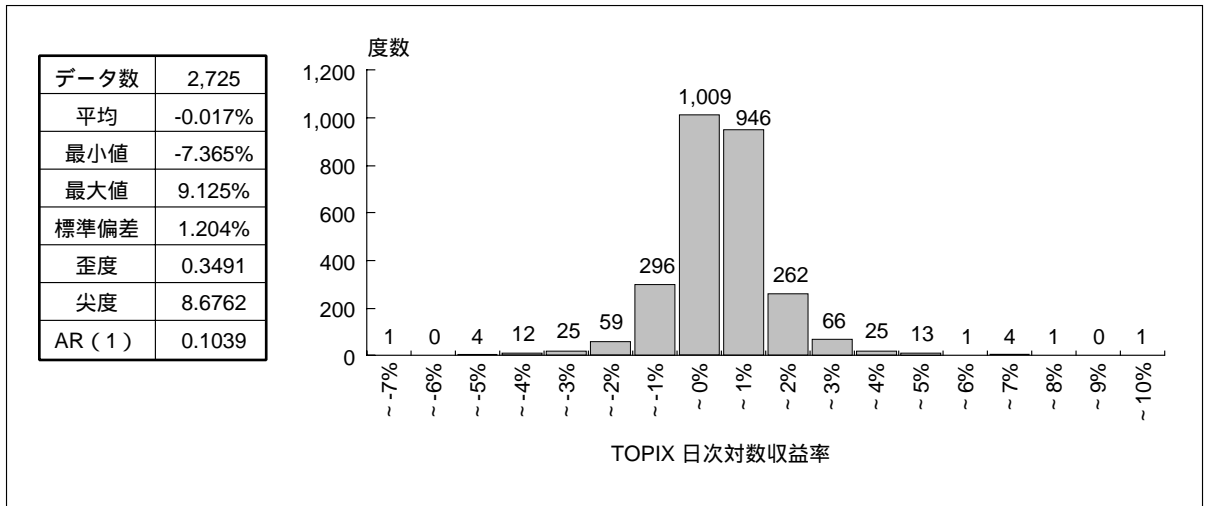
72 POT手法の詳細については、例えば、Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [1997] を参照されたい。なお、McNeil [1999] では、ある閾値を超えたデータに関するモデル全体をPOT手法と呼んでおり、ヒル推定量もその一つと定義している。

73 ただし、尖度の大きさは必ずしも裾の厚さを表しているのではないことに注意が必要である。

74 なお、図4-7の基本統計量の中で一つだけ注意しておかなければならないのが、自己相関 (AR(1) = 0.1039) の存在である。自己相関が存在する場合、サンプルデータがiidであるという仮定に反することになるため、これが有意にゼロと異なるかどうかを検証する必要がある。

ここでは、サンプルデータが正規分布にしがっているという仮定を置くことはできないので、通常の検定方法は用いることができない。そこで、サンプルデータをランダムに並べ替え、そのAR(1)を求めるといふ計算を5,000回繰り返したが、絶対値において上記AR(1)の値を上回ることにはなかった(最大で0.06程度)。このことから、TOPIXの対数収益率には自己相関があると考えて差し支えないと思われる。したがって、厳密にはiidを前提としない理論を適用すべきだが、その場合は手法が複雑になる。そこで、ここでの目的はEVT手法の例示であることを勘案し、以下iidを前提として分析を行うことにする。iidを前提としないEVT手法の詳細については、Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [1997] や McNeil and Frey [1999] 等を参照のこと。

図表 4-7 TOPIXデータの基本統計量（左表）およびヒストグラム（右グラフ）



のが、平均超過関数である。一般に、分布がファット・テールである場合、平均超過関数は u に関する増加関数に、裾が薄い場合は減少関数となることが知られている。この性質を利用して、裾の状況をより詳しくみることができる。

観測データについて平均超過関数の様子を見るためには、次に掲げる平均超過プロット (mean excess plot) と呼ばれるプロットを行った。これは横軸に閾値 u 、縦軸に $e(u)$ の実測値、すなわち、

$$eN(u) = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^N (X_i - u)_+ \quad (63)$$

