日本銀行金融研究所「金融研究」第14巻第4号（平成7年12月）

# 実質GDP、通貨残高、物価の長期的関係
## ——共和分検定の批判的再検討——

副島　豊



## 1. はじめに

中央銀行は、最終目標を達成するためにさまざまな政策手段を用いて金融政策を行う。しかし、その効果が最終目標に現れるまでにはかなりの時間的遅れがあるため、最終目標と安定的な関係を保っている変数を中間目標に置き、これをターゲットに操作変数のコントロールを行うというアプローチが多くの中央銀行によって採られてきた。とくに、1970年代には多くの先進国で、M1やM2＋CDなどの通貨残高は、最終目標である物価と安定的な関連性を持ち、かつコントロール可能であると考えられ中間目標とされた。しかし、1980年代に入り通貨需要関数の不安定化が各国で指摘され、マネーサプライ・ターゲティングの有効性に疑問が投げかけられるようになっている。

この間、安定的な通貨需要関数を求めようとする研究が数多く行われてきたが、近年においては、エラーコレクション・モデルがパラメータの安定性、推定精度の良さで注目を集め、通貨需要関数の主流モデルになっている。エラーコレクション・モデルでは、長期的な均衡関係の存在がモデルの前提であり、これには共和分という概念が用いられる。

---

本論文の作成に当たっては、国友直人教授（東京大学）、畠中道雄教授（帝塚山大学）から指導を頂いたほか、検定統計量の漸近分布は佐藤整尚氏（統計数理研究所）の協力により得られたものである。また、馬場善久教授（創価大学）からは有益なコメントを頂いた。

本論文の目的は、エラーコレクション・モデルの基礎となる共和分を理論的に再検討し、共和分を用いた先行研究が示している通貨、物価、生産間の長期的安定関係が果たして存在するか否かを確認することである。[1)] とくに、時系列分析において軽視されてきた確定的トレンドの扱いについて、構造変化の問題と確定的トレンドが関与する２タイプの共和分の相違に焦点を当てる。

成長経済において右上がりの長期的趨勢を持つマクロ経済変数や金融変数は、データをプロットしただけでも成長趨勢の屈折など何らかの構造変化があったと思われるものが多い。従来の共和分検定は、現実のデータに存在する構造変化を考慮せず単純な線形の確定的トレンドを用いたモデル設定により検定・推計を試みてきたが、最近の時系列分析の研究はこのような検定の信頼性に問題があることを指摘している。単変数モデルにおける単位根検定では既に構造変化を考慮した検定が提唱されているが、比較的単純な構造変化に限られており適用可能な範囲が狭い。

本論文では、実質 GDP、通貨残高、物価等の時系列データについてより一般的な構造変化を持つ時系列モデルを考え共和分の前提となる非定常性の検定を試みた。その結果、実質 GDP や GDP デフレーターは構造変化を持つトレンド回りの定常過程であると判断された。

さらに、共和分の推計には確定的トレンドに関する別の問題が存在する。右上がりの趨勢を持つ変数に対しては、確定的トレンドと確率トレンドからなる時系列モデルが適用されるが、共和分が存在するのは変数間の確率トレンド部分である。ところが、確率トレンド間の結合比率を表す共和分ベクトルと各変数の確定的トレンド間の勾配比は必ずしも等しいとは限らない。共和分は、両者の比率を等しいとする確定的共和分と等しくないとする確率共和分の２タイプに分類されるが、初期の共和分の推計は確定的共和分のみを扱うものであった。金利を含む共和分モデルのように共和分ベクトルと確定的トレンドの比率が明らかに異なる場合には、確率共和分を適用せねばならない。本論文では、構造変化の問題と確率共和分を同時に取り扱うため、構造変化を含む確定的トレンドを前提として確率過程部を抽出し非定常性の検定を行った。その結果、やはり前記変数の確率過程部分の定常性が支持されている。

構造変化を考慮していない既存の研究では、これらの変数が非定常過程であり共和分の関係にあることを主張しているが、その分析結果は構造変化の不適切な扱いや確定的共和分の無条件な適用などモデル選択の誤りに依存している可能性が高い。[2)] に

1） 物価や成長のコントロールを目指すマネタリー・ターゲティングは景気循環に対応して行われるため、仮に共和分が存在しても、均衡へ回帰する時間が長すぎる場合には、金融政策の観点からはあまり意味がなくなってしまう点は注意を要する。

2） 国友[1995]は、確定的トレンドの定式化を誤ることにより単位根や共和分が有意に検出されやすくなることを理論的に示し、これを「見せかけの単位根」、「見せかけの共和分」と呼んだ。

もかかわらずこれらの研究が安定的な通貨需要関数を得ていることに対しては、共和分が示唆する長期的関係に含まれない短期的な要因を説明変数に加えていくという関数の特定化作業に依存したものではないかとの批判がなされている。[3)]

非定常過程と判断されていた変数が実は定常過程であった場合、これにエラーコレクション・モデルを適用することは適当でない。本論文で用いたモデルに従えば、実質 GDP や物価変数が定常過程である一方、通貨残高は非定常過程であるため、これら変数間には長期的な安定関係が見い出せず、このことが通貨需要関数の予測精度の低さ等の原因の一つになっている可能性がある。

本論文の構成は以下のとおりである。まず2.では、通貨需要関数の推計に共和分がどのように利用できるかを解説し、従来の研究が考えた共和分の例を示す。次に、3.では、定常変数や非定常変数間の長期的関係について考察し、とくに確定的トレンドの構造変化と、２つのタイプの共和分について解説する。また、確定的トレンドの処理の観点から既存の共和分の推計方法を分類して示す。4.では、日本のＭ１残高、GDP デフレーターに時系列モデルを適用した場合、確定的トレンドの構造変化を考慮する必要があることを指摘し、単純な線形の確定的トレンドが維持仮説として不適切であることを共和分モデルの安定性テストによって示す。また、金利を含む共和分モデルに確定的共和分を用いる問題点を実例を示して解説する。5.では、上記の問題を考慮した非定常性の検定を行う。

なお、補論1.では、構造変化を含む変数が時系列モデルでどのように定式化できるかを示す。補論2.では、外生変数を一般化することで多変量時系列モデルにおける構造変化を表現し、その共和分検定法を提唱した Kunitomo[1992]、国友[1995]の方法を紹介する。

## 2.　通貨需要関数と共和分

スケール変数として実質 GDP を用いた通貨需要関数は、次のような対数線形モデルをベースにする場合が多い。

$$m-p=\alpha y+\beta r$$

$m$、$p$、$y$ は、通貨残高、物価水準、実質 GDP の対数値を表し、金利 $r$ は真数、$\alpha$、$\beta$ はそれぞれ正、負の定数である。このような対数線形モデルをもとに、さまざまな通貨需要関数のバリエーションが考えられたが、近年においては、エラーコレクショ

3） Baba, Hendry and Starr[1992]は、エラーコレクション・モデルにより米国のＭ１需要関数が安定的であることを主張したが Hess, Jones and Porter[1994]はこれを追試し、期間を延長した out of sample の予測精度が悪くなることを示すことで、安定性が関数の特定化に依存している可能性を指摘している。

ン・モデルがパラメータの安定性、推定精度の良さで注目を集め、主流モデルになっている。

エラーコレクション・モデルの経済理論的解釈は、人々が最適な行動を採りそこなった場合、このエラーを修正するよう振る舞うため均衡へ向かう回復力が生じるというものである。[4]経済理論で想定される変数間の関係は均衡状態を表すものであり、現実に観測されるデータには均衡からの乖離（エラー）が存在し、この乖離が大きいときには修正力が強く働くと考える。したがって、均衡関係の存在がモデルの前提となっている。

均衡関係の存在の確認には、共和分といわれる時系列分析の概念が用いられる。以下で共和分の概略を簡単に述べよう。実質GDPや通貨残高などのマクロ経済変数は、右上がりの趨勢を持っており、このような変数どうしを回帰した場合、まったく因果関係がなくても強い正の相関を持つ。これを避ける方法として、タイムトレンドを除去することが考えられるが、マクロ経済変数の多くはタイムトレンドを除去してもランダムウォークしている非定常変数である可能性が高いことが指摘されているため、非定常変数どうしを回帰することによる見せかけの相関の疑いが残る。ところが、複数の非定常変数に長期的な均衡関係が存在するとき、単変数でみるとランダムウォーク過程であるが、変数どうしは大まかに同調して変動しており、長期的にみれば非定常変数間に一定の比率が保たれていることが発見された。このような非定常変数間の均衡関係を共和分と呼び、変数間の比率のベクトルを共和分ベクトルという。この比率による変数の線形結合は定常過程となる。[5]共和分の提唱者であるEngle and Granger [1987]が示した検定方法では、回帰残差の定常性を検定し、これが定常過程になる場合に共和分が存在し、回帰式の係数が共和分ベクトルとなっているとする。その後登場したJohansen [1988]では、多変量時系列モデルにおいて3変数以上の共和分

---

4） エラーコレクション・モデルには、英国で発展したタイプと主に米国で発展したタイプがある。前者は、経済理論に基づいて得られた構造型を単一方程式として推計しようという伝統的な計量分析手法の延長上にあり、その際、ラグ構造をデータに基づいて特定化し動学過程を捉えようとする点、誤差修正項を含む点、階差定常化した変数を用いる点が特徴である。誤差修正項を得るための長期的均衡関係は被説明変数と一部の説明変数の間で求められ、推計式には長期的均衡関係にはないが経済理論的に影響があると判断された説明変数が含められている。また、誤差修正項を推計式に含めるにあたり、統計的に厳密に共和分の存在を求めず、推計式の精度を向上させることを目的に用いるものも多い。一方、後者は多変量時系列分析から発展してきたもので、モデルに含まれる変数すべての間に長期的均衡関係を求める。Johansenの誤差修正表現を用いた検定法は後者のタイプであり、階差をとって表現されているため多変量システムの一方程式を取り出すと前者の推計式と似ているが、両者は異なった考え方を源にしている。

5） ここでは、理解を容易にするために確定的共和分のケースを説明した。確率共和分との相違は3.(1)ハ.を参照。

の検定や共和分ベクトルの推計が行われている。[6] この他にも、さまざまな共和分個数の検定方法や共和分ベクトルの推計方法が考案され、これらの方法が広まるにつれて、非定常変数の均衡関係を調べる場合には共和分を用いることが一般化してきた。

通貨需要関数にエラーコレクション・モデルを適用した研究では、4変数間の線形結合 $m-p-\alpha y-\beta r$、もしくは3変数間の線形結合 $m-p-\alpha y$ が定常過程となるような共和分の関係が存在すると考える。均衡状態ではこの線形結合はゼロであるが、実際は均衡からの乖離があるから平均値ゼロ回りの定常過程となる。線形結合は均衡からの乖離度を表すため、これを誤差修正項として階差モデルに含めるのが一般的な手法である。

## 3. 共和分検定における確定的トレンドの扱い

共和分を用いた分析は、変数の非定常性が前提条件になっている。このため、事前に非定常性の検定を単位根検定によって行う。[7] ところが従来の単位根検定では、現実の経済データにしばしば窺われる長期的成長率の変化などの構造変化がモデル設定において考慮されておらず、検定結果の信頼性に問題があることが Perron [1989] によって指摘された。また、多変量時系列モデルにおける共和分検定においても、同様な問題が生じることを国友[1995]が指摘しており、時系列モデルにおける確定的トレンドの扱いに注目が集まっている。

さらに、確定的トレンドを含むモデルでは、その扱い方によって共和分に確定的共和分と確率共和分という2つのタイプがありうることが Ogaki and Park [1992] によって指摘されているが、実証分析に共和分を用いた研究では、確定的トレンドの構造変化と同様、確定的共和分と確率共和分の相違にも注意が払われていないケースが少なくない。

本節では、まず、上方への趨勢を持つ定常・非定常変数が長期的にどのような関係を持ちうるのかを時系列分析の観点から紹介する。とくに、共和分の関係にある非定常変数に焦点をあて、実証分析で共和分を用いる場合には確定的トレンドの取扱いに十分な注意を払う必要があることを指摘する。次に、共和分の検定法を確定的トレンドの処理の観点から簡単にサーベイする。

---

6） Engle and Granger [1987] は、共和分が多変量時系列モデルの3つの表現型、VMA 表現、VAR 表現、VAR 表現の変形である誤差修正表現、によって表せることを示し、これらがすべて同値であることを証明した。VMA では、変数の動きは、複数の確率トレンドが作る非定常部分（長期変動部）と短期的な変動を示す定常部分から成り、共和分が存在する場合には、前者の確率トレンドの線形結合が定常化される。また、Johansen [1988] は誤差修正表現を用いた検定法を考案し、係数行列のランクの検定を共和分の個数の検定と結びつけた（補論2参照）。

7） 本論文では、非定常過程に発散過程は含めておらず、すべて単位根過程と考えている。

### (1)　定常・非定常変数間の長期的関係

成長経済では多くの時系列データが上方への趨勢を持っている。こうした時系列データ間にはどのような長期的関係が観察されるだろうか。本節では2変数の場合について、定常変数どうし、定常変数と非定常変数、非定常変数どうしの3つの組み合せを示す。ただし、ここでは定常変数、非定常変数ともに趨勢が線形の確定的トレンドによって表されるケースを考える。

#### イ．ケース1（定常変数間の関係）

時系列モデルにおける定常変数は、確定的トレンドと定常な確率過程からなる。図1は、直線の確定的トレンド回りの定常過程の例を示したものである。各々の変数の確定的トレンドの勾配差が変数間の何らかの長期的な関係を示すものかどうかは、経済理論によって考察されるべき問題である。一方、確定的トレンド回りの短期的変動間の関係は、定常過程部分を分析することによって考察することができる。

例えば、国友[1995]は、日本の戦後の実質GDPと実質民間最終消費支出（対数値）が、屈折を伴う線形のトレンド回りの定常過程であり、さらに両変数が従っているトレンドが屈折の前後で伸び率比一定の関係を維持しているという分析結果を示し、後者を確定的トレンドの共変動と呼んでいる（図2）。[8] この場合も、確定的トレンドがなぜ共変動するかは、経済理論によって考察されるべき問題である。[9]

図1　確定的トレンド回りの定常過程

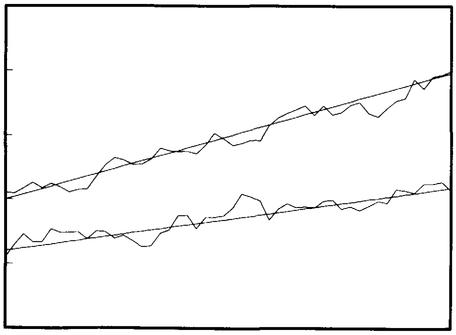
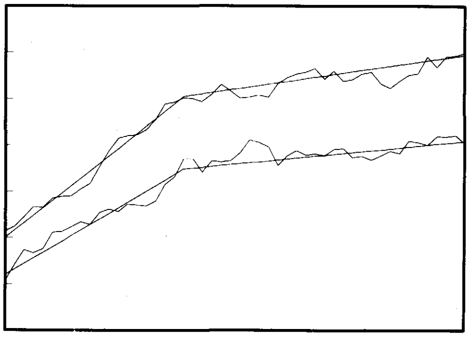


