

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

BGM金利モデルの実用化に向けて

もりもと ゆうじ よしば としなお
森本 祐司・吉羽 要直

Discussion Paper No. 99-J-39

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES
BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

備考： 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

BGM金利モデルの実用化に向けて

もりもと ゆうじ よしば としなお
森本 祐司*・吉羽 要直**

要 旨

本稿は、BGM (Brace, Gatarek and Musiela [1997]) モデルの解説と実証分析を目的としている。BGM モデルは、金利デリバティブのプライシングに用いられるイールド・カーブ・モデルの一つであり、次のような特徴を有することから、実務面・理論面双方で注目を集めている。

- デリバティブの価格を計算する上で、理論面で金利の期間構造を明示的に取り入れつつ、実務面で市場慣行化したブラック・モデルとの整合性を確保したこと。
- これまでのイールド・カーブ・モデルが、市場で取引されていない仮想的な瞬間短期金利をモデル化していたのに対し、BGM モデルは、実際に取引されている LIBOR をモデル化していること。

本稿では、BGM モデルの内容を2通りのレベルで解説する。すなわち、本文中で直感的理解を優先させた平易な説明を行うとともに、補論において数式展開を含めた厳密な議論を取りまとめる。また、最近の日本の金利市場データに基づき、複数のボラティリティ関数を用いて BGM モデルのキャリブレーションを行った上、推定精度、ボラティリティ関数の相互比較、モデルの安定性などを検証する。さらに、BGM モデル発表以降の派生研究について、理論・実務の両面から簡単なサーベイを行う。

キーワード： イールド・カーブ・モデル、BGM モデル、LIBOR、キャップ、スワプション、キャリブレーション

JEL Classifications: G13

* 東京海上火災保険株式会社財務企画部 (E-mail: yuji.morimoto@alum.mit.edu)

** 日本銀行金融研究所研究第1課 (E-mail: toshinao.yoshiba@boj.or.jp)

目 次

1 はじめに	1
2 BGM モデルとは	2
2.1 これまでのイールド・カーブ・モデル	2
2.2 ブラック・モデル	3
2.3 BGM モデル	5
2.4 キャップの解析解	7
2.5 スワプションの解析解	8
3 キャリブレーション	9
3.1 計算の前提	9
3.2 計算結果および考察	12
4 BGM モデル発表後の派生研究	17
4.1 理論面での課題	17
4.2 実務適用に向けて	18
5 おわりに	20
補論：BGM モデルおよび解析解の導出について	22
参考文献	32

1 はじめに

Brace, Gątarek and Musiela [1997] (以下、BGM 論文) はキャップ・フロア・スワプションといった金利デリバティブの価格評価を行うためのイールド・カーブ・モデルを提唱した。このモデルは、彼らの頭文字をとって BGM モデルと呼ばれている。

BGM モデルは次のような特徴を有することから、実務界および学界において発表直後から注目を集めることとなった。

- デリバティブの価格を計算する上で、理論面で金利の期間構造を明示的に取り入れつつ、実務面で市場慣行化したブラック・モデルとの整合性を確保したこと。
- これまでのイールド・カーブ・モデルが、市場で取引されていない仮想的な瞬間短期金利をモデル化していたのに対し、BGM モデルは、実際に取引されている LIBOR をモデル化していること。

本稿では、BGM モデルについて平易な解説を行うとともに、実際の日本市場のデータを用いて BGM モデルのキャリブレーション¹を行い、結果を検証することを目的としている。さらに、BGM 論文発表以降の派生研究をいくつか紹介する。

本稿の構成は以下のとおりである。第 2 章では BGM モデルを簡単に解説する。BGM 論文を理解するには高度な数学的知識が必要とされるが、第 2 章では極力数式等を用いない平易な説明を試み、その補完として、数式展開を含めた詳細な解説を補論において行う。第 3 章では、国内金利市場データを用いたキャリブレーションを行う。ここでは、複数のボラティリティ関数を用いて計算を行い、モデルの精度・安定性の分析やボラティリティ関数の相互比較などを行う。国内の市場データを用いた先行報告としては、ボラティリティの定常性を仮定した上でキャリブレーションを行った神楽岡 [1999]が知られているが、本稿では、必ずしもボラティリティの定常性を前提とはせず、より一般的なボラティリティ関数を用いてキャリブレーションを行う。その結果、興味深いことに神楽岡 [1999]とは相異なるインプリケーションを得た。第 4 章では、BGM 論文において将来の課題とされていた内容や実務への適用に関する課題等につ

¹ 本稿におけるキャリブレーションとは、モデルから算出される価格等の理論値が市場データになるべく適合するように、モデルのパラメータを数学的に推定することをいう。

いて、現在どのような研究がなされ、どのような解決方法が提案されているかについてサーベイを行う。第5章で本稿のまとめを行う。

2 BGM モデルとは

本章では、主として BGM モデルの概要について説明する²。BGM 論文では、モデルとして定式化された確率微分方程式における解の存在条件や一意性の証明など、数学的に難解な点も多く、読みこなすにはかなりの労力を要する。本章では多少の厳密さを犠牲にしても直感的な理解のしやすさを優先させ³、これを補完するための数式展開等の厳密な解説は補論に掲載する。

2.1 これまでのイールド・カーブ・モデル

BGM モデルの概要を説明する前に、BGM モデル登場以前のイールド・カーブ・モデルについて簡単に整理しておく。

イールド・カーブ・モデルを歴史的に見ると、まず、均衡モデルと呼ばれるバシチェック・モデル (Vasicek [1977]) やコックス・インガソル・ロス・モデル (Cox, Ingersoll and Ross [1985]) が挙げられる。これらは、現時点の瞬間短期金利 (スポット・レート) を用いてモデル化しており、スポット・レートの動きによってイールド・カーブ全体の動きを表現する。ただし、市場価格情報から現時点のイールド・カーブを完全に再現することはできないことから、実務上、金利デリバティブの価格計算には不向きである。

