

# 非ガウス型状態空間表現による 確率的ボラティリティモデルの推定

北川源四郎 / 佐藤整尚 / 永原裕一

## 要 旨

確率的ボラティリティモデルのパラメータの推定法としては擬似最尤法がよく知られているが、近年、数値積分やモンテカルロ近似に基づく非線形フィルタの利用によって、最尤推定値を求める方法も提案されている。本稿では、幾つかの新しい最尤推定および擬似最尤法推定の方法を提示し、従来の近似的方法との関係を示すとともに、日経225データの分析およびシミュレーションによって、これらの推定法の比較検討を行った。その結果、擬似最尤法では通常用いられるHRS法よりもKG法の方が最尤推定値に近い結果を与えること、最尤推定を行うNG-HRSとNG-KGはほとんど同じ結果を与えることが分かった。

キーワード：カルマンフィルタ、非ガウス型フィルタ、平滑化、AIC、金融時系列、日経225データ

.....  
北川源四郎 統計数理研究所 (E-mail: kitagawa@ism.ac.jp)  
佐藤整尚 統計数理研究所 (E-mail: sato@ism.ac.jp)  
永原裕一 明治大学政治経済学部 (E-mail: nagahara@kisc.meiji.ac.jp)

## 1. はじめに

株式や為替、金利などの金融データの日次や週次の投資収益率の分布は、リスク・マネジメントの観点から重要であるが、実証研究によってその分布は正規分布より裾が厚く、しかも歪んだ分布になることが指摘されている。Fama[1965]とMandelbrot[1963]は、安定パレート分布のように裾の厚い分布が日次の株式投資収益率に対して適切ではないかと指摘している。また、BlattbergとGonedes[1974]では、安定分布と $t$ 分布を比較し、 $t$ 分布の方がより適切であるという結果を得ている。Kariya, et. al.[1995]やNagahara[1996]はさらに、日本の市場においては、これらの分布は裾が厚いだけでなく、歪みを持っていることも検証している。

このような裾の厚い分布が現れる可能性を考慮して、条件付き分散が時間に依存して変化するARCHモデル(Engle[1982])、GARCHモデル(Bollerslev[1986])、EGARCHモデル(Nelson[1991])などの時系列モデルが提案されてきた。これらのモデルでは、その条件付き分散が過去のイノベーションや分散の確定的な関数として表現されるが、本稿で扱う確率的ボラティリティモデルでは、分散の変化に対して独自のノイズを導入している。最近では、GARCHモデルと確率的ボラティリティモデルの比較も株式指数や為替などについて検証されてきている(Heynen, et. al.[1994])。

本稿では、金融時系列  $r_n$  に対する以下のような簡単な確率的ボラティリティモデルの推定の方法を考えることにする。

$$r_n = \sigma_n w_n \quad (1)$$

$$\log \sigma_n^2 = \alpha^* + \beta \log \sigma_{n-1}^2 + v_n \quad (2)$$

ここで、通常定義に従って  $w_n$  は平均0、分散1の標準正規分布に従う白色雑音、 $v_n$  は平均0、分散  $\tau^2$  の正規白色雑音と仮定するが、第3節以降では  $v_n$  や  $w_n$  がコーシー分布などの一般の分布に従う場合についても考えることにする。この確率的ボラティリティモデルは、分散  $\sigma_n^2$  が時間とともに変化する時変パラメータであることが特徴であるが、その変化の仕方は3つの構造パラメータ  $\alpha^*$ 、 $\beta$  および  $\tau^2$  によって規定される。以下ではこれらのパラメータをまとめて  $\theta = (\alpha^*, \beta, \tau^2)$  と表すことにする。

ただし、実際の推定においては

$$\begin{aligned} r_n &= e^{\alpha/2} \sigma_n w_n \\ \log \sigma_n^2 &= \beta \log \sigma_{n-1}^2 + v_n \end{aligned} \quad (3)$$

という表現を用いることにする。これらの二つの表現は等価であり、 $\alpha = \alpha^*/(1 - \beta)$  という関係が成り立つ。しかしながら、(2)の場合には  $\beta$  に依存して  $\alpha^*$  の値が急激

に変化するので、パラメータ推定において尤度関数の曲面が複雑な山となり、非線形最適化によるパラメータ推定に問題が生じる可能性が高い。

これらの確率的ボラティリティモデルに対して Nelson [ 1988 ] および Harvey, Ruiz and Shephard [ 1994 ] は以下のように、原系列の2乗の対数値の系列を用いてモデルのパラメータ  $\theta$  を推定する方法を提案している。

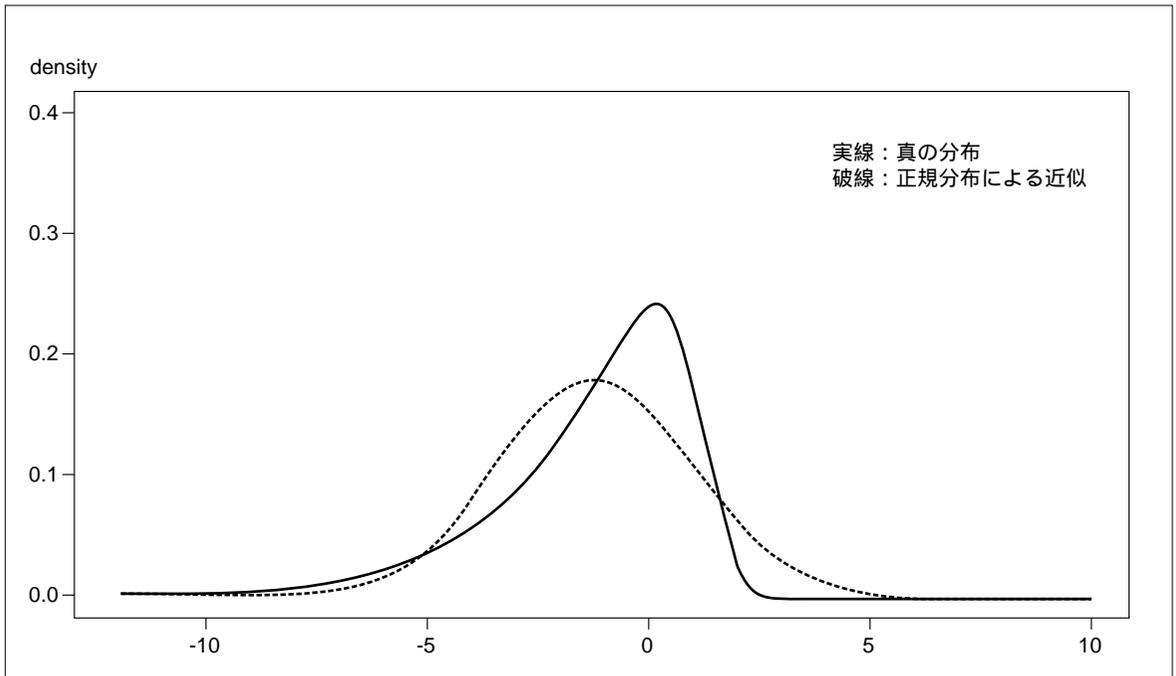
$$\begin{aligned} r_n^2 &= e^\alpha \sigma_n^2 w_n^2 \\ \log r_n^2 &= \alpha + \beta \log \sigma_n^2 + \log w_n^2 \end{aligned} \quad (4)$$

この方法では、(1)あるいは(3)式の右辺の積が和の形に分離されるので、変換されたデータ  $\log r_n^2$  のトレンドを推定することにより、 $\alpha$  と  $\log \sigma_n^2$  を推定することができる。ただし、ノイズ項  $\log w_n^2$  は  $\chi_1^2$  変数の対数の分布に従い、その密度関係は

$$\log w_n^2 \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \frac{w}{2} - \frac{e^w}{2} \right\} \quad (5)$$