図2　確定的トレンドの共変動



8）多変量時系列モデルにおける確定的トレンドの共変動は、屈折した直線のタイムトレンドを表す外生変数項の係数行列のランクが落ちることで表せる（補論2参照）。

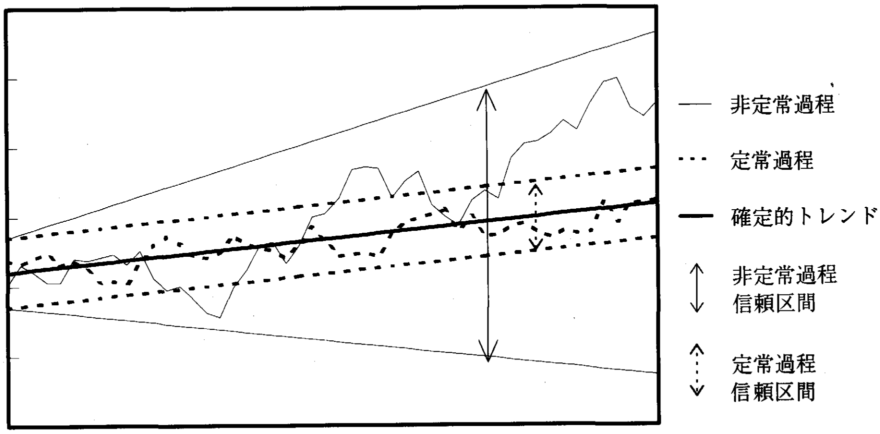
9）米国では、実質生産・消費・設備投資などのマクロ変数（対数値）は非定常過程であるとの指摘が1980年代初期よりなされており、その後これら変数間に共和分が存在することを示唆する研究が現れた。こうした統計的指摘についてリアル・ビジネスサイクル理論は、生産設備に体化された技術進歩が各変数の確率トレンドを形成するためと解釈した。また、恒常所得仮説からは実質消費と実質所得が共和分の関係にあることが導かれ、これを裏付ける実証分析がCampbell[1987]などにより行われている。

### ロ．ケース２（定常・非定常変数間の関係）

次に、確定的トレンド回りの定常変数と、確定的トレンドと確率トレンドから成り立つ非定常変数間の関係について考える。[10)、11)] 図３には、確定的トレンドを等しくする定常過程と非定常過程の例を、期初時点で測った信頼区間と共に示した。太線が共通する確定的トレンド、点線が定常過程とその信頼区間、実線が非定常過程とその信頼区間である。このケースでは、同一の確定的トレンド回りを変動する定常過程と確率トレンド間に安定的な関係を見い出すことができないため、長期的関係は観察されない。

この例に見られるように、２変数の潜在的な成長率が等しいと事前に考えられる場合、これを共通の確定的トレンドで表現することができる。しかし、非定常過程は確定的トレンドへの回帰性を持たないため、２変数間に長期的な安定的な関係は観察されない。

図３　同一の確定的トレンドを持つ定常・非定常過程




---

10) 単位根過程で表現される確率トレンドは、次式に示されるように前期の値$y_{t-1}$に今期のショック$\eta_t$とドリフト項$\mu$が加わって今期の値$y_t$が決定される確率過程であり、初期値$y_0$からの生成過程を考えると、ドリフト項が作る確定的トレンド$\mu \cdot t$と各期のショック$\eta_i (i=1,2\cdots\cdots t)$の累積和で表現される。技術進歩や株価変動など各期に生じた出来事の積み重ねで進むと考えられる過程を表すのによく利用される。

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \eta_t \quad \left( = \mu \cdot t + \sum_{i=1}^{t} \eta_i + y_0 \right)$$

11) 確率トレンドのみでも上方への趨勢は発生しうるが、下方への趨勢も同じ確率で作り出してしまう。したがって、趨勢が下方へ転じることのないデータでは、ドリフト項を階差定常モデルに含めることで確定的トレンドを持たせたほうが妥当である。

### ハ．ケース3（非定常変数間の関係）

(イ)　確定的共和分と確率共和分

確定的トレンドを含む非定常変数間の共和分には2つのタイプが存在する。一つは、確率トレンド間に共和分を作り出す結合比率（前述のようにこれを共和分ベクトルと呼ぶ）が、確定的トレンド間の勾配比と同一である場合であり、これを確定的共和分が存在するという。この関係にある非定常過程を図4－1に示した。同非定常過程より抽出した確率トレンド（図4－2）は1対2の比率で共和分関係にあり、かつ確定的トレンドの勾配も同じ比率となっている。このケースでは、図4－3のように確率トレンドの線形結合が定常化されるだけでなく、変数どうしの線形結合も平均値回りの定常過程となる。

図4－1　確定的共和分の関係にある非定常過程

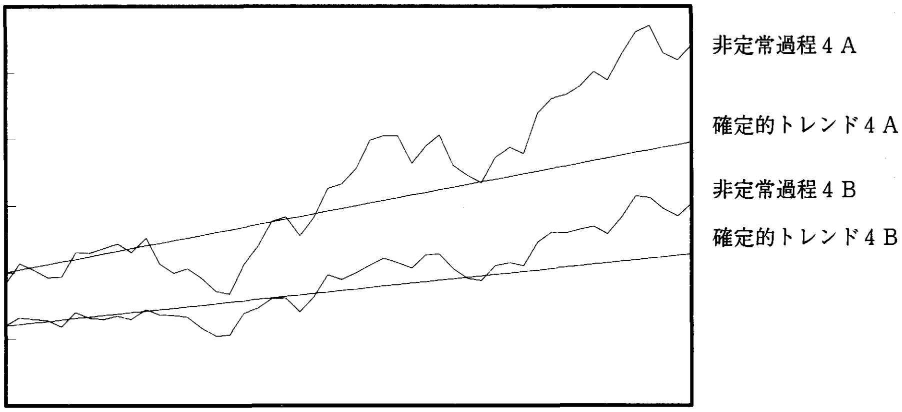



図4－2　非定常過程の確率トレンド部分

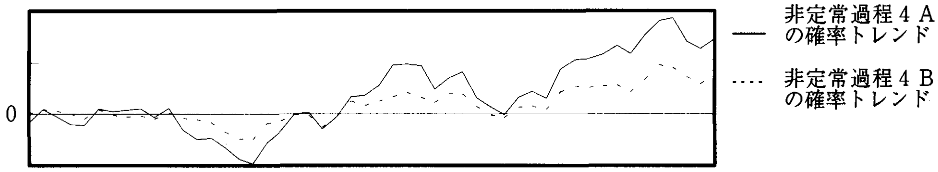
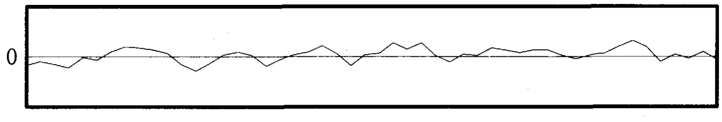



図4－3　確定トレンドの線形結合：ゼロ回りの定常過程




（注）図4－1～3の縦軸目盛りは同一スケール。

一方、確率トレンド間に共和分が存在するが、共和分ベクトルと確定的トレンドの勾配比が異なる場合を確率的共和分が存在するという。したがって、確率共和分は確定的共和分より成立条件が緩やかである。確率共和分はOgaki and Park[1992]で提唱された概念であり、それ以前には共和分の概念は確定的共和分に限られていた。[12)]確率共和分の場合、共和分ベクトルによる変数どうしの線形結合は、確率トレンド部が定常化される一方で確定的トレンドは打ち消されないため、トレンド回りの定常過程となる。図5-1は、確率トレンドが2対1で共和分の関係にあり、確定的トレンドの勾配比が1対10となっている非定常過程の例である。これらを共和分ベクトルで線形結合した過程が図5-2であり、確定的トレンド回りの定常過程になっていることが判る。

共和分ベクトルを推計するにあたっては、確定的共和分と確率共和分の相違点に注意する必要がある。実証分析では、実質GDPのように長期的成長趨勢が短期的変動より支配的な経済変数を扱うことが多い。こうした変数間に確率共和分しか存在していないにもかかわらず、確定的共和分を前提に推計を行った場合、共和分ベクトルの推計値が確定的トレンド間の関係に影響されてしまう可能性がある。この問題は4.(3)で具体例を示す。共和分を用いた実証分析は確定的共和分を前提とした

図5-1　確率共和分の関係にある非定常過程

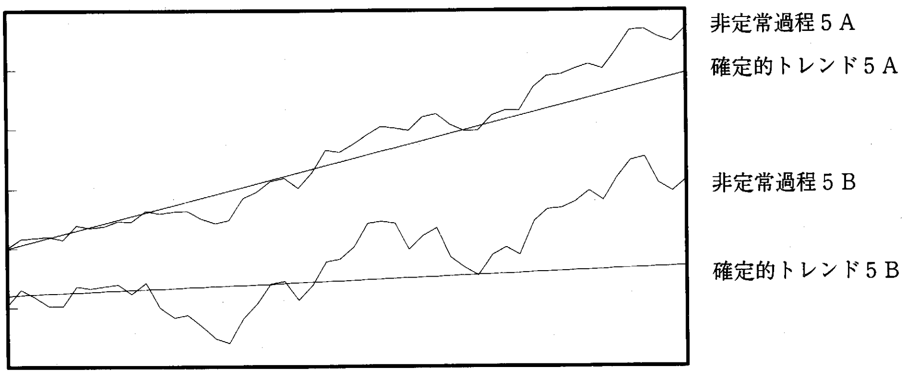
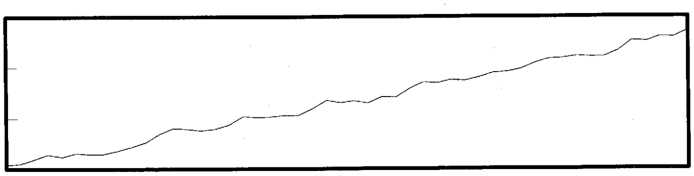



図5-2　非定常過程の線形結合：確定的トレンド回りの定常過程



12)　確率共和分(stochastic cointegration)は、最近登場した概念であるため代表的な邦訳がなく、ここでは畠中[1994]の用語法に従った。

ものが多く、推計された共和分ベクトルが確定的トレンドの勾配比に近い場合には、上記の問題が生じている疑いがある。

また、本来、どちらの共和分を用いるかは検証される経済理論の内容によって選択されねばならない。例えば、貨幣の中立命題が長期のみならず短期においても成立することを検討する場合、趨勢の伸び率の差と短期的な変動の大きさの差は等しくなるため、確定的共和分を考察せねばならない。これに対し、「決済性通貨の流通速度が金融技術革新によって趨勢的に向上しており、かつ通貨と実体経済間には短期的な変動に関する一貫した法則が存在する」といった仮説を検討する場合、確定的トレンド間と確率トレンド間に異なった関係を求めるため確率共和分を用いねばならない。

(ロ) 確定的トレンドの構造変化

確定的トレンドに屈折などの構造変化がある場合、確定的共和分が成立するケースは少なくなる。まず、屈折を伴う確定的トレンドと共和分の関係にある確率トレンドから構成される非定常過程を示した図6-1をみてみよう。このケースでは、確定的トレンドが同一時点で屈折し、しかも屈折の前後で勾配比が一定に保たれている。したがって、二つの確定的トレンドの線形結合を一定値とするベクトルが必ず存在し、両者は一次従属となる。これが、共和分ベクトルと等しいならば確定的共和分が成立し、異なる場合には確率共和分となる。

ところが、確定的トレンドに構造変化が含まれる場合、線形結合が一定値になることは希であり、図6-1むしろ例外的なケースである。現実の経済変数では、観察期間を通じて短期的な変動に一定の相関が観察されるにもかかわらず、確定的トレンドの勾配比は構造変化の前後で変化している場合が少なくない。[13] 図6-2は、確率トレンド間に共和分が成立しているが、確定的トレンドが屈折の前後における勾配比の変化のため一次独立となっているケースである。この場合、確定的トレンドを打ち消しあうベクトルが存在しないため確定的共和分は成立しえず、共和分の関係は確率共和分に限定される。したがって、分析にあたっては、長期的趨勢を表す確定的トレンド間の関係と、各期のショックから形成される確率トレンド間の関係を別々に考察する必要が生じる。[14]

13) このほか確定的トレンドの構造変化のパターンや、発生時期が変数間で異なっている場合なども確定的共和分は成立しなくなる。

14) 構造変化は、確定的トレンド間の関係を変えると同時に、確率トレンド間の共和分ベクトルを変える可能性もある。共和分ベクトルの構造変化を認めた場合、確定的共和分の成立する余地は残されている。

図6－1　屈折を含む一次従属な確定的トレンド

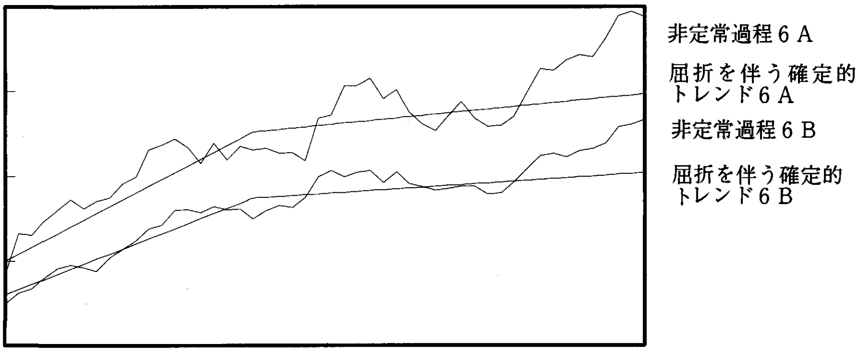
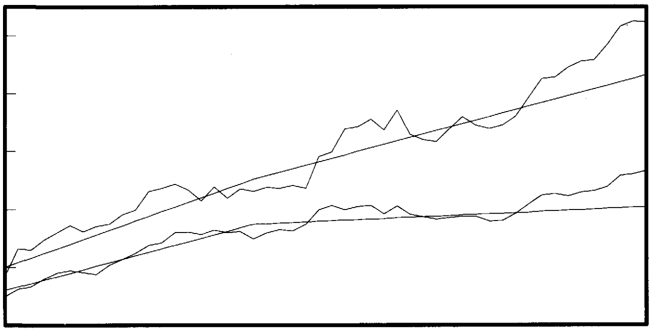



図6－2　屈折を含む一次独立な確定的トレンド



### (2) 共和分検定の先行研究

共和分の検定方法は推計方法で分類すると、Engle and Granger [1987]、Phillips and Ouliaris [1990]、Park [1992]、Stock and Watson [1993] 等に代表される residual-based test（変数の線形結合を回帰残差として求めその定常性の検定を行う方法）、Johansen [1988] で提唱された最尤推定法（多変量時系列モデルを誤差修正表現に置換し係数行列のランク検定を利用する方法）や、代理変数法を応用した Phillips and Hansen [1990] などさまざまな方法がある。[15)]

これらを確定的トレンドの設定の観点から分類してみよう。Engle and Granger [1987] や Johansen [1988] など初期の研究は、確定的トレンドを含まないモデルや、

15)　residual-based test においては、誤差項の強い自己相関が定常性の検定に影響を及ぼす点の改善や、誤差項と説明変数間に相関が存在することによる共和分ベクトル推計値の有効性（efficiency）低下への対応、共和分が存在する変数間の一部に異なる共和分がさらに内在しているケースへの適用などさまざまな改善、応用が展開している。一方、residual-based test は単一の回帰式に基づいているため、多変量時系列モデルを用いた方法と異なり、共和分ベクトルが複数存在しても高々１個しか推計されないという欠点を持つ。