金利デリバティブの価格付けという意味では、ヒース・ジャロウ・モートン・モデル (HJM モデル: Heath, Jarrow and Morton [1992]) を中心とした無裁定モデル⁴が挙げられる。HJM モデルはスポット・レートを含む任意の将来時点の

² ただし、BGM モデルの説明に先立ち、BGM モデル登場の背景をより理解し易いように、BGM モデル登場以前のイールド・カーブ・モデル (特に HJM モデルとブラック・モデル) について簡単に説明を付した。

³ ただし、内容理解のためには、数学やデリバティブの価格付け理論についての基礎的な知識は最低限必要である。

⁴ ここでいう無裁定モデルとは、異なる満期の割引債を用いた裁定機会が存在しないイールド・カーブ・モデルのこと。デリバティブの価格理論および価格は、無裁定条件が成立するという前提の下で成り立っているため、イールド・カーブ・モデルから金利デリバティブの価格を導出する場合には、無裁定条件が重要となる。

瞬間短期金利（フォワード・レート）を用いてモデル化しているので、フォワード・レート・モデルとも呼ばれる。一方、スポット・レートを用いた無裁定モデルとしてはハル・ホワイト・モデル（Hull and White [1990]）などが有名である。なお、HJM モデルに適切な制約条件を課して変形するとハル・ホワイト・モデルが得られることが知られており、こうした点から、HJM モデルは瞬間短期金利をベースとした無裁定イールド・カーブ・モデルの一般形と位置付けられ、ハル・ホワイト・モデル等はその特殊形であると見なされることもある。後述するように、BGM モデルもフォワード・レートをベースとしたモデルからスタートしており、その意味では、HJM モデルの派生形の一つである。

HJM モデルは、市場価格情報から現在のイールド・カーブを完全に再現することができる上に、異なった満期を持つ割引債間で裁定取引が存在しないための条件を明示的に示していることから、価格評価の実務に適したモデルといえる。しかしながら、いくつかの問題を抱えているのも事実である。まず、HJM モデルがモデル化の対象としているフォワード・レートは瞬間的な金利であり、実際には市場で取引されていない仮想的なものにすぎない。市場には、有限期間の満期を持つ商品があるのみである。したがって、そのギャップを何らかの手法で埋めなければならない。また HJM モデルは、一般にはブラック・ショールズ式のような解析解が存在しないことから、キャリブレーションの計算負荷も高く、高度な数値計算技法が必要とされる。

2.2 ブラック・モデル

次に、実務で多く用いられているブラック・モデルについて簡単に解説する。ブラック・モデルは、原資産価格が対数正規過程に従い、金利やボラティリティは一定という条件の下、先物価格を原資産とするヨーロピアン・オプションの価格を解析的に導出したものである。例えば金利オプションについては、キャップならば LIBOR⁵、スワップオプションならばスワップ・レート⁵が、対数正規分布に従うと仮定されている。

このモデルの下では、キャップ・スワップオプションの解析解は次のようになる⁶。

⁵ ここでの LIBOR やスワップ・レートは、厳密にはフォワード LIBOR、フォワード・スワップ・レートのことである。本文中では簡略化のため、「フォワード」を付けずに記述する。なお、補論では厳密さを優先させ、必要に応じてフォワードを付している。

⁶ ブラック・モデルの解析解導出の詳細については、例えば木島 [1999]を参照のこと。

$$\text{キャップ価格} : \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i P(t, T_{i+1}) \left\{ K(t, T_i) \Phi(d_i) - \kappa \Phi(d_i - \sigma \sqrt{T_i - t}) \right\} \quad (1)$$

ここで、 t : 現時点

n : 金利交換回数

T_i : i 番目の金利交換時点 (= $i+1$ 番目の金利決定時点)

$\delta_i = T_{i+1} - T_i$

κ : 行使レート

$P(s_1, s_2)$: 満期が s_2 である無リスク割引債の s_1 時点での価格

$K(t, T_i)$: t 時点における $[T_i, T_{i+1}]$ 間の LIBOR

σ : ボラティリティ

$$d_i = \frac{\ln(K(t, T_i)/\kappa) + \frac{\sigma^2(T_i - t)}{2}}{\sigma \sqrt{T_i - t}}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

Φ : 標準正規分布の分布関数

$$\text{スワプション価格} : \left\{ S(t) \Phi(d) - \kappa \Phi(d - \sigma \sqrt{T_0 - t}) \right\} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i P(t, T_{i+1}) \quad (2)$$

上記の記号に加え、

T_0 : スワプションのオプション満期時点

$S(t)$: t 時点における $[T_0, T_n]$ 間のスワップ・レート

$$d_0 = \frac{\ln(S(t)/\kappa) + \frac{\sigma^2(T_0 - t)}{2}}{\sigma \sqrt{T_0 - t}}$$

結果は有名なブラック・ショールズ式に極めて類似した形となることから、実務的には非常に使いやすい。また、金利が対数正規分布に従うということは、金利が負となる確率がゼロということであり、これもまた実務において歓迎された要因である。

これらの結果、市場ではブラック・モデルが中心的に利用されており、市況データ情報端末等でも、キャップやスワプションの市場情報は価格そのものが表示されるのではなく、価格からブラック・モデルを用いて逆算されたインプライド・ボラティリティ σ が表示されている。これは一つには、キャップ・スワプションはペイオフの回数商品によって異なるため、価格で比較するよりも（そうすると、必然的にペイオフの多い商品の方が価格が高くなってしまふ）平均的なボラティリティの水準で比較する方が商品間の割安・割高が比較しや

すい、という実務的理由もある。したがって、こうした取引を実行するにあたり、情報端末から得られた情報を価格に換算するためには、必ずブラック・モデルに基づく価格式が必要となる。

しかし、ブラック・モデルは個々の金利デリバティブの価格計算のみに着目しており、イールド・カーブ全体の動きを捉えた上で導出されたモデルではない。したがって、HJM モデルのようにイールド・カーブ全体として裁定機会が存在しないという保証はない。無裁定条件はブラック・モデルにおいても価格式導出の根幹を成しているものであり、それが成立していないのであれば、価格式そのものの根拠が不明確なものとなってしまう。

