金利変動と先物価格の複製過程：ユーロ円金利先物市場の価格形成

倉澤資成／呉　泳

要　旨

金利が確定的であれば先物 futuresと先渡 forwardは一致し、先物の価格と対象資産の価格の関係は簡単に求められるが、金利変動の不確実性を考慮すれば両者は異なる。しかし、金利が確定的でないときには、先物のペイオフを複製する一般的な戦略は知られていない。この論文では、先物の対象資産と金利のボラティリティが時間だけの関数であるとき、先物のペイオフを原資産と割引債のポートフォリオで複製できることを示し、その投資戦略を具体的に導出する。さらに、この関係を用いて、ユーロ円先物市場の価格形成について実証的に検討し、次のような結果を得た。(1) 金利先物価格は金利先渡価格と必ずしも一致しない。このため、金利先物価格の代理変数として先渡価格を用いると、少なくない問題が生ずる可能性がある。(2) ユーロ円市場において、先物の変化がフォワード・カーブの変化に関して一定の予測力をもつ。この意味で、ユーロ円の先物価格には、将来のフォワードカーブに関する情報が反映されている。(3) 先物価格と複製戦略の価値は、期間を5-7日とるとかなりの程度連動する。短期的な両者の乖離のかなりの部分は1日で調整される。

キーワード：金融先物、ユーロ円金利先物、金利のボラティリティ、複製戦略

本稿は、倉澤と呉がそれぞれ日本銀行金融研究所国内客員研究員、研究生として、1995年10月から開始した研究プロジェクトの成果の一部です。素晴らしい研究環境を提供していただき、有益な議論と示唆を与えていただいた、日本銀行金融研究所のスタッフの皆様に心よりお礼を申し上げます。この論文のもととなった草稿を、1997年度日本ファイナンス学会および横浜国立大学で報告した際には、学会の討論者であった米澤康博氏をはじめとする参加者の方々から多くのコメントとご批判をいただきました。本稿のレフェリーと日本銀行金融市場局兼金融研究所の白塚重典、金融研究所の中村恒の両氏からは、草稿に対して適切かつ示唆に富んだコメントをいただき、ミスの修正と内容の改善を進めることができました。これらの皆様にも心よりお礼を申し上げます。

倉澤資成（横浜国立大学経済学部）
呉　　泳（住友キャピタル証券）

1．はじめに

すべての証券価格は裁定の機会が存在しないように決められなければならない。証券価格の最も基本的な原理はこの「裁定機会の非存在」であり、単純ではあるが、それゆえにこの原理から導かれた結果は強靱である。派生証券と原資産の関係も、多くの場合この原理から導かれる。裁定機会の非存在の論理を使って導かれる派生証券と原資産との関係は、少なくとも二つの意味で重要である。

一つは、リスク･ヘッジの有効性に関係しており、実務的な重要性である。派生証券取引の拡大に伴い、金融資産ポジションのリスク･コントロールの手段として派生証券が盛んに用いられるようになってきた。派生証券を用いてリスクを的確にコントロールするには、派生証券と原資産の関係を理論的かつ実証的に明確にする必要がある。いま一つはオプションや先物等の派生資産市場の効率性の議論と関係する。市場の効率性の検証方法はさまざまであるが、裁定機会の存在の検討は素朴ではあるが有力な方法である。裁定機会の存在をテストするにはいくつもの方法があるが、一つの便宜的な方法は、裁定機会が存在しないという条件から導かれる派生証券と原資産の関係を利用することであろう。

よく知られているように、先渡については一般的な想定の下で、対象資産の価格との関係が求められる[1]。しかし、先渡を除くと、派生証券とその対象資産の関係を求めるには、一般には対象資産の価格変動や金利変動の確率過程を具体的にモデル化しなければならない。Black/Sholesモデルのオプション価格が古典的な例である。この論文の対象である先物も例外ではない。金利が確定的であれば先物と先渡は一致し、先物の価格と対象資産の価格の関係は簡単に求められるが、金利変動の不確実性を考慮すれば、両者は異なる[2]。先物と対象資産の関係を明らかにするには、他の派生証券と同様、対象資産の価格変動や金利についてのモデル化が必要である。

こうしたモデル化に伴う煩雑さを嫌い、先物と先渡を等しいと仮定した研究も少なくない。株価指数先物に関する研究は、主として株価指数の変動リスクを対象としているため、金利が確定的（したがって株価指数先物を株価指数先渡に等しい）と想定しても、それほど無理はないだろう。しかし、金利関連先物市場を議論の対象とする場合にはそうではない。一方で先物の対象資産の価格が不確実であると想定し、他方で先物のペイオフを割引く際の金利について確定的と想定するのは明らかな矛盾である[3]。先物を先渡と同一視しない研究では、金利モデルを特定化したうえで、金利先物と対象資産の裁定関係を求め、それに基づいて議論する、といった方法がとられてきた。例えば、Flesaker［1993］では、Heath,

1 本稿では、値洗いされるのか否かが futuresとforwardの唯一の相違である。前者を「先物」、後者を「先渡」と呼ぶ。この区分は理論的な研究では標準的である。

2 Cox, Ingersoll and Ross［1981］を参照。

3 金利関連先物に関する市場効率性の研究が、株価指数先物市場のそれよりかなり少ない理由の一つはここにあるのかもしれない。

Jarrow and Morton［1992、以下HJM］のモデルの特殊ケースを想定し、金利先物と金利先渡の違いが数値例で示されている。倉澤・呉［1996］は、ユーロ円金利先物市場をHJMモデルに基づいて、Grinblatt and Jegadeesh［1996、以下GJ］は、ユーロダラー金利先物市場をVasicekモデル［1977］とCox, Ingersoll and Ross［1985、以下CIR］のモデルに基づいて、それぞれ分析し、共に市場における裁定利益の存在の可能性を示唆した。GJ［1996］には、先物価格の変動がフォワード金利期間構造の変動をリードしている、との指摘もみられる。

この論文では、これまでの研究と異なり、特定の金利モデルを前提とせずに先物価格の分析を試みたい。先物価格と対象資産との関係を一般的な状況で導くのは難しく、何らかの仮定が必要である。２節では、先物の対象資産と金利のボラティリティが時間だけの関数であるとき、先物futuresのペイオフを原資産と割引債で複製できることを示し、その投資戦略を具体的に導出する。さらに、この関係をユーロ円先物に適用し、実証研究の準備とする。３節では、それを用いて、金利先物市場の価格形成について実証的に検討する。

２．金利関連先物の価格変動

広義の取引費用がまったく存在しない、という意味で摩擦のない市場を前提にしても、値洗いによる違いのため、同じ原資産を対象とする先物と先渡であっても一般に両者の価格は異なる。金利の変動が確定的であれば先物と先渡の価格は一致するが、金利の変動が確率的な場合には、先物価格と先渡価格は乖離する。こうした状況を直ちに裁定機会の存在として理解するわけにはいかない。先物と原資産との関係をみる必要がある。この節では、先物の対象資産の価格変動と金利変動のボラティリティが時間だけの関数であると仮定し、先物と対象資産の関係を導く。

（1）先物の複製

確率空間 (Ω, F, Q) において、期間 $(0, \bar{T})$ で定義される独立の標準ウイナー過程 dw_{it} を考えよう $(i=1,...,n)$。本稿では先物が議論の対象である。先物の対象となる資産（これを「原資産」という）と、満期が $T\ (t \le T < \bar{T})$ の割引債のそれぞれの価格 $S(t)$ と $B(t, T)$ の確率過程が次の確率微分方程式で記述できると仮定する。

$$dS(t)/S(t) = \mu_S(S(t), t)dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{Si}(t)dw_{it} \tag{1}$$

$$dB(t,T)/B(t,T) = \mu_B(B(t,T), t)\,dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{Bi}(t,T)dw_{it}, \qquad (t \le T < \bar{T}) \tag{2}$$

いずれの証券もボラティリティが時点だけの関数、と仮定されている。以下の議論は、この仮定に強く依存している点に注意しなければならない。さらに、十分に多くの割引債が市場で取引されていると仮定する。

時点 t における瞬間的なスポット金利を $r(t)$ とし、

$$b_S(S(t),t) = \mu_S(S(t),t) - r(t)$$

$$a_S(t) = (\sigma_{S1}(t),\ldots,\sigma_{Sn}(t))$$

$$b_B(B(t,T),t) = \mu_B(B(t,T),t) - r(t), \quad (t \le T < \overline{T})$$

$$a_B(t,T) = (\sigma_{B1}(t,T),\ldots,\sigma_{Bn}(t,T)), \qquad (t \le T < \overline{T})$$

と定義する。原資産あるいは割引債の中から任意の異なる n 種類の証券を選び、A_t を、選ばれた証券の $a_s(t)$ あるいは $a_B(t,T)$ を要素とする $n\times n$ 行列、b_tを、同じく選ばれた証券の $b(S(t,), t)$ あるいは $b(B(t,T), t)$ を要素とする $n\times 1$ ベクトルとしよう。$n\times 1$ ベクトル β_t を未知数とする線形方程式、

$$b_t = A_t\beta_t$$

に解が存在して、n 種類の資産の取り方に依存せず一意に決まる、と仮定する。β_t は、各リスク・ファクターの市場価格と解釈できる。

$\beta_t = (\beta_{1t},\ldots,\beta_{nt})'$ がNovikovの条件

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{\tau}\beta'_u\beta_u du\right)\right] < +\infty$$

を満たすとしよう。このとき、$\boldsymbol{w}_t = (\boldsymbol{w}_{1t},\ldots,\boldsymbol{w}_{nt})'$ とすれば、Girsanovの定理により、

$$\tilde{w}_t = w_t + \int_0^t \beta_u du$$

で定義される確率変数 $\tilde{w}_t = (\tilde{w}_{1t},\ldots,\tilde{w}_{nt})'$ は、次のRadon-Nikodym 導関数、

$$\frac{d\tilde{Q}}{dQ} = \exp\left(-\int_0^{\tau}\beta_u dw_u - \frac{1}{2}\int_0^{\tau}\beta'_u\beta_u du\right)$$