線形の確定的トレンドを仮定したモデルを扱った。これは、確定的トレンドの導入やその一般化にあたって漸近分布理論の拡張に困難が伴うことが原因であったが、その後、Johansen [1994] や Hansen [1992] は 2 次もしくは高次のタイムトレンドを導入することに成功している。また、線形の確定的トレンドに構造変化を含めたモデルは、まず、単変量時系列モデルにおける単位根検定において研究され、Perron [1989] 以来いくつかの試みが展開されている。Perron [1989] は、真のデータ生成過程が確定的トレンドに屈折やジャンプを伴っている場合、これを捨象したモデルによる単位根検定は単位根仮説を採択しやすいバイアスを持つことを理論的に示し、大恐慌やオイルショックなどの屈折点を含む長期時系列データに対して、確定的トレンドの変化を仮定したモデルによる単位根検定を試みた。その結果、従来、非定常過程とみなされてきた変数の多くが定常過程であると判断された。これを契機に、Christiano [1992]、Zivot and Andrews [1992]、Banerjee, Lumsdaine and Stock [1992]、小原 [1994] らにより、構造変化の時期を未知とした単位根検定や、複数の構造変化を持つ線形の確定的トレンドを対立仮説とした単位根検定が研究された。一方、共和分検定においては、国友 [1995] が Johansen [1988] の最尤推定によるランク検定方法に確定的トレンドの構造変化を導入し、構造変化を伴うデータ生成過程に従来の検定法を適用した場合、ランクが落ちやすくなるバイアスが生じることを理論的に示し、「見せかけの共和分」の危険性を訴えた。また、国友 [1995] は、屈折した線形の確定的トレンドを持つ変数間での共和分検定を考案し、実証分析への適用例を示している。

次に、確率共和分と確定的共和分の相違に配慮して、確定的トレンドを扱った検定を示す。確定的共和分と確率共和分の概念を提唱した Ogaki and Park [1992] のほかには、Johansen [1994]、Hansen [1992] が 2 つの共和分の相違について配慮した検定を考案している。[16] Johansen [1994] では、VAR の誤差修正表現型に直接確定的トレンドを導入し、定数項と線形トレンド項からなる外生変数項が共和分ベクトルと一次従属か一次独立かで場合分けを行い、それぞれについて検定法を考案した。Johansen [1994] は確率共和分という用語は用いていないが、一次独立な場合が確率共和分に相当する。また、Phillips and Hansen [1990] の推計法を拡張した Hansen [1992] は、ラグランジュ乗数検定を用いた共和分ベクトルの安定性テストを考案している。この方法は、共和分ベクトルに限らず確定的トレンド間の関係の安定性も検証できる利点がある。

16) 畠中 [1994] は、Wold 表現型に直した時系列モデルに異なったかたちで確定的トレンドを導入することにより確定的共和分モデルと確率共和分モデルが表現できることを示した。一つは Wold 表現型の各期のショックにドリフト項を加える方法であり、もう一つは MA 過程とは別にドリフト項を加える方法である。前者によって確定的共和分が、後者によって確率共和分が表現される。

以上のように、確定的トレンドの扱いについて構造変化と共和分のタイプの2つの要素に注目し、検定方法を分類すると以下のようになる。各々について代表例を1例ずつ示した。

共和分における確定的トレンドの扱い
（形状と共和分のタイプによる代表例の分類）

| | 確定的トレンドの形状 | | |
|---|---|---|---|
| 共和分のタイプ | 線形 | 高次曲線 | 構造変化 |
| 確定的共和分 | Engle&Granger [1987] | Johansen [1994] | 国友 [1995] |
| 確率共和分 | Ogaki&Park [1992] | Johansen [1994] | —— |

## 4. 通貨需要関数への共和分適用の問題点

3.(2)で指摘したように、初期の共和分分析は統計理論展開の簡便さのために確定的トレンドの扱いに制約をかけたものであった。こうした分析法をその前提が満たされていない経済データに適用した場合、推計結果の信頼性は低いものになる。通貨需要関数へ適用された共和分分析では、実質 GDP、物価、名目通貨残高の3変数間（もしくは実質 GDP と実質通貨残高の2変数間）に共和分の存在を探るものや、さらに金利や金利スプレッド、金融資産残高、為替レート等を加えた4～6変数間で分析を行うものが多い。いずれも実質 GDP、物価、名目通貨残高が成長変数であるため、確定的トレンドに関する考察が必要となってくるが、既存の研究では単純な線形の確定的トレンドを採用し、かつ確定的共和分を前提に分析が行なわれている。そこで本節では、まず最初にこれらの変数に対して線形の確定的トレンドを適用することが妥当であるかを単変数時系列モデルで検討し、さらに、Hansen [1992] の共和分の安定性テストによって、線形の確定的トレンドが検定を行ううえでの維持仮説として不適当であることを示す。次に、金利など上方趨勢を持っていない変数を共和分に含めた場合には、確定的共和分を前提としたモデルによる検定は推計上の問題を持つ点を指摘する。

### (1) 確定的トレンドの構造変化

確定的トレンドの構造変化の問題は、まず単変数時系列モデルにおける単位根の検定で注目された。Dicky and Fuller [1979] が最初に提案した単位根の検定では、趨勢を持つ変数に対して線型の確定的トレンド回りに変動する単変数時系列モデルが考えられ、このモデル上で定常過程か非定常過程かが検定された。その後、さまざまな検定法が考案されたが、検定の維持仮説となるモデルでは確定的トレンドとして直線を仮定するものがほとんどであり、その妥当性については十分な注意が払われてこな

かった。

これに対し、Perron[1989]は確定的トレンドの変化を仮定したモデルによる単位根検定を試みている。Perron[1989]の採用したモデルは、線形の確定的トレンドの構造変化をジャンプないし屈折に限定したものであり、検定のタイプは、Dicky and Fuller[1979]の検定方法でt値タイプと呼ばれるものであった。17)

副島[1994]は、この検定方法を戦後の日本のマクロ変数に適用し、線形の確定的トレンドの構造変化を仮定すれば実質GDP等では定常過程の可能性があることを指摘した一方、物価や名目通貨残高など名目変数については、線形の確定的トレンドのジャンプや屈折を用いたモデルが維持仮説として不適切であることを指摘した。

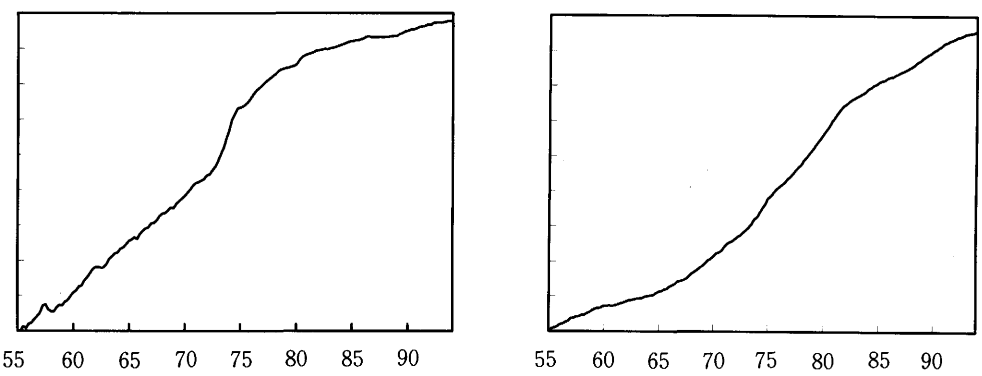
この点を日、米のGDPデフレーターを例にみてみよう（図7）。

図7から明らかなように、日本、米国いずれのデータも弓形の滑らかな趨勢変化期を含んでおり、これらの変数を屈折、ジャンプした線形のトレンドでトレースすることは困難である。こうした時系列データに無理にこれらのトレンドを適用した場合、トレンド回りの変動は非定常過程となる可能性が高い。

別の考え方として、3次曲線のようなより高次なタイムトレンドを確定的トレンドとして採用することも可能ではあるが、そのようなトレンドに経済的な意味付けを与えるのは困難である。長期的な時系列データに対しては、全期間において同一の時系列モデルによる表現を試みるより、むしろ、歴史的な事件により構造変化が起こった

図7　GDPデフレーターの推移

(日本)　　(米国)




(注) 1955年をゼロに基準化した季調済計数対数値

17) Dicky and Fuller[1979]によるタイムトレンドを持つモデルの単位根検定では、
対立仮説：$y_t=a+bt+\theta\cdot y_{t-1}+\varepsilon_t$ に対して、帰無仮説：$y_t=\gamma+y_{t-1}+\varepsilon_t$
を考えている。帰無仮説は、対立仮説において $b=0$、$\theta=1$ が成り立つことであるが、t値タイプの検定は $\theta=1$ についてのみの検定であり、この検定は不十分である。一方、F値タイプの検定は $b=0$、$\theta=1$ が同時に成立することの検定になっている。

ため、変数の生成過程が途中で変化していると考える方が自然であり、また高々2次のタイムトレンドで対応可能な場合が多い。例えば、日本のGDPデフレーターの推移について、戦後、平均的にみて一定のインフレ率で成長してきた経済が、1973年末のオイルショック前後を境に物価に関する構造的な変換が起こり、数年間の調整期間を経て1980年頃に再び一定のインフレ率を伴う成長過程に回帰したと解釈すれば、確定的トレンドを直線－曲線－直線の3パートで構成されるモデルで表現することができよう。

以下では、M1残高に上記の考え方を適用する。近年の実証分析では、通貨残高や物価水準などの名目変数の対数値が2次の和分過程（2回階差をとることによって定常化するI(2)過程）であると指摘するものが多い。この点は、名目変数の時系列がしばしば曲線の趨勢を部分的に含んでおり、そのため一回階差をとるだけでは定常化されにくいことからも推測できる。

仮に、通貨残高と物価の対数値がI(2)変数であっても、長期的には物価水準と通貨残高との比例的関係が保たれているとすれば、両者間に共和分関係が成立し実質化した通貨残高（$\ln M-\ln P$）はI(1)過程となる。このため、通貨需要関数に関する研究では、検定もしくは仮定により実質通貨残高をI(1)過程変数とみなし、多変量時系列モデルを当てはめる分析が多く見うけられる。[18)、19)]

しかし、I(2)過程を定常化するため機械的にデータの階差加工を2度繰り返すと、データの持つ重要な情報を捨ててしまう危険性がある。図8-1～3は、M1残高（対数値）とその1階・2階の階差データを示したものである。1階の階差をとっても定常過程にはならず、2階の階差化でほぼゼロに近い平均値回りに定常な時系列過程となっている。しかし、時系列データの推移がGDPデフレーターと同様に2次曲線を間に挟む2つの直線でトレースできるため、1階の階差データはまったく規則性がないランダムウォークのような非定常過程ではなく、図8-2に示したような構造変化を持つ関数の回りの定常過程とみなせる。[20)]換言すれば、確定的トレンドに構造変化

---

18) これは、名目通貨、物価を含む$n$変数モデルにおいて1～（$n$-1）個存在しうる共和分のうち一つが、共和分ベクトル（$\ln M, \ln P, \cdots\cdots$）$=(1,-1,0,0,0\cdots)$で表せるものであり、他の共和分ベクトルにおいても名目通貨、物価を含む場合、両者間の比率は1対-1に保たれていることを意味する。

19) Stock and Watson[1993]は、Engle and Granger[1987]と同様に単一の回帰方程式を用いて、和分次数が異なる変数が混在する場合の共和分検定を考案した。一方、Johansen[1995]は、多変量時系列モデルでI(2)変数が扱える方向へ理論を展開し、共和分ベクトルの推計方法を示している。Juselius[1994]は名目通貨残高をI(2)とみなしたデンマークの通貨需要関数に同推計法を試みている。

20) 補論1.で考察するように、このようなデータの生成過程は、単位根を持つか否かで、直線-2次曲線-直線と変化するタイムトレンド回りの定常過程か、もしくは時間の関数であるドリフト項を持つ単位根過程として表せる。

図８－１　Ｍ１残高対数値の推移

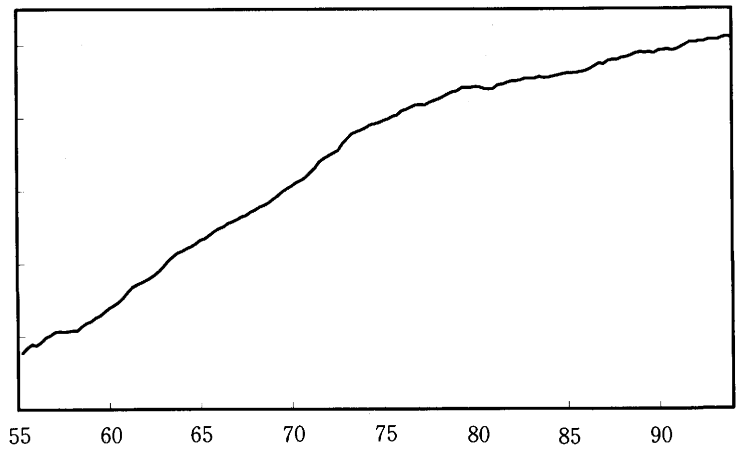



図８－２　同データ階差値

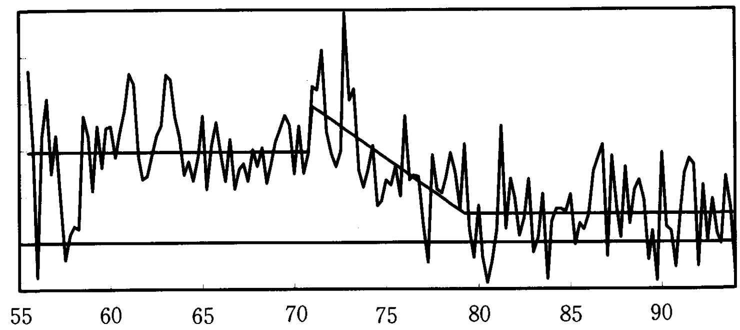
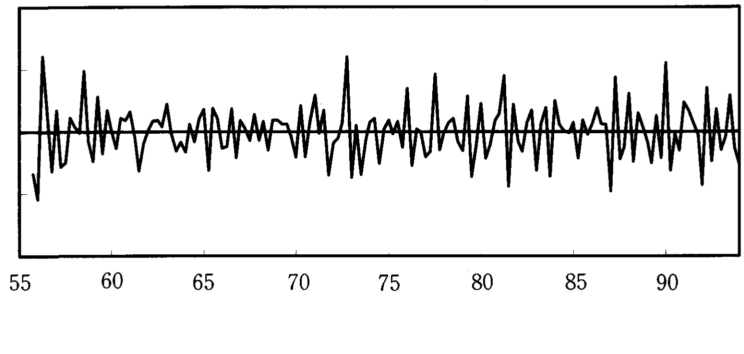



図８－３　同データ２階階差値



を含む時系列モデルを考えると、物価やM１残高は定常過程かI(1)過程である可能性が強い。

このような確定的トレンドに構造変化を含む確率過程が、どのような時系列モデルで表現できるかを補論1.に示した。

### (2) 共和分モデルの安定性テスト

次に、従来用いられてきた線形の確定的トレンドの妥当性を Hansen [1992] が提唱した共和分の安定性テストを用いて間接的に検証する。構造変化がない線形の確定的トレンドの場合、変数どうしの共和分ベクトルによる線形結合は、確定的共和分が成立すれば一定値回りの定常過程、確率共和分しか成立しないならば線形トレンド回りの定常過程となる。一方、確定的トレンドに構造変化が含まれる場合、確定的トレンドの線形結合に構造変化が残るため、定数項やトレンド項のパラメータが不安定になり、安定的な共和分モデルは得られない。[21] そこで、共和分の安定性テストを確定的トレンドの構造変化に関するテストに応用する。