で与えられるが、上記の文献ではこれを正規分布  $N(\eta, \pi^2/2)$ 、 $\eta = -1.2704$  で近似している。図1の実線は(5)の密度関数、破線はそれを近似した正規分布を示す。 $\log w_n^2$  の分布は著しく非対称であり、それを近似した正規分布は左側に偏っている。

図1 正規分布による近似(1)



分散 $\sigma_n^2$ の変化が小さく $\sigma_n^2 = \sigma_{n-1}^2$ が成り立つ場合には、この方法はKitagawa and Gersch [ 1985 ]で用いられた変動分散の推定法と本質的に同じである。この方法では(3)の代わりに、引き続き2つの観測値の平方の和の対数値

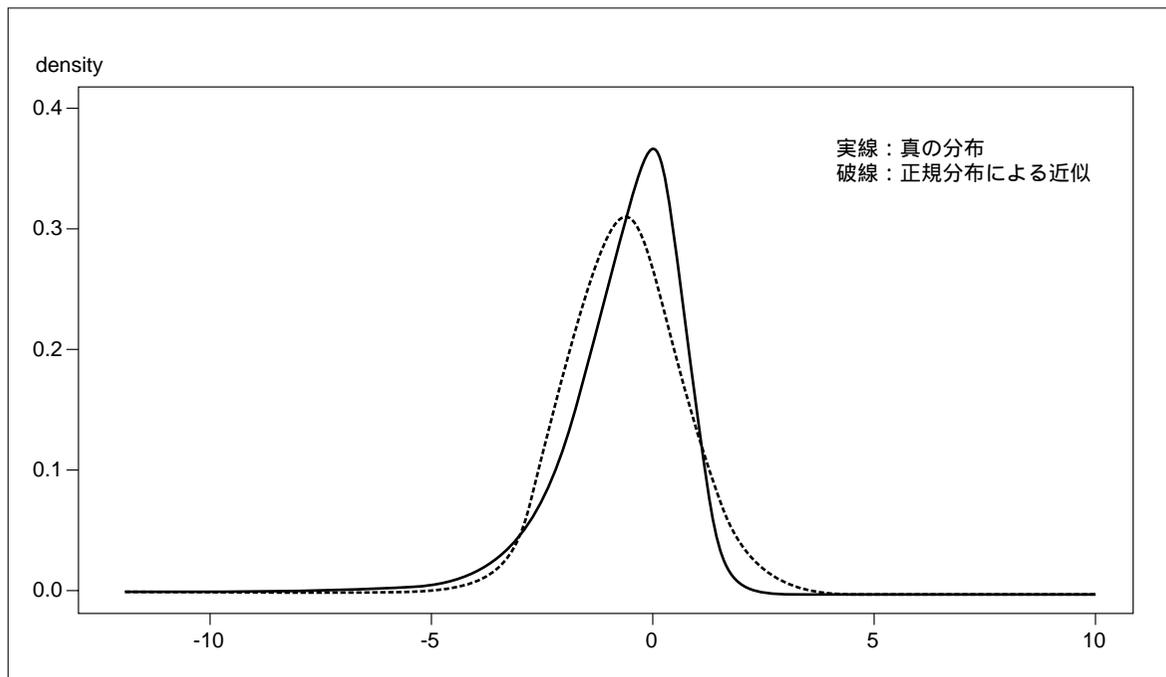
$$\log \{2^{-1}(r_{2m-1}^2 + r_{2m}^2)\} = \log \sigma_{2m}^2 + \log u_{2m}^2 \quad (6)$$

を考えている。この場合には、 $\log u_{2m}^2$ の分布は二重指数分布( $\chi_2^2$ 変数の対数の分布)

$$\log u_n^2 \sim \exp \{u - e^u\} \quad (7)$$

となるが、これを正規分布 $N(\zeta, \pi^2/6)$ 、 $\zeta = -0.57722$ で近似してそのトレンドを推定している。図2に示すように、 $\log u_{2m}^2$ の分布は(4)の場合の $\log w_n^2$ の分布より対称かつ正規分布に近く、しかも0の付近に集中している。(5)と(7)の分布の分散比が3:1である一方、(6)の方法ではデータ数が半分になることを考慮すると、 $\sigma_n^2$ の変化が少ない場合には推定誤差の漸近分散比は3:2になる。

図2 正規分布による近似(2)



Kitagawa [ 1987 ] や北川 [ 1993 ] では非ガウス型状態空間モデルによって非ガウス型のモデルを直接推定する方法を示している。この方法では  $\log w_n^2$  や  $\log u_{2m}^2$  の確率密度関数を直接用いるので、上記のような正規近似を用いる必要はない。ノイズ項  $\log w_n^2$  の分布の密度関数が (5) や (7) の形で表されることを利用すると、数値計算の誤差を除けば厳密にトレンドの予測分布やフィルタ分布を計算することができる。

3節で示すように、カルマンフィルタや非ガウス型フィルタによって得られる予測分布を用いてモデルの尤度を計算することができる。したがって、その尤度を最大化することによりパラメータ  $\theta$  の最尤推定値や擬似最尤推定値を求めることができる。

## 2. 状態空間モデル

### 2.1 時系列モデルの状態空間表現

本節では確率的ボラティリティモデルの推定法を考える。時変分散  $\sigma_n^2$  の対数値を状態  $x_n$ 、 $\log r_n^2$  を新たな観測値とみなし、 $x_n = \log \sigma_n^2$ 、 $y_n = \log r_n^2$  とおくと、(3) (4) の確率的ボラティリティモデルは1次元の線形・非ガウス型状態空間モデル

$$x_n = \beta x_{n-1} + v_n \quad (8)$$

$$y_n = x_n + \alpha + w_n \quad (9)$$

で表すことができる。ここで、システムノイズ  $w_n$  を正規近似した場合は線形・ガウス型の状態空間モデルが得られる。また、非ガウス型の状態空間モデルを用いると、正規近似を使わず厳密な二重指数分布を用いた計算ができる。

一方、非線形状態空間モデルの枠組みでは、(3)式のようにあらかじめ観測値の非線形変換  $y_n = \log r_n^2$  を行う必要はなく

$$x_n = \beta x_{n-1} + v_n \quad (10)$$

$$r_n = e^{\alpha/2} e^{x_n/2} w_n$$

という形の非線形観測モデルを用いて時系列  $r_n$  を直接表現することができる。さらに、一般型状態空間モデルを用いると、観測値  $r_n$  の分布を状態  $x_n$  に依存した条件付き分布で与える  $r_n \sim N(0, e^{\alpha} e^{x_n})$  の形のモデルを考えることもできる。

### 2.2 初期分布の決定

カルマンフィルタなどの状態空間モデルのフィルタリングにおいては状態の初期分布を与える必要がある。確率的ボラティリティモデルの場合には(3)で与えられ

る状態  $x_n = \log \sigma_n^2$  の系列は定常であるので、その定常分布を求めればよい。とくに、ノイズが正規分布に従う場合には、 $\log \sigma_n^2$  の分布も正規分布となるので、その平均と分散を求めればよい。

まず、 $\mu = E[x_n] = E[x_{n-1}]$  として、(3)の両辺の期待値をとると  $\mu = \beta\mu$  となり、これより  $\mu = 0$  が得られる。さらに、(3)の両辺の2乗の期待値から  $\text{var}(x_n) = \tau^2/(1 - \beta^2)$  が得られる。したがって、この場合には状態空間モデルの状態  $x_0$  の初期分布としては正規分布  $N(0, \tau^2/(1 - \beta^2))$  を用いればよいことが分かる。