による確率測度 $\tilde{Q}$（これを等価マルティンゲール測度という）のもとでのウィナー過程になる。このとき、(1)（2）は、

$$dS(t)/S(t) = \left(r(t) + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{Si}(t)\beta_{it}\right)dt + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{Si}(t)dw_{it} = r(t)dt + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{Si}(t)d\tilde{w}_{it}$$

$$dB(t,T)/B(t,T) = \left(r(t) + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{Bi}(t,T)\beta_{it}\right)dt + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{Bi}(t,T)dw_{it} = r(t)dt + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{Bi}(t,T)d\tilde{w}_{it}$$

と表される。

原資産を対象とする最終受渡時点が T の先物の、時点 t における先物価格を $F(S(t),t,T)$ で表そう。先物は連続的に値洗いされると仮定する。先物価格は、

$$F(\boldsymbol{S}(T),t,T)=\tilde{\boldsymbol{E}}_t[F(S(u),u,T)],\quad t\le u\le T$$

と表現できる[4]。ここで、$\tilde{E}_t$ は時点 t の情報に基づく確率測度 $\tilde{Q}$ による条件付き期待オペレーターである。先物の受渡時点 T における先物価格は、原資産の価格に等しい。すなわち、

$$F(\boldsymbol{S}(T),T,T)=\boldsymbol{S}(T)$$

であり、これから、

$$F(\boldsymbol{S}(t),t,T)=\tilde{\boldsymbol{E}}_t[\boldsymbol{S}(T)] \tag{3}$$

が成立する。

ここで、次の二つの確率変数を定義しよう。

$$X_S\equiv-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_t^T\sigma_{Si}^2(u)du+\sum_{i=1}^{n}\int_t^T\sigma_{Si}(u)d\tilde{w}_{iu}$$

$$X_B\equiv-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_t^T\sigma_{Bi}^2(u,T)du+\sum_{i=1}^{n}\int_t^T\sigma_{Bi}(u,T)d\tilde{w}_{iu}$$

これを用いると、

$$S(T)=\frac{S(T)}{B(T,T)}=\frac{S(t)}{B(t,T)}\exp(X_S-X_B)$$

となる。時点 t から時点 T までの、原資産と割引債のボラティリティに関する情報は、確率変数 X_S、X_B に集約されている。この関係と（3）を用いると、先物の価格は、

$$F(S(t),t,T)=\frac{S(t)}{B(t,T)}\tilde{E}_t[\exp(X_S-X_B)] \tag{4}$$

と表される。$S(t)/B(t,T)$ は受渡し時点が T の、時点 t における先渡価格に等しい。したがって、（4）は、先物価格が先渡価格と修正項（期待値の項）の積として表現できることを示している[5]。

4 Duffie［1996］p. 170。

5 Amin and Jarrow［1992］も、HJMのフレームワークを用いて、先物価格が先渡価格と修正項の積で表されることを明らかにしている。この点は、レフェリーにご教示いただいた。

補助定理: 先物価格は次のように表現できる。

$$F(S(t),t,T)=\frac{S(t)}{B(t,T)}\exp(Z) \qquad (5)$$

ここで、

$$Z=-\mathrm{Cov}(X_S, X_B)+\sigma^2(X_B)$$

であり、$\sigma(\cdot)$は標準偏差を表す。
証明.　補論１参照。

　既に触れたように、この補助定理（したがって次の定理）は、ボラティリティが時点だけの関数である、との仮定に依存している。補助定理を用いて次の定理が得られる。

定理: 先物価格の変動は原資産と先物の最終取引時点が満期の割引債で複製でき、

$$dF(S(t),t,T) = F(S(t),t,T)\,(dS(t)/S(t) - dB(t,T)/B(t,T)) \qquad (6)$$

となる。
証明.　補助定理と伊藤のレンマから、

$$dF=F_t dt+F_{S/B}d(S/B)=F\frac{dZ}{dt}dt+F\frac{d(S/B)}{S/B}$$

を得る。変数 X_S、X_B の定義から、変数 Z は、

$$Z=-\int_t^T\rho(u)\sigma_S(u)\sigma_B(u,T)du+\int_t^T\sigma_B^2(u,T)du$$

と表現できる。ここで、

$$\sigma_S(u)\equiv\sqrt{\sum_{i=1}^n\sigma_{Si}^2(u)}$$

$$\sigma_B(u,T)\equiv\sqrt{\sum_{i=1}^n\sigma_{Bi}^2(u,T)}$$

$$\rho(u)\equiv\frac{\sum_{i=1}^n\sigma_{Si}(u)\sigma_{Bi}(u,T)}{\sigma_S(u)\sigma_B(u,T)}$$

である。これから、

$$\frac{dZ}{dt}=\frac{d}{dt}\left[-\int_t^T\rho(u)\sigma_S(u)\sigma_B(u,T)du+\int_t^T\sigma_B^2(u,T)du\right]$$

$$=\rho(t)\sigma_S(t)\sigma_B(t,T)-\sigma_B^2(t,T)$$

$$\frac{d(S/B)}{(S/B)}=\frac{dS}{S}-\frac{dB}{B}-\rho(t)\sigma_S(t)\,\sigma_B(t,T)dt+\sigma_B^2(t,T)dt$$

となり、定理の結果を得る。

定理によれば、先物の価格変動、すなわち先物のペイオフは、「受渡日と同じ満期日の割引債をショートし、それで調達された資金を原資産に投資する」というゼロ・コストの投資戦略で複製される。原資産と金利のボラティリティが時間だけの関数であるときには、先物のペイオフが原資産と割引債のきわめて単純な戦略によって複製できるのである。この結果は、原資産と割引債のボラティリティが時間だけの関数である限り、金利モデルの特定化には依存しない。

（2）仮定と整合的なモデル

ボラティリティが時点だけの関数、との仮定がどのような確率金利モデルと整合的かを簡単にみておこう。簡単化のため、one-factor の金利モデルを仮定する。

最初に、HJMモデルを取り上げよう。HJMモデルでは、任意の満期の割引債の価格変動における裁定利益の存在が明示的に排除される。時点 T で貸借を約束するフォワード取引の、時点 t での（瞬間的な）レート $f(t, T)$ は次で定義される ($T \geq t$)。

$$f(t,T)=-\frac{\partial \ln B(t,T)}{\partial T}$$

HJMでは、初期時点のフォワード・レートの期間構造 $f(0, T)$ を所与として、フォワード・レートの確率変動過程を次の確率微分方程式で表す。

$$f(t,T)=f(0,T)+\int_0^t\alpha(u,T)du+\int_0^t\sigma(u,T)dw_u\,,\quad 0\leq t\leq T<\bar{T}$$

このとき、満期が T の割引債の時点 t での価格は、

$$B(t,T)=\exp\left\{-\int_t^T f(t,u)du\right\}$$

となり、伊藤の補題を用いて、

$$dB(t,T)/B(t,T)=(r(t)+b(t,T),\,dt+a(t,T)\,dw_t$$

と表現できる。ここで、

$$b(t,T)=-\int_t^T \alpha(t,u)du+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha^2(t,T)$$

$$a(t,T)=-\int_t^T \sigma(t,u)du$$

である。

スポット・レート $r(t)$ は、$r(t)=f(t,t)$ で定義されるから、同じくボラティリティ関数だけを用いて表現できる。このため、フォワード・レートの確率過程におけるボラティリティ関数が確率変数に依存せずに特定化されれば、定理の前提である割引債の価格変動に関する仮定は満たされる。

次に、Vasicek［1977］のモデルを取り上げよう。このモデルでも割引債の価格変動のボラティリティは時間だけの変数となり、定理の前提条件を満たす。

Vasicekモデルでは、次の確率微分方程式でスポット金利の確率変動が記述される。

$$dr(t)=\kappa(\mu-r(t))dt+\sigma dw_t$$

任意の満期 $T(t<T)$ の割引債の価格を $B(r(t),t,T)$ とすると、伊藤の補題により、

$$\begin{aligned}dB(r(t),t,T)=&(B_t(r(t),t,T)+B_r(r(t),t,T)\kappa(\mu-r(t))+1/2B_{rr}(r(t),t,T)\sigma^2)dt\\&+B_r(r(t),t,T)\sigma dw_t\end{aligned}$$

リスク・プライスλが外生的と仮定すると、

$$\begin{aligned}dB(r(t),t,T)/B(r(t),t,T)=&[r(t)+B_t(r(t),t,T)\sigma\lambda/B(r(t),t,T)]dt\\&+[B_r(r(t),t,T)/B(r(t),t,T)]\sigma dw_t\end{aligned}$$

となる。Vasicekモデルでは、

$$B_r(r(t),t,T)/B(r(t),t,T)=-(1/\kappa)[1-\exp\{-\kappa(T-t)\}]$$

であるから、割引債の価格変動のボラティリティは時間だけの関数になる。

Vasicekモデルのパラメターを時点の関数に拡張したHull / White［1990］のモデルにおいても、割引債の価格変動に関する定理の前提条件が満たされるのは明らかだろう。

このように、ボラティリティが時間だけの関数であるとの仮定は、よく知られたいくつかの確率金利モデルと整合的であり、その意味で特に強い仮定とはいえない。しかし、それによってこの仮定の現実妥当性が保証されるわけではなく、実証的に検討されるべき課題である。

（3）実証分析の含意

先渡価格については原資産価格との関係が、原理的には直接に市場で観察できる変数だけで記述される。しかし、先物価格と原資産の価格との関係を、市場で直接観察できる変数だけで表現するのは難しい。このため、先物価格に関する実証研究にあたっては、先物価格と先渡価格が等しいと仮定するか、さもなければ、金利の確率過程を特定化する必要がある。すなわち、(4) の右辺の指数関数に含まれる原資産価格、その他のパラメターの関数形を理論モデルから導かなければならない。