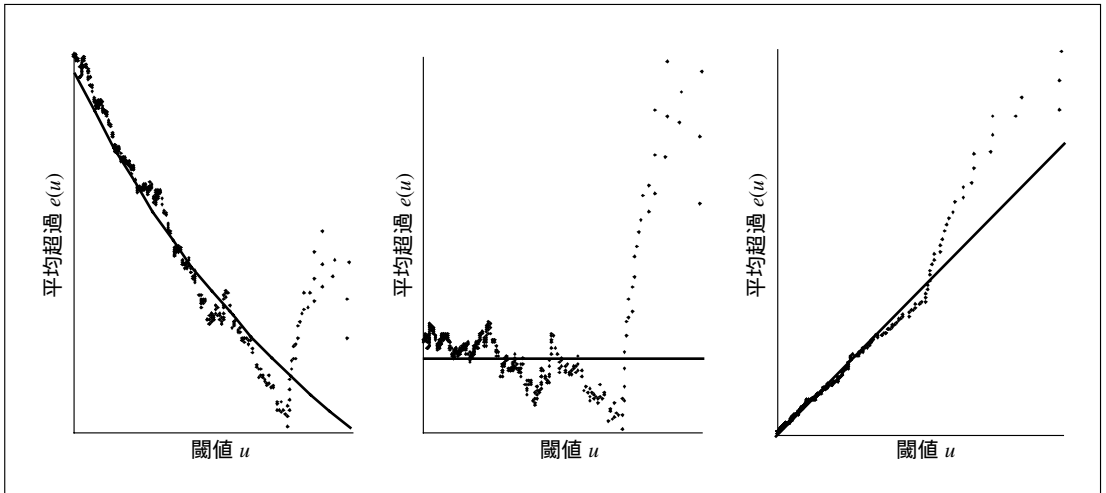
を代入する（ここで、 X_i は i 番目のデータを表す）ものである。例えば、元の分布が正規分布、指数分布、GPD ($\xi = 0.5$)⁷⁵の場合、平均超過プロットは図表 4-8 のようになる。グラフ上に実線で描かれているのは、平均超過関数 $e(u)$ であり、プロットが平均超過関数の近似となっていることがわかる⁷⁶。

TOPIXデータに平均超過プロットを適用したのが図表 4-9 である。左のグラフは通常のプロット ($u \rightarrow \infty$ とした場合)、右のグラフは分布の左裾の状況を調べるため、データの符号をすべて入れ替えたものを用いている。なお、グラフ上の直線はプロットされたデータに対して線形回帰を行ったものである。線形回帰した直線は両グラフとも右上がりとなっており、とくに左グラフ (最大値近辺) の方が回帰直線の傾きが急になっている。このことは、基本統計量およびヒストグラムから得られた考察 (両裾とも厚いがとくに右裾が厚い) と一致する。

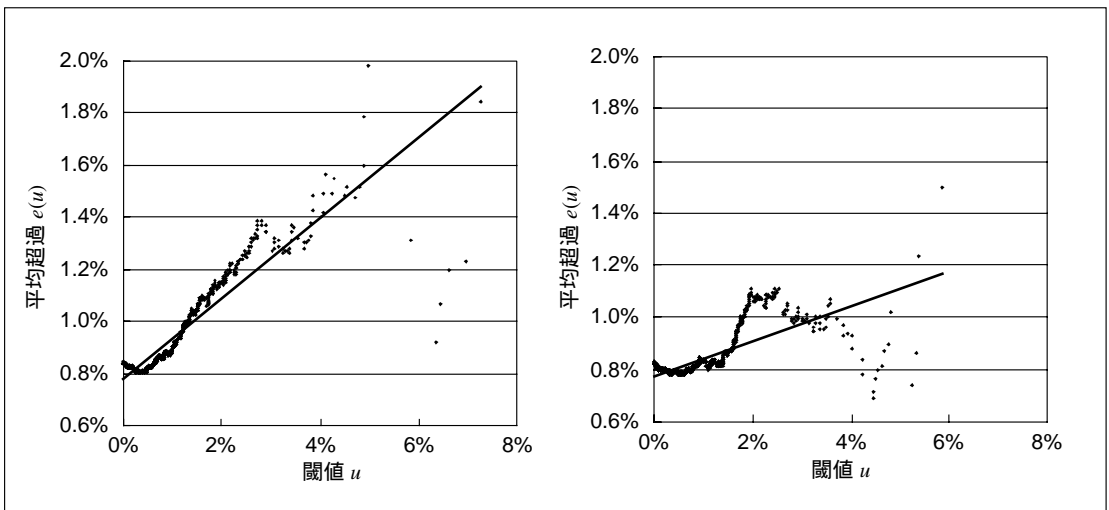
75 一般にGPDはファット・テールな分布である。

76 図表 4-8 では、縦軸の目盛りを揃えていないことから、傾きの方向だけに意味があり、傾き度合は意味を持たない。

図表 4-8 ランダムに発生させたデータによる平均超過プロット⁷⁷
 (左：正規分布、中央：指数分布、右：GPD)