### 2.3 非ガウス型観測ノイズモデルへの拡張

非線形・ガウス型状態空間モデルあるいは一般型状態空間モデルを用いる場合には観測値の分布が正規分布であることを仮定する必要はない。したがって、例えば正規分布の代わりにコーシー分布あるいはピアソンVII型の分布族

$$P(w_n/\tau^2, b) = \frac{\tau^{2b-1} \Gamma(b)}{\Gamma(b-1/2)\Gamma(1/2)} \frac{1}{(w_n^2 + \tau^2)^b} \quad (11)$$

などを用いることもできる。 $b$  は形状パラメータ ( $0.5 < b < \infty$ ) で、この値を変えることによっていろいろな分布が得られる。 $b = 1$  のときコーシー分布、 $b = (k+1)/2$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) のとき自由度  $k$  の  $t$  分布、 $k \rightarrow \infty$  のとき正規分布となる。ただし、この場合にはボラティリティは通常考えられているような正規分布の分散あるいは標準偏差ではなく、対応する分布の広がりを表す (dispersion) パラメータに相当するものであるので、その解釈にあたっては注意が必要である (Nagahara and Kitagawa [1999])。

同様に(3)式のノイズ  $v_n$  に対しても非ガウス型の分布を想定することができる。コーシー分布などの裾の厚い分布を用いることにより、分散の急激な変化を自動的に検出することが可能となる (Kitagawa [1997] 北川 [1993])。

## 3. 非線形・非ガウス型フィルタによるパラメータ推定

### 3.1 状態の推定とパラメータ推定

一般に、時刻  $j$  までの観測値  $Y_j = \{y_1, \dots, y_j\}$  が得られたとき、時刻  $n$  の状態  $x_n$  を推定することを状態推定の問題という。とくに、 $j < n$ 、 $j = n-1$ 、 $j = n$  および  $j > n$  のとき、それぞれ状態推定を予測、一期先予測、フィルタ、平滑化と呼ぶ。

状態空間モデルの状態  $x_n$  の一期先予測分布  $p(x_n | Y_{n-1})$  が得られると、観測値  $y_n$  の一期先予測分布は

$$p(y_n | Y_{n-1}) = \int p(y_n | x_n) p(x_n | Y_{n-1}) dx_n \quad (12)$$

で与えられる。このとき、確率的ボラティリティモデルの尤度は

$$L(\theta) = p(Y_N) = p(Y_{N-1})p(y_N|Y_{N-1}) = \dots = \prod_{n=1}^N p(y_n|Y_{n-1}) \quad (13)$$

と表現できる。したがって対数尤度は一期先予測分布  $p(y_n|Y_{n-1})$  を用いて

$$\ell(\theta) = \sum_{n=1}^N \log p(y_n|Y_{n-1}) \quad (14)$$

と計算できる。擬似ニュートン法（DFP公式やBFGS公式）などの数値的最適化のアルゴリズムを使えば、この対数尤度関数をパラメータ $\theta$ に関して最大化することにより最尤推定値 $\hat{\theta}$ を求めることができる（北川[1993]）。

### 3.2 カルマンフィルタによる対数尤度の計算

線形ガウス型の状態空間モデルに対しては、状態推定にカルマンフィルタの効率的なアルゴリズムが適用でき、これを利用してNelson[1988]およびHarvey, Ruiz and Shephard[1994]は確率的ボラティリティモデルのパラメータ推定を行っている。

線形ガウス型モデルの場合、一期先予測の分布  $p(x_n|Y_{n-1})$  およびフィルタ分布  $p(x_n|Y_n)$  は正規分布となり、平均値と分散共分散行列を用いて

$$\begin{aligned} p(x_n|Y_{n-1}) &\equiv N(x_{n|n-1}, V_{n|n-1}) \\ p(x_n|Y_n) &\equiv N(x_{n|n}, V_{n|n}) \end{aligned} \quad (15)$$

と表現できる。よく知られているように、これらの平均と分散は以下のカルマンフィルタのアルゴリズムを繰り返し適用することにより計算できる（片山[1983]、北川[1993]）。

[一期先予測]

$$\begin{aligned} x_{n|n-1} &= \beta x_{n-1|n-1} \\ V_{n|n-1} &= \beta^2 V_{n-1|n-1} + \tau^2 \end{aligned} \quad (16)$$

[フィルタ]

$$\begin{aligned} K_n &= V_{n|n-1}(V_{n|n-1} + \xi^2)^{-1} \\ x_{n|n} &= x_{n|n-1} + K_n(y_n - x_{n|n-1} - \alpha) \end{aligned} \quad (17)$$

$$V_{n|n} = (I - K_n) V_{n|n-1}$$

ただし、 $\xi^2$ は観測ノイズの分散である。このとき、 $y_n$ の一期先予測誤差とその分散はそれぞれ $\varepsilon_n = y_n - x_{n|n-1} - \alpha$ と $s_n = V_{n|n-1} + \xi^2$ で与えられるので、

$$p(y_n | Y_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s_n}} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon_n^2}{2s_n} \right\} \quad (18)$$

となる。これを(14)に代入するとモデルの対数尤度は

$$\ell(\theta) = -\frac{N}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \log s_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{\varepsilon_n^2}{s_n} \quad (19)$$

で計算できる。

### 3.3 非ガウス型フィルタによる対数尤度の計算

一般の状態空間モデルの場合にもカルマンフィルタと同様に以下の一期先予測とフィルタのステップを繰り返すことにより予測分布を逐次的に求めることができる (Kitagawa [1987])。

[一期先予測]

$$\begin{aligned} p(x_n | Y_{n-1}) &= \int p(x_n | x_{n-1}) p(x_{n-1} | Y_{n-1}) dx_{n-1} \\ &= \int p(x_n | z_n) p(z_n | Y_{n-1}) dz_n \\ &= \int p(x_n - z_n) p(z_n | Y_{n-1}) dz_n \end{aligned} \quad (20)$$

ただし、 $z_n = \beta x_{n-1}$ である。

[フィルタ]

$$p(x_n | Y_n) = \frac{p(y_n | x_n) p(x_n | Y_{n-1})}{p(y_n | Y_{n-1})} \quad (21)$$

フィルタの計算の右辺の分母に現れる  $p(y_n | Y_{n-1})$ は

$$p(y_n | Y_{n-1}) = \int p(y_n | x_n) p(x_n | Y_{n-1}) dx_n \quad (22)$$

によって計算できる。これを用いると、対数尤度は

$$\ell(\theta) = \sum_{n=1}^N \log p(y_n | Y_{n-1}) \tag{23}$$

により計算できる。

実際の計算においては、一般の非ガウス型の密度関数を取り扱うために、予測分布  $p(x_n | Y_{n-1})$ 、フィルタ分布  $p(x_n | Y_n)$  およびシステムノイズの分布  $p(v_n)$  をそれぞれ適当な方法で数値的に表現し、(20) (22) 式の積分などは数値積分で計算する(付録)。

表 1

$\tau^2$	平均	分散
0	-0.577207	1.644895
$10^{-6}$	-0.577207	1.644896
$10^{-5}$	-0.577206	1.644899
$10^{-4}$	-0.577201	1.644932
$10^{-3}$	-0.577145	1.645268
$10^{-2}$	-0.576586	1.648637
$10^{-1}$	-0.570989	1.682345
1	-0.516555	2.017926
10	-0.069874	5.280601
100	2.277406	36.418713

### 3.4 各推定法の関係

1 節では、確率的ボラティリティモデルの推定には、データ  $r_n$  をそのまま用いても、また(4) (6) のデータ変換を用いてもよいことを示した。さらにノイズの分布をそのまま用いる場合と正規近似をする場合があることを示した。これらの推定法で求められたパラメータや対数尤度の値を比較する場合には以下の関係に注意する必要がある。

まず、(6) 式のデータ変換を利用した場合には  $\log \sigma_n^2$  の値は 1 点おきにだけ変化する。この場合

$$\log \sigma_n^2 = \beta \log \sigma_{n-1}^2 + v_n = \beta^2 \log \sigma_{n-2}^2 + \beta v_{n-1} + v_n \tag{24}$$