Hansen [1992] の検定には３つのタイプがある。一つは、共和分ベクトルを含めたパラメータがサンプル期間を通じて一定であるという帰無仮説に対して、未知のある時点で一度シフトするという対立仮説を立てて検定を行うものである。これは、レジームの急なシフトが生じたことを発見するのに適している。あとの二つは、各パラメーターをある確率過程に従うと仮定して、その分散値がゼロ（すなわちパラメーターが一定値）であることを帰無仮説とし、分散値が正の値をとる（パラメーターは定数でない）ことを対立仮説として検定を行う。こちらは、パラメーターが徐々に変化するというモデルの不安定性を考察するための仮説設定であり、採用したモデルが全期間を通じて安定性を保っているか否かの検定に適している。前者の検定には SupF、後者の検定には MeanF、Lc を統計量として用いる。SupF はサンプル期間を順次延長して求めた F 値の最大値である。SupF の帰無仮説では、パラメータの変化点が判明している場合 F 検定を用いることができるが、変化点に関する事前情報がないため SupF を用いる。MeanF と Lc による検定は帰無仮説、対立仮説とも同様な仮説設定であるが、MeanF が F 値を、Lc が尤度を用いた統計量であるため、パラメータの確率過程（マーチンゲール過程）の撹乱項の共分散行列の定式化が異なっている。また、SupF、MeanF はサンプル期間の期初・期末の15%を除いて求められる。

ここでは、名目通貨残高：$m$、実質 GDP：$y$、GDP デフレーター：$p$ 間に安定的な

21) ただし、図６-１に示したように、構造変化があっても互いに一次従属である確定的トレンドについては、共和分のモデルの定数項やトレンド項に構造変化は現れない。

共和分の関係が存在するか検定を試みた。データは季調済計数の対数値を用い、推計期間は1955年第2四半期から1994年第1四半期である。その結果を以下に示す。なお、確定的トレンドの構造変化を考慮しない単位根検定はこれらの変数が非定常過程であることを支持している。

$$m_t = -1.56 - 1.27t + 1.16y_t + 1.18p_t$$
$$(.549)\ (.659)\ (.107)\ (.124)$$

| | p-value |
|---|---|
| SupF＝229 | (.00) |
| MeanF＝34.0 | (.00) |
| Lc＝1.15 | (.01) |

パラメータの推計値、標準偏差（括弧内）は、Phillips and Hansen[1990]のFM推計法（Fully Modeified Estimate）により求めた。説明変数にトレンド項tが入っているのは、確定的共和分が成立していない可能性を考慮したためであり、トレンド項が有意であることから共和分が存在するならば確率共和分であることが判る。確定的共和分の場合には定数項のみが残り、3変数の線形結合は定数値回りの定常過程となる。ここでは3変数の線形の確定的トレンドは共和分ベクトルによって打ち消されず、線形トレンドとして残っている。確定的トレンドに構造変化がある場合には、このトレンド項のパラメータが変化するため共和分ベクトルが安定的でもモデルの安定性は得られない。

どの検定統計量のp-valueも、モデル全体のパラメータの安定性が高い有意水準で棄却されることを示している。ただし、安定性が棄却された原因は確定的トレンドの構造変化によるものなのか、共和分ベクトルの変化によるものなのかは特定できない。そこで、途中までのサンプル期間について逐次求めたF値についてSupF、MeanFをみてみよう。図9-1に示されたF値とMeanFの推移とSupF、MeanFの1％有意水準から、1970年代前半と1980年前後に不安定性が高まっていることが判る。これらは、図7・8でみたGDPデフレーターや名目M1残高、あるいは副島[1994]が指摘した実質GDPの趨勢の変化点に一致している。そこで次に、確定的トレンドの構造変化点を1972年第2四半期、1980年第1四半期と想定してサンプル期間を3分割し同様な検定を繰り返したところ、1970年代を除く前後の2期間においては不安定仮説は棄却されなかった（図9-2）。[22] これらの結果から、フルサンプルでのモデルの不安定性

22) サブサンプル期間（1955年第2四半期～1972年第2四半期）については、トレンド項の有意水準が低く、確定的共和分が成立している可能性が高いため、Fully Modified Estimateにはトレンド項を含めなかった。

図9-1　F値、MeanF

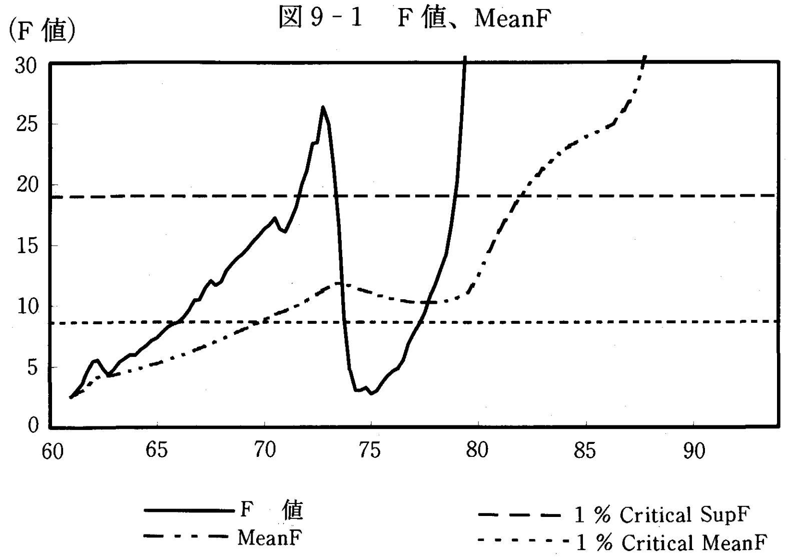
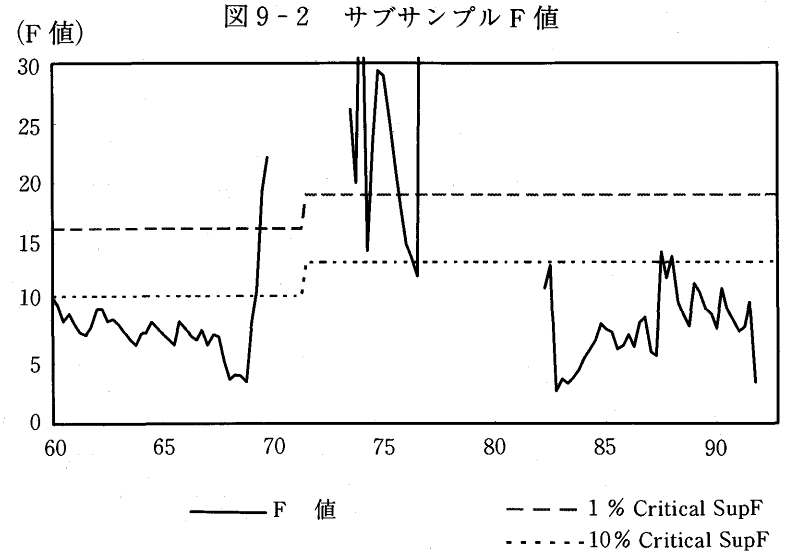



図9-2　サブサンプルF値




は、全期間に一様な線形の確定的トレンドを当てはめたモデルの定式化の誤りに起因していると考えられる。また、サブサンプルテストで1970年代に安定性が得られなかった理由の一つとして、名目M1残高、GDPデフレーターの確定的トレンドに線形のトレンドを想定した点が不適切であったことが考えられる。

### (3) 金利を共和分に含めた場合の問題：確定的共和分の誤用

次に、確定的共和分を通貨需要関数に適用する場合の問題点を指摘する。確定的共和分の前提は、共和分ベクトルの比率と確定的トレンドの比率が等しいという厳しい条件であった。にもかかわらず、通貨需要関数の実証分析では無条件に確定的共和分を用いているものが少なくない。とくに、金利のような確定的トレンドを持っていない（もしくは他変数の確定的トレンドに比べ勾配が小さい）変数を共和分モデルに含めた場合、確定的共和分は維持仮説として極めて不適切であり確率共和分を用いらねばならない。典型的な誤用例を以下に示す。簡単化のために、確定的トレンドは線形で構造変化を含まないトレンドとし、貨幣錯覚はないとみなして被説明変数に実質通貨残高を用いる。すなわち、実質通貨残高の対数値$m/p$、実質GDPの対数値$y$、金利$r$について、次の通貨需要関数を考える。

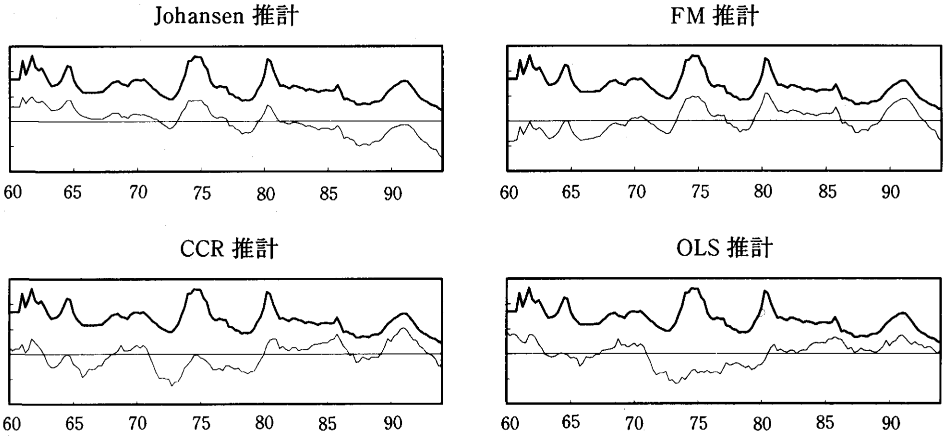
$$m/p = \alpha y + \beta r$$

各変数は確定的トレンドと確率トレンドから構成され、各々$D_i$, $S_i$（$i=m/p, y, r$）で表されるとする。$S_{m/p}-\alpha^* S_y-\beta^* S_r$が定常過程となる（$\alpha^*, \beta^*$）が存在し、かつ、$D_{m/p}-\alpha^* D_y-\beta^* D_r$が定数値であれば確定的共和分が成立する。真のモデルにおいて確定的共和分が成立している場合には、従来の共和分ベクトルの推計法により正しく（$\alpha^*, \beta^*$）が求められる。一方、確率共和分しか成立しない場合に同様な推計によって得られた（$\alpha, \beta$）は、確定的トレンドの線形結合を定数とするベクトルである可能性が高く、真の共和分ベクトルを正しく推計しない。これは、成長変数においては$D_i$, が$S_i$より大きく、推計値を求める際に必要となる各変数の二乗和では、$\sum y^2=\sum D_y^2$が近似的に成立しているからである。このとき、推計された（$\alpha, \beta$）による確率トレンドの線形結合$S_{m/p}-\alpha S_y-\beta S_r$においては、$D_i$における傾きの差から$\beta$が真の$\beta^*$より大きくなっている。このため、得られた誤差修正項は$S_r$の変動を強く反映した挙動を示す。図10は、確定的共和分を前提とした4タイプの推計法による上記通貨需要関数の誤差修正項と金利の変動を示したものである。推計法は、Johansenの最尤推計法、ParkのCCR推計法、Phillips and HansenのFM法、Engle and GrangerのOLS推計法である。金利にはコールレート（月中平均値の四半期平均）を用いている。いずれのグラフにおいても、誤差修正項の変動は、上方に太線で示された金利の変動と連動している傾向が強く窺われ、上の指摘を裏付けている。[23)、24)]

23) 金利を含む通貨需要関数へ共和分を適用した場合、誤差修正項が金利の変動とパラレルになる傾向があることは、創価大学馬場善久教授より示唆を得た。

24) Johansenの推計法では3変数モデルにおいて共和分が2つ存在し、図示したのはうち一方の共和分ベクトルによる誤差修正項である。

図10　誤差修正項と金利の変動



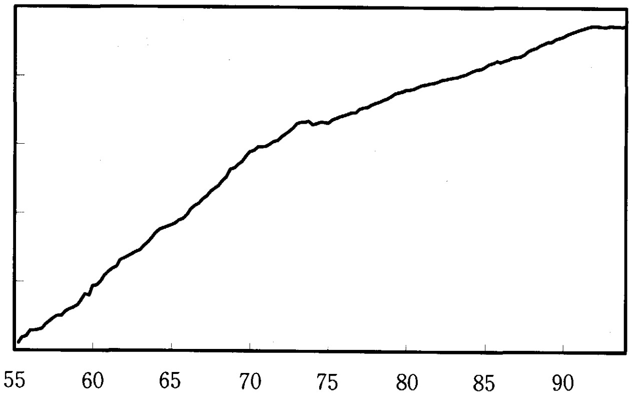

## 5. 構造変化を含む単位根・共和分検定

4.では、確定的トレンドに構造変化を含まない時系列モデルが維持仮説として不適切である例を示した。ここでは、確定的トレンドの構造変化を考慮したモデルを、実質GDP、名目M1残高、GDPデフレーターについて適用する。最初に、これらの変数が確率トレンドを含むか否かについて、単変数時系列モデルによる定常・非定常性の検定を行う。4.(1)や補論1に示した同モデルは、従来の構造変化のパターンより複雑な、2次曲線を含む確定的トレンドを用いた点が特徴である。次に、共和分の検定を考える。国友[1995]は構造変化を含む確定的共和分の検定法を考案しているが、ここで扱った確定的トレンドは変化のパターンや時期に相違がありすべて一次独立である。したがって確率共和分が検定の対象となる。そこで、確定的トレンドを除去した確率過程を求め、これらの特性を検証する。

### (1) 定常・非定常性の検定

まず、確定的トレンドの構造変化を仮定した単変数時系列モデルに対し、単位根検定を行う。図11に示した実質GDPの対数値時系列をみると、高度成長期と安定成長期で成長趨勢に屈折が観察される。小原[1994]や副島[1994]では、直線のタイムトレンドの屈折を含む検定を同様な成長趨勢をもつマクロ変数に試み、単位根仮説に否定的な結論を示している。もっとも、これらはPerron[1989]と同様、確定的トレンド項の係数のゼロ制約を検定していない不十分なものであった。国友[1995]では、さまざまな確定的トレンドを表現できる汎用性が高い多変量時系列モデルで共和分の検定方法が提唱されたが、この検定法が単変数時系列モデルでは単位根の検定に応用でき

図11　実質GDP対数値の推移




ることも示されている（補論2.(4)参照）。以下ではこの検定法を用いて分析を試みる。

まず、直線の確定的トレンドが一度屈折している実質GDPを表現する単変数時系列モデルについて、国友[1995]の追試を行った。25) 検定する帰無仮説は、「ドリフト項が変化する非定常過程」である。26)

データは季調済計数を用い、推計期間は1957年第3四半期から1994年第1四半期である。27) 屈折が生じた時期については、1960年第1四半期から1979年第4四半期までを想定した。検定統計量 $LR_2$ の極限分布は、Kunitomo and Sato[1995]が与えており、表1-1に示した。屈折が全期間のどの時期に生じているかによって $LR_2$ の漸近分布は異なり、全期間を10%ごとに刻んで $\delta=0.1,\cdots,0.9$ について求められている。28)