2.3 BGM モデル

BGM 論文では、上述したブラック・モデルの理論的問題点を解決するために、イールド・カーブ全体としての無裁定条件を満たしつつ、LIBOR を対数正規過程とすることでブラック・モデルと同様の価格式が導けるようなモデルを考案した。以下にモデル化までの流れを簡単に解説する。

BGM 論文も、HJM モデルと同様に、瞬間フォワード・レートをモデル化の対象とする。具体的には、時点 t で観測される時点 t から x 時点後のフォワード・レート $r(t, x)$ を考え⁷、それがあある特定の確率過程に従うことを仮定する⁸。時点 t で観測される時点 t から x 時点後の LIBOR $L(t, x)$ (期間は δ で一定と考える) は $r(t, x)$ を用いて、

$$1 + \delta L(t, x) = \exp\left(\int_x^{x+\delta} r(t, u) du\right) \quad (3)$$

と定義される。この関係を利用すれば、 $r(t, x)$ の確率過程から $L(t, x)$ に関する確率過程を導くことができる。問題は、この LIBOR の確率過程が対数正規過程となるかどうかだが、そのためには、

$$dL(t, x) = \dots dt + L(t, x)\gamma(t, x) \cdot dW(t) \quad (4)$$

という形で記述されればよいことが知られている。ここで、 $\gamma(t, x)$ は確定的な

⁷ HJM モデルで用いられているフォワード・レートは時点 t で観測される時点 $T(t < T)$ のフォワード・レートであり、上記の記号定義とは異なるので注意されたい。

⁸ ここでいう確率過程は補論式(A1)に当たる。同式中に既に無裁定条件が含まれている。

関数であり、 $L(t,x)$ のボラティリティを表しているので、ボラティリティ関数と呼ばれている。BGM 論文の定式化の下では、(4)を満たすための必要十分条件が容易に導かれる⁹。さらにボラティリティ関数 $\gamma(t,x)$ がある滑らかさを有していれば、 $L(t,x)$ や $r(t,x)$ の確率微分方程式に解が存在すること、現時点の LIBOR $L(t,0)$ が非負であれば将来時点の LIBOR も非負となること等も証明されている。

次に、金利デリバティブの価格式を求めるために、2つの工夫を行う。1つは、 $L(t,x)$ という表記の代わりに、 t 時点における $[T, T+\delta]$ 間の LIBOR $K(t,T)$ という表現を採用することである。 $L(t,x)$ が満たす確率過程から、 $K(t,T)$ も対数正規過程に従うことが容易に示される。もう1つは、デリバティブ価格計算によく用いられるリスク中立測度¹⁰の代わりに、フォワード中立測度¹¹ (forward neutral measure) を用いることである。この測度の下で、 $K(t,T)$ がマルチンゲール¹²となることが示され、LIBOR を原資産とするデリバティブの価格は、測度変換を用いた計算手法¹³を適用することで、ブラック・モデルと同様に導出することが可能となる。

以上により、BGM 論文は、無裁定条件を満たす HJM モデルと実務で多用されているブラック・モデルが共存可能であることを示したことになる。このことから、BGM モデルは実務面・理論面双方で発表直後から注目を集めることとなった。

⁹ 補論の式(A9)。

¹⁰ リスク中立測度とは、ある資産の相対価格がマルチンゲール (脚注12を参照) となるような仮想的な確率測度のことであり、デリバティブの価格計算によく用いられる (脚注13を参照)。

¹¹ BGM 論文では、フォワード無裁定測度 (forward arbitrage-free measure) と記されている。また、簡潔にフォワード測度 (forward measure) と呼ばれることもある。フォワード中立測度の詳細については、木島 [1999]などを参照のこと。

¹² マルチンゲールとは、現在の情報下での将来時点の条件付期待値が、現在の値に一致するというもの。測度変換を用いたデリバティブの価格計算において多用される (脚注13を参照)。

¹³ 測度変換を用いたデリバティブの価格計算手法は次のとおりである。まず、原資産をあるニューメーラで割った相対価格 $X(t)$ がマルチンゲールとなるような測度を見つける。その測度の下で、オプション満期 T 時点でのデリバティブのペイオフ $f(X, \kappa)$ (コール・オプションならば $(X - \kappa)_+$) に関する (現時点までの情報があるという条件付の) 期待値 $E[f(X(T), \kappa)]$ がデリバティブの価格となる。したがって、マルチンゲールとなる測度の下で、相対価格の確率分布が求められ、ペイオフの期待値が解析的に解ければ、デリバティブの解析解が得られることとなる。

また、BGM モデルでは、HJM モデルと同様にフォワード・レートという仮想的な瞬間短期金利をモデル化することから始めているものの、最終的にモデル化されているのは市場で実際に取引されている LIBOR である。この点も、実務家を中心に BGM モデルが注目された要因である¹⁴。また、この特性から、理論的には BGM モデルを HJM モデルの派生形とは見なさずに、直接 LIBOR をモデル化した別のモデルであるという見方をすることも多い¹⁵。

2.4 キャップの解析解

BGM モデルでは、LIBOR が対数正規分布に従うように構築され、さらにそれをマルチンゲールとする測度が得られたことから、キャップの解析解は次のとおりとなることが簡単に示される。記号の定義については式(1)を、導出過程については補論を参照して頂きたい¹⁶。

$$\sum_{i=0}^{n-1} \delta P(t, T_{i+1}) \{K(t, T_i) \Phi(h(t, T_i)) - \kappa \Phi(h(t, T_i) - \zeta(t, T_i))\} \quad (5)$$

$$\text{ただし、 } h(t, T) = \frac{\log \frac{K(t, T)}{\kappa} + \frac{1}{2} \zeta^2(t, T)}{\zeta(t, T)}$$

$$\zeta^2(t, T) = \int_t^T |\gamma(s, T-s)|^2 ds$$

式(5)はこのままの形状でも、ブラック・モデルから導出された式(1)に十分近いが、さらにボラティリティ $\gamma(t, x)$ が t や x に依らず一定値 σ であるという仮定を置けば、式中の h や ζ を変形することで、ブラック・モデルでのキャップ式と完全に一致することが分かる。