となるので、(4) を用いて推定した係数は実際には  $\beta^2$  に相当し、ノイズの分散の推定値は  $(1 + \beta^2) \tau^2$  を推定したものとなっている。また、(7) が厳密に成り立つのは  $\log \sigma_n^2 = \log \sigma_{n-1}^2$  の場合に限られる。実際には(3) 式によって変動している場合には  $\log u_n^2$  の分布は  $w_n, w_{n-1} \sim N(0, 1)$ 、 $v_n \sim N(0, \tau^2)$  としたときの  $\log(e^{v_n w_n^2 + w_{n-1}^2})$  の分布に従う。表 1 に、シミュレーションで求めた、この分布の平均および分散を示す。

この表から  $\tau^2$  が 0.01 以下の場合にはほとんど (6) の変換の影響は見られないが、0.1 の場合には 0.06 程度のバイアスがあることが分かる。さらに、1 以上の場合には平均も分散も著しく異なる。ただし、確率的ポラティリティモデルにおいては通常は  $\tau^2$  が 1 以上に近いモデルは考える必要はないと思われる。

一方、ノイズの分布 (5) や (7) を正規近似した場合には、それぞれ  $\eta$  と  $\zeta$  に相当するバイアスが生じるので、その補正を行う必要がある。

異なった方法でデータを変換した後のモデルの対数尤度の値はそのままの形で比較できない。ただし、データの変数変換の影響を補正した情報量規準 AIC を用いると比較が可能となる。(4) 式の変換を行ったデータに対するモデルの場合には  $\log r_n^2$  の Jacobian の対数値

$$J_{HRS} = \log \prod_{n=1}^N \exp \{y_n/2\} = \sum_{n=1}^N \log |r_n| \quad (25)$$

を用いて、補正した AIC

$$AIC = -2 \ell(\hat{\theta}) + 2J_{HRS} + 2 \times 3 \quad (26)$$

を考えることにする。また、(6) 式の変換  $z_n = \log \{2^{-1}(r_{2m-1}^2 + r_{2m}^2)\}$  の場合には

$$J_{KG} = \log \prod_{n=1}^{N/2} 2\pi e^{z_n} = \frac{N}{2} \log 2\pi + \sum_{n=1}^{N/2} z_n \quad (27)$$

を用いて同様に AIC を定義すればよい。

これらの補正をしない通常の AIC は変換した後のデータに対するモデルのあてはまりのよさを評価したものであるのに対して、補正した AIC は原データに対するモデルのよさを表す。したがって、様々な変換を行ったあとのモデルでも、いったんすべて原データに戻して考えることにより、相互に比較することが可能となる。

## 4. 日経 225 データの解析

日経 225 データ (1987 年 1 月 1 日 - 1990 年 8 月 31 日、 $N = 961$ ) の一階階差を時系列  $r_n$  と考え、様々な方法で確率的ポラティリティモデルのパラメータの推定を行った。表 2 で HRS は (4) 式とカルマンフィルタを用いる Harvey, Ruiz and Shephard [1994] の方法による結果、NG-HRS はその観測ノイズの厳密な分布 (5) を用いて非ガウス型フィルタで推定したものを表す。同様に、KG と NG-KG は (6) の変換と正規近似を用いたものと (7) 式の二重指数分布を直接用いたものを表す。Direct は (12) の一般型状態空間モデルを用いて直接パラメータ推定を行った場合を表す。さらに、NG- $b$  ( $b = 3, 3/2, 1, 3/4, 4/5$ ) は (10) 式とともに (15) 式のシステムノイズ  $v_n$  の密度関数にピアソン VII 型の分布を用いた場合で、 $b$  はその形状パラメータを表す。

HRSとKGの $\alpha$  は他の方法より小さいが、それぞれのノイズの平均 $\eta = -1.2704$ と $\zeta = -0.5772$ を引いた補正值 $\bar{\alpha}$  はそれぞれ10.87、10.82となり、ほかの推定値とほぼ等しくなる。ただし、ノイズの分布を正規近似した場合、HRSでは $\tau^2$ の推定値は約50%、KGでは約5%小さな値になっている。

表2：いろいろなモデル・計算法の対数尤度、AICとパラメータの推定値

Model	対数尤度	AIC	$\tau^2$			$\bar{\tau}^2$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
HRS	-2191.0	13545.3	0.0546	9.60	0.9686	—	10.87	—
NG-HRS	-2055.3	13273.9	0.1036	10.83	0.9529	—	—	—
KG	-886.8	13338.0	0.1816	10.24	0.9106	0.0950	10.82	0.9543
NG-KG	-856.3	13277.1	0.1935	10.83	0.9110	0.1013	—	0.9545
Direct	-6634.0	13274.0	0.1035	10.83	0.9529	—	—	—
NG-3.0	-6630.0	13266.0	0.2712	10.75	0.9495	—	—	—
NG-1.5	-6627.4	13260.7	0.0275	10.61	0.9544	—	—	—
NG-1.0	-6628.6	13263.1	0.0013	10.49	0.9548	—	—	—
NG-0.75	-6630.5	13266.9	0.0000	10.41	0.9547	—	—	—
NG-0.6	-6631.8	13269.5	0.0000	10.35	0.9551	—	—	—

KGおよびNG-KGの $\tau^2$ および $\beta$ の値は他のものと著しく異なっているが、3.4節の変換を行った $\hat{\tau}^2$ と $\hat{\beta}$ は他の値とよく対応している。

NG-HGとDirectの対数尤度の値は直接は比較できないが、データの変換の影響を補正したAICの値はほぼ一致する。これに対して、NG-KGのAICは3.2大きく、一点おきにだけパラメータが変化するとした仮定の影響が見られる。しかし、HRSのAICがNG-HRSより約270大きいのにに対して、NG-KGでは約60しか大きくなっていない。以上から、非ガウス型フィルタを用いて厳密な計算をする場合には(6)式を用いない方がよいが、正規近似する場合には(4)式よりも(6)式を用いた方がはるかによい結果が得られることを示している。

一方、表2の下半分に示すNG-3.0などは、(3)式のシステムノイズ $v_n$ に(16)式のピアソン分布族を用いた場合で3.0は形状パラメータ $b$ を表す。 $b = 1.5$  (自由度2の $t$ 分布)の場合にAICの値が最小となっている。

表3：非正常モデルの場合の対数尤度、AICとパラメータの推定値

Model	対数尤度	AIC	$\tau_2$			$\bar{\tau}_2$
HRS	-2195.2	13549.7	0.0236	0.0	1.0	—
NG-HRS	-2063.3	13286.3	0.0619	0.0	1.0	—
KG	-893.3	13347.0	0.0839	0.0	1.0	0.0420
NG-KG	-864.2	13288.9	0.1216	0.0	1.0	0.0608
Direct	-6642.2	13286.4	0.0620	0.0	1.0	—
NG-3.0	-6640.4	13281.9	0.1679	0.0	1.0	—
NG-1.5	-6637.7	13277.4	0.0173	0.0	1.0	—
NG-1.0	-6638.8	13279.6	0.0006	0.0	1.0	—
NG-0.75	-6640.2	13282.5	0.0000	0.0	1.0	—
NG-0.6	-6641.4	13284.7	0.0000	0.0	1.0	—

表3は $\alpha=0$ 、 $\beta=1$ とおき非定常なモデルをあてはめた場合の結果をまとめたものである。AICの値の変化は表1の場合とほぼ同様である。また、表2と表3を比較すると、 $\beta=1$ と仮定した方がよいか否かの判定を行うことができる。この例の場合にはすべての推定法について $\alpha=0$ 、 $\beta=1$ と仮定しない場合の方がAICの値が小さくなっており、ボラティリティの変化のモデルについては単位根を仮定しないほうがよいことを示している。