図12は、自己回帰のラグの長さを5期とした場合の屈折時期別の検定統計量と、90%、95%分布点（階段状の点線）を示したものであり、屈折時期をいつに設定する

25)　自己回帰ラグの最大値の差により、サンプル期間に半年の差がある。

26)　すなわち、補論1のモデルに則して書けば、

$$\Delta y_t=\gamma_0+\gamma_1+DU(t)+\gamma_2 t+\gamma_3 DT(t)+\beta y_{t-1}+\sum_{i=1}^{p}\beta_i\Delta y_{t-i}+\nu_t$$

帰無仮説：　$\beta=\gamma_2=\gamma_3=0$

対立仮説：　$-2<\beta<0$、$(\gamma_2、\gamma_3)\neq(0、0)$

となる。

27)　自己回帰ラグは最大9期をとっているため、データ自体は1955年第2四半期から使用している。

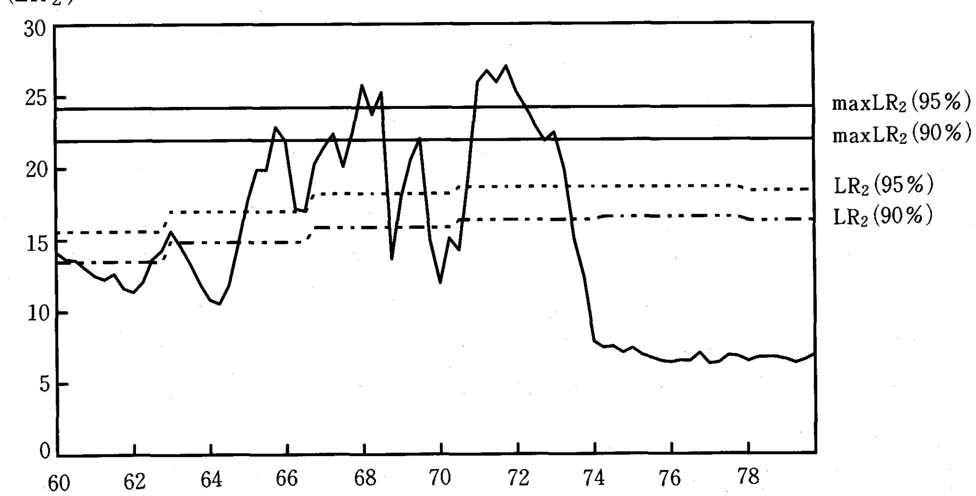
28)　$LR_2$ は尤度比検定統計量であり、確定的トレンドの設定、多変量時系列モデルの変数の数、屈折の数、時期によって漸近分布が異なる。補論2.(3)の表現を用いると、確定的トレンドが例1の設定(ex 1)で、変数の数 $G_0$ が1つ、屈折の数 $q$ が1つであることから、ここでの検定統計量 $LR_2$ は $LR_2(ex1, G_0=1, q=1, \delta)$ と表せる。$\delta$ は屈折の相対時期(＝屈折期:$TB$／全期間:$T$)を示す。なお、$\max LR_2$ は $\delta$ によらないため、ここでは $\max LR_2(ex1, G_0=1, q=1)$ となる。

(表1-1) $LR_2$の漸近分布表

| $\delta$=TB/T | 1% | 2.5% | 5% | 10% | 50% | 90% | 95% | 97.5% | 99% | mean | s.d |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 2.12 | 2.65 | 3.12 | 3.87 | 7.50 | 13.48 | 15.56 | 17.82 | 20.20 | 8.17 | 3.89 |
| 0.2 | 2.68 | 3.18 | 3.80 | 4.56 | 8.55 | 14.83 | 16.96 | 18.80 | 21.17 | 9.21 | 4.13 |
| 0.3 | 3.18 | 3.74 | 4.47 | 5.35 | 9.53 | 15.84 | 18.21 | 20.35 | 23.02 | 10.19 | 4.26 |
| 0.4 | 3.76 | 4.45 | 5.11 | 5.94 | 10.00 | 16.36 | 18.67 | 20.77 | 23.55 | 10.70 | 4.24 |
| 0.5 | 3.96 | 4.57 | 5.20 | 6.06 | 10.21 | 16.56 | 18.66 | 20.67 | 22.96 | 10.84 | 4.16 |
| 0.6 | 3.72 | 4.31 | 5.03 | 5.86 | 10.11 | 16.30 | 18.39 | 20.65 | 22.91 | 10.71 | 4.17 |
| 0.7 | 3.17 | 3.82 | 4.45 | 5.24 | 9.33 | 15.74 | 17.85 | 20.05 | 22.92 | 10.04 | 4.21 |
| 0.8 | 2.59 | 3.20 | 3.83 | 4.58 | 8.55 | 14.79 | 16.92 | 19.30 | 21.93 | 9.23 | 4.16 |
| 0.9 | 2.11 | 2.70 | 3.17 | 3.82 | 7.45 | 13.26 | 15.43 | 17.52 | 19.86 | 8.11 | 3.83 |

(注) Kunitomo and Sato[1995]より引用。

図12　検定統計量$LR_2$と90%，95%分布点




かによって検定結果が左右されることが判る。1965年から1969年頃、あるいは1971年から1973年頃にタイムトレンドの屈折があったとすると、単位根仮説は10%の有意水準で棄却されるが、その他の期間では棄却されない。この傾向はラグの長さにかかわらず観察された。29)

確定的トレンドが屈折している場合、屈折を考慮しないモデルによる検定では、単位根仮説が棄却されにくくなる。同様に、屈折時期を前提としたモデルによる検定も屈折時期の選択を誤ると、単位根仮説は棄却されにくくなる。したがって、屈折時期を未知とする検定を行うほうが望ましい。Kunitomo and Sato[1994]では、$LR_2$の最大

29) ラグの長さを1や2とした場合には、棄却される期間がラグ5の場合よりやや広がっている。

（表１－２） $\max LR_2$ の漸近分布表

| | 1% | 5% | 10% | 50% | 90% | 95% | 99% | mean | s.d |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\max LR_2$ | 9.37 | 10.77 | 11.79 | 16.01 | 21.93 | 24.19 | 28.39 | 16.47 | 4.08 |

（注） Kunitomo and Sato [1995] より引用。

値 $\max LR_2$ について、屈折時期を固定しない場合の極限分布を求めている（表１－２）。これを用いて屈折点の選択に依存しない検定を行った。$\max LR_2$ は、すべての屈折時期について検定統計量がとりうる最大値を考えたものであるため、その極限分布の有意水準は $LR_2$ より高くなる。$LR_2$ の最大値は $\max LR_2$ の95%分布点を上回っており、同検定によっても単位根仮説は棄却され、実質 GDP は定常過程と判断される。この結果は、国友[1995]の実証結果と一致している。

従来の研究では、実質 GDP は非定常過程と判断され、エラーコレクション・モデルなどに用いられてきたが、本論文の実証結果ではタイムトレンドの構造変化を考慮すれば定常過程と判断される。したがって、実質 GDP は、長期的な成長率の回りを短・中期的な景気循環によって変動していると考えられる。

次に、Ｍ１残高と GDP デフレーターに対し、4.(1)で考察した確定的トレンドの変化を前提として単位根検定を試みた。[30] 実質 GDP の検定と同様に、構造変化点 $TB_1$、$TB_2$ の時期設定によって統計量の漸近分布が異なるため、変化点を未知とする検定を行う。構造変化点が真の変化点に近いほど検定統計量は大きくなる。逆に、変化点選択の誤りが大きいほど検定統計量は小さくなり、単位根仮説を支持しやすくなる。変化点選択の誤りによる検定のバイアスを防ぐために、最初の変化点 $TB_1$ を1961年第1四半期から1974年第4四半期に、２度目の変化点 $TB_2$ を1978年第1四半期から1982年第4四半期と幅を持たせた。

各々の変化点の組み合わせについて、ラグの長さを５期とした場合の検定統計量 $LR_2$ を図13－１に示した。$\max LR_2$ の極限分布は表２のとおりである。[31] GDP デフレーターは、最初の変化点を1970年から1971年前半か1973年半ばとした場合に検定統計量が高くなり、２度目の変化点については選択した期間の後半部とした場合に高くなる傾向がある。検定統計量は、多くの変化点の組み合わせについて97.5%点を超えており、単位根仮説は2.5%有意水準で棄却された。一方、Ｍ１残高については、最初の変化点を1972年第2四半期とした場合に検定統計量が最も高くなるが、２度目の変化

30） 確定的トレンドに２次曲線を含む時系列モデルの表現は、補論1.を参照。ここでの仮説検定に用いたモデルは、補論1.(A-5)に示した。

31） ここでの検定統計量 $LR_2$ は、補論2.(3)の例２のモデルに基づいており、$LR_2(ex2;\ G_0=1,)$ と表現される。これは $LR_2(ex1;\ G_0=1, q=1, \delta_i)$ とは異なる極限分布に従う。なお、$\delta_i$ は構造変化の相対的な時期（$TB_1/T$、$TB_2/T$）である。

図13−1　ＧＤＰデフレーターの検定統計量

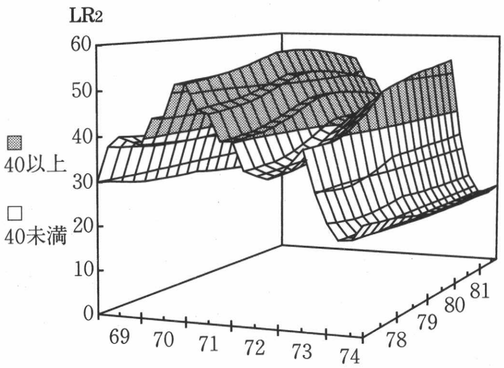



図13−2　Ｍ１残高の検定統計量

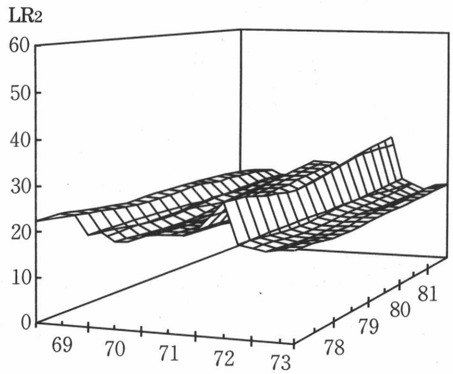
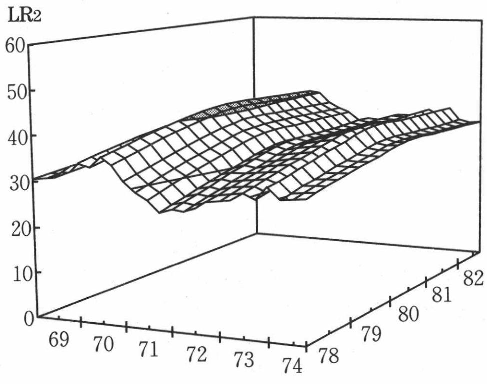



図13−3　名目ＧＤＰの検定統計量




（表２）$maxLR_2$ の漸近分布表

| | 1% | 5% | 10% | 50% | 90% | 95% | 99% | mean | s.d |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $maxLR_2$ | 14.47 | 16.51 | 17.72 | 22.77 | 29.96 | 32.53 | 37.57 | 23.41 | 4.98 |

(注) Kunitomo and Sato [1995] より引用。表１-２の $maxLR_2$ の漸近分布とは異なる。

点をどの時期にとっても単位根仮説は10%有意水準で棄却されなかった（図13-２)。この結果はラグの長さに依存せず確認された。

実質 GDP および GDP デフレーターの対数値が確定的トレンド回りに定常であるため、前者の構造変化点と後者の一度目の構造変化点が同じであれは、両者の和となる名目 GDP の対数値は GDP デフレーターと同様な確定的トレンドをもつモデルによって表され、しかもトレンド定常過程となるはずである。図13-３は名目 GDP に同じ検定を試みたものであり、やはり、単位根仮説は2.5%有意水準で棄却された。

### (2)　検定結果の解釈と確定的トレンドの設定

M１残高は構造変化を考慮した場合でもなお単位根仮説は棄却されなかったが、従来の検定で非定常過程と判断されてきた実質 GDP や、GDP デフレーターは、構造変化を想定した場合、トレンド回りの定常過程であると判断された。したがって、2.でみた通貨需要関数の長期的均衡状態を共和分の関係から求めることはできないことになる。先行研究では、これらの変数が非定常過程であり、共和分の検定から３変数間もしくは金利を含めた４変数間に共和分が１つ存在し、その共和分ベクトルをもって長期均衡式のパラメーターとしているものが多いが、これは、構造変化の扱いが適当でないというモデルの定式化の誤りに依存している可能性があり、本論文の分析結果もこのことを示唆している。

ここでの分析結果によれば、生産・物価変数が構造変化を含む確定的トレンドで示される長期的な成長経路の回りを安定的に変動しているのに対し、通貨残高は確率トレンドを含み長期的な成長経路の回りを不安定に推移している可能性がある。3.でみたように定常・非定常変数間には安定的な関係は見い出せないため、確定的トレンド回りの変動に関する３変数間の不安定性が通貨需要関数の不安定性を示していると考えることができる。

しかし、ここで選択した２タイプの確定的トレンドは、データの変動パターンや経済成長に関する一般常識に基づいて恣意的に設定したものであることに留意せねばならない。時系列変数を確定的な部分と確率的に変動する部分とに分ける場合、前者はモデルの外から外生的に与えられ、その理由付けはモデルの作成者の裁量による。したがって、確定的トレンドの導入やその複雑化の恣意性には十分留意すべきであり、また、検定する仮説には構造変化の有無に関するパラメータが含まれないほうが望ましい。[32] そもそも、確定的トレンドの構造変化は、外生性という性質に注目すれば確率トレンドを形成する連続した外生ショックと同質なものであり、構造変化を多数導

---

32)　単位根検定を行った帰無仮説 $H_0$、対立仮説 $H_1$（補論1.参照）には、構造変化の有無に関するパラメータ $\alpha_1$, $\alpha_2$ は含まれていない。

入したことによる確率過程部の定常化は、そもそも確率過程が非定常であることに等しい。ここでの結論はあくまで確定的トレンドの妥当性を前提にしたものである。

### (3) 抽出した確率過程の性質

国友[1995]の共和分検定は、確定的トレンドの構造変化を多変量モデルで初めて扱うものであったが、確率トレンドを定常化する共和分ベクトルの個数の検定と確定的トレンドの線形結合を定数値とするベクトルの個数の検定が分離されていないという問題を残している。[33] このため、確率共和分を明示的に扱うことができない。前述の単変数モデルでは異なる2つのタイプの確定的トレンドを用い、また構造変化の時点も異なるため、これらはすべて一次独立である。このようなケースで仮に時系列変数が非定常過程であれば、存在しうる共和分は確率共和分に限定される。そこで、単変数モデルで採用した確定的トレンドを用いて確率過程を抽出し、これらの間の共和分関係を検証する方法が考えられる。

図14は、各変数を確定的トレンドに回帰した残差項であり、平均値ゼロ回りの確率過程を表している。[34]、[35] 確定的トレンドの構造変化点は、単位根の検定において非定常仮説を棄却する傾向が最も強い時点を選択し、計測期間はコールレートが1960年第1四半期から1994年第1四半期、その他は1955年第2四半期から1994年第1四半期とした。コールレートの確率トレンドには線形で構造変化がないものを適用している。M1残高とGDPデフレーターでは、1972、1973年の構造変化点においてスパイクが現れており、適用した確定的トレンドが残差項に大きな変動を作り出している。しか

33) 補論2.(3)の仮説 $H_5$ 参照。確率共和分を国友[1995]のモデルで扱う場合、次のような仮説の考察が可能である。

$$H: \mathrm{rank}(\mathbf{B}^*) = r, \quad \mathrm{rank}(\boldsymbol{\Gamma}_2) = r'$$