このような未知のパラメターあるいは関数を含む裁定均衡関係に基づく市場の効率性の検証は、先物を先渡と同一視する研究に比べると作業がかなり複雑になるうえに、(i) 想定されたモデルの適切さ, (ii) 裁定機会の存在、の二つの複合検証でもある。このため、均衡からの乖離が観察されても、モデルが不適切なのか、市場が非効率的なのか、を慎重に吟味しなければならない。

先物の複製過程 (6) の利用はこれに代わる一つの方法であろう。この方法には、金利の確率過程を特定化する必要がない、という利点をもつ。ボラティリティが時間だけの関数と仮定されればそれで十分なのである。このように仮定される限り、裁定利益が存在しないときには、(6) で表される資産価格の変動に関する裁定関係が厳密に成り立つ。ある時点 t において (6) が満たされないならば、(4) からの乖離が生ずることになり、時点 t 以降に、それに対応する逆方向の調整がみられるであろう。この過程で、少なくない裁定の利益が発生する可能性もある。しかし、実際には、資産取引に関する制度上の摩擦が存在する。裁定機会が存在するか否かの判断にあたっては、手数料、取引税だけでなく、取引自体が資産の市場価格を変化させるという市場規模にかかわるインパクトコストの存在を考慮しなければならないだろう。

既に触れたように、(6) の成立には、ボラティリティが時間の関数として表現できる、との仮定が必要とされる。この仮定の現実妥当性は優れて実証的な検討課題である。ボラティリティは時間だけの関数との仮定をテストしたうえで、(6) の関係を用いるのが素直な研究の方向であろう[6]。しかし、ここでは (6) の関係の成立を直接の検討対象とする。すなわち、この仮定と裁定関係の存在の二つの仮説を複合的に検定する。この方法をとると、裁定関係からの乖離がみられたとき、どちらが棄却されたのかを慎重に検討する必要がある。

6 倉澤・呉 [1996] では、金利先物を用いて、金利のボラティリティの簡単な推計を試みた。

（４）ユーロ円金利先物

次の３節では、先物の複製戦略の考え方をユーロ円金利先物市場に適用して実証分析を試みる。このための準備として、定理をユーロ円金利先物に適用し、金利先物と原資産の関係を求めておこう。ユーロ円市場においては、各種ユーロ円金利と３カ月先物が最も多く取引されている。ここでも、これを取り上げる。

受渡時点が T の３カ月金利先物の時点 t における価格を $F(t, T)$ としよう。受渡時点 T における先物の価値 $F(T, T)$ は、

$$F(T,T) = 100 - r_{3m}(T) \times 100$$

と決められている。ここで、$r_{3m}(T)$ は、時点 T における３カ月もののユーロ円の金利（年率表示）である。ただし、１年は360日として計算されている。時点 T において、90日後に満期を迎える割引債の時点 T での価格 $B(T, T{+}3m)$ は、

$$B(T, T+3m) = 1/(1+r_{3m}(T)/4)$$

であり、これを用いると、

$$F(T,T) = 500 - 400/B(T,T+3m)$$

となる。ここで、$3m = 90/365$ である。

金利先物は、次のように、金利ベースの先物 $F_R(t,T,T{+}3m)$ に変換できる。

$$F_R(t,T,T+3m) \equiv 1 - \frac{F(t,T)}{100}$$

一方、時点 t における、将来時点 T から $T{+}3m$ へかけてのフォワード･レート
$f(t, T, T{+}3m)$ は、

$$1 + \frac{1}{4} f(t,T,T+3m) \equiv \frac{B(t,T)}{B(t,T+3m)}$$

であり、$F_R(t, T, T{+}3m)$ は $f(t, T, T{+}3m)$ を原資産とする先物価格と考えられる。

割引債の価格変動が次の確率微分方程式で記述できると仮定しよう。

$$dB(t,\tau)/B(t,\tau) = \mu(B(t,\tau),t,\tau)dt + \sigma_1(t,\tau)dw_{1t} + \sigma_2(t,\tau)\,dw_{2t}, \quad \tau = T, T+3m$$

ボラティリティ関数 $\sigma_1(t, \tau)$ 、$\sigma_2(t, \tau)$ は時点にだけ依存する、と仮定されている。このとき、先物の価格は、(3) から、

$$1+F_R(t,T,T+3m)/4=1+\frac{1}{4}\left(1-\frac{F(t,T)}{100}\right)=\tilde{E}_t[B(T,T)/B(T,T+3m)]$$
$$=\frac{B(t,T)}{B(t,T+3m)}\tilde{E}_t[\exp(X_T-X_{T+3m})]$$
$$=(1+f(t,T,T+3m)/4)\tilde{E}_t[\exp(X_T-X_{T+3m})] \qquad (7)$$

である。ここで,

$$X_\tau \equiv -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_t^T \sigma_i^2(u,\tau)\,du+\sum_{i=1}^{2}\int_t^T \sigma_i(u,\tau)\,dw_{iu}\,,\quad \tau=T,\ T+3m$$

である。さらに、

$$\mu(X_t)+\frac{1}{2}\sigma^2(X_t)=0\ ,\quad \tau=T,T+3m$$

が成り立つ。ここで、$\mu(X_\tau)$と$\sigma^2(X_\tau)$ はそれぞれ確率変数 X_τ の平均と分散を表す。

金利が確定的な経済においては、

$$F_R(t,T,T+3m)=f(t,T,T+3m)$$

であるが、金利の確率変動を考えると、各時点での金利先物はフォワード・レートの不偏推定量ではない。割引債価格変動のボラティリティが確定関数との仮定の下では、

$$\tilde{E}_t[\exp(X_T-X_{T+3m})]=\exp[\sigma^2(X_{T+3m})-\rho\sigma(X_T)\sigma(X_{T+3m})]$$
$$dF(t,T)=(500-F(t,T))\times(dB(t,T+3m)/B(t,T+3m)-dB(t,T)/B(t,T)) \qquad (8)$$

である。ここで、ρはX_Tと X_{T+3m}の相関係数である。

この式は、時点 t において、満期 T の割引債で $(500-F(t,T))$ 円を調達し、満期 T+3mの割引債で運用する裁定ポートフォリオの価値の変化が、先物を１枚ロングしたときのペイオフを複製することを示している。

3．実証分析

この節では、(7)(8)で示された先物の価格および価格変動に関する裁定関係を用いて、日本におけるユーロ円金利先物市場を対象に進めた実証研究の結果を報告する。

（1）データ

実証研究では、日次データを用いる。ユーロ円金利の先物価格として、東京金融先物取引所が提供している「清算価格」を利用した。金利の期間構造に関して利用したデータは、1993年４月１日から1996年12月30日までのユーロ円金利である。

ユーロ円先物の最終受渡日における決済はTIBOR金利を対象にしているが、各営業日におけるTIBOR金利に関するデータは午後3:00前後に収集されているのに対して、ユーロ円金利先物の取引は午後３時15分まで開かれている。先物価格として清算価格を用いているため、先物価格にはTIBOR金利よりも、僅かであるが新しい情報が含まれている可能性がある。

金利については、翌日、１週間、１カ月、２カ月、３カ月、６カ月、１年もののTIBORが利用できるにすぎない。このため、これらのデータを用い、補間処理によって期間構造を推定する。処理にあたっては、割引債の価格が満期に関して最もなめらかになるように、３次多項式によって最長365日まで補間した[7]。

実証には、1993年４月１日から1996年12月30日までの、サンプル数928取引日のデータを用いた。ユーロ円金利３カ月物の先物は同時に８限月が取引されているが、取引量が最も多いのは第２、第３の限月であり、この限月について、93年12月限月から96年12月限月までの13の限月を分析の対象とする。各限月の取引日数および平均取引高は表１にまとめられている。第２、３限月が選ばれているため、各限月の平均取引日数は180日程度である。取引量の平均は各限月でかなりばらついており、1994年６月限の平均が16,638枚で最も少なく、同じ1994年12月限が63,120枚で最も多くなっている。

7 補論２を参照。

表１　データ

限月	標本期間	取引日数	平均取引量
93.12	93.04.01 - 93.12.13	173	18,543
94.03	93.06.14 - 94.03.14	187	26,824
94.06	93.09.13 - 94.06.13	182	16,638
94.09	93.12.20 - 94.09.19	186	39,013
94.12	94.03.22 - 94.12.19	186	63,120
95.03	94.06.13 - 95.03.13	187	51,168
95.06	94.09.19 - 95.06.19	184	33,338
95.09	94.12.19 - 95.09.18	187	31,350
95.12	95.03.20 - 95.12.18	188	34,736
96.03	95.06.19 - 96.03.18	187	42,969
96.06	95.09.18 - 96.09.13	184	24,910
96.09	95.12.13 - 96.09.13	189	39,955
96.12	96.03.18 - 96.12.16	188	58,473

詳しい検討の前に、先物価格と先渡価格の性格を簡単に確認しておこう。図１には、$F_R(t,T,T+3m)$ と $f(t,T,T+3m)$ の差がプロットされている。両者の差は、かなり大きく変動していることがみてとれるであろう。