¹⁴ 例えば、Rebonato [1999a]は、直接観測可能なものをモデル化している BGM モデルは「パラダイム転換 (paradigm shift) をもたらした」と記している。

¹⁵ なお、4.1節で述べるように、BGM モデルにおいてフォワード・レートが存在するためには、ボラティリティの関数形にかなり制約が課されてしまう。Jamshidian [1997]等は、その問題を回避するために、瞬間短期金利の存在を前提としない市場において、異なる満期を持つ割引債間みの無裁定条件を導き、そこからデリバティブの価格解析解を導出している。得られる解析解は BGM 論文と同じになるが、そこでは HJM モデルが前提としている無裁定条件は成立していない。そうした背景から、BGM モデルを HJM モデルとは違うタイプのモデルである、という捉え方をすることもある。

¹⁶ 補論の式(A16)が式(5)に相当している。

2.5 スワプションの解析解

一般に、BGM モデルでは厳密な意味でのスワプションの解析解は存在しない。BGM 論文において、スワプションの近似的解析解が与えられてはいるが、その計算に際しては、原資産であるスワップ・レートを構成している LIBOR の確率的変動の間に強い制約を与えて近似を行っている。彼らのアプローチは、1ファクターのスポット・レート・モデルにおける利付債オプションの解析解を導いた Jamshidian [1989] とほぼ同様である。そのような近似の必要性については、Jamshidian [1989] のアプローチの内容とともに補論で詳述したので参照されたい。

結果として、次のような近似的な解析解が得られる。近似解導出の過程についてはやはり補論を参照されたい¹⁷。

$$\delta \sum_{i=0}^{n-1} P(t, T_{i+1}) \{K(t, T_i) \Phi(-s_0 - d_i + \Gamma_i) - \kappa \Phi(-s_0 - d_i)\} \quad (6)$$

$$\text{ただし、} \quad \Gamma_i^2 = \int_t^{T_0} |\gamma(s, T_i - s)|^2 ds$$

$$d_i = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\delta K(t, T_k)}{1 + \delta K(t, T_k)} \Gamma_k$$

また、 s_0 は次式を満たす値である。

$$\sum_{k=1}^n \frac{C_k}{\left(\prod_{i=0}^{k-1} (1 + \delta K(t, T_i)) \exp\left(\Gamma_i (s_0 + d_i) - \frac{1}{2} \Gamma_i^2 \right) \right)} = 1$$

$$\text{ここで、} \quad C_k = \begin{cases} \delta \kappa & k=1, 2, \dots, n-1 \\ 1 + \delta \kappa & k=n \end{cases}$$

なお、近似によって求められた式(6)はスワップ・レートが対数正規分布となっておらず、結果として上記解析解もブラック・モデルから導出される解析解(2)とは異なる形状となっている。

¹⁷補論の式(A28)が式(6)に相当している。

3 キャリブレーション

イールド・カーブ・モデルを金利デリバティブの価格付けに実用化するという観点からは、モデルから算出される理論価格が市場のデリバティブ価格にどの程度適合するかということが最も重要である。理論的に洗練されたモデルであっても、また計算負荷の軽いモデルであっても、市場価格から大きく乖離してしまうならば、価格計算等の実務で用いることはできない。

本章では、国内金利市場のデータを用いて BGM モデルのキャリブレーションを行う¹⁸。ここでは、複数のボラティリティ関数を用いて計算を行い、モデルの精度・安定性の分析やボラティリティ関数の相互比較などを行う。