図表 4-9 TOPIXの平均超過プロット
 (左：分布の右裾、右：分布の左裾、をそれぞれ検証)



77 このデータは2,000個の一樣乱数を発生させ、それを各分布に従う乱数に変換した後、上位500データについてプロットしたものである。各プロットは、上位 n 番目のデータを x_n と記せば、 $(x_n, e_{2,000}(x_n))$ である。右裾の傾向が似ているのは、元が同じ一樣乱数の実現値から作成されていることによる。なお、上位10個のプロットについてはかなり不安定となることから省略した。

以上の予備考察を踏まえ、GPDのパラメーター推定と u の水準設定の問題を考える。これまでの分析からわかるように、裾の厚さを分析するうえでは、右裾（最大値近辺）の方が明確にその傾向がみてとれるので、以下では右裾に着目する。

まず、GPDのパラメーターであるが、ここではPOT手法を用いて直接GPDのパラメーターを推定する。 u によってパラメーターの推定値が変わるため、 ξ や β は u の関数として表現される。推定方法はいくつか考案されているが、ここでは最尤法を採用する。POT手法による対数尤度関数 $\ell(\xi, \beta; \mathbf{Y})$ は、

$$\ell(\xi, \beta; \mathbf{Y}) = -n \ln(\beta) - \left(\frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{i=1}^{N_u} \ln \left(1 + \frac{\xi}{\beta} Y_i \right) \quad (64)$$

ただし、 $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_u})$

$Y_i = (\text{TOPIX 目次収益率の上位 } i \text{ 番目の値}) - u$

と表されることが知られている⁷⁸。ここで、 $\tau = -\xi/\beta$ と置き換え、 $\ell(\xi, \beta; \mathbf{Y})$ をパラメーターで偏微分したものをゼロとおくことにより、最尤推定量 $\hat{\xi}$ は次式で表されることが分かる。

$$\hat{\xi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_u} \ln(1 - \tau Y_i) \quad (65)$$

ただし、 τ は次式を満たす必要がある。

$$\frac{1}{\tau} + \frac{1}{N_u} \left(\frac{1}{\hat{\xi}} + 1 \right) \sum_{i=1}^{N_u} \frac{Y_i}{1 - \tau Y_i} = 0 \quad (66)$$

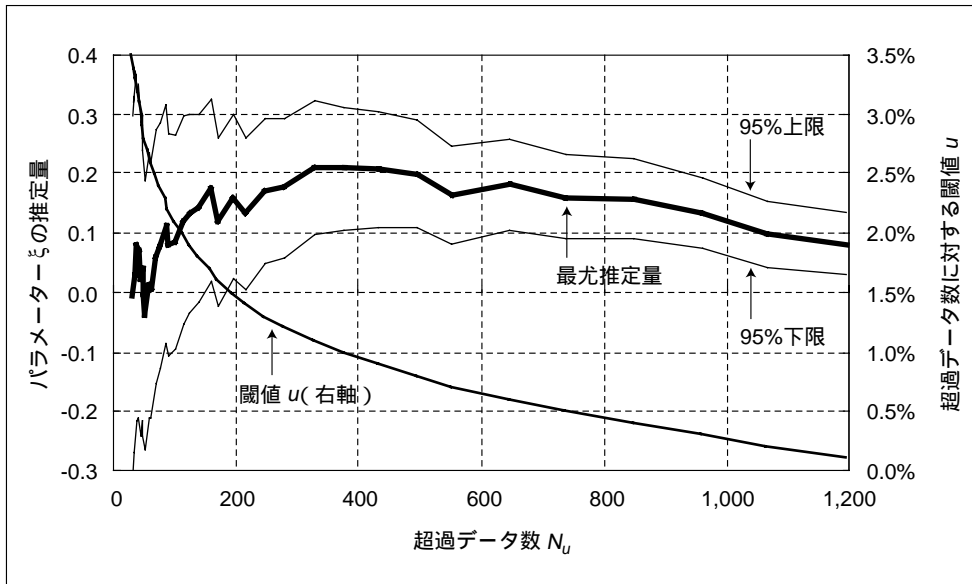
図表 4-10 に、超過データ数ごとに求められた $\hat{\xi}$ と、その近似的信頼区間(95%信頼限界値)をプロットした。また、参考として、超過データ数に対応する閾値 u も示した(右下がりの曲線、目盛りは右軸)。