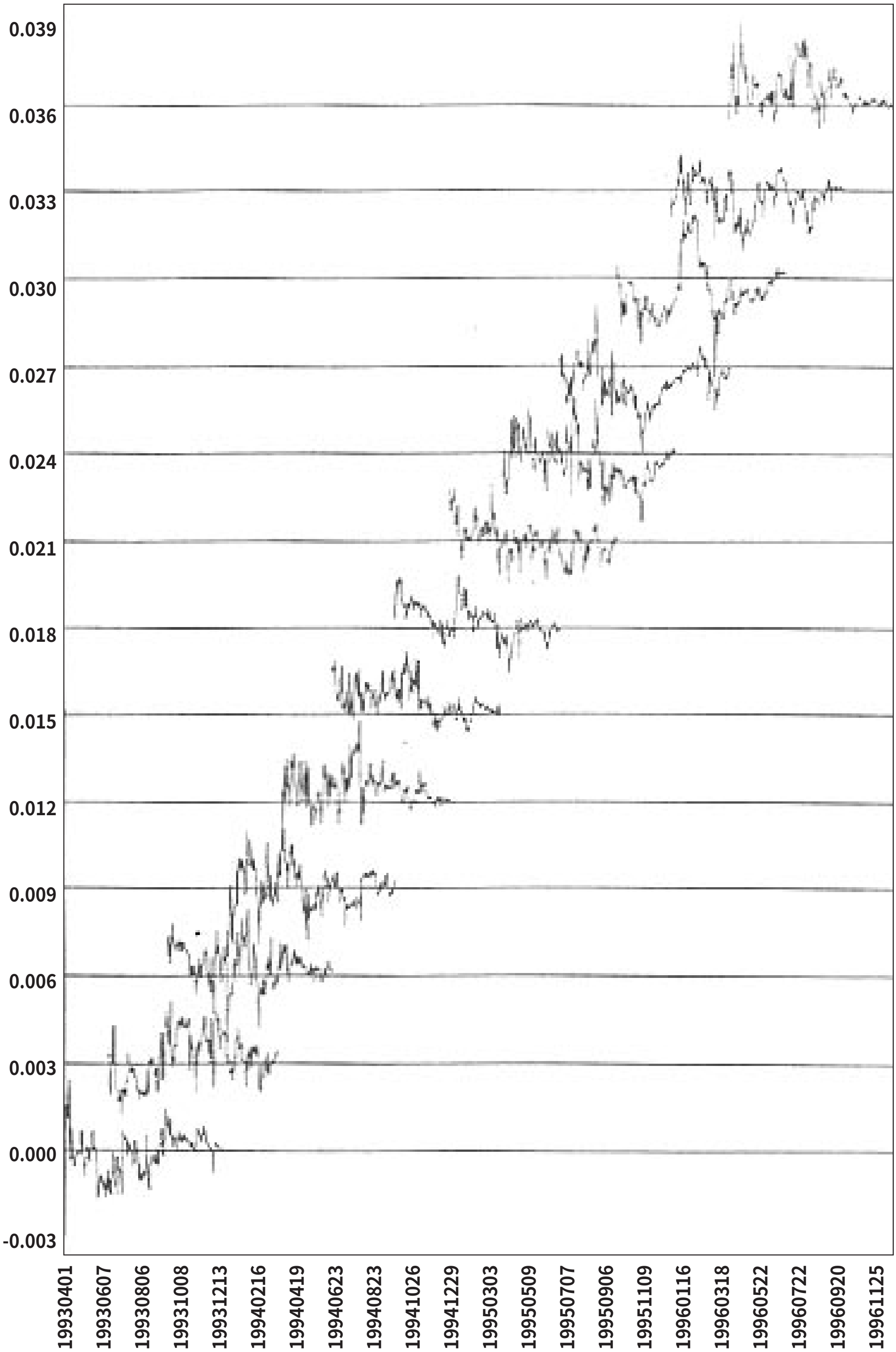
スペースの関係で数値は示していないが、$F_R(t,T,T+3m)$ と $f(t,T,T+3m)$との両者は、それぞれ5%の有意水準で単位根の存在が棄却できない。$F_R(t,T,T+3m)$ と $f(t,T,T+3m)$の変動、すなわち、$\Delta F_R(t,T,T+3m)$ と$\Delta f(t,T,T+3m)$ に関しては、1%の有意水準で単位根の存在が棄却される。この意味で両者は定常過程である[8]。

8 ここでΔはラグ・オペレーターである。すなわち、時点 t の任意の関数を $x(t,\cdot\cdot)$とすると、

$$\Delta x(t,\cdot\cdot) = x(t,\cdot\cdot) - x(t-1,\cdot\cdot)$$

である。

図１　spread


0.039
0.036
0.033
0.030
0.027
0.024
0.021
0.018
0.015
0.012
0.009
0.006
0.003
0.000
-0.003
19930401
19930607
19930806
19931008
19931213
19940216
19940419
19940623
19940823
19941026
19941229
19950303
19950509
19950707
19950906
19951109
19960116
19960318
19960522
19960722
19960920
19961125

（2）先物と先渡の因果関係

GJ［1996］は、週次データを用いてユーロダラー金利先物を検討し、先物の変化がフォワードカーブの変化に対して予測力をもつ、との結果を得た。ここでは、Geweke, Meese and Dent［1983］によって提案された方法を用いて、ユーロ円で同様の効果がみられるか否かを確認しておこう。

先物価格の変動からフォワードカーブの変化への因果関係をみるために、次の回帰方程式におけるフォワードカーブの変化の将来1期先の説明変数の有意性を検討する。

$$\Delta F_R(t, T, T+3m) = \alpha_0 + \beta_{+1}\,\Delta f(t+1, T, T+3m) + \sum_{i=1}^{2}\alpha_{-i}\,\Delta F_R(t-i, T, 3m) + \sum_{i=0}^{2}\beta_{-i}\,\Delta f(t-i, T, 3m) + \varepsilon_t$$

結果を表2にまとめた。将来1期先の説明変数に関する回帰係数が、5%の有意水準ではすべてで、1%の有意水準では93年12月限月を除いてのすべてのケースで、ゼロとの帰無仮説が棄却された。すべてのケースにおける回帰係数の値が正で、0.136と0.580の間にある。

次に、フォワードカーブの変化から先物価格の変動への因果関係をみよう。そのために、次の線形回帰方程式における金利ベースの先物価格変動の将来1期先の説明変数の有意性を検討する。

$$\Delta f(t, T, T+3m) = \beta_0 + \alpha_{+1}\,\Delta F_R(t+1, T, T+3m) + \sum_{i=1}^{2}\beta_{-i}\,\Delta f(t-i, T, T+3m) + \sum_{i=0}^{2}\alpha_{-i}\,\Delta F_R(t-i, T, T+3m) + \varepsilon_t$$

結果を表3にまとめた。将来1期先の説明変数に関する回帰係数について、1%の有意水準ではすべての限月で帰無仮説を棄却できない。有意水準を5%としても1994年9月限を除くと、帰無仮説を棄却できないのである。

このように、日次データを用いると、ユーロ円金利に関しては、先物が先渡に対してGrangerの意味でリード効果をもつ。しかし、逆方向の因果関係は観察されない。GJ［1996］の結果がユーロ円金利でも確認されるのである。ただし、GJ が週次データでの結果であるのに対して、ここでは日次データが使われている点に注意しておきたい。

表２　causalityモデル（１）

限月	標本数	Adj R^2	D.W.	回帰係数	推定値	p-Value
93.12	170	0.10186	2.02563	α_0	−0.00005	0.054
				β_{+1}	0.13607 *	0.019
				α_{-1}	−0.04437	0.572
				α_{-2}	−0.13358 *	0.026
				β_0	0.24782 **	0.000
				β_{-1}	0.05780	0.328
				β_{-2}	0.13678 *	0.012
94.03	184	0.11407	1.99982	α_0	−0.00003	0.338
				β_{+1}	0.16158 **	0.005
				α_{-1}	−0.07262	0.349
				α_{-2}	−0.03145	0.589
				β_0	0.28148 **	0.000
				β_{-1}	0.08619	0.152
				β_{-2}	0.02836	0.602
94.06	179	0.28708	2.00382	α_0	−0.00002	0.546
				β_{+1}	0.26146 **	0.000
				α_{-1}	−0.03806	0.620
				α_{-2}	−0.10409	0.113
				β_0	0.37431 **	0.000
				β_{-1}	0.05282	0.371
				β_{-2}	0.10643	0.060
94.09	184	0.38223	2.11817	α_0	0.00001	0.695
				β_{+1}	0.57997 **	0.000
				α_{-1}	−0.16924 *	0.014
				α_{-2}	−0.09560	0.161
				β_0	0.52834 **	0.000
				β_{-1}	0.08027	0.352
				β_{-2}	−0.04086	0.557
94.12	183	0.29634	2.00756	α_0	0.00000	0.980
				β_{+1}	0.36377 **	0.000
				α_{-1}	−0.22574 **	0.003
				α_{-2}	−0.01469	0.839
				β_0	0.54803 **	0.000
				β_{-1}	0.08590	0.302
				β_{-2}	0.05160	0.469
95.03	184	0.54281	2.02513	α_0	−0.00002	0.509
				β_{+1}	0.38651 **	0.000
				α_{-1}	−0.48721 **	0.000
				α_{-2}	−0.08821	0.151
				β_0	0.67547 *	0.000
				β_{-1}	0.29953 **	0.000
				β_{-2}	0.08697	0.172

95.06	181	0.39792	2.07669	α_0	−0.00003	0.315
				β_{+1}	0.23010 **	0.000
				α_{-1}	−0.22857 **	0.002
				α_{-2}	−0.12770	0.059
				β_0	0.62376 **	0.000
				β_{-1}	0.17131 *	0.023
				β_{-2}	0.17005 *	0.011
95.09	184	0.48842	2.03845	α_0	−0.00002	0.594
				β_{+1}	0.34462 **	0.000
				α_{-1}	−0.24323 **	0.001
				α_{-2}	−0.08096	0.186
				β_0	0.66262 **	0.000
				β_{-1}	0.20438 **	0.006
				β_{-2}	0.04069	0.536
95.12	185	0.30692	2.04774	α_0	−0.00001	0.681
				β_{+1}	0.43548 **	0.000
				α_{-1}	−0.13181	0.074
				α_{-2}	−0.10818	0.071
				β_0	0.40673 **	0.000
				β_{-1}	0.09996	0.150
				β_{-2}	0.03662	0.520
96.03	184	0.38995	2.04043	α_0	−0.00001	0.730
				β_{+1}	0.35345 **	0.000
				α_{-1}	−0.27242 **	0.000
				α_{-2}	−0.11515	0.089
				β_0	0.58252 **	0.000
				β_{-1}	0.16692 *	0.024
				β_{-2}	0.04489	0.486
96.06	181	0.33924	1.96859	α_0	0.00000	0.835
				β_{+1}	0.17677 **	0.002
				α_{-1}	−0.25078 **	0.001
				α_{-2}	−0.24179 **	0.001
				β_0	0.50075 **	0.000
				β_{-2}	0.18284 **	0.008
				β_{-2}	0.13345 *	0.045
96.09	186	0.46079	1.98849	α_0	0.00000	0.875
				β_{+1}	0.22941 **	0.000
				α_{-2}	−0.22922 **	0.001
				α_{-2}	−0.30605 **	0.000
				β_0	0.62641 **	0.000
				β_{-1}	0.18535 *	0.011
				β_{-2}	0.24941 **	0.000
96.12	185	0.26296	1.99958	α_0	0.00000	0.915
				β_{+1}	0.20902 **	0.004
				α_{-1}	−0.12687	0.092
				α_{-2}	−0.02755	0.702
				β_0	0.59786 **	0.000
				β_{-1}	0.15931	0.064
				β_{-2}	0.05492	0.454