3.1 計算の前提

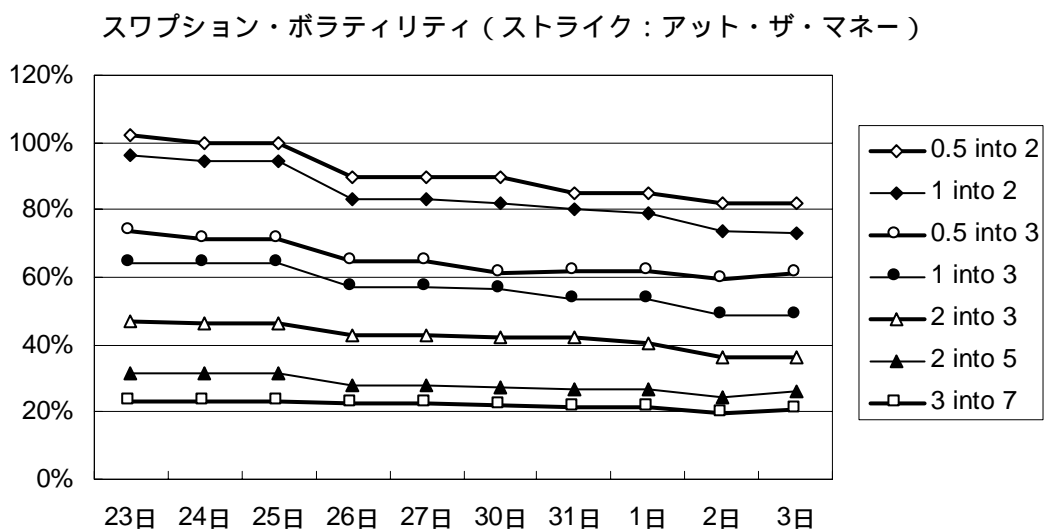
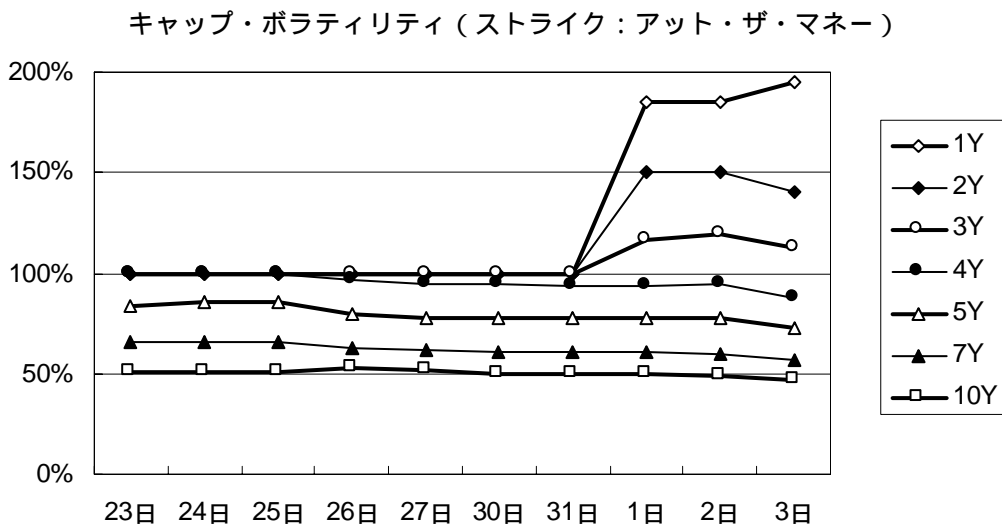
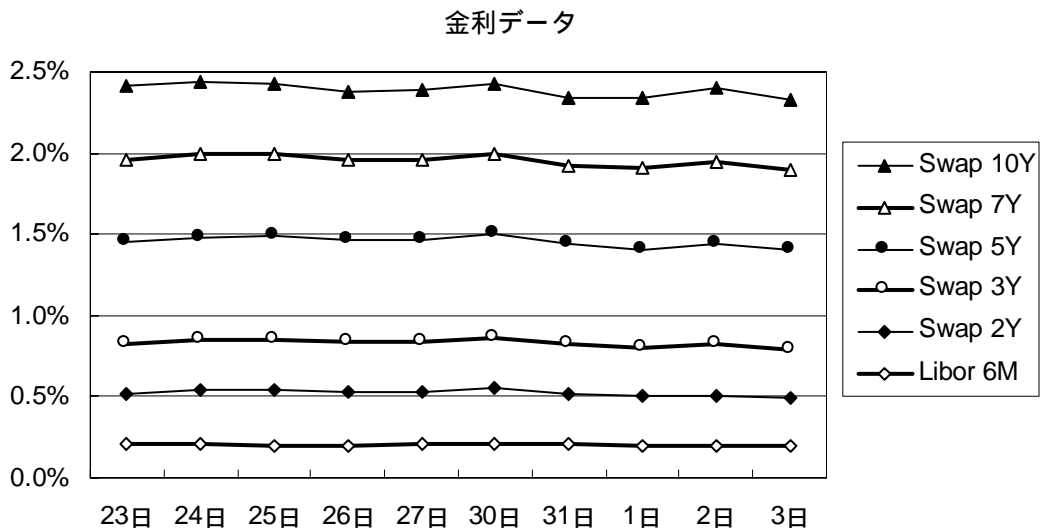
市場データとしては、1999年8月23日以降の10営業日を採用した。その期間におけるスワップ・レート、キャップ・ボラティリティ、スワプション・ボラティリティの主な値を【図表 3-1】に示してある。キャップ、スワプションともにアット・ザ・マネーのボラティリティである。なお、スワプションの凡例にある「X into Y」はオプション期間が X 年で、スワップ期間が Y 年であることを示している。

なお、情報端末では得られない値、例えば 3.5 年のスワップ・レートといった値も行使レート等の計算において必要となるが、これらについては入手可能なスワップ・レートを線形補間して求めた。

こうして得られた市場データおよびキャップ・スワプションの価格に基づき、BGM モデルのパラメータをキャリブレートする。BGM モデルにおけるキャップ価格式(5) (7ページ) およびスワプション価格式(6) (8ページ) から、LIBOR のボラティリティ関数 $\gamma(t, x)$ が与えられれば、それぞれのデリバティブ価格が計算できることが分かる。よって、 $\gamma(t, x)$ の特定化が必要となるが、本稿では、次の 5 種類の関数形を設定した。

¹⁸ 我々の知る限りでは、BGM モデルを用いたキャリブレーションの公表例は少ない。BGM 論文の他、神楽岡 [1999]、Rebonato [1999c] 程度である。Rebonato [1999c] では、ボラティリティおよび開始時点の異なる LIBOR 間の相関係数を同時に推定する手法を紹介し、具体的に 3 ないし 4 ファクターモデルでの分析結果を提示している。

【図表 3-1】 分析に使用した主なデータ（99年8月23日～99年9月3日）



一定 $\gamma(t, x) = \gamma$

階段関数型 $\gamma(t, x) = \gamma_1(x)$

ここで、 $\gamma_1(x)$ は同一階段内で一定となる階段関数
(階段仕切り：0.5、1、2、3、4、5、7、10年)

BGM型¹⁹ $\gamma(t, x) = \gamma_1(x)f(t)$

ここで、 $\gamma_1(x)$ 、 $f(t)$ ²⁰は階段関数
(階段仕切り：0.5、1、2、3、4、5、7、10年)

指数関数型²¹ $\gamma(t, x) = (\sigma_1(x), \sigma_2(x))$

ここで、 $\sigma_1(x) = \sigma_1$ (一定)

$$\sigma_2(x) = \sigma_2 \exp\left(-\frac{\lambda x}{2}\right)$$

BGM派生型 $\gamma(t, x) = \gamma_1(x)f(t)$ 但し、 $\gamma_1(x) = (\sigma_1(x), \sigma_2(x))$