グラフから、超過データ数 N_u が多い場合(200程度以上)は、安定したグラフとなっており、推定値もおおむね0.1~0.2の間に収まっているが、それより少ないところ(グラフ左側)では、かなり不安定になることがみてとれる。なお、GPDの平均超過関数は傾き $\xi/(1-\xi)$ の直線であることが知られているが、図表 4-9 左グラフにおける線形回帰直線の傾きは約0.15であり、逆算すると $\xi=0.13$ 程度となる。このことから、上記推定値はそれにほぼ近い値であり、それなりに信頼性の高いものであるということがいえる。

パラメーターの推定を終えたので、中心からはずれた値の従う分布の推定に移る。問題はどの u を用いるかであるが、繰り返し述べているように決定的な推定方法はない。ここでは、上記グラフから極力安定しているとみられる範囲での u の最大値である1.5%を採用する。このとき、 $\xi=0.1636$ 、 $\beta=0.0087$ 、 $N_u=193$ となる。よって、

78 詳細は Embrechts, Küppelberg and Mikosch [1997] を参照されたい。

図表 4-10 閾値（超過データ数）を変えた場合の ξ の最尤推定量



$\bar{F}(u)$ の推定値は、 $N_u/N=0.0708$ となる。

まず、 u を超過する部分について、元データの分布形状と式 (62) によって推定された分布関数とをプロットして比較する。その結果が図表 4-11である。横軸が対数収益率、縦軸が \bar{F} を表している。グラフの右側 (\bar{F} が限りなくゼロに小さくなる部分) をみやすくするように、縦軸を対数変換した。参考までに、データから求めた平均・分散を持つ正規分布の \bar{F} も示した。

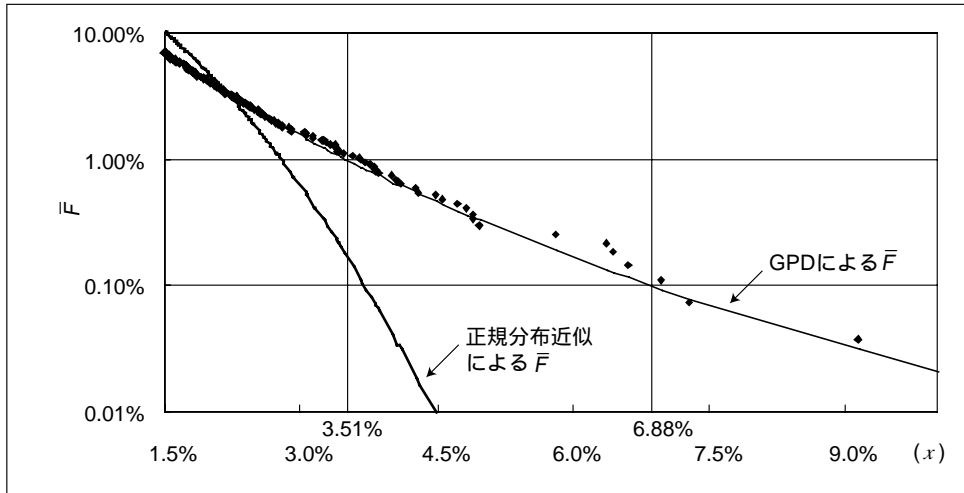
グラフから、GPD近似は、元データにフィットしていることがわかる。もちろん、このフィットは1.5%以上でのみ成立しており、それ以下には適用できない。

求められた分布関数を用いて、パーセンタイルを求めると、例えば99パーセンタイル、99.9パーセンタイルに対応する事象は、それぞれ3.51%と6.88%であることがわかる。参考までに、正規分布近似から求めた場合にはそれぞれ約2.8%、約3.7%となり、99.9パーセンタイルの場合は倍近い開きがあることがわかる。