表３　causalityモデル（２）

限月	標本数	Adj R^2	D.W.	回帰係数	推定値	p-Value
93.12	170	0.14250	2.07181	β_0	−0.00003	0.390
				α_{+1}	0.03055	0.748
				β_{-1}	−0.13634	0.068
				β_{-2}	−0.19043 **	0.006
				α_0	0.37020 **	0.000
				α_{-1}	0.20637 *	0.037
				α_{-2}	0.27457 **	0.000
94.03	184	0.20517	2.07495	β_0	−0.00003	0.381
				α_{+1}	0.03492	0.693
				β_{-1}	−0.21145 **	0.003
				β_{-2}	−0.19555 **	0.003
				α_0	0.37254 **	0.000
				α_{-1}	0.25030 **	0.007
				α_{-2}	0.29678 **	0.000
94.06	179	0.28486	2.05251	β_0	−0.00001	0.850
				α_{+1}	−0.13576	0.109
				β_{-1}	−0.21938 **	0.003
				β_{-2}	−0.16468 *	0.023
				α_0	0.52640 **	0.000
				α_{-1}	0.40718 **	0.000
				α_{-2}	0.19928 *	0.019
94.09	184	0.40018	2.07536	β_0	0.00001	0.662
				α_{+1}	−0.11203 *	0.044
				β_{-1}	−0.30826 **	0.000
				β_{-2}	−0.05331	0.416
				α_0	0.26520 **	0.000
				α_{-1}	0.46970 **	0.000
				α_{-2}	0.11454	0.065
94.12	183	0.30193	2.01863	β_0	−0.00001	0.677
				α_{+1}	−0.00659	0.911
				β_{-1}	−0.22359 **	0.003
				β_{-2}	−0.09059	0.174
				α_0	0.38899 **	0.000
				α_{-1}	0.38153 **	0.000
				α_{-2}	0.11752	0.084
95.03	184	0.52789	2.17718	β_0	0.00000	0.894
				α_{+1}	−0.05647	0.304
				β_{-1}	−0.33557 **	0.000
				β_{-2}	−0.16238 *	0.014
				α_0	0.56561 **	0.000
				α_{-1}	0.65076 **	0.000
				α_{-2}	0.14795 *	0.021

95.06	181	0.42721	2.08646	β_0	−0.00003	0.260
				α_{+1}	0.07232	0.204
				β_{-1}	−0.20444 **	0.005
				β_{-2}	−0.10638	0.105
				α_0	0.55740 **	0.000
				α_{-1}	0.34133 **	0.000
				α_{-2}	0.00365 **	0.956
95.09	184	0.48165	2.02788	β_0	−0.00003	0.388
				α_{+1}	−0.01732	0.755
				β_{-1}	−0.35166 **	0.000
				β_{-2}	−0.10843	0.110
				α_0	0.56709 **	0.000
				α_{-1}	0.50496 **	0.000
				α_{-2}	0.12799 *	0.042
95.12	185	0.28261	2.09432	β_0	−0.00004	0.299
				α_{+1}	0.01058	0.874
				β_{-1}	−0.25310 **	0.001
				β_{-2}	−0.06076	0.319
				α_0	0.31577 **	0.000
				α_{-1}	0.47912 **	0.000
				α_{-2}	0.10086	0.113
96.03	184	0.36955	2.06420	β_0	−0.00001	0.805
				α_{+1}	−0.01226	0.842
				β_{-1}	−0.31714 **	0.000
				β_{-2}	−0.08717	0.194
				α_0	0.49651 **	0.000
				α_{-1}	0.46276 **	0.000
				α_{-2}	0.11240	0.113
96.06	181	0.31642	1.99934	β_0	0.00000	0.973
				α_{+1}	0.09539	0.164
				β_{-1}	−0.23337 **	0.002
				β_{-2}	−0.04130	0.574
				α_0	0.58156 **	0.000
				α_{-1}	0.37770 **	0.000
				α_{-2}	0.13246	0.109
96.09	186	0.42640	1.99622	β_0	−0.00001	0.815
				α_{+1}	0.04289	0.453
				β_{-1}	−0.23366 **	0.002
				β_{-2}	−0.12181	0.088
				α_0	0.60335 **	0.000
				α_{-1}	0.37096 **	0.000
				α_{-2}	0.18555 *	0.013
96.12	185	0.27688	1.99961	β_0	−0.00002	0.454
				α_{+1}	0.00563	0.922
				β_{-1}	−0.26649 **	0.000
				β_{-2}	−0.02870	0.664
				α_0	0.43880 **	0.000
				α_{-1}	0.22913 **	0.001
				α_{-2}	0.02198	0.734

（３）確率変動の検証

金利の変動過程が確定的であれば、先物価格は先渡価格に等しい。ここでは、こうした想定の有効性を確認しておきたい。

確率変数zを、

$$z(t) \equiv \ln(1+F_R(t,T,T+3m)/4) - \ln(1+f(t,T,T+3m)/4)$$

とおくと、金利の確率変動が存在しない場合には、

$$z(t) = 0$$

となる。一方、金利は確率的に変動するが、金利のボラティリティは確定的な関数ならば、

$$z(t) = \sigma^2(X_{T+3m}) - \rho\sigma(X_{T+3m})\sigma(X_T)$$

である[9]。

既に触れたように、$\ln(1+F_R(t,T,T+3m)/4)$ と $\ln(1+f(t,T,T+3m)/4)$ は共に有意水準5%で単位根の存在を棄却できない。これを前提として、$z(t)$ に単位根が存在するか否かで $z(t)=0$ を検討しよう。

変数 $z(t)$ の階差を、

$$\Delta z_t \equiv z(t+1) - z(t)$$

と定義する。線形回帰方程式

$$\Delta z_t = \alpha z_{t-1} + \beta\Delta z_{t-1} + \varepsilon_t$$

により、z_t に関する単位根の存在を検定する。その結果を表４に示した。

これによると、有意水準1%では、13の限月のうち７限月について単位根の存在を棄却できない。有意水準5%でみると棄却できる限月は増えるが、それでも５限月については棄却できないのである。この結果の解釈は難しい。単位根が存在しないならば、長期的にみて先物価格と先渡価格は大きく乖離しない、との理解が可能だろう。しかし、単位根検定の検定力が必ずしも高くない点を考慮すると、ここでの結果は、先物価格と先渡価格は長期的には大きく乖離しないことを示しているとの解釈が自然かもしれない[10]。先物価格と先渡価格が一致する傾向をもつのは、こ

9 この定式化から、$z(t)$が先物満期までの時間 $lt = T-t$ の関数であると考えられる。倉澤・呉［1996］では、HJMモデルに基づき、lt の４次多項式のパラメターの存在が確認された。

10 この点は、金融市場局兼金融研究所の白塚・金融研究所の中村両氏のご指摘に負っている。

うした検定をまつまでもなく明らかである。このため、両者は等しいとの仮定の下での研究が数多くみられるのである。こうした現状を前提にして、ここでは、長期的というかなり緩い意味で捉えても、すべての限月について均衡関係が成り立つわけではなく、いくつかの限月では先渡と先物を同一視するのは適当ではない点を強調しておきたい。

表４　共和分検定

限月	標本数	D.W.	推定値	DF統計量	p-Value
93.12	171	2.01097	−0.23879	−4.62883 **	0.00174
94.03	185	1.99161	−0.21546	−4.28826 **	0.00453
94.06	180	2.00853	−0.24549	−4.65534 **	0.00159
94.09	184	1.97967	−0.27498	−4.93080 **	0.00072
94.12	184	1.95367	−0.19625	−3.94208 *	0.01215
95.03	185	2.07152	−0.12133	−3.06162	0.11975
95.06	182	1.94615	−0.12841	−3.09730	0.11056
95.09	185	2.02806	−0.26746	−4.89900 **	0.00079
95.12	186	1.99080	−0.21444	−4.05758 **	0.00874
96.03	185	2.05396	−0.09377	−2.58187	0.31550
96.06	182	2.05669	−0.06033	−2.09928	0.61116
96.09	187	2.05676	−0.18696	−3.93792 *	0.01226
96.12	186	1.99771	−0.13084	−3.20990	0.08532

（4）金利先物の複製戦略

この節では、定理で示された先物の複製戦略がどの程度先物のペイオフを複製するかを検討するとともに、先物価格がもつ情報について吟味する。

先物の複製過程（8）を離散型で表すと、

$$\Delta F\,(t,T) = \Delta F^{*}(t,T\,)$$

となる。ここで、

$$\Delta F^{*}(t,T\,) \equiv (500 - F(t,T\,)) \times (\Delta B(t,T{+}3m) \,/\, B(t,T{+}3m) - \Delta B(t,T\,) \,/\, B(t,T\,))$$

である。すなわち、各限月の先物価格変動 $\Delta F\,(t,T\,)$ が、限月と同じ満期の割引債、およびその先90日が満期の割引債の２つの証券で複製される。