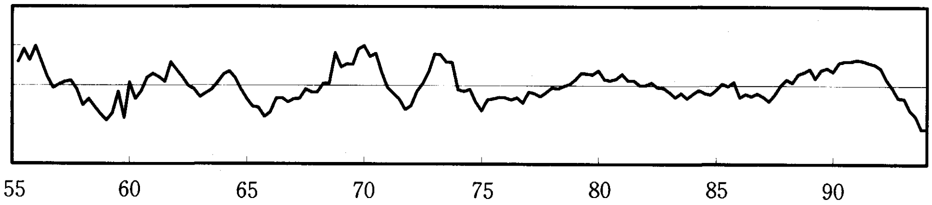
ただし、$\mathbf{B}^*$ は多変量時系列モデルを誤差修正表現型に書き直した場合の誤差修正項係数行列であり、$\boldsymbol{\Gamma}_2$ は外生変数ベクトルの係数行列である。

34) 確率過程が、単位根過程かもしくは1に近い特性方程式の根を持つAR過程である場合、確定的トレンドのパラメータ推定はOLSより望ましい方法がある。Canjels and Watson[1994]は、OLS、階差変換、4種類のGLS推計法を比較し、GLSの一種であるPrais-Winstern推計法が望ましいとしている。ここでは、前述の単位根検定の結果が定常性を示していることから簡便なOLSを用いた。

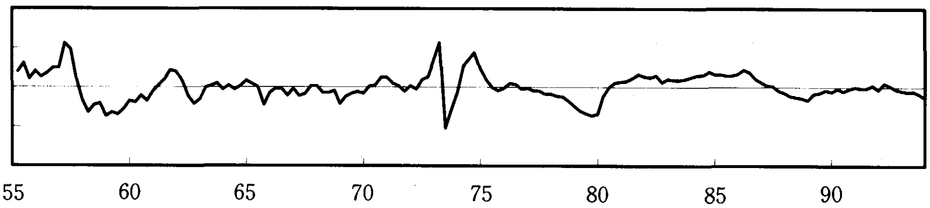
35) 1変数をトレンド部と循環部に分離する他の方法として、景気循環論でよく用いられるフィルター法がある。代表的なものにHP(Hodrick=Prescott)フィルターがあげられる。いずれも、トレンド部を確定的とみなさない点でBox=Jenkins流の時系列分析とは異なり、したがって構造変化を外生的に与える必要がないが、循環部に不要な変動を作り出すなどの欠点が知られている。同じデータにHPフィルターをかけたところ、トレンド回りの変動は非常に類似した形状を示したほか、分散が小さくなる傾向があった。

図14 分離した確率過程

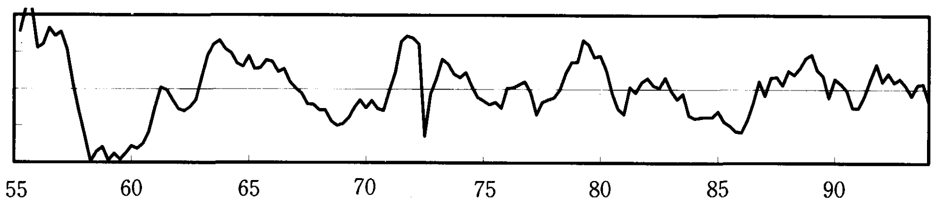
実質 GDP



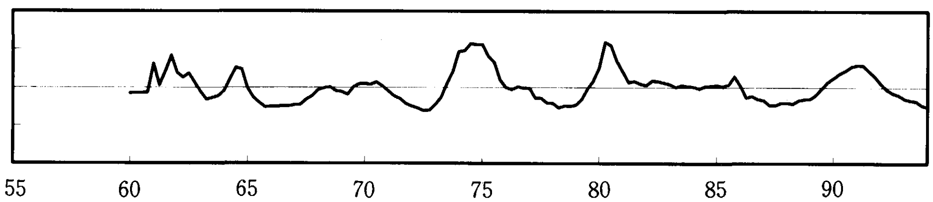

GDP デフレーター




M1残高




コールレート



(表3) 確率過程のモーメントと自己相関

| | モーメント | | | 自己相関 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 標準偏差 | 歪度 | 尖度 | (-1) | (-2) | (-3) | (-4) | (-5) | (-6) |
| 実質 GDP | 0.0213 | 0.0988 | -0.120 | 0.827 | 0.677 | 0.493 | 0.296 | 0.121 | -0.033 |
| GDP デフレーター | 0.0171 | 0.258 | 1.38 | 0.711 | 0.448 | 0.256 | 0.169 | 0.160 | 0.150 |
| M 1 残高 | 0.0415 | -0.0369 | 0.089 | 0.870 | 0.712 | 0.550 | 0.411 | 0.311 | 0.215 |
| call rate | 0.0194 | 0.995 | 1.12 | 0.886 | 0.718 | 0.518 | 0.287 | 0.082 | -0.079 |

(表4) 確率過程の単位根検定

| | ADFtest | | | | | PPtest | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ラグ次数 | $l=0$ | $l=1$ | $l=2$ | $l=3$ | $l=4$ | $l=0$ | $l=1$ | $l=2$ | $l=3$ | $l=4$ |
| 実質 GDP | -2.90 | -2.63 | -3.52 | -4.29 | -4.53 | -2.93 | -2.89 | -3.14 | -3.35 | -3.49 |
| GDP デフレーター | -5.66 | -5.98 | -5.73 | -4.98 | -4.48 | -5.77 | -5.93 | -6.01 | -6.00 | -5.99 |
| M 1 残高 | -3.44 | -3.88 | -4.29 | -4.26 | -3.71 | -3.25 | -3.40 | -3.53 | -3.56 | -3.51 |
| call rate | -2.65 | -3.70 | -4.36 | -5.32 | -4.67 | -2.74 | -3.12 | -3.38 | -3.60 | -3.68 |

(注) 1%, 5%有意水準は ADFtest が-2.60, -1.95, PPtest が-2.58, -1.95 (Fuller の $\tau$ 分布より)

し、趨勢が変化している時系列データに対して構造変化を考慮しないモデルを適用した場合に作り出されてしまう不要な変動に比べれば、その影響は遥かに短期間かつ軽微である。表3は、これらの標準偏差等モーメントと自己相関である。標準偏差は、M1残高が他の変数に比べ大きく、共和分が成立するならば、共和分ベクトルはM1残高の係数が相対的に小さくなっているはずである。従来の確定的共和分の推計では、実質 GDP、実質M1残高の水準がほぼ等しかったため、$(\ln Y, \ln M, \ln P) = (1:-1:1)$ に近い共和分ベクトルが推計されているが、上記の結果から確定的トレンドの比率に影響されている可能性が強いことが示唆される。このほか、物価や金利の尖度からこれらの変数はトレンドから乖離している時間がトレンド近傍にいる時間より相対的に長いことが判る。

分離された確率過程が非定常過程であれば、確率共和分を考えることができる。平均値ゼロ回りの確率過程であるため、既存の単位根検定で最も代表的な ADF テストと PP テストを試みた（表4）。結果は、いずれのテストも AR モデルのラグ次数によらず非定常仮説を棄却するものであり、実質 GDP、GDPデフレーターについては、5.(1)の検定結果と一致している。一方、M1残高は5.(1)の検定では非定常過程が棄却されなかったのに対し、確率過程の分離検定方法では棄却されている。この原因としては、2段階の推計となる確率過程の分離推計手法の問題や5.(1)で用いた構造変化を

含む検定のサイズ、パワーに関する信頼性が考えられる。[36]いずれにせよ、従来、共和分の関係で捉えられてきた非定常過程が、確定的トレンドの単純化によりもたらされた性質であることが示された。

## 6. おわりに

本論文では、マネーサプライ・ターゲティングの前提条件となる生産、通貨残高、物価間の安定的関係を考察するため、通貨需要関数に共和分を用いる手法の妥当性について検討を行った。その際、従来の時系列モデルでは、現実のデータが示す構造変化の可能性を考慮していないため、分析結果の信頼性に問題があることを指摘し、新たにより複雑な構造変化を表現できる時系列モデルを用いて単位根の検定を行った。その結果は、これまで非定常変数とみなされてきた変数が実は定常変数である可能性を示唆するものであり、エラーコレクション・モデルを用いた通貨需要関数の実証分析に疑問を投げかけることとなった。したがって、通貨需要関数の不安定さは、共和分によって長期的な安定関係を捉えようとした変数間に定常変数と非定常変数が混在していることによっていると考えることができる。

実質 GDP や名目 GDP が、長期的な成長率を一定とする確定的トレンドや、1970年代の一部に曲線を含む確定的トレンドの回りの定常過程で捉えることができるのに対し、M１残高が非定常な変動を示しその変動幅も大きいのはどの様な理由によるのだろうか。この点について、通貨の流通速度の不安定さを考察した研究から、いくつかの仮説が提示されている。例えば、Borod and Jonung [1987] は、金融仲介業にフィナンシャル・イノベーションが起こり、単位取引量あたりに必要な通貨量が減少したり、現金による決済から広義通貨を介在した決済手段にシフトが生じたりする現象が、通貨の流通速度を変化させる要因になりうることを指摘している。また、定期性預金など金融資産としての側面が強い通貨の成長は、経済の成長速度以外に、金融制度の変遷や直接金融の隆盛、人口構成の変化などで金融資産の構成が漸次変化していくことからも影響されるため、長期的にみても名目 GDP の成長とパラレルであるとは限らない。こうした現象が一定の速度でなく確率的にランダムに生じると、実体経済と通貨量の関係は不安定なものとなろう。両者の関係が不安定であることを前提とした場合のマネーの位置付けについては、今後の研究課題としたい。

36) ここでは、想定した確定的トレンドが真のモデルであることを前提に抽出した確率過程の定常性テストを行っている。この前提が成立しない場合には、独立した確率過程を対象とするADF テスト等の定常性検定は利用できず、小原 [1994] に示されたような検定統計量分布の修正が必要となる。

## 補論1.　構造変化を含む時系列モデルの定式化

ここでは、3.(3)でみた構造変化を含む変数を表現できる時系列モデルを考える。まず、図 A-1のような $TB_1$期、$TB_2$期に構造変化を含む確定的トレンドを、ダミー変数、$DT_{it}$、$QT_{it}$ $(i=1,2)$ を用いて(A-1)で表す。これを用いてトレンド回りに定常な時系列モデルが(A-2)で表せる。

(A-1)
$$f(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+(\alpha_2-\alpha_1)DT_{1t}+\alpha_3(QT_{1t}-QT_{2t})$$

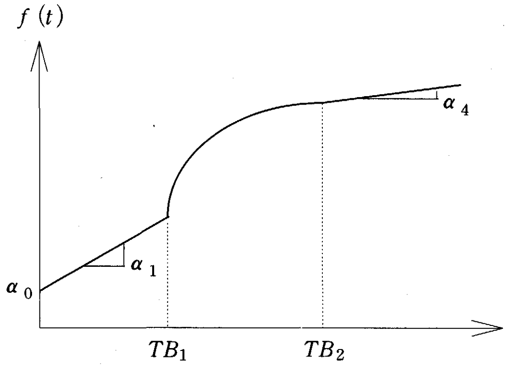
$$DT_{it}=\begin{cases}0 & t\leq TB_i\\ t-TB_i & t>TB_i\end{cases}\qquad QT_{it}=\begin{cases}0 & t\leq TB_i\\ (t-TB_i)^2 & t>TB_i\end{cases}$$

(A-2)
$$\theta(L)(y_t-f(t))=\varepsilon_t$$

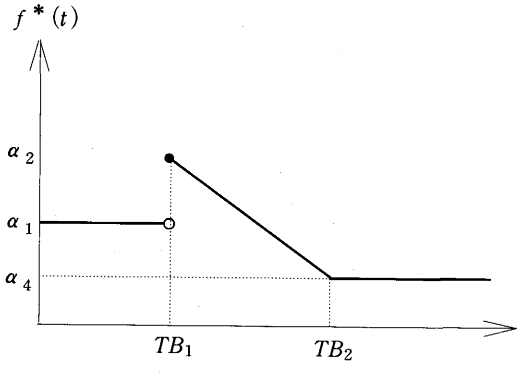
$\theta(L)$ は、AR モデルのラグ多項式であり、定常過程を示すため $\theta(L)=0$ の根の絶対値は 1 より大きいとする。

次に、(A-2)が単位根を持つ非定常過程である場合を示そう。$\theta(L)=0$ が $L=1$ の根を持つため、(A-2)は、$\theta^*(L)=(1-L)\cdot\theta(L)$ と置き換えることで階差定常モデル (A-3)に変換される。構造変化を考慮しない従来の時系列モデルでは、階差定常モデルにおけるドリフト項が全期間を通じて一定値とされてきたが、維持仮説として(A-2)を考える場合、ドリフト項は時間によって変化する関数となる。確定的トレンド $f(t)$ に対応するドリフト項は、図 A-2 に示したような関数 $f^*(t)$ であり、これは(A-4)によって表せる。

図A-1　確定的トレンド $f(t)$




図A-2　ドリフト項 $f(t)^*$




(注)　$\alpha_4=\alpha_2+2\alpha_3(TB_2-TB_1)$

(A-3) $$\theta^*(L)\Delta y_t = f(t)^* + \varepsilon_t$$

(A-4) $$f^*(t) = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)DU_{1t} + 2\alpha_3(DT_{1t} - DT_{2t})$$

$$DU_{it} = \begin{cases} 0 & t \leq TB_i \\ 1 & t > TB_i \end{cases}$$

検定のために、トレンド定常過程(A-2)と階差定常過程(A-3)を内包する時系列モデルを(A-5)で表す。

(A-5) $$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 DU_t + \alpha_2(DT_{1t} - DT_{2t}) + \alpha_3 DT_{2t} + \alpha_4 t + \alpha_5(QT_{1t} - QT_{2t}) + \beta y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \Delta y_{t-i} + \nu_t$$

このモデル下で、単位根仮説、トレンド定常仮説はそれぞれ以下の $H_0$、$H_1$ で表現される。

$$H_0: \beta = 1、(\alpha_3、\alpha_4、\alpha_5) = (0、0、0)$$
$$H_1: -1 < \beta < 1、(\alpha_3、\alpha_4、\alpha_5) \neq (0、0、0)$$

比較のため、Dicky and Fuller [1979] と Perron [1989] の3タイプのモデルにおける確定的トレンドとドリフト項を図A3-1～4に、また、米国のGDPデフレーターに(A-1)、(A-4)を適用したケースを図A3-5に示した。

## 補論2.　構造変化を含む共和分検定

ここでは、多変量時系列モデルの外生変数を一般化し、確定的トレンドの構造変換の扱いに汎用性を持たせた Kunitomo [1992]、国友 [1995] の共和分検定方法を紹介する。単変数の場合、この共和分検定は単位根の検定にも応用でき、本論文の検定もこの手法によった。

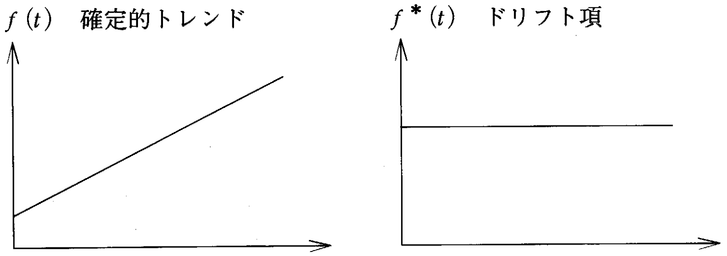
### (1)　多変量時系列モデルにおける単位根仮説と共和分仮説

Kunitomo [1992] では、$G$ 次元ベクトル $\boldsymbol{y}_t$ の多変量時系列モデルに外生変数ベクトル $\boldsymbol{z}^*_t$ を含む次のモデルから出発する。