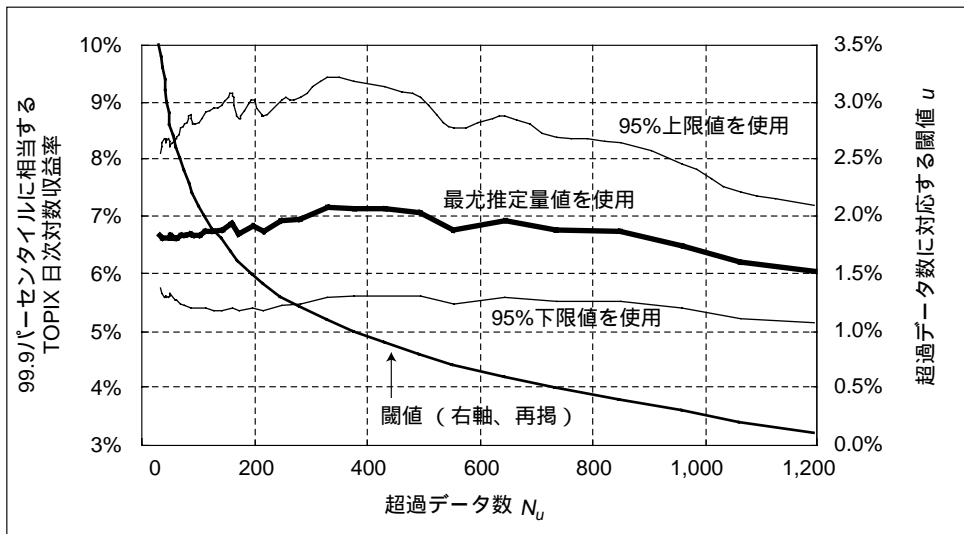
なお、このようにして求められたパーセンタイルは、グラフから恣意的に決定した u およびそれを用いて求められた ξ や β に依存していることから、 u の値によって結果がどのように変わるかという頑健性をみておく必要がある。

ここでは、さまざまな u ごとの最尤推定量およびその95%信頼限界値を用いて、上と同じ99.9パーセンタイル値を求めた。結果は、図表 4-12のとおりである。最尤推定量がグラフの左側でとくに不安定な振舞いをしていたのとは対照的に、99.9パーセンタイル値は7%程度の水準である程度安定している。また、信頼区間の限界値を用いてもそう大きくは振れず、どの値も、単に平均と分散から算出した値3.7%を大きく上回っていることがわかる。

図表 4-11 1.5%を超過するデータによる \bar{F} (ドット表示)⁷⁹と、GPDを用いて求めた \bar{F} (曲線表示) との比較 (縦軸は対数変換)



図表 4-12 u やパラメーターを変化させた場合の99.9パーセンタイル値



以上により、当初の目的である中心からはずれた値のとり分布をPOT手法によって求め、パーセンタイルを推定することができた。

もちろん、実際に分析を行う場合には、結果の頑健性や、パラメーターの安定性、他の推定方法による推定量との比較などについて、さらに分析を加える必要がある。それに加えて、一般の金融データには、脚注75上にも述べたようなデータの自己相関性や、分散不均一性 (heteroscedasticity) 等の存在が指摘されることも多い。

79 各プロットは、上位 n 番目のデータを x_n 、全データ数 N として、 $(x_n, n/(N+1))$ となっている。

ここでは、上述したような基本的EVTを構築するうえで前提となっているiidが成立しないため、より一般化された理論および統計処理方法が必要となり、さらなる専門的な知識・技術が必要となる。

(4) 応用研究事例の紹介

本章の最後として、EVTが適用されている分野を紹介する。最初にも述べたように、EVTの発祥は水文学や気象学であり、その分野での応用研究は数多く見られる。その他でも異常値を扱う分野で、EVTが用いられていることがある。

金融と保険に注目すると、保険の方が先行してEVTを応用してきた。とくに、超過額再保険⁸⁰ (excess-of-loss cover) といわれる保険の純保険料の分析等に関して、1960年代にはEVTの適用が行われている。その後は、巨大自然災害リスクの分析における適用が多くみられる。最近では、McNeil [1997] がデンマークの大火災の損害額データをEVTによって分析しているほか、Rootzén and Tajvidi [1997] はスウェーデンの風害保険 (windstorm insurance) に適用している。