限月 T の先物に関する複製戦略の時点 t における複製誤差 $\eta(t,T\,)$を、

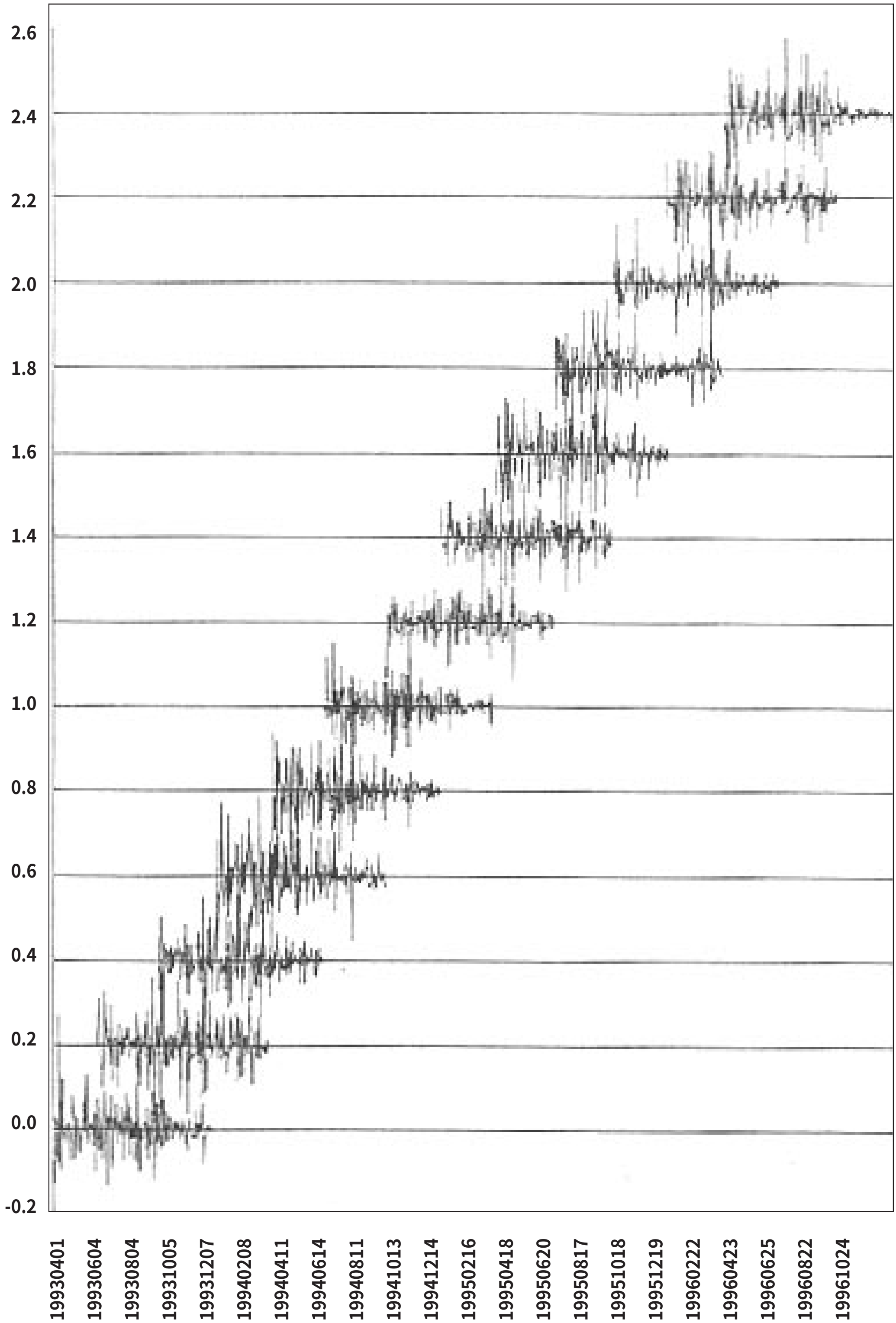
$$\eta(t,T\,) \equiv \Delta F(t,T) - \Delta F^{*}(t,T\,)$$

で定義しよう。ここでは t は取引日を表す。図２は、各限月の複製誤差である。表５には、先物の価格変動（ペイオフ）、先物の複製戦略の価値変動、複製誤差の平均と分散を示した。

表５　複製誤差に関する統計量

限月	実際の変動		複製変動		複製誤差		相関
	平均	標準偏差	平均	標準偏差	平均	標準偏差	
93.12	0.0074	0.0340	0.0073	0.0450	0.0001	0.0490	0.2539
94.03	0.0056	0.0404	0.0056	0.0529	–0.0001	0.0554	0.3191
94.06	0.0034	0.0429	0.0028	0.0558	0.0006	0.0534	0.4382
94.09	–0.0036	0.0538	–0.0020	0.0506	–0.0016	0.0593	0.3558
94.12	0.0022	0.0520	0.0020	0.0479	0.0001	0.0541	0.4146
95.03	0.0045	0.0453	0.0040	0.0481	0.0005	0.0444	0.5502
95.06	0.0105	0.0390	0.0103	0.0388	0.0003	0.0363	0.5647
95.09	0.0129	0.0496	0.0119	0.0508	0.0010	0.0460	0.5812
95.12	0.0079	0.0506	0.0084	0.0538	–0.0005	0.0606	0.3274
96.03	0.0023	0.0461	0.0023	0.0473	0.0000	0.0473	0.4879
96.06	0.0009	0.0394	0.0009	0.0424	0.0000	0.0411	0.4970
96.09	0.0004	0.0491	0.0004	0.0485	–0.0001	0.0446	0.5822
96.12	0.0031	0.0470	0.0034	0.0427	–0.0003	0.0458	0.4822
all	0.0044	0.0458	0.0044	0.0483	0.0000	0.0494	0.4508

図２　複製誤差


2.6
2.4
2.2
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
19930401
19930604
19930804
19931005
19931207
19940208
19940411
19940614
19940811
19941013
19941214
19950216
19950418
19950620
19950817
19951018
19951219
19960222
19960423
19960625
19960822
19961024

複製誤差の平均は先物の価格変動や複製戦略の価値の変動に比べてかなり小さい（表６）。しかし、複製誤差を時系列的にみると上下に大きく変動しており（図２）、それを反映して複製誤差の標準偏差は、先物の価格変動や複製戦略の価値変動と同等あるいはそれ以上の大きさとなっている。先物価格の変動 $\Delta F(t,\ T)$ と複製戦略の価値の変動 $\Delta F^{*}(\ t,T)$ の相関係数は小さい限月で0.254、大きい限月で0.582であり、さほど大きくはない。この結果から、先物の複製戦略は平均的にはほぼ成立しているものの、各日毎にみるとかなり乖離しているといえよう。乖離の原因が、ボラティリティが時間だけの関数との仮定にある可能性は否定できない。しかし、この点に関する検討は、今後の課題にせざるを得ない。考え得るいま一つの理由は、先物価格とTIBOR金利のデータの時間的なずれである。既に触れたように、両者には15分前後の時間的ラグが存在する。この点については、後に多少検討する。

定理に示された複製戦略は、すべての時点で裁定機会が存在しないという条件のもとで導かれる。実際には、さまざまな摩擦要因の存在によって、裁定関係（4）からの乖離がみられるであろう。一時的な裁定関係からの乖離は、時間とともに調整されると考えられるならば、期間を多少長くとると、先物の変動と複製戦略の価値変動は理論が想定する関係に近づく可能性がある。これを検討するために、次のような作業をした。

先物価格変動の累積を spot 金利で修正して、次のように定義する。

$$\Delta F_{n}(t,T) = \Delta F(t,T) + \Delta F_{n-1}(t-1,T)\,(1+r(t)), \quad n = 1,2,...$$

ただし、$\Delta F_{0}(t,T) = 0$ とする。同様に、割引債による複製戦略の価値の変動とその累積を、それぞれ、

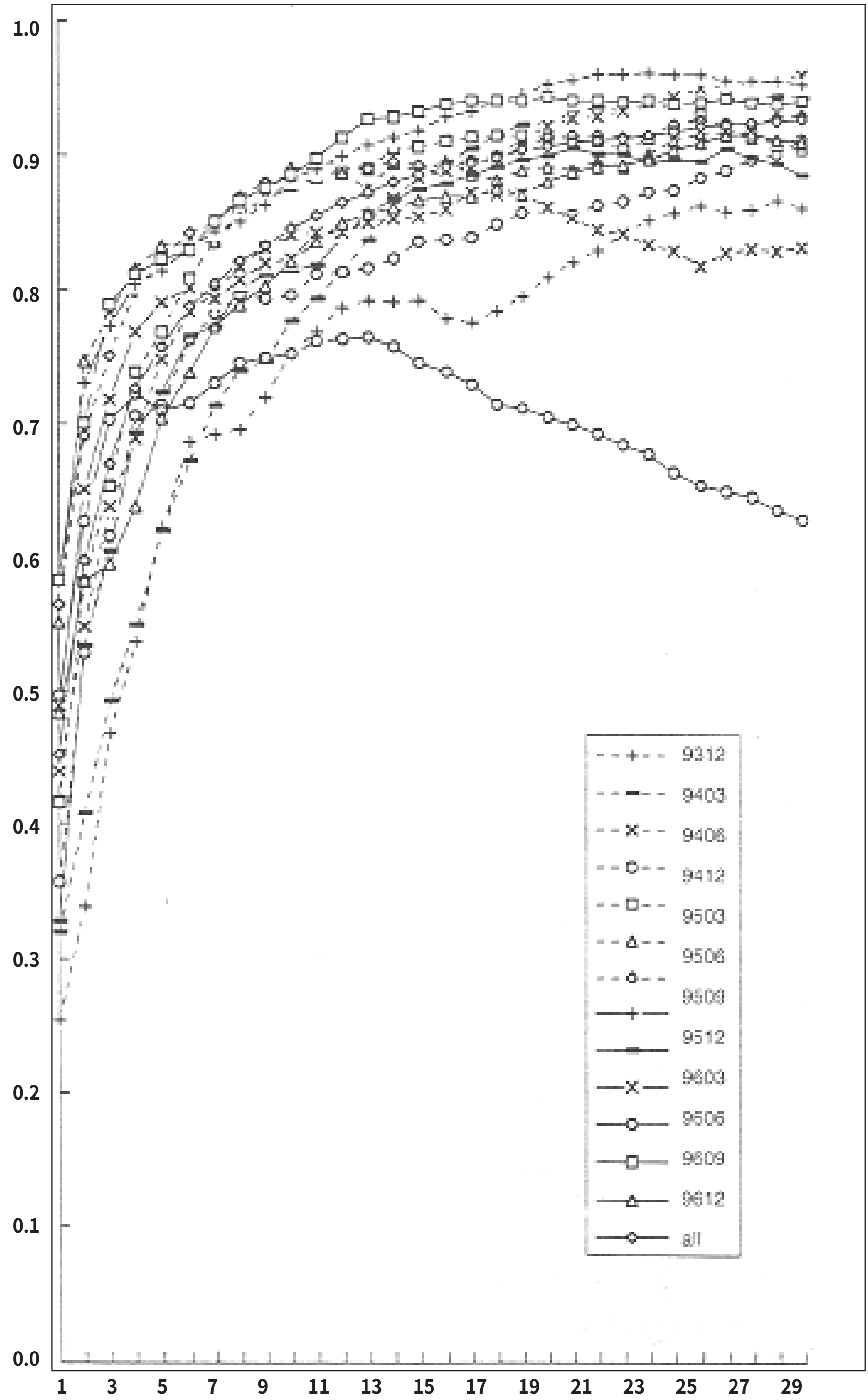
$$\Delta F^{*}(t,T) \equiv (500 - F\,(t,T)) \times (\Delta B\,(t,T+3m)\,/B(t,T+3m) - \Delta B(t,T)\,/B(t,T))$$