図3の点は $\log \sigma_n^2$ の値、実線はAICが最も小さくなったNG-HRSで推定した $\log \sigma_n^2 + \alpha$ を示す。 $\log \sigma_n^2$ はしばしば下方に大きな跳びが見られるが推定された $\log \sigma_n^2 + \alpha$ は点の分布の上限近くに貼り付いている。これは図1のノイズの分布は $w>3$ ではほとんど0となることに対応している。一方、図4は $r_n$ とボラティリティに対応する $e^{\alpha/2} \sigma_n$ を示す。

図3 推定されたVolatility (Log)

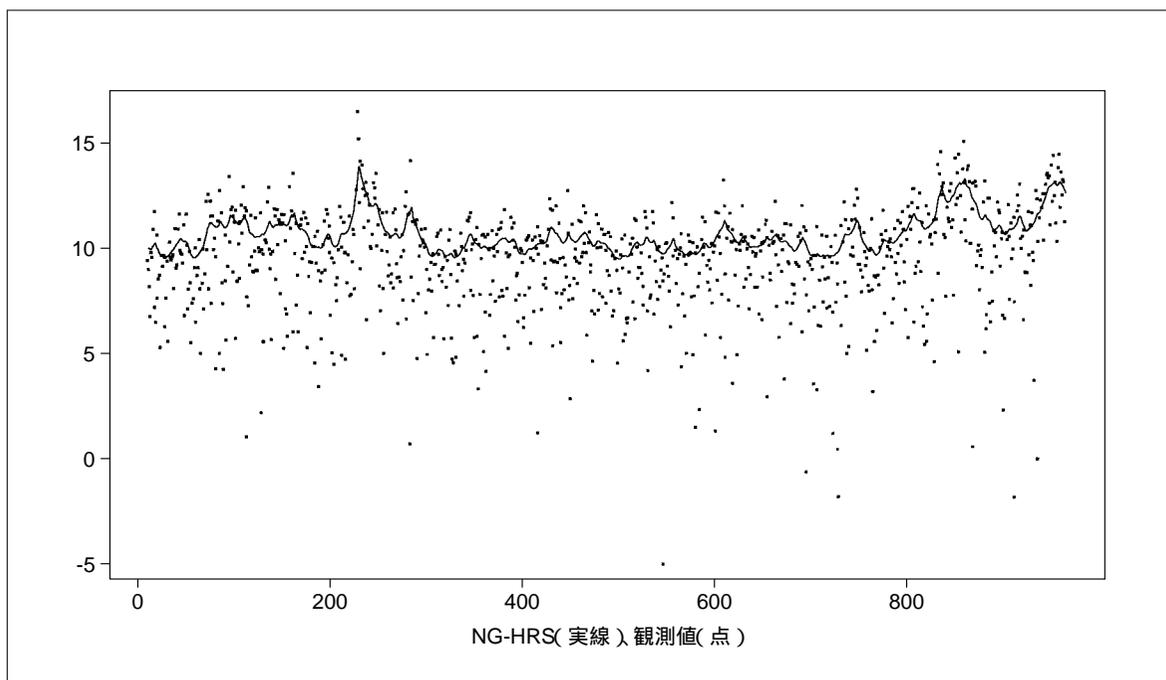


図4 推定されたVolatility (絶対値)

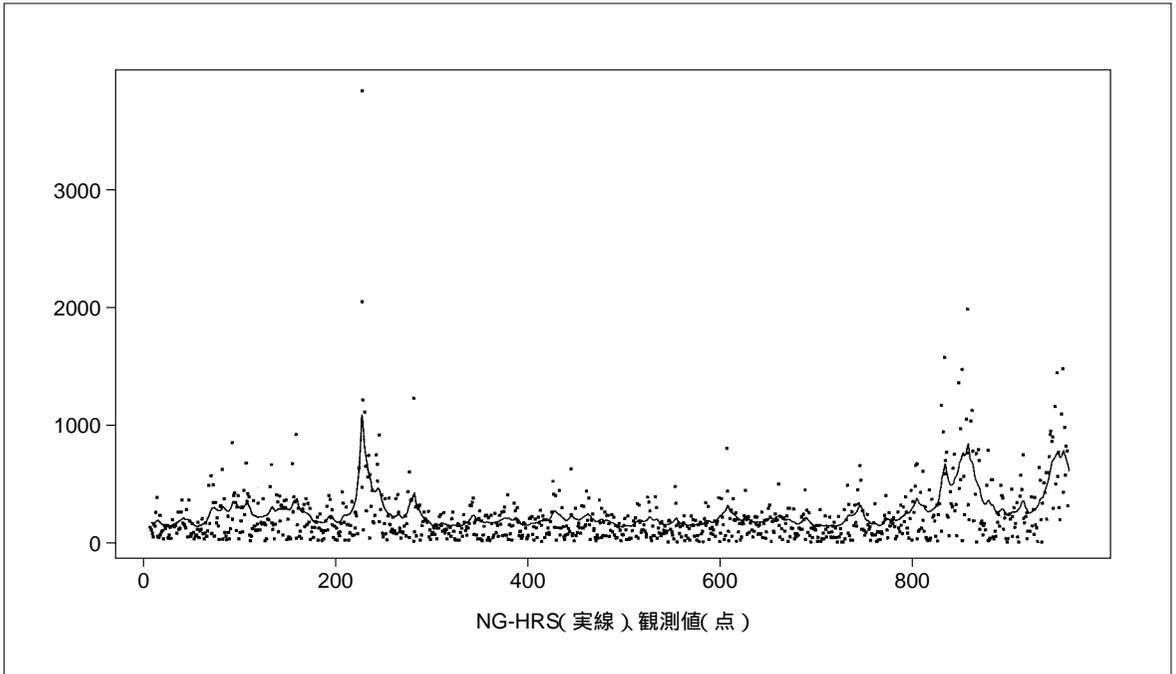


図5はNG-HRSによる $\log \sigma_n^2 + \alpha$ の推定値とガウス近似を行ったHRSによる推定値を比較したものである。HRSはNG-HRSと比較して著しく滑らかになっている。これはノイズの分布を分散の大きな正規分布で近似しており、とくに $(-5, -2)$ と $(2, 5)$ 付近の密度関数の値が相対的に大きいので、多少のずれを許容してしまうことによる。

図6はKGとNG-HRSの比較を示す。図5のHRSよりはよい近似が得られている。数ヶ所にKGの推定値が下方に大きく偏っている部分があるが、これは負の部分では正規密度の収束が(7)の分布より早いために、図3に見られる幾つかの跳びに敏感に反応したことによる。

図7はNG-KGとNG-HRSによって推定した $\log \sigma_n^2 + \alpha$ の比較であるが、両者はほとんど一致している。

図5 HRS (実線) NG-HRS (破線)

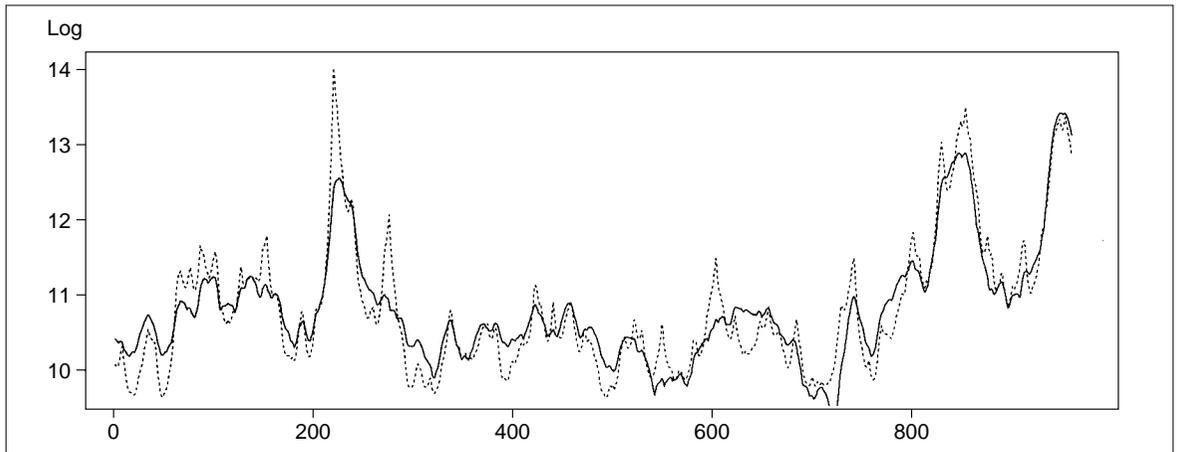


図6 KG (実線) NG-HRS (破線)