ここで、 $\sigma_1(x) = \sigma_1$ (一定)

$$\sigma_2(x) = \sigma_2 \exp\left(-\frac{\lambda x}{2}\right)$$

$$f(t) = \exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right)$$

および は、それぞれ および の階段関数を指数関数で近似することで、より少ないパラメータによるモデル化の可能性について検討するために用意し

¹⁹ BGM型は、BGM論文におけるキャリブレーションの例で用いられた関数形である。ただし、BGM論文では、ボラティリティだけでなく、LIBORの相関係数もフィットさせるために、上記 $\gamma_1(x)$ を2ファクターで表現している。これにより、複数のLIBORを原資産とするようなデリバティブにも対応可能となる。一方、本稿はボラティリティ関数をキャップ・スワプションの価格のみにフィットさせるのが目的であり、しかもスワプションについては近似された価格を用いているので、LIBOR間の相関を必要としないことから、1ファクターとした。

²⁰ ここで、 $f(t) = 1, 0 \leq \forall t \leq 0.5$ とした。これは、 のようにモデル化した場合、何の制約も置かなければパラメータが一意に定まらないためである。

²¹ は、Heath, Jarrow and Morton [1992]で用いられている2ファクター関数である。脚注19にあるように、本稿のキャリブレーションは1ファクターで十分であることから、 の $\gamma(t, x)$ は $\gamma(t, x) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \exp(-\lambda x)}$ と記してもよいが、Heath, Jarrow and Morton [1992]で用いられたモデルと同じであることが分かるよう、2ファクターとした。 の $\gamma_1(x)$ も同様の理由から2ファクターとしている。

たものである。

キャリブレーションを行うためのデリバティブは、次に掲げたキャップおよびスワプションとした。これにより、キャップ 10 種類、スワプション 37 種類、計 47 種類がキャリブレーションに用いられることとなる。

キャップ：期間 1～10 年（1 年毎）

スワプション：オプション期間 0.5、1、2、3、4、5、7 年

スワップ期間 1、2、3、4、5、7 年

（但し、両期間の合計が 10 年以下のもののみ）

行使レートはすべてアット・ザ・マネーとした。キャップについては、イン・ザ・マネーやアウト・オブ・ザ・マネーのインプライド・ボラティリティ・データが市場から入手可能であるが、それを利用しなかったのは、BGM モデルのボラティリティ関数は LIBOR 等の金利水準に依存できないことから、ボラティリティ・スマイル²²の効果を織込むことが不可能なためである。

キャリブレーションの目的関数としては、これらの市場価格と BGM モデルで計算された価格の誤差率の二乗和（以下、SSE）すなわち

$$SSE = \sum_{\substack{\text{キャリブレーション} \\ \text{に使用した} \\ \text{デリバティブ}}} \left\{ \frac{(\text{BGMモデルで計算された価格}) - (\text{市場価格})}{(\text{市場価格})} \right\}^2$$

とし、これが最小となるように各ボラティリティ関数のパラメータを推定した。

3.2 計算結果および考察

【図表 3-2】が、 から のボラティリティ関数毎にキャリブレートされたパラメータ値および SSE の結果である。

²² 満期が同じで行使レートが異なるデリバティブ間のインプライド・ボラティリティの水準が異なること。ボラティリティ・スマイルの詳細については、例えば加藤・吉羽 [1999]を参照のこと。

【図表 3-2】パラメータ推定値および誤差率の二乗和 (SSE)

			8月23日	8月24日	8月25日	8月26日	8月27日	
—			0.3450	0.3431	0.3430	0.3200	0.3198	
	SSE		6.6822	6.6502	6.6541	6.4753	6.4291	
階段関	1	0.5	1.0530	1.0639	1.0517	1.0653	1.0673	
		1	1.1568	1.1698	1.1758	1.0873	1.0757	
		2	0.5917	0.5900	0.5892	0.5439	0.5446	
		3	0.3479	0.3413	0.3425	0.3104	0.3119	
		4	0.2365	0.2312	0.2309	0.2080	0.2071	
		5	0.1672	0.1637	0.1608	0.1434	0.1450	
		7	0.1335	0.1318	0.1305	0.1284	0.1298	
		10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
		SSE		1.6435	1.5287	1.5319	1.2690	1.2639
		BGM型	1	0.5	0.9706	0.9449	0.9519	0.9864
1	2.2512			2.2005	2.1846	1.8788	1.8931	
2	0.8705			0.8597	0.8604	0.7790	0.7764	
3	0.5115			0.4711	0.4725	0.4193	0.4232	
4	0.3357			0.3277	0.3271	0.2848	0.2843	
5	0.2796			0.2534	0.2478	0.2042	0.2067	
7	0.2168			0.2256	0.2242	0.2187	0.2222	
10	0.1844			0.1459	0.1434	0.1279	0.1267	
f	0.5			1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1			0.7430	0.7735	0.7777	0.7307	0.7258
	2		0.6560	0.6789	0.6803	0.7175	0.7131	
	3		0.5447	0.5582	0.5568	0.6091	0.6069	
	4		0.4870	0.5037	0.5059	0.5223	0.5225	
	5		0.4737	0.4950	0.4994	0.5315	0.5261	
	7		0.5090	0.5257	0.5269	0.5770	0.5723	
SSE			0.1368	0.1401	0.1416	0.1592	0.1479	
指数関	1			0.0963	0.0972	0.0945	0.1006	0.1018
		2	1.3731	1.4014	1.3968	1.3786	1.3719	
		1.0638	1.0948	1.0890	1.1814	1.1781		
	SSE		1.7114	1.5943	1.6008	1.3191	1.3115	
BGM派生	1		0.4132	0.4050	0.4010	0.3828	0.3847	
		2	2.0169	2.0148	2.0099	1.7934	1.8027	
		1.4277	1.4497	1.4408	1.4390	1.4526		
		0.2439	0.2358	0.2345	0.2075	0.2109		
	SSE		0.7150	0.6442	0.6577	0.5285	0.5086	