$$\Delta F^{*}_{n}(t,T) \equiv \Delta F^{*}(t,T) + \Delta F^{*}_{n-1}(t-1,T)\,(1+r(t)), \quad n = 1,2,...$$

で定義する。ただし、$\Delta F^{*}_{0}(t,T) = 0$ である。

図３に $\Delta F_{n}(t,T)$ と $\Delta F^{*}{}_{n}(t,T)$ （$n = 1,2,...,30$）の相関係数を示した。期間の長さを延ばすにつれ、相関が単調に増加するわけでは必ずしもない。しかし、５-７日をとると、すべての限月の先物について相関係数は0.7-0.8まで高まり、さらに期間を長くとると２ないし３の限月を除いて0.9前後まで上昇する。このように、複製期間をある程度延ばせば、相対的に高い相関係数が得られるのである。この観察結果から、先物の複製誤差の生成過程は、少なくとも短いラグについては負の相関

図３　相関係数


1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
1
3
5
7
9
11
13
15
17
19
21
23
25
27
29
9312
9403
9406
9412
9503
9506
9509
9512
9603
9606
9609
9612
all

をもつことが示唆される[11]。さらに、急激に相関係数が上昇しており、裁定関係からの乖離が比較的短い期間で解消される可能性が高い。

これを確認するため、価格変動の複製誤差 $\eta(t, T)$を用いて、次の回帰分析を行った（表記の単純化のため、限月を表す T は省略し、時点を下添字で示した）。

$$\eta_t = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \eta_{t-i} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, h_t^2)$$

$$h_t^2 = \beta_0 + \beta_1 h_{t-1}^2$$

各限月の先物価格変動の大きさは受渡日に近づくにつれて小さくなる傾向にあるため、GARCHタイプのモデルで複製誤差 η_tの動きを検証している。複製誤差 η_t の自己回帰ラグ数は、回帰係数が有意水準10%で統計的に有意であるところまで選択した。

回帰分析の結果は、表６にまとめられている。β_0 が、推定された h_{t-1}^2 との共線性により、推定モデルから落とされたケースが少なくない。推定された β_1 は0.975と0.998の間の値をとっており、すべてが有意水準1%で統計的に有意である。初期分散の推定値 h_0 も、有意水準1%ですべて有意な結果となった。

複製誤差 η_tの自己回帰ラグの数は少ない限月で１期（1995年９月限月）であるが、４期の限月の先物も少なくない。ラグの数の大小にかかわりなく、すべての係数は負である。１期ラグの係数α_1は、すべての限月において有意水準1%で統計的に有意であり、多くの限月において２期以上のラグの係数よりも絶対値で大きい。多くの場合、各誤差が生じた次の取引日に最も大きく調整されるのである。しかし、1993年12月限、1994年３月限等、データの初期の限月では、２期以上のラグの係数の絶対値が相対的に大きくなる傾向にある。先物市場が未だ成熟しておらず、裁定

11 独立定常時系列 y_tとラグnの自己相関をもつ定常時系列 ε_tがあり、y_tとε_tが独立であるとする。時系列$y_t+\varepsilon_t$と y_tとの相関係数、$\sum_{i=0}^{n}(y_{t-i}+\varepsilon_{t-i})$ と $\sum_{i=0}^{n} y_{t-i}$ との相関係数は、それぞれ

$$\rho(y_t+\varepsilon_t, y_t) = \frac{Var(y_t)}{\sqrt{(Var(y_t)+Var(\varepsilon_t))Var(y_t)}}$$

$$\rho\left(\sum_{i=0}^{n}(y_{t-i}+\varepsilon_{t-i}), \sum_{i=0}^{n} y_{t-i}\right) = \frac{(n+1)Var(y_t)}{\sqrt{\left(Var\left(\sum_{i=0}^{n} y_{t-i}\right)+Var\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_{t-i}\right)\right)Var\left(\sum_{i=0}^{n} y_{t-i}\right)}}$$

$$= \frac{Var(y_t)}{\sqrt{\left(Var(y_t)+\left(1+\frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\rho_{t-i,t-j}\right)Var(\varepsilon_t)\right)Var(y_t)}}$$

であるから、

$$\rho\left(\sum_{i=0}^{n}(y_{t-i}+\varepsilon_{t-i}), \sum_{i=0}^{n} y_{t-i}\right) > \rho((y_t+\varepsilon_t), y_t)$$

が成立するための必要十分条件は、

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\rho_{t-i,t-j} < 0$$

となる。

関係からの乖離に対する調整が相対的に緩慢であったのかもしれない[12]。

ユーロ円金利先物価格データとTIBOR金利データの観察時間について、僅かの非同時性があることは既に指摘した。このため、先物価格には先渡には含まれない新しい情報が含まれている可能性がある。この点を検討してみよう。

複製誤差は、先物価格の情報を用いて算出される。複製誤差の自己回帰残差 ε_t は、$\eta_{t-i}\,(i=1,\ldots,p)$と直交しており、先物価格が次の期の金利に関する情報を反映しているならば、回帰モデル、

$$\Delta f\,(t,T,\,T{+}3m) = \alpha + \beta\varepsilon_{t-1} + \omega_t, \quad \omega_t \sim N(0,\sigma_t^2)$$

において、係数 β が統計的に有意になると考えられる。ここで、

$$\Delta f\,(t,T,\,T{+}3m) = f\,(t{+}1,T,\,T{+}3m) - f\,(t,T,\,T{+}3m)$$

である。回帰の結果は表７のとおりであった。

係数 β はすべての限月で負であり、しかも13限月のうち11限月が有意水準1%で、１限月が有意水準5%で、それぞれ統計的にも有意である。この結果から、先物価格には、次の日の金利に関する情報が反映されていると結論できよう。この結果は、Grangerの因果関係のテストの結果に対応している。

逆に、先物価格が次の日の先物価格の情報を含むか否かをみるために、先物価格の変化を、

$$\Delta F(t,T) \equiv F(t+1,T) - F(t,T)$$

と定義して、次の回帰モデル、

$$\Delta F(t,T) = \alpha + \beta\varepsilon_{t-1} + \omega_t, \quad \omega_t \sim N(0,\sigma_t^2)$$

を、各限月について検証した。結果は、表８のとおりである。

推定された係数には正負が混在しており、1994年９月限を除いて、すべて統計的に有意ではない。このように、次の日にかけての金利の変化については、先物の複製誤差がある程度の予測能力があるが、先物に関してはほとんど情報をもたないのである。

12 市場環境の違いも、調整速度に少なくない影響を与える可能性がある。これらの影響も含めて、詳細な検討は今後の課題として残されている。

表６　複製誤差の修正過程

限月	標本数	Adj R^2	D.W.	回帰係数	推定値	p-Value
93.12	170	0.11691	1.98871	α_1	−0.23302 **	0.001
				α_2	−0.31082 **	0.000
				α_3	−0.20348 **	0.001
				α_4	−0.21989 **	0.004
				β_0	0.00000	1.000
				β_1	0.98652 **	0.000
				h_0	0.00521 **	0.000
94.03	181	0.09436	2.01228	α_1	−0.26940 **	0.000
				α_2	−0.26962 **	0.000
				α_3	−0.14101	0.066
				α_4	−0.16739 *	0.018
				β_0	0.00000	1.000
				β_1	0.99582 **	0.000
				h_0	0.00390 **	0.000
94.06	176	0.08889	1.99117	α_1	−0.26731 **	0.000
				α_2	−0.23271 **	0.001
				α_3	−0.16437	0.054
				α_4	−0.14766 *	0.026
				β_0	0.00000	1.000
				β_1	0.98886 **	0.000
				h_0	0.00626 **	0.000
94.09	181	0.13454	1.95708	α_1	−0.32837 **	0.000
				α_2	−0.22425 **	0.003
				α_3	−0.22263 **	0.001
				β_0	0.00000	1.000
				β_1	0.98533 **	0.000
				h_0	0.00840 **	0.000
94.12	181	0.14357	2.00384	α_1	−0.31602 **	0.000
				α_2	−0.16130 *	0.013
				α_3	−0.20891 **	0.004
				β_0	0.00000	1.000
				β_1	0.98050 **	0.000
				h_0	0.01029 **	0.000
95.03	183	0.18652	2.05206	α_1	−0.48336 **	0.000
				α_2	−0.16673 *	0.024
				β_0	0.00000	1.000
				β_1	0.98325 **	0.000
				h_0	0.00569 **	0.000