ARTとの関連という意味では、ウィンターツール (Winterthur) 社が1997年に発行した保険リスク付転換社債について分析を加えたSchmock [1998] のなかで、トリガーの発生確率を検証するための手法としてEVTが適用されている。

一方、金融の世界では、EVTの応用事例はまだ限定的であるが、市場リスク管理を筆頭に、今後適用可能性のある分野は多いと考えられる。バリュー・アット・リスク (VaR) に関していえば、その概念が広く一般に浸透した一方で、ファット・テールな分布に従うリターンを持った金融資産に対しての有効性に限界があるといった問題などが指摘されている。例えば、Artzner, Delbaen, Eber and Heath [1997] で、リスク指標が保つべき4つの公理 (sub-additivity, homogeneity, monotonicity, risk-free condition) を挙げ⁸¹、VaRがそれを満たしていないこと等を指摘している。これに対して、Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [1997] は、 $E[X|X>x(p)]$ (ここで $x(p)$ はあるパーセンタイルの推定値) というリスク指標を提案しているが、これが上記4つの公理をほぼ満たしていることをArtzner, Delbaen, Eber and Heath [1997] は示している。この指標は、上で定義した平均超過関数 (厳密にはそれに $x(p)$ を加えたもの) であり、EVTの適用可能性が高い。また、定義以外にも測定上の精度向上の意味でVaRの適用を検討しているものもみられる。例えば、Danielsson and de Vries [1997] やMcNeil and Frey [1999] およびそれらに掲載されている参考文献を参照されたい。

このほか、市場リスク以外では、信用リスクへの適用例としてはPhoa [1999]、オペレーショナル・リスクへの適用例としてはCruz, Coleman and Salkin [1998] がある。こうした研究は今後増えていく可能性がある。

80 対象となる契約において生じた保険金額がある一定額を超過した部分を支払う再保険契約。

81 同論文では、この4つを満たすリスク指標をコヒーレント・メジャー (coherent measure) と呼んでいる。

参考文献

- 木島正明、『金融リスクの計量化(下)クレジット・リスク』金融財政事情研究会、1998年
- 小林正明、「不完備市場における条件付請求権の価格評価についてのノート」『MTECジャーナル』、1996年12月、99-129頁
- 武田祐一、「保険会社と機関投資家を結ぶ自然災害リスクの証券化」『金融財政事情』、1998年3月30日、32-35頁
- 日吉信弘、「代替的リスク移転(ART)入門 - Alternative Risk Transfer」(財)損害保険事業総合研究所主催損害保険特別講座資料、1998年
- Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber and D. Heath, "Thinking Coherently," *Risk*, Vol. 10 No.11, November 1997, pp. 68-71.
- Bühlmann, H., *Mathematical Methods in Risk Theory*, Springer-Verlag, 1970.
- , "An Economic Premium Principle," *ASTIN Bulletin* 11, 1980, pp. 52-60.
- , F. Delbaen, P. Embrechts and A. Shiryayev, "No-Arbitrage, Change of Measure and Conditional Esscher Transforms," mimeo, ETH Zürich, 1998.
- Canter, M., J. Cole and R. Sandor, "Insurance Derivatives: A New Asset Class for the Capital Markets and a New Hedging Tool for the Insurance Industry," *The Journal of Derivatives*, Winter, 1996, pp. 89-104.
- Christensen, C. V., "A New Model for Pricing catastrophe Insurance Derivatives," mimeo, University of Aarhus, 1999.
- Considine, G., "Introduction to Weather Derivatives," Weather Derivatives Group, Aquila Energy, 1999. (<http://www.cme.com/weather/index.html>にて入手可)
- Credit Suisse Financial Products, *CreditRisk+ - A Credit Risk Management Framework*, 1997.
- Cruz, M., R. Coleman and G. Salkin, "Modeling and Measuring Operational Risk," *Journal of Risk*, Fall 1998, pp. 63-72.
- Danielsson, J. and C.G. de Vries, "Value-at-Risk and Extreme Returns," LSE Financial Markets Group Discussion Paper, 273, London School of Economics, 1997.
- Delbaen, F. and J. Haezendonck, "A Martingale Approach to Premium Calculation Principles in an Arbitrage Free Market," *Insurance: Mathematics and Economics* 8, 1989, pp. 269-277.
- Embrechts, P., R. Frey and H. Furrer, "Stochastic Processes in Insurance and Finance," mimeo, ETH Zürich, 1998.
- , C. Klüppelberg and T. Mikosch, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer-Verlag, 1997.
- , S. Resnick and G. Samorodnitsky, "Extreme Value Theory as a Risk Management Tool," mimeo, ETH Zürich, 1998.
- Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 2*, John Wiley and Sons, 1966. (邦訳:「確率論とその応用 II(上・下)」国沢清典監訳、紀伊国屋書店、1969年)