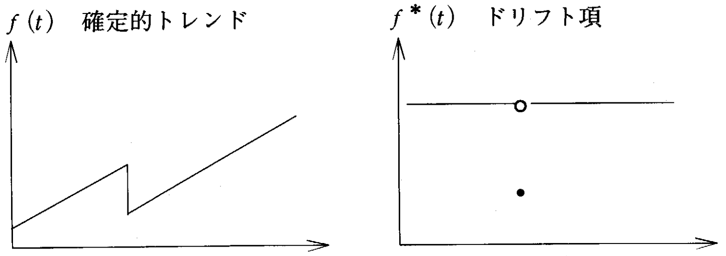
(B-1) $$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{z}^*_t + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{y}_{t-1} + \cdots\cdots + \mathbf{A}_p \boldsymbol{y}_{t-p} + \boldsymbol{v}_t$$

$\boldsymbol{z}^*_t$ は $K^* \times 1$ の外生変数ベクトル、$\boldsymbol{\Gamma}$ は $G \times K^*$ 係数行列、$\mathbf{A}_i$ は $G \times G$ 係数行列、$\boldsymbol{v}_t$ は $G \times 1$ の誤差項ベクトルである。$\boldsymbol{y}_t$ の $G$ 個の変数は、定常変数かもしくは単位根をもつ非定常過程であり、発散する非定常過程は含まないとする。これは、(B-1)の自己回帰部分の固有方程式についてすべての根が絶対値で1以下であることを仮定す

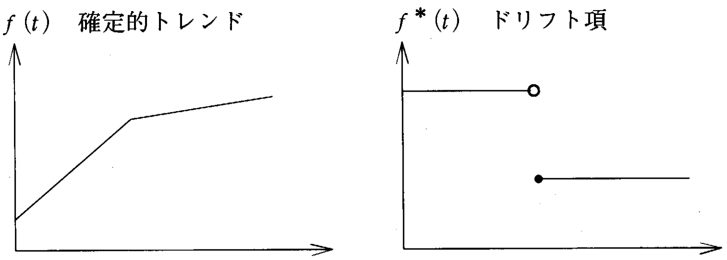
図A-3-1　ディッキー＝フューラーのモデル



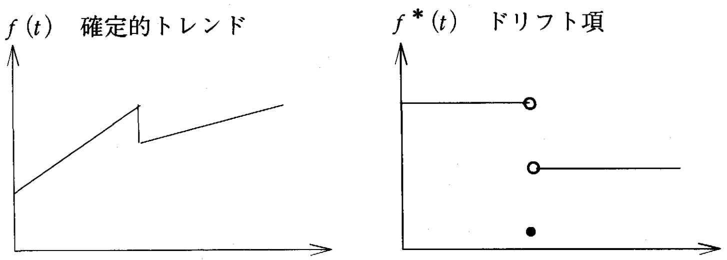

図A-3-2　ペロンのモデル、タイプA：ジャンプ



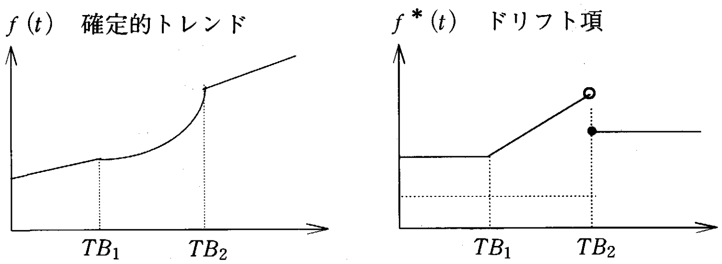

図A-3-3　ペロンのモデル、タイプB：屈折




図A-3-4　ペロンのモデル、タイプC：AとBの混合




図A-3-5　米国GDPデフレーター



るものである。すなわち固有方程式、

(B-2) $$\left| \lambda^{p}\mathbf{I}_G - \sum_{i=1}^{p} \lambda^{p-i}\mathbf{A}_i \right| = 0$$

について、すべての固有値$\lambda_i(i=1,\cdots,pG)$ が$|\lambda_i| \leqq 1$を満たす。
このモデルではさまざまなタイムトレンドを外生変数によって表現できる利点がある。まず単位根仮説を表すために、次のように書き換えよう。

(B-3) $$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{z}^*_t + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{y}_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \mathbf{B}_i \Delta \boldsymbol{y}_{t-(i-1)} + \boldsymbol{v}_t$$

$\Delta$は階差オペレーターで、係数行列$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_j$は以下で与えられる。

$$\mathbf{B}_1 = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{A}_i、\ \mathbf{B}_j = -\sum_{i=j}^{p} \mathbf{A}_i (j=2,\cdots,p)$$

(B-3)を用いて単位根仮説は次のように表せる。まず、外生変数ベクトルを$\boldsymbol{z}^{*\prime}_t=(\boldsymbol{z}^{*\prime}_{1t}、\boldsymbol{z}^{*\prime}_{2t})$ と2つのベクトルに分割し、$\mathbf{z}^{*\prime}_{1t}$、$\boldsymbol{z}^*_{2t}$はそれぞれ$K^*_1 \times 1$、$K^*_2 \times 1$ベクトルとする。対応する係数行列も、同様に$\boldsymbol{\Gamma}=(\boldsymbol{\Gamma}_1、\boldsymbol{\Gamma}_2)$ に分割する ($G \times K^*_1$、$G \times K^*_2$ベクトル)。この際、外生変数ベクトル$\boldsymbol{z}^*_{2t}$の構成要素を単位根仮説においてゼロ制約が掛かる変数となるよう分割すると、次の仮説$H_2$、

$$H_2 : \boldsymbol{\Gamma}_2 = 0、\mathbf{B}_1 = \mathbf{I}_G$$

によって単位根仮説が表現される。複雑なタイムトレンドでも、外生変数にダミー変数を用いることにより表現が可能となり、例えば(B-2)の単変量モデル($G=1$)では、$\boldsymbol{\Gamma}_2=(\alpha_3、\alpha_4、\alpha_5)$、$\mathbf{B}_1=\beta$とすると、$H_2$によって単位根仮説$H_0$が表現される。Dickey and Fuller [1979] の単位根仮説は、(B-3)の単変数モデルにおいて、$\boldsymbol{z}^*_{1t}$を定数項、$\boldsymbol{z}^*_{2t}$を直線のタイムトレンドとしたケースとみなせ、また、Perron [1989] のモデルの単位根仮説は、$\boldsymbol{z}^*_{1t}$に定数項と定数項ダミー、$\boldsymbol{z}^*_{2t}$に直線のタイムトレンドとそのダミーを持つケースとみなせる。

次に、共和分仮説について考えよう。まず、(B-3)より$\boldsymbol{y}_{t-1}$を辺々引いて(B-4)を得る。これは、Johansenの検定での多変量時系列モデルに一般化した外生変数を加えた表現になっている。

(B-4) $$\Delta \boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{z}^*_t + \mathbf{B}^* \boldsymbol{y}_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \mathbf{B}_i \Delta \boldsymbol{y}_{t-(i-1)} + \boldsymbol{v}_t$$

$\boldsymbol{y}_{t-1}$の係数行列$\mathbf{B}^*(=\mathbf{B}_1-\mathbf{I}_G)$について、その階数$\mathrm{rank}(\mathbf{B}^*)$ を$r$としよう。多変量時系列モデル(B-1)は、$r$がどの様な値をとるかで以下の3ケースに分けられる。

① $r=0$のとき、(B-1)は階差系列 $\{\Delta \boldsymbol{y}_t\}$ の多変量時系列モデルになる。

② $r=G$のとき、原系列 $\{\boldsymbol{y}_t\}$ は単位根を持たない定常過程である。

③　$0<r<G$ のとき、共和分が $r$ 個存在する。

Johansen [1988] が多変量時系列モデルにおける共和分の定式化を行うまでは、非定常変数を同モデルで扱う場合、一回の階差加工によって定常化できる変数（階差定常変数、I(1)変数）ならば、階差系列 $\{\Delta \boldsymbol{y}_t\}$ について時系列モデルを当てはめることが通常行われてきた。これは(B-4)において、第2項係数行列がゼロ行列、すなわち $\mathrm{rank}(\mathbf{B}^*)=r=0$ というケース（上記①）を仮定していることになる。ところが実際には、$\mathbf{B}^*$ はゼロ行列とは限らず、$r$ は0以上 $G$ 以下の値をとりうる。

このうち、$\mathbf{B}^*$ の行ベクトルがすべて一次独立である（$r=G$、上記②）ならば、(B-1)は単位根をもたないことが固有方程式を用いて示せる。[37] したがって、定常な変数に対し、(B-1)を推計モデルとして適用すればよい。残った③の場合がJohansenにより注目されたケースである。Johansen [1988] は、階差定常変数について(B-1)で外生変数を含まないモデルを考え、(B-4)のように変形したとき、左辺の $\Delta \boldsymbol{y}_t$ が定常であるため右辺第2項 $\mathbf{B}^* \boldsymbol{y}_{t-1}$ は定常化されていることに着目した。$\{\boldsymbol{y}_t\}$ の $G$ 個の非定常時系列について、ゼロ行列でない $\mathbf{B}^*$ によって線形結合されることで定常過程になるならば、Engle and Granger [1987] によって提案された共和分の関係が $\{\boldsymbol{y}_t\}$ の要素間に存在していることになる。このとき、$\mathbf{B}^*$ のランクは $G$ より小さくなる。[38] 以上より、タイムトレンドを含む外生変数を持たない多変量時系列モデルにおける共和分仮説は、次のように係数行列のランクで表現できることがわかる。[39]

$$H_3: \mathrm{rank}(\mathbf{B}^*)=r \qquad 0<r<G$$

Kunitomo [1992] は、Johansenとは異なる方法で仮説 $H_3$ で示される回帰係数行列のランクの検定統計量を考案した。これは、外生変数を定数項や直線のタイムトレンドからさらに複雑なものへ一般化していく場合に、仮説設定や検定統計量の計算、及び検定統計量の分布作成において汎用性が高いという特徴を持つ。そこで、次節で

---

37)　(B-1)の固有方程式について、

$$\mathbf{A}(\lambda)=\lambda^{p}\,\mathbf{I}_G-\sum_{i=1}^{p}\lambda^{p-i}\mathbf{A}_i$$

とおき、$\mathbf{B}^*$、$\mathbf{B}_j$ を用いて、これを次のように表せる。

$$\mathbf{A}(\lambda)=-\lambda^{p-1}\mathbf{B}^*+(\lambda-1)\left[\lambda^{p-1}\,\mathbf{I}_G-\sum_{i=2}^{p}\lambda^{p-(i-1)}\mathbf{B}_i\right]$$

根 $\lambda=1$ を代入すると、$|\mathbf{A}(\lambda)|=|-\mathbf{B}^*|\neq 0$ となり、$r$ が $G$ 以外のとき単位根は固有方程式の根にはなりえないことがわかる。

38)　$\{\boldsymbol{y}t\}$ の共和分関係を定常過程 $\{\varepsilon_t\}$ を用いて　$\mathbf{B}^*\boldsymbol{y}_t=\varepsilon_t$ と表すと、$\mathbf{B}^*$ は逆行列を持たないためフルランクでない。仮に、$\mathbf{B}^*$ が逆行列を持つと定常過程の線形結合 $\mathbf{B}^{*-1}\varepsilon_t$ は非定常過程 $\boldsymbol{y}_t$ となり矛盾する。

39)　正方行列 $\mathbf{B}^*$ のランクが落ちる場合、$\mathbf{B}^*=\alpha\beta'$ となるランク $r$ の $G\times r$ 行列 $\alpha$、$\beta$ が存在する。$\beta$ の $r$ 個の列ベクトルによる $\{\boldsymbol{y}_t\}$ の線形結合が定常過程となるため、共和分は $r$ 個存在する。

Kunitomo [1992] による回帰係数行列のランクの検定方法を示し、その後、この検定法を元にしてトレンドを含む外生変数を持つモデルにおける共和分仮説を表現し検定方法を考えた国友[1995]を説明する。

## (2) ランクの検定統計量

検定統計量を一般化した表現法で示すため、まず(B-4)を整理して次のように表す。

(B-5)
$$\Delta \boldsymbol{y}_t = \beta \boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{v}_t$$

$\boldsymbol{z}_t$ は $K\times 1$ の先決変数ベクトルで、$\boldsymbol{z}^*_t$、$\boldsymbol{y}_{t-1}$、$\Delta \boldsymbol{y}_{t-1}$、……$\Delta \boldsymbol{y}_{t-(p-1)}$ を含む。したがって、$K=K^*+G\times p$ である。係数行列 $\beta$ は $G\times K$ の行列である。

仮説設定のため、先決変数ベクトル $\boldsymbol{z}_t$ を $\boldsymbol{z}_{1t}$、$\boldsymbol{z}_{2t}$ の 2 つの先決変数ベクトル（$K_1\times 1$、$K_2\times 1$）に分け、対応する係数行列も $G\times K_1$、$G\times K_2$の係数行列、$\beta_1$、$\beta_2$ に分けよう。ここで、例えば、$H_3$で示した共和分仮説は、先決変数ベクトルを

$$\boldsymbol{z}_{2t}'=\boldsymbol{y}_{t-1}'、\boldsymbol{z}_{1t}'=（\boldsymbol{z}^{*\prime}_t、\Delta \boldsymbol{y}_{t-1}'、\cdots\cdots \Delta \boldsymbol{y}_{t-(p-1)}'）$$

としたとき、係数行列 $\beta_2$ が $\mathbf{B}^*$ に、$\beta_1$ が（$\boldsymbol{\Gamma}$、$\mathbf{B}_2$、……$\mathbf{B}_p$）に相当するため、$\beta_2$ のランクに関する仮説で表せる。次節では、タイムトレンドの構造変化を含む共和分仮説を表現するが、その前 $\beta_2$ にのランクに関する検定統計量を示しておく。多変量回帰における回帰係数のランク条件の検定統計量は、Anderson and Kunitomo [1992] で考察されており、Kunitomo [1992] はこれを用いたものである。検定統計量は、以下のような尤度比統計量で与えられる。[40)]

(B-6)
$$LR_1(G_0)=T\sum_{i=1}^{G_0}\log(1+\lambda_i{}^*)$$

$\lambda^*$ は固有方程式(B-7)の根から小さい順に $G_0$個までとったものである。固有方程式における $\mathbf{Y}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Z}_1$は $\{\boldsymbol{y}_t\}$、$\{\boldsymbol{z}_t\}$、$\{\boldsymbol{z}_{1t}\}$ の観測値行列（それぞれ $T\times G$、$T\times K$、$T\times K_1$行列）、$\mathbf{P}_Z$、$\mathbf{P}_{Z1}$ は、$\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'$、$\mathbf{Z}_1(\mathbf{Z}_1'\mathbf{Z}_1)^{-1}\mathbf{Z}_1'$で与えられる。[41)] また、$G_0$ はランク落ちの次数（$G-r$）とする。$\mathrm{LR}_1(\mathrm{G}_0)$、($G_0=1,\cdots\cdots G$) は、帰無仮説 $r=G-G_0$の対立仮説 $r=G$ に対する検定統計量である。[42)]