95.06	179	0.112761	1.99219	α_1	−0.34604 **	0.000
				α_2	−0.20461 **	0.001
				α_3	−0.16226 *	0.021
				β_0	0.00000	1.000
				β_1	0.99767 **	0.000
				h_0	0.00134 **	0.000
95.09	184	0.11652	2.03941	α_1	−0.37288 **	0.000
				β_0	0.00000	1.000
				β_1	0.99264 **	0.000
				h_0	0.00350 **	0.000
95.12	183	0.13648	2.02079	α_1	−0.35001 **	0.000
				α_2	−0.13830	0.071
				α_3	−0.19524 **	0.006
				β_0	0.00000	1.000
				β_1	0.98810 **	0.000
				h_0	0.00821 **	0.000
96.03	183	0.12424	2.09926	α_1	−0.35364 **	0.000
				α_2	−0.16036 *	0.043
				β_0	0.00001	0.178
				β_1	0.97734 **	0.000
				h_0	0.00686 *	0.018
96.06	180	0.09250	1.97826	α_1	−0.31974 **	0.000
				α_2	−0.22486 **	0.000
				β_0	0.00000	1.000
				β_1	0.98954 **	0.000
				h_0	0.00361 **	0.000
96.09	185	0.12169	1.95783	α_1	−0.32201 **	0.000
				α_2	−0.20918 **	0.002
				β_0	0.00000	1.000
				β_1	0.99071 **	0.000
				h_0	0.00363 **	0.000
96.12	183	0.09068	1.95546	α_1	−0.32477 **	0.000
				α_2	−0.12829	0.067
				α_3	−0.13913	0.068
				α_4	−0.25254 **	0.000
				β_0	0.00000	1.000
				β_1	0.97483 **	0.000
				h_0	0.01215 **	0.000

表７　残差の情報（１）

限月	標本数	Adj R^2	D.W.	回帰係数	推定値	p-Value
93.12	170	0.05124	1.89440	α	−0.00007 *	0.034
				β	−0.00235 **	0.002
94.03	181	0.07405	1.97125	α	−0.00005	0.147
				β	−0.00279 **	0.000
94.06	176	0.11313	1.72914	α	−0.00002	0.577
				β	−0.00375 **	0.000
94.09	181	0.32055	1.89307	α	0.00003	0.300
				β	−0.00506 **	0.000
94.12	181	0.10512	1.80449	α	−0.00001	0.684
				β	−0.00323 **	0.000
95.03	183	0.23067	1.54629	α	0.00003	0.347
				β	−0.00585 **	0.000
95.06	179	0.04857	1.73003	α	−0.00009 **	0.001
				β	−0.00262 **	0.002
95.09	184	0.16687	1.69074	α	−0.00012 **	0.001
				β	−0.00485 **	0.000
95.12	183	0.18118	1.61579	α	−0.00009 *	0.014
				β	−0.00412 **	0.000
96.03	183	0.15284	1.72946	α	−0.00002	0.557
				β	−0.00423 **	0.000
96.06	180	0.02964	1.79126	α	−0.00001	0.748
				β	−0.00205 *	0.012
96.09	185	0.04742	1.67371	α	−0.00001	0.858
				β	−0.00268 **	0.002
96.12	183	0.01349	1.16608	α	0.00002	0.757
				β	−0.00269	0.063

表８　残差の情報（２）

限月	標本数	Adj R^2	D.W.	回帰係数	推定値	p-Value
93.12	170	−0.00592	1.91110	α	0.00794 **	0.003
				β	−0.00403	0.945
94.03	181	−0.00558	1.81978	α	0.00503	0.095
				β	−0.00230	0.968
94.06	176	0.01109	1.76895	α	0.00244	0.443
				β	0.10884	0.087
94.09	181	0.02912	2.09348	α	−0.00372	0.350
				β	0.18822 *	0.012
94.12	181	−0.00551	1.94296	α	0.00199	0.609
				β	−0.00940	0.906
95.03	183	−0.00131	2.05057	α	0.00432	0.203
				β	0.07374	0.384
95.06	179	−0.00030	1.91747	α	0.01050 **	0.000
				β	−0.08683	0.332
95.09	184	0.00045	1.91956	α	0.01283 **	0.001
				β	0.08803	0.300
95.12	183	−0.00171	1.83380	α	0.00788 *	0.038
				β	0.05625	0.407
96.03	183	−0.00527	2.02095	α	0.00163	0.628
				β	0.01630	0.831
96.06	180	0.00424	2.00528	α	0.00082	0.780
				β	−0.09984	0.186
96.09	185	−0.00410	1.90144	α	0.00019	0.958
				β	−0.04397	0.618
96.12	183	−0.00493	1.29503	α	−0.00084	0.892
				β	−0.04645	0.745

4．結論

金利が確定的でないときには、先物のペイオフを複製する戦略は知られていない。本稿では、各満期の割引債と原資産の価格変動のボラティリティが確定的である場合を取り上げ、きわめて単純な投資戦略によって、先物のペイオフが複製されることを示した。裁定機会の非存在は、効率市場が満たすべき一つの必要条件であろう。こうした問題意識から、ユーロ円金利先物市場を対象として、実証分析を行った。得られた結果は次のようにまとめられる。

（1）金利先物価格は金利先渡価格と必ずしも一致しない。このため、金利先物価格の代理変数として先渡価格を用いると、少なくない問題が生ずる可能性がある。

（2）Grangerの因果関係テスト、および先物複製戦略の誤差に基づく回帰分析の二つから、ユーロ円市場においても、先物の変化がフォワード・カーブの変化に関して一定の予測力をもつことが観察された。この意味で、ユーロ円の先物価格には、将来のフォワードカーブに関する情報が反映されている。

（3）先物価格と複製戦略の価値は、期間を5-7日とると、かなり連動する。短期的な両者の乖離のかなりの部分は1日にラグで調整される。

補論１.

補助定理の証明。ボラティリティが時点 t にだけ依存するならば、確率変数 X_S と X_B は正規分布に従う。正規分布の積率母関数から、直ちに、

$$F(S(t),t,T) = \frac{S(t)}{B(t,T)}\exp(Z)$$

となる。ここで、

$$Z = \mu(X_S) - \mu(X_B) + \frac{\sigma^2(X_S)}{2} + \frac{\sigma^2(X_B)}{2} - \mathrm{Cov}(X_S, X_B)$$

であり、$\mu(\cdot)$ は確率変数の平均を表す。さらに、ボラティリティが時点 t だけの関数ならば、

$$\mu(X_S) = -\frac{\sigma^2(X_S)}{2}$$

$$\mu(X_B) = -\frac{\sigma^2(X_B)}{2}$$

の関係があり、これから補助定理の結果を得る。

補論２.

期間構造の推定は次のような方法によった。

a. 時点 t における $(\tau - t)$ 期もの（360日による年率）ユーロ円金利 $r(t,\tau)$を用いて、

$$d(t,\tau) = 1/(1 + r(t,\tau) \times (\tau - t))$$

により、時点 t における時点 τ のユーロ円金利による割引関数曲線を求める。$d(t, \tau)$ は、満期 τ の割引債の時点 t における価格として解釈できる。

b. 有限個の$d(t, \tau)$に基づいて３次多項式による最長365日までの補間を行う。通常、３次多項式の補間により得られる$d(t, \tau)$は、時点 τ の単調減少関数であり、これから計算されるフォワード・レート曲線は正になる。

参考文献

倉澤資成・呉 泳、「金利のボラティリティ構造と金利先物市場の効率性」『金融先物論集』東京金融先物取引所、1996年

Amin, K. I., and R. A. Jarrow, "Pricing Option on Risky Assets in a Stochastic Interest Rate Economy," *Mathematical Finance*, 2, 1992, pp. 217-237.

Chan, K., "A Further Analysis of the Lead-Lag Relationship between the Cash Market and Stock Index Futures Market," *Review of Financial Studies*, 5, 1992, pp. 123-152.

Cole, C. S., and W. Reichenstein, "Forecasting Interest Rates with Eurodollar Futures Rates," *Journal of Futures Markets*, 14, 1995, pp. 37-50.

———, M. Impson, and W. Reichenstein, "Do Treasury Bill Futures Rates Satisfy Rational Expectation Properties?" *Journal of Futures Markets*, 11, 1911, pp. 591-601.

Cox, J., and J. Ingersoll, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53, 1985, pp. 383-408.

———, ———, and S. Ross, "The Relation between Forward Prices and Futures Prices," *Journal of Financial Economics*, 9, 1981, pp. 321-346.

Duffie, D., *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2nd ed., Princeton University Press, 1996.

Flesaker, B., "Arbitrage Free Pricing of Interest Rate Futures and Forward Contracts," *Journal of Futures Markets*, 13, 1993, pp. 77-91.

Geweke, J., R. Meese, and W. Dent, "Comparing Alternative Tests of Causality in Temporal Systems: Analytic Results and Experimental Evidence," *Journal of Econometrics*, 23, 1983, pp. 161-194.

Grinblatt, M., and N. Jegadeesh, "Relative Pricing of Eurodollar Futures and Forward Contracts," *Journal of Finance*, 51, 1996, pp. 1499-1522.

Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, 60, 1992, pp. 77-105.

Hull, J., and A.White, "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities," *Review of Financial Studies*, 3, 1990, pp. 573-592.

Jamshidian, F., "Option and Futures Evaluation with Deterministic Volatilities," *Mathematical Finance*, 3, 1993, pp. 149-159.

Krehbiel, T., and L. C. Adkins, "Cointegration Tests of the Unbiased Expectations Hypothesis in Metals Markets," *Journal of Futures Markets*, 13, 1993, pp. 753-763.

Vasicek, O., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5, 1977, pp. 177-188.

Wahab, M., and M. Lashgari, "Price Dynamics and Error Correction in Stock Index and Stock Index Futures Markets: A Cointegration Approach," *Journal of Futures Markets*, 13, 1993, pp. 711-742.