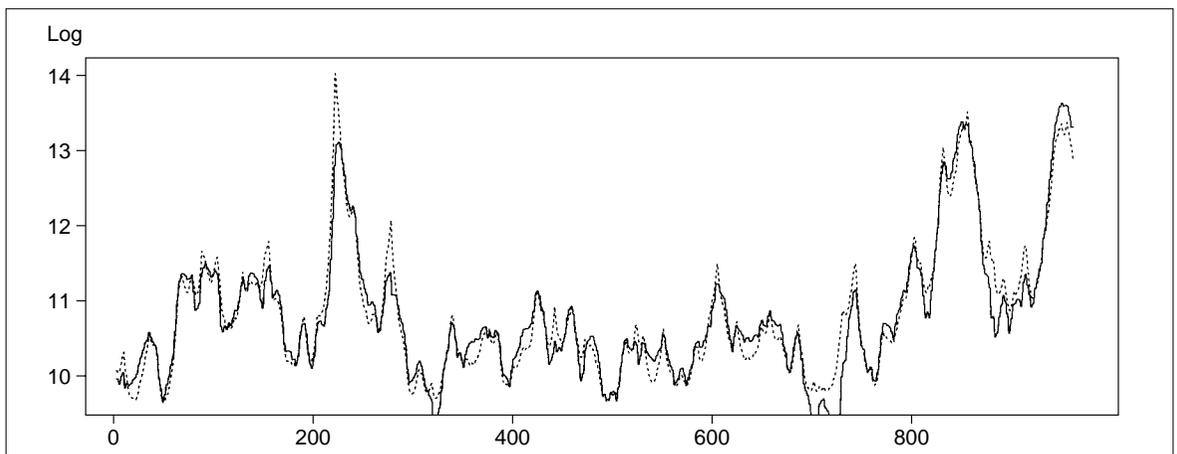


図7 NG-KG (実線) NG-HRS (破線)

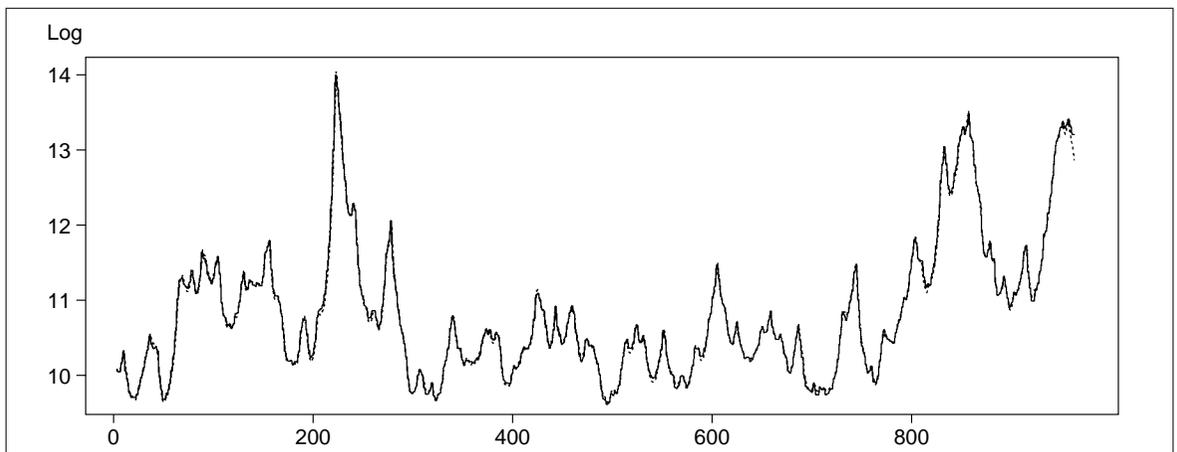


図8はKGの方法により推定したパラメータを用いて、NG-HRSの方法でボラティリティの推定を行った結果を示したものである。図の全域にわたってほぼNG-HRSと一致しており、少なくとも視覚的には両者の違いは見られない。これは、計算時間の最も短い近似的なKGでパラメータ推定を行い、厳密なNG-HRSで1回だけフィルタおよび平滑化の計算を行うことにより、ほぼ厳密解が得られることを意味しており、ボラティリティの実用的な推定法を示唆している。

図9は非ガウス型システムノイズに拡張したNG-1.0による推定結果を示す。システムノイズに非ガウス型分布 ( $b=1.0$ の場合はコーシー分布) を用いることにより、 $n=200$ および800付近でボラティリティのジャンプ状の変化が自動的に検出されており、しかもその他の場所ではNG-HRSと比較してより滑らかな推定値が得られている。

図8 KGのパラメータを使ったNG-HRS (実線) NG-HRS (破線)

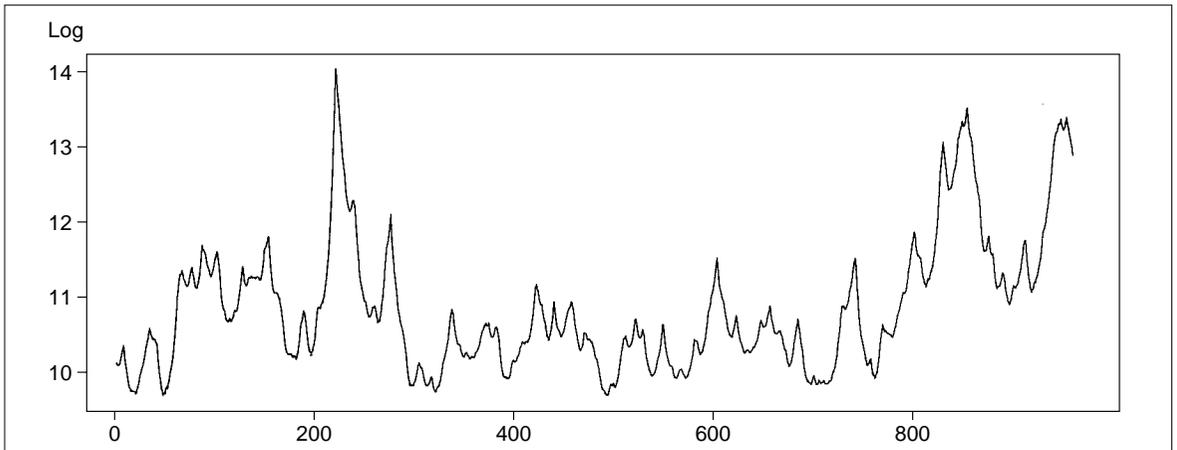
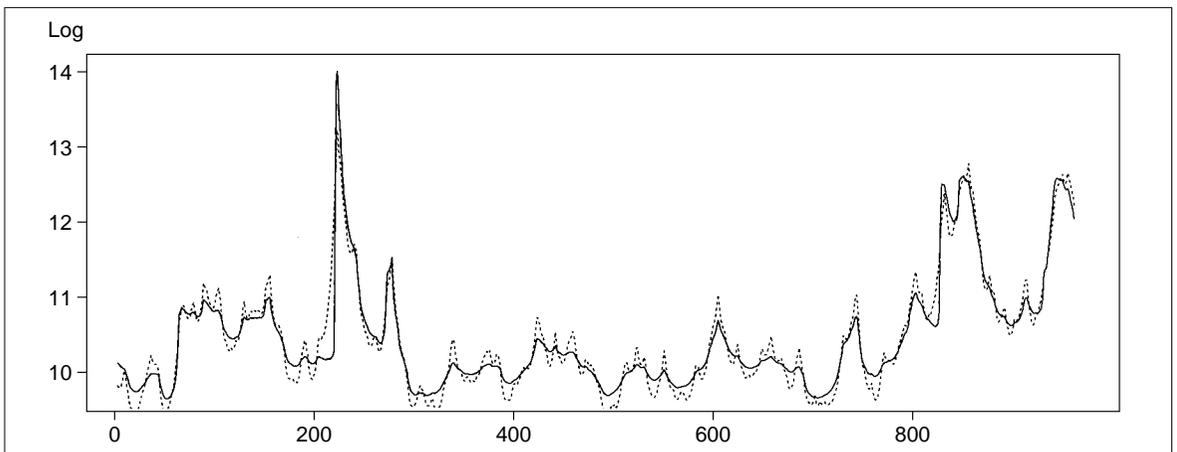