【図表 3-2】パラメータ推定値および誤差率の二乗和（続き）

			8月30日	8月31日	9月1日	9月2日	9月3日
—			0.3139	0.3030	0.2988	0.2704	0.2798
	SSE		6.3758	6.7032	6.9780	7.3933	6.6144
階段関	1	0.5	1.0673	1.0604	1.4265	1.4427	1.3132
		1	1.0346	1.0146	0.8496	0.7321	0.6328
		2	0.5363	0.5165	0.4794	0.4337	0.4210
		3	0.3047	0.2987	0.2914	0.2603	0.2755
		4	0.2050	0.1994	0.1998	0.1754	0.1983
		5	0.1414	0.1357	0.1409	0.1254	0.1479
		7	0.1242	0.1162	0.1242	0.1107	0.1346
		10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	SSE		1.2391	1.3862	1.5683	1.8916	2.1853
BGM型	1	0.5	0.9925	1.0020	2.1226	2.3163	2.3206
		1	1.7650	1.7743	1.2228	1.0256	0.9773
		2	0.7884	0.7393	0.7438	0.7214	0.7420
		3	0.3723	0.4081	0.3997	0.3667	0.4063
		4	0.2875	0.2755	0.2740	0.2599	0.2913
		5	0.2055	0.1994	0.2047	0.2021	0.2415
		7	0.2032	0.2006	0.2068	0.1858	0.2335
		10	0.1321	0.1020	0.1392	0.1518	0.2320
	<i>f</i>	0.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
		1	0.7597	0.7197	0.8024	0.8125	0.7330
		2	0.7262	0.7484	0.7142	0.6562	0.6048
		3	0.6166	0.5987	0.5719	0.5334	0.4976
		4	0.5311	0.5340	0.5238	0.4911	0.4443
		5	0.5416	0.5196	0.5121	0.4809	0.4268
		7	0.5871	0.5510	0.5473	0.5175	0.4385
		10	1.0138	1.1281	0.6602	0.6877	0.7578
	SSE		0.1545	0.1908	0.1428	0.2047	0.1359
指数関	1		0.0987	0.0915	0.1184	0.1090	0.1317
	2		1.3482	1.3246	1.5081	1.4755	1.2658
			1.1821	1.1861	1.4414	1.5558	1.4164
	SSE		1.2782	1.4294	1.6321	1.9814	2.3021
BGM派生	1		0.3702	0.3417	0.3385	0.2955	0.3437
	2		1.7683	1.7454	1.9573	1.8859	1.8333
			1.4392	1.3871	1.5375	1.5430	1.3958
			0.2116	0.2184	0.2742	0.2988	0.3632
	SSE		0.4747	0.4983	0.4202	0.6280	0.5301

まず、ボラティリティ関数間の相対的な推定精度を比較するために、それぞれの関数毎に SSE の一日あたりの平均値を求めた。結果は【図表 3-3】のとおりである（【図表 3-3】は SSE 平均の小さい順に並べている）。

【図表 3-3】関数形によるパラメータ数・推定精度の比較

	BGM 型	BGM 派生型	階段関数型	指数関数型	一定
パラメータ数	15	4	8	3	1
SSE 平均	0.1554	0.5605	1.5508	1.6160	6.6956

【図表 3-3】で注目すべきは、 t の方が よりも精度がよい点であろう。 t が 8 パラメータであるのに対し、 t では半分の 4 パラメータであるにも関わらず、精度としては明白な差が生じている。 t と t の違いは、 t に対応する関数 $f(t)$ があるかないかである。 $f(t)$ がボラティリティの期間構造を示していることから、期間構造の表現がボラティリティ・フィッティングに不可欠である、ということが考えられる。

ところで、神楽岡 [1999]は、日本のヒストリカルな金利データを主成分分析によって調べた結果、ボラティリティは時間的に安定している、つまりボラティリティの期間構造を想定しなくてよいという結論を出している。一方、今回我々が得た上記の結果はそれに反するものとなっている。この相違が計測時点の違いによるものなのか²³、ヒストリカル・ボラティリティとインプライド・ボラティリティの特性の違いによるものなのか、今後さらに分析を行う必要がある。

次に、個別の推定精度を見るために、キャリブレーションによって求められたパラメータを用いた計算価格と市場価格の誤差率の平均値を【図表 3-4】に表示した。全体としてみると、最も精度の高い t でも平均的な価格誤差率は 4.41%となっており、BGM 論文と比べるとかなり当てはまりが悪い²⁴。これは主として、BGM 論文で用いられていたデータと比べて、キャップ・スワプシ

²³ 神楽岡 [1999]は 1995 年から 1997 年のデータを使用している。

²⁴ BGM 論文は、英国の市場データを用いてキャリブレーションしたボラティリティ関数を基に、7 つのキャップと 8 つのスワプシオンについて市場価格と BGM モデルでの価格を比較しているが、それによると、価格誤差率は平均で 0.64%、最大のものでも 2.5%となっている。

ョンとも市場で提示されたブラックのボラティリティが短期と長期で大きく乖離していること²⁵が原因になっていると考えられる²⁶。

【図表 3-4】市場価格と推定パラメータによる計算価格の平均誤差率

	一	階 段 関	BGM型	指 数 関	BGM派 生
8月23日	32.65%	15.51%	4.15%	15.86%	8.93%
8月24日	32.70%	15.09%	4.18%	15.41%	8.62%
8月25日	32.71%	15.09%	4.20%	15.44%	8.71%
8月26日	32.41%	13.30%	4.45%	13.60%	7.75%
8月27日	32.27%	13.30%	4.33%	13.59%	7.49%
8月30日	32.17%	13.33%	4.40%	13.52%	7.20%
8月31日	33.09%	14.17%	4.92%	14.39%	7.36%
9月1日	33.51%	15.72%	4.08%	15.87%	7.25%
9月2日	34.74%	17.03%	5.17%	17.28%	9.31%
9月3日	32.30%	17.85%	4.21%	18.23%	8.70%
平 均	32.85%	15.04%	4.41%	15.32%	8.13%

ところで、【図表 3-1】を見ると分かるとおり、短期のキャップ・ボラティリティが9月に入ってから急激に上昇している²⁷。その影響が、各ボラティリティ関数のパラメータ推定値にどのような影響を与えているかを見る。