- Föllmer, H. and P. Leukert, "Efficient Hedging: Cost versus Shortfall Risk," mimeo, Humboldt-Universität, 1998.
- and , "Quantile Hedging," *Finance and Stochastics*, Vol.3, No.3, 1999, pp. 251-273.
- Gerber, H, *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, S. S. Huebner Foundation Monograph Series No.8, 1979.
- and E. Shiu, "Option Pricing by Esscher Transforms," *Transactions of the Society of Actuaries* XLVI, 1994, pp. 99-140.
- Grandell, J., *Aspects of Risk Theory*, Springer-Verlag, 1991.
- Harrison, J. M. and S. Pliska, "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading," *Stochastic Processes and their Applications* 11, 1981, pp. 215-260.
- Hill, B, "A Simple General approach to Inference about the Tail of a Distribution," *The Annals of Statistics*, Vol. 3, No. 5, 1975, pp. 1163-1174
- Lamberton, D. and B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, 1996.
- McNeil, A., "Estimating the Tails of Loss Severity Distributions Using Extreme Value Theory," *ASTIN Bulletin*, Vol. 27, No. 1, 1997, pp. 117-137.
- , "Extreme Value Theory for Risk Managers," working paper, ETH Zürich, 1999.
- and R. Frey, "Estimation of Tail-Related Risk Measures for Hetero-scedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach," mimeo, ETH Zürich, 1999.
- Meister, S., "Contributions to the Mathematics of Catastrophe Insurance Futures," Diplomarbeit, ETH Zürich, 1995.
- Paul-Choudhury, S., "Getting Down to Business," Insurance Risk Special Report, *Risk July* 1998, pp. 1.
- Phoa, W., "Estimating Credit Spread Risk Using Extreme Value Theory," *The Journal of Portfolio Management*, Spring 1999, pp.69-73.
- Resnick, S., *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*, Springer-Verlag, 1987.
- Rootzén, H. and N. Tajvidi, "Extreme Value Statistics and Wind Storm Losses: a Case Study," *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, 1997: pp. 70-94.
- Rolski, T., H. Schmidli, V. Schmidt and J. Teugels, *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons, 1999.
- Schanz, K. U., "The Convergence of (Re) insurance and Capital Markets - the Financial Services Industry Reinventing Itself,"(財)損害保険事業総合研究所主催特別講演会時配布資料, 1998.
- Schmock, U., "Estimating the Value of the WINCAT Coupons of the Winterthur Insurance Convertible Bond: a Study of the Model Risk," Discussion paper, ETH Zürich, 1998.
- Schweizer, M., "Option Hedging for Semimartingales," *Stochastic Processes and their Applications* 37, 1991, pp. 339-363.
- Sekine, J., "Quantile Hedging for Defaultable Securities in an Incomplete Market," mimeo, Graduate School of Engineering Science Osaka University, 1999.

sigma, “Insurance Derivatives and Securitization: New Hedging Perspectives for the US Catastrophe Insurance Markets?” No. 5, 1996, Swiss Re, Zürich (<http://www.swissre.com>にて入手可).

, “Too Little Reinsurance of Natural Disasters in Many Markets,” No. 7, 1997, Swiss Re, Zürich (<http://www.swissre.com> にて入手可).

, “Alternative Risk Transfer (ART) for Corporations: A Passing Fashion or Risk Management for the 21st Century?,” No.2, 1999, Swiss Re, Zürich(<http://www.swissre.com> にて入手可).

Sondermann, D., “Reinsurance in Arbitrage-Free Markets,” *Insurance: Mathematics and Economics* 10, 1991, pp. 191-202.

Swiss Re New Markets, “Integrated Risk Management Solutions - Beyond Traditional Reinsurance and Financial Hedging,” Swiss Re Publications, 1998.