図9 非ガウス型モデルNG-1.0 (実線) NG-HRS (破線)



## 4.1 シミュレーションによる推定量の比較

本稿で考えた確率的ボラティリティモデルのパラメータ推定法を比較するために、シミュレーションによる検討を行った。真のモデルとしては(10)式で $\alpha = 1$ と仮定し、 $\beta = 0.9, 0.95, 0.99$ および $\tau^2 = 0.05, 0.1, 0.3$ の9つの組み合わせに対して $N = 1000$ のデータを100回生成し、それぞれの方法で推定したパラメータ $\hat{\alpha}$ (表4)、 $\hat{\beta}$ (表5)および $\tau^2$ (表6)の平均値と標準偏差を求めた。

推定量の分散に関しては、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\tau^2$ のすべてに関して、ほとんど常に

$$\text{HRS} > \text{KG} > \text{NG-HRS} = \text{NG-KG} \quad (28)$$

という関係が見られる。ただし、非定常に近い $\beta = 0.99$ の場合にはその違いはあまり大きくない。HRSとKGの分散比は理論値(=1.5)に近い。 $\alpha$ の分散は $\beta$ の値の増加とともに大きくなるが、 $\beta$ と $\tau^2$ の分散は逆に小さくなる。

次に平均値について見ると、 $\alpha$ はHRSとKGのバイアス(1.270, 0.577)を補正すると、 $\beta = 0.95$ 以下ではどの推定量もよい近似を与えている。 $\beta = 0.99$ の場合は分散が大きく、平均値もずれているが、 $\beta = 1$ の非定常の場合には、 $\alpha$ はどんな値でも同等であることを考慮すると当然の結果ともいえる。 $\beta$ の推定量については、全般に僅かな過小評価が見られるが、これは $\beta$ のパラメータ空間が左右非対称にもかかわらずシミュレーション結果の集計に標本平均を用いたことによると思われる。NG-HRSとNG-KGはほぼ同等でKGもこれらに近い推定値を与えている。一方、 $\beta$ の値が小さな場合にはHRSにはバイアスが見られる。

表4： の推定結果の比較

$N = 1000$	$\Delta\text{HRS}$	$\Delta\text{KG}$	$\Delta\text{NG-HRS}$	$\Delta\text{NG-KG}$
$\beta = 0.9, \tau^2 = 0.05$	-0.264 (0.063)	0.430 (0.055)	0.999 (0.046)	1.003 (0.046)
$\beta = 0.9, \tau^2 = 0.1$	-0.261 (0.073)	0.438 (0.058)	1.004 (0.049)	1.009 (0.050)
$\beta = 0.9, \tau^2 = 0.3$	-0.276 (0.071)	0.440 (0.059)	0.999 (0.053)	1.015 (0.054)
$\beta = 0.95, \tau^2 = 0.05$	-0.272 (0.073)	0.426 (0.059)	1.001 (0.051)	1.003 (0.051)
$\beta = 0.95, \tau^2 = 0.1$	-0.268 (0.074)	0.438 (0.053)	1.007 (0.050)	1.012 (0.049)
$\beta = 0.95, \tau^2 = 0.3$	-0.281 (0.080)	0.436 (0.069)	0.992 (0.060)	1.006 (0.060)
$\beta = 0.99, \tau^2 = 0.05$	-0.257 (0.182)	0.444 (0.175)	1.017 (0.185)	1.017 (0.182)
$\beta = 0.99, \tau^2 = 0.1$	-0.315 (0.260)	0.384 (0.267)	0.945 (0.279)	0.949 (0.274)
$\beta = 0.99, \tau^2 = 0.3$	-0.282 (0.401)	0.419 (0.418)	0.981 (0.379)	0.993 (0.392)

表5： の推定結果の比較

$N=1000$	$\hat{\beta}^{\text{HRS}}$	$\hat{\beta}^{\text{KG}}$	$\hat{\beta}^{\text{NG-HRS}}$	$\hat{\beta}^{\text{NG-KG}}$
$= 0.9, \tau^2 = 0.05$	0.839 (0.174)	0.873 (0.110)	0.875 (0.085)	0.884 (0.058)
$= 0.9, \tau^2 = 0.1$	0.880 (0.091)	0.893 (0.043)	0.895 (0.033)	0.898 (0.031)
$= 0.9, \tau^2 = 0.3$	0.883 (0.038)	0.890 (0.030)	0.891 (0.025)	0.896 (0.024)
$= 0.95, \tau^2 = 0.05$	0.920 (0.071)	0.935 (0.046)	0.942 (0.021)	0.943 (0.021)
$= 0.95, \tau^2 = 0.1$	0.939 (0.033)	0.943 (0.017)	0.944 (0.016)	0.945 (0.015)
$= 0.95, \tau^2 = 0.3$	0.938 (0.019)	0.943 (0.016)	0.943 (0.015)	0.945 (0.014)
$= 0.99, \tau^2 = 0.05$	0.986 (0.009)	0.986 (0.007)	0.986 (0.006)	0.987 (0.006)
$= 0.99, \tau^2 = 0.1$	0.985 (0.007)	0.986 (0.007)	0.985 (0.007)	0.986 (0.007)
$= 0.99, \tau^2 = 0.3$	0.985 (0.007)	0.985 (0.006)	0.985 (0.006)	0.986 (0.006)

表6： $\tau^2$ の推定結果の比較

$N=1000$	$\hat{\tau}^{\text{HRS}}$	$\hat{\tau}^{\text{KG}}$	$\hat{\tau}^{\text{NG-HRS}}$	$\hat{\tau}^{\text{NG-KG}}$
$= 0.9, \tau^2 = 0.05$	0.133 (0.205)	0.074 (0.078)	0.062 (0.038)	0.056 (0.027)
$= 0.9, \tau^2 = 0.1$	0.126 (0.148)	0.105 (0.059)	0.100 (0.039)	0.095 (0.035)
$= 0.9, \tau^2 = 0.3$	0.346 (0.148)	0.310 (0.091)	0.310 (0.069)	0.291 (0.064)
$= 0.95, \tau^2 = 0.05$	0.087 (0.097)	0.063 (0.045)	0.054 (0.021)	0.053 (0.021)
$= 0.95, \tau^2 = 0.1$	0.115 (0.074)	0.105 (0.036)	0.103 (0.030)	0.100 (0.028)
$= 0.95, \tau^2 = 0.3$	0.343 (0.096)	0.315 (0.071)	0.315 (0.062)	0.301 (0.059)
$= 0.99, \tau^2 = 0.05$	0.052 (0.020)	0.050 (0.015)	0.049 (0.012)	0.049 (0.012)
$= 0.99, \tau^2 = 0.1$	0.107 (0.029)	0.104 (0.024)	0.104 (0.018)	0.103 (0.018)
$= 0.99, \tau^2 = 0.3$	0.311 (0.075)	0.299 (0.057)	0.299 (0.045)	0.291 (0.043)