(B-7)
$$\left|\Delta \mathbf{Y}'(\mathbf{P}_z-\mathbf{P}_{z1})\Delta \mathbf{Y}-\lambda^*\Delta \mathbf{Y}'\bar{\mathbf{P}}_z\Delta \mathbf{Y}\right|=0$$

40) 尤度比統計量のほか、ラグランジュ乗数統計量やワルド統計量の導出も行っている。

41) $\mathbf{P}_z$ は行列 $\mathbf{Z}$ の列ベクトルが張る空間への射影作用素である。また、$\mathbf{Z}$ に対して直交する射影作用素は $\bar{\mathbf{P}}_z=\mathbf{I}_T-\mathbf{P}_z$ で与えられる。

42) このほか、帰無仮説 $r=G-q$ の対立仮説 $r=G-q+1$ に対する検定を考え、最大固有値 $\lambda_{G_0}$ を用いた検定統計量がある。

### (3) タイムトレンドと構造変化の扱い

多変量時系列モデルがタイムトレンドを含む外生変数を持つ場合、$H_3$のようなランクに関する仮説を即、共和分仮説とするには問題がある。例えば、外生変数ベクトル$\boldsymbol{z}^*_t$として定数項と直線のタイムトレンドを考えよう。$\boldsymbol{z}^*_t=(1、t)$としたとき、非定常変数がモデル（B-4）に含まれる場合、$\boldsymbol{z}^*_t$はランダムウォーク過程におけるドリフト項の役割を果たすため、$\boldsymbol{z}^*_t$が直線のタイムトレンドを含むと$\{\boldsymbol{y}_t\}$には2次のトレンドが生じる。したがって、直線のタイムトレンドの回りの非定常過程を考えるモデルでは、定数項以外の外生変数の係数はゼロでなければならない。ちょうど単位根仮説$H_2$においてタイムトレンドにかかる係数をゼロとするのと同じ理由である。このことから、Kunitomo［1992］では、外生変数を含む場合の共和分仮説を次のように表現した。

$$H_4 : \mathrm{rank}(\mathbf{B}^*)=r、\boldsymbol{\Gamma}_2=0$$

ここで、$\boldsymbol{\Gamma}_1$、$\boldsymbol{\Gamma}_2$は外生変数ベクトル$\boldsymbol{z}^*_t$を分割した$\boldsymbol{z}^*_{1t}$、$\boldsymbol{z}^*_{2t}$に対する係数行列であり、上の例では、直線のタイムトレンドが$\boldsymbol{z}^*_{2t}$に相当する。ところが、タイムトレンドの構造変化を含む共和分仮説は$H_4$では不完全なことが国友［1995］で示された。具体例に則してみてみよう。

<u>（例1）</u>　直線のタイムトレンドが屈折しているケース

まず、直線のタイムトレンドを(B-8)のようにダミー変数$DT_{it}$を用いて表す。$TB_i$は屈折が生じた時点である（$i=1,\cdots,q$：$q$は屈折の回数）。

(B-8)
$$\boldsymbol{z}^*_{1t}{}'=(1,DT_{1t},\cdots\cdots,DT_{qt})$$
$$DT_{it}=\begin{cases}0 & 0<t\leq TB_i\\ t-TB_i & TB_i<t\leq T\end{cases}$$

直線のタイムトレンドは非定常変数モデルにおいては定数によるドリフト項として表されるため、これを(B-9)で示す。

(B-9)
$$\boldsymbol{z}^*_{2t}{}'=(1,DU_{1t},\cdots\cdots,DU_{qt})$$
$$DU_{it}=\begin{cases}0 & 0<t\leq TB_i\\ 1 & TB_i<t\leq TB_j\end{cases}$$

$\boldsymbol{z}^*_t{}'=(\boldsymbol{z}^*_{1t}{}'、\boldsymbol{z}^*_{2t}{}')$を$\boldsymbol{z}^*_{1t}{}'=(1,DU_{1t},\cdots,DU_{qt})$、$\boldsymbol{z}^*_{2t}{}'=(t,DT_{1t},\cdots,DT_{qt})$とすると、共和分仮説は一見$H_4$で表されるように思える。ところが、非定常変数$\{\boldsymbol{y}_t\}$の要素を線形結合によって定常化するベクトルがあるように、$\boldsymbol{z}^*_{2t}$の要素どうしを線形結合によって定常化するベクトルも存在しうる。これらのベクトルを列ベクトルとする行

列を$\beta$、$\alpha_2$としたとき、$\beta' \boldsymbol{y}_t + \alpha_2' \boldsymbol{z}^*_{2t}$が定常になる。仮説$H_4$と異なり、$\boldsymbol{z}^*_{2t}$の係数行列のランクは必ずしもゼロでなく$r$以下であればよいのである。一般に、変数$\boldsymbol{z}^*_{1t}$を$\boldsymbol{z}^*_{1t} = \Delta \boldsymbol{z}^*_{2t}$とおければ、

$$H_5 : \mathrm{rank}(\boldsymbol{\Gamma}_2、\mathbf{B}^*) = r$$

によって共和分仮説を表現することができる。この仮説の検定統計量は、(B-5)において、

$$\boldsymbol{z}_{2t}' = (\boldsymbol{z}^*_{2t}'、\boldsymbol{y}_{t-1}')、\qquad \boldsymbol{z}_{1t}' = (\boldsymbol{z}^*_{1t}'、\Delta \boldsymbol{y}_{t-1}'、\cdots\cdots \Delta \boldsymbol{y}_{t-(p-1)}')$$

とおくことで、(B-6) により与えられる。[43] 構造変化がない$LR_1(G_0)$の場合とは、外生変数$\boldsymbol{z}^*_t$の一部$\boldsymbol{z}^*_{2t}$を$\boldsymbol{z}_{2t}$に含ませた点が異なっているため、統計量の漸近分布も違ってくる。この統計量は、屈折点の数$q$と相対的な屈折時期$\delta i (= TB_i / T)$によって漸近分布が異なるため$LR_2(ex\,1; G_0, q, \delta)$と表現される。

(例２)　直線と２次曲線が混合したタイムトレンドのケース

例えば、(B-5)で表現される変数の多変量モデルについては、外生変数ベクトル$\boldsymbol{z}^*_t$を、

$$\boldsymbol{z}^*_{1t} = (1, DU_{1t}, (DT_{1t} - DT_{2t}))$$
$$\boldsymbol{z}^*_{2t} = (t, (QT_{1t} - QT_{2t}))$$

とすることで、共和分仮説が$H_5$で表せる。例１と同様に$\boldsymbol{z}_{1t}$、$\boldsymbol{z}_{2t}$をとることで検定統計量$LR_2(ex\,2; G_0, \delta_1, \delta_2)$ が求められる。

### (4) 共和分検定の単位根検定への応用

Perron [1989] による構造変化を伴う変数の単位根検定は、AR 部分が根１を持つことをｔ検定によりテストするもので、単位根仮説にタイムトレンド項の係数がゼロになる制約を含んでいない点で不完全な検定であった。補論１に示した単変量モデル (A-2)を例にとると、単位根仮説$H_0$における$\beta = 1$の検定のみを行い、$(\alpha_3、\alpha_4、\alpha_5) = (0、0、0)$の検定は看過されている。国友[1995]は、多変量モデル(B-1)におい

---

43)　しかし、$(\boldsymbol{\Gamma}_2、\mathbf{B}^*)$ のランクが$r$であるとき、$\mathbf{B}^*$のランクが必ず$r$であるとは限らず、次の２つのケースが考えられる。

- $\mathrm{rank}(\mathbf{B}^*) = r$、$0 \leqq \mathrm{rank}(\boldsymbol{\Gamma}_2) \leqq r$
- $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Gamma}_2) = r$、$0 \leqq \mathrm{rank}(\mathbf{B}^*) \leqq r$

したがって、レアケースとして$H_5$が成立しても共和分が存在しない場合 ($\mathbf{B}^* = 0$) がありうる。この点は、国友[1995]では明示されていない。

て $G=1$ とした単変数のケースが単位根の検定に利用できることを示した。

2.(1)で述べた $\mathbf{B}^*$ のランクに関する①～③のケースは、$G=1$ の場合には①か②となる。すなわち、$\mathbf{B}^*$ のランク $r$ はゼロか $G$ であり、前者であれば単位根過程、後者であれば定常過程になる。ここで、共和分仮説 $H_5$ を考えると rank $(\mathbf{\Gamma}_2、\mathbf{B}^*)$ がゼロならば、タイムトレンド項の係数もゼロとなるため、単位根仮説は共和分仮説と同様に係数行列のランク仮説で表せることが判る。また、単変数の場合、検定統計量が非常に簡単なかたちになる。固有方程式(B-7)における、$\Delta\mathbf{Y}'\mathbf{P}_z\Delta\mathbf{Y}$、$\Delta\mathbf{Y}'\mathbf{P}_{z1}\Delta\mathbf{Y}$ は、被説明変数を $\Delta\boldsymbol{y}_t$、説明変数をそれぞれ $\boldsymbol{z}_t$、$\boldsymbol{z}_{1t}$ として回帰したときの残差平方和であることに注目すると、$\boldsymbol{z}_{1t}$ は $\boldsymbol{z}_t$ から $\boldsymbol{z}_{2t}$ を除いたものであるから、これらは無制約残差平方和($URSS$)、制約付残差平方和($RRSS$)に相当する。したがって、(B-7)の根 $\lambda$ は、

(B-10) $$\lambda=\frac{RRSS-URSS}{URSS}$$

と表せ、このとき尤度比統計量は、

(B-11) $$LR_i=T\log\left(\frac{RRSS}{URSS}\right)$$

と簡単なかたちで求められる。

以　上

[日本銀行金融研究所研究第1課]

**【参考文献】**


小原英隆、「Unit Root Test with Unknown Trend Breaks」、理論計量経済学会報告論文、1994年

川崎能典、「Johansenの共和分検定について」、『金融研究』第11巻第2号、日本銀行金融研究所、1992年、pp.99-120.

国友直人、「構造変化と単位根·共和分仮説」、東京大学経済学部ディスカッションペーパー、95-J-1、1995年

副島 豊、「日本のマクロ変数の単位根検定」、『金融研究』第13巻第4号、日本銀行金融研究所、1994年、pp.124-156.

畠中道雄、「長期経済関係のエコノメトリックス」、The Economic Studies Quarterly、Vol.45、1994年、pp.403-418.

馬場善久、「エラーコレクションモデルによる貨幣需要関数の推定」、『日本の景気』、本多佑三編、有斐閣、1995年

Anderson, T. W. and N. Kunitomo, "Tests of Overidentification and Predeterminedness in Simultaneous Equation Model", *Journal of Economics*, 54, 1992, pp.49-78.

Baba, Y., D. F. Hendry, and R. M. Starr, "The Demand for M1 in the U.S.A., 1960-1988", *Review of Economic Studies*, 59, 1992, pp.25-61.

Banerjee, A., R. L. Lumsdaine, and J. H. Stock, "Recursive and Sequential Tests of the Unit-Root and Trends Break Hypotheses: Theory and International Evidence" *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol.10, No.3, 1992, pp.271-288.

Bordo, D. M., and L. Jonung, *The long-run behavior of the velocity of circulation*, Cambridge University Press, 1987.

Canjels, E., and M. W. Watson," Estimating Deterministic Trends in the Presence of Serially Correlated Errors" NBER Technical Working Paper, No.165, 1994.

Campbell, j. Y., "Does saving anticipate declining labor income ? An alternative test of the permanent income hypothesis" *Econometrica*, Vol.55, No.6, 1987, pp.1249-73.

Christiano, L. J., "Searching for A Break in GNP" *Journal of Business & EconomicStatistics*, Vol.10 No.3, 1992, pp.237-250.

Dickey, D. A. and W. A. Fuller, "Distribution of Estimator for Autoregressive Time Series with Unit Root", *Journal of American Statistical Association*, Vol.74, 1979, pp.427-431.

Engle, R. F., and C. W. J. Granger, "Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing", *Econometrica*, Vol.55, No.2, 1987, pp.251-276.

Hansen, B. E., "Tests for Parameter Instability in Regressions with I(1) processes" *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol.10, No.3, 1992, pp.321-335.

Hendry, D. F., and N. R. Ericsson, "Modeling the demand for narrow money in the United Kingdom and the United States", *European Economic Review* 35, 1991, pp.833-886.

Hess, D. G., S. C. Jones, and D. R. Porter, "The Predictive Failure of the Baba, Hendry and Starr Model ofthe Demand for M1 in the United States", *Federal Reserve Board Finance and Economics Discussion Series* 94-34, Nov. 1994.

Hoffman, D., and R. Rasche, "Long-Run Income and Interest Elasticities of Money Demand in the United States", *The Review of Economics and Statistics*, 73, 1991, pp.665-674.

Johansen, S., "Statistical Analysis of Cointegrating Vectors", *Journal of Economic Dynamics and control*, 12, 1988, pp.231-254.

Johansen, S., "Estimation and Hypothesis Testing of Cointegrating Vectors in Gaussian Vector Autoregression Models", *Econometrica*, Vol.59, 1991, pp.1551-1580.

Johansen, S., "The Role of The Constant and Linear Terms in Cointegraton Analysis of Nonstationary Variables", *Econometric Review*, 13(2), 1994, pp.205-229.

Johansen, S., "A Statistical Analysis of Cointegration for I(2) Variables", *Econometric Theory*, 11, 1995, pp.25-59.

Johansen, S., and K. Juselius, "Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration-with Applications to the Demand for Money", *Oxford Bulletin of Economics and statistics*, 52, 2, 1990, pp.169-210.

Juselius, K., "On the Duality between Long-Run Relations and Common Trends in the I(1) versus I(2) Model. An Apprication to Aggregate Money Holdings", *Economics Reviews*, 13(2), 1994, pp.151-178.

Kunitomo, N., "Tests of unit roots and cointegration hypothese in econometric model", *Discussion Paper* No.92-F-7, Faculty of Economics, University of Tokyo. 1992.

Kunitomo, N., and S. Sato, "Table of limiting distuributions useful for unit roots and cointegration tests with structural change", 1995, In preparation.

Mehra, Y. P., "An Error-Correction Model of U.S. M2 Demand", *Economic Review*, Vol.77/3, Federal-Reserve Bank of Richmond, 1991, pp.3-12.

Ogaki, M., and J. Y. Park, "A Cointegration Approach to Estimating Preference Estimators", mimeo, 1992.

Park, J. Y., "Canonical Cointegrating Regrations", *Econometrica*, Vol.60, 1992, pp.119-144.

Perron, P., "The Great crash, the oil price shock, and the unit roothypothesie", *Econometrica*, Vol.57, No.6, 1989, pp.1361-1401.

Pillips, P. C. B., and B.E.Hansen, "Statistical Inference in Instrumental Variables Regration with I(1) processes" *Review of Economic Studies*, Vol.57, 1990, pp.99-125.

Pillips, P. C. B., and S. Ouliarris, "Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration" *Econometrica*, Vol.58, No.1, 1990, pp.165-193.

Stock, J. H., and M. W. Watson, "A Simple Estimator of Cointegrating Vectors in High Order Integrated System", *Econometrica*, Vol.61, No.4, 1993, pp.783-820.

Zivot, E., and D. W. K. Andrews, "Futher Evidence on the Great Crash, the Oil-Price Shock, and the Unit-Root Hypothesis" *Journal of Business & EconomicStatistics*, Vol.10 No.3, 1992, pp.237-250.