$\tau^2$ に関しても、NG-HRSとNG-KGはほぼ同等、KGは $\beta = 0.9$ 以外ではこれらと非常に近い値を与えている。一方、HRSに上方のバイアスが見られる。

## 5. まとめ

データに様々な変換を施してからモデルの推定を行うと、その尤度や対数尤度はまったく異なった値をとり、相互比較は不可能となる。しかし、それらの変数変換を考慮した情報量規準AICを用いるとこれらの相互比較が可能となる。

非ガウス型の分布を用いた計算を直接行うNG-HRSとNG-KGはほとんど同じ結果を与える。分布の違いは変数変換の違いだけで一対一に対応しており、これらの方法の違いは(6)式の近似を使うかどうかにある。あまり結果が違わないことを考えると、NG-KGを使う必要はないとも言えるが、逆にNG-KGの方のデータ数が半分となるので計算時間が半分になる利点はある。非ガウス型フィルタの計算量はかなり大きいので、この点は考慮する価値がある。一方、ガウス近似を用いたHRSとKGの結果はかなり異なる。バイアス、分散の両方の観点からKGの方がよい結果を与えている。ただし、この方法は基本的に $\beta = 1$ に近い状況を仮定しており、 $\beta$ が0に近い場合には変換(6)を考慮した複雑な補正が必要であることに注意する必要がある。ただし、確率的ポラティリティモデルの場合には $\beta = 1$ に近いと仮定することは問題がないと思われる。

非ガウス型フィルタを用いる方法とカルマンフィルタを用いた方法では、明らかに非ガウス型フィルタを用いて厳密な計算をした方がよい結果が得られる。ただし、計算量の違いが著しいので目的に応じた使い分けが必要と思われる。図8の結果は、実用的なポラティリティの推定法を示唆している。すなわち、少なくとも経験的には、もっとも計算時間の早いKGでパラメータ推定を行い、その結果を用いてNG-HRSでの計算を1回だけ行うことにより、ほとんど厳密な最尤推定値と同じ結果が得られるという興味ある事実が示された。

非ガウス型分布を直接用いる方法では、システムノイズに非ガウス型分布を用いる拡張も可能である。これによって、実際にAICの値は改善され、またポラティリティの推定値においてもジャンプの検出と滑らかな推定値という、通常は相反する要求を同時に満たした推定が実現できることも確認できた。

## 付録：非ガウス型フィルタの計算アルゴリズム

もっとも簡単な方法では、状態  $x_n$  の範囲をカバーする区間  $x_{min} < x_n < x_{max}$  を  $K$  個の等間隔な区間

$$x_{min} = t_1 < t_2 < \dots < t_K = x_{max}, \Delta t = t_i - t_{i-1} \quad (29)$$

を考え、区間  $[ t_k - \Delta t/2, t_k + \Delta t/2 ]$  上の確率を  $p_n(k), f_n(k)$  とする。すなわち、

$$\begin{aligned} p_n(k) &= \int_{t_k - \Delta t}^{t_k + \Delta t} p(x_n | Y_{n-1}) dx_n \\ f_n(k) &= \int_{t_k - \Delta t}^{t_k + \Delta t} p(x_n | Y_n) dx_n \end{aligned} \quad (30)$$

とする。また、システムノイズについては、 $j = -k, \dots, 0, \dots, k$  について

$$v(j) = \int_{\Delta(t-1/2)}^{\Delta(t+1/2)} p(v) dv \quad (31)$$

と定義する。このとき、非ガウス型フィルタは以下の計算により実現できる。

1.  $p(x_{n-1} | Y_{n-1})$  から  $p(z_n | Y_{n-1})$  を求める。

$p(x_{n-1} | Y_{n-1})$  は  $f_{n-1}(1), \dots, f_{n-1}(K)$  によって近似されているとする。このとき

(a)  $g(k) = 0$  ( $k=1, \dots, K$ )

(b)  $j=1, \dots, K$  について

$$\begin{aligned} m &= (\beta t_j - t_1) / \Delta t \\ g(m) &= g(m) + f_{n-1}(j) (m+1 - \beta t_j / \Delta t) \\ g(m+1) &= g(m+1) + f_{n-1}(j) (\beta t_j / \Delta t - m) \end{aligned}$$

2.  $p(z_n | Y_{n-1})$  から  $p(x_n | Y_{n-1})$  を求める。

$j=1, \dots, K$  について

$$p_n(j) = \sum_{i=-K}^K g(j-i) v(i) \quad (32)$$

3.  $p(x_n | Y_{n-1})$  から  $p(x_n | Y_n)$  を求める。

$$\begin{aligned} \bar{f}_n(j) &= P_n(j) r(y_n | x_n) \\ f_n(k) &= \frac{\bar{f}_n(j)}{\sum_{i=1}^N \bar{f}_n(i)} \end{aligned} \quad (33)$$

ただし、 $r(y_n | x_n)$  は観測ノイズの密度関数である。

## 参考文献

- 片山 徹、応用カルマンフィルター、朝倉書店、東京、1983年
- 北川源四郎、FORTRAN77時系列解析プログラミング、岩波書店、東京、1993年
- Blattberg, R. C. and Gonedes, N. J., "A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices", *Journal of Business*, 47, 244-280, 1974.
- Bollerslev, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 31, 307-327, 1986.
- Engle, Robert F. , "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U. K. Inflation", *Econometrica*, 50, 987-1008, 1982.
- Fama, E. F. , "The Behavior of Stock Market Prices", *Journal of Business*, 38, 34-105, 1965.
- Harvey, A. C., E. Ruiz and N. Shephard, "Multivariate Stochastic Variance Model", *Review of Economic Studies*, 61, 247-264, 1994.
- and Shephard, N., "Estimation of an Asymmetric Stochastic Volatility Model of Asset Returns", *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 14, No. 4, 429-434, 1996.
- Heynen, R. C. and Kat, H. M., "Volatility Prediction: A Comparison of the Stochastic Volatility, GARCH (1, 1), and EGARCH (1, 1) Models", *The Journal of Derivatives*, Winter, 50-65, 1994.
- Jacquier, E. and Polson, N and Rosi, P. E., "Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models" (with discussion), *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 12, No. 4, 371-417, 1994.
- Kariya, T., Tsukuda, Y., Maru, J., Matsue, Y. and Omaki, K., "An extensive analysis on the Japanese markets via S. Taylor's model", *Financial Engineering and the Japanese Markets*, Vol. 2, No. 1, 15-86, 1995.
- Kitagawa, G., "Non-Gaussian State-Space Modeling of Nonstationary Time Series" (with discussion), *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 82, No. 400, 1032-1063, 1987.
- and Gersch, W., "A smoothness priors time varying AR coefficient modeling of nonstationary time series", *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-30, 48-56, 1985.
- and , *Smoothness Priors Analysis of Time Series*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- Mandelbrot, B., "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, 36, 394-419, 1963.
- Nelson, D. B., "Time Series Behaviour of Stock Market Volatility and Returns", *Unpublished Ph.D. Dissertation*, 1988.
- , "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns : A New Approach", *Econometrica*, 59, 347-370, 1991.
- Nagahara, Y., "Non-Gaussian Distribution for Stock Returns and Related Stochastic Differential Equation", *Financial Engineering and the Japanese Markets*, Vol. 3, No. 2, 121-149, 1996.
- and Kitagawa, G., "Non-Gaussian Stochastic Volatility Model", *Journal of Computational Finance*, forthcoming, 1999.