まず、ボラティリティ関数が一定の場合は、 γ の値が9月に入ると若干低下している。これは、短期のキャップ・ボラティリティ上昇以上に、スワプションのボラティリティが測定期間を通じて全体的に低下傾向にあるという影響をより強く受けたものと考えられる。実際、 γ の低下傾向は期間全体を通じて見られる。

および のような階段関数型では、 $\gamma_1(0.5)$ が8月時の値と比べて大きく上昇している(では8月31日 1.0604 9月1日 1.4265、 では8月31日 1.0020

²⁵ 神楽岡 [1999]も、同様の理由から BGM モデルでは日本の市場をうまく説明できないとしている。

²⁶ その他に、BGM 論文で用いられた階段関数と比べて区切り数が少ない、という点も乖離拡大の原因と考えられたが、実際に区切り数を増やしてもほとんど効果がないことを予備的検証で確認した。

²⁷ このような急激な上昇の理由は明らかではない。市場では、キャップ・スワプション間での裁定取引が影響したという説、エキゾチックなデリバティブのヘッジが関与したという説等が流れていた模様である。

9月1日 2.1226)。それを補正するためか、 γ_1 では1~2年の γ_1 が、 γ_2 では1年の γ_1 が低くなっている。両者ともそれ以降の γ_1 には殆ど変化は見られていない。

およびの指数関数形では、 σ_2 が上昇している。但し、 σ_1 は上昇度合が小さい。一方、相対的に長短のボラティリティ格差が大きくなることから、それを反映する形で λ の値が λ_1 、 λ_2 ともに上昇している。

最後に、こうしたボラティリティの急変がフィッティング精度にどのような影響を与えているかを見るために、SSEの8月および9月の平均値とその差を計算した。結果は【図表 3-5】のとおりであり、 $f(t)$ を有していない、 σ_1 、 σ_2 では9月に入りSSEが上昇しているのに対し、 $f(t)$ を有するおよびでは、殆ど変わっていない。サンプル数が少ない(8月は7日間、9月は3日間)ので明言することは難しいが、ボラティリティの急激な変化に対しても、ボラティリティの期間構造を表現できる $f(t)$ を内包させておくことで、フィッティングの安定性が増しているのではないかということが考えられる。

【図表 3-5】月別 SSE の平均値の比較

	一定	階段関数型	BGM 型	指数関数型	BGM 派生型
8月平均	6.5671	1.4089	0.1530	1.4635	0.5753
9月平均	6.9952	1.8817	0.1611	1.9718	0.5261
9月-8月	0.4281	0.4728	0.0081	0.5083	-0.0492

4 BGM モデル発表後の派生研究

BGM モデルの発表以降、その周辺領域において多数の研究がなされている。以下では、理論面の課題、実務へ適用する際の課題に分けて、それら派生研究の紹介をする。

4.1 理論面での課題

BGM モデルにおいては、LIBOR および瞬間フォワード・レートに関する確

率微分方程式が与えられるが、これらの方程式に解が存在するためには、ボラティリティ $\gamma(t, x)$ に対していくつかの条件が必要となる。BGM 論文によると、LIBOR の存在条件よりも瞬間フォワード・レートの存在条件の方が厳しく、少なくとも $\gamma(t, x)$ は x について一階連続微分可能でなければならないし、また、

$$(\partial/\partial x)\gamma(t, x)|_{x=0} = 0 \quad (7)$$

という式が成立しなければならない。その結果、 $\gamma(t, x)$ をキャリブレートする際に仮定できる関数形もかなり限定されてしまう。3.1節で導入した BGM 型のボラティリティ関数は、階段関数であるため当然ながらこのような滑らかな条件は満たしていない。また、 γ や σ といった指数関数形も式(7)を満たさない。よって、これらの中では、瞬間短期金利が存在しないこととなってしまう²⁸。

それを解決するために Jamshidian [1997] や Musiela and Rutkowski [1997] では、瞬間的な短期金利を用いないモデル化を試みている。両者とも、瞬間短期金利の存在を仮定せず、LIBOR によって定義される有限個の割引債に関する無裁定条件²⁹を構築し、有限個の債券を用いた自己充足的な取引戦略によって、LIBOR およびスワップ・レートのデリバティブがヘッジ可能であることを示している。そして、その設定の下で、フォワード中立測度下において LIBOR が対数正規過程かつマルチンゲールとなるモデルの構築が可能であることを示している。

さらに Jamshidian [1997] は、同じ設定の下でスワップ・レートがマルチンゲールとなるような測度³⁰を構築し、その下でスワップ・レートが対数正規過程となるモデルを示している。その結果、スワップションのブラック・モデルによる解析解は、瞬間短期金利の存在を仮定しない世界での無裁定条件と整合性が保たれることとなる。ただし、そのモデルは LIBOR が対数正規過程となるモデルとは同時に存在し得ないとしている。

4.2 実務適用に向けて

実務への適用に向けても多くの派生研究がなされている。

²⁸ LIBOR に関する確率微分方程式の解の存在条件はもう少し緩いため、ボラティリティが区分的連続関数であっても解は存在する。

²⁹ Musiela and Rutkowski [1997] は、この条件を弱無裁定条件 (weak no-arbitrage condition) と定義している。

³⁰ Jamshidian [1997] は、フォワード・スワップ測度 (forward swap measure) と呼んでいる。

まず、スワプションの解析解が挙げられる。BGM 論文では、上述したよう
にかなり強い制約が置かれている。また結果として出てきた解析解はスワッ
プ・レートが対数正規分布となるモデルではないという意味で、市場で用いら
れているブラック・モデルと整合性が保たれていない。

Jamshidian [1997]に書かれているように、理論的には、LIBOR が対数正規過
程に従うモデルとスワップ・レートが対数正規過程に従うモデルは共存できな
い(同論文では別々に扱うことが提唱されている)。しかしながら、例えば LIBOR
トリガー・スワップ³¹などのように両者が価格に影響するようなデリバティブ
も存在することや、LIBOR とスワップ・レートを統合して扱うリスク管理モデ
ルの必要性を勘案すると、両者が共存できるモデルがあれば実務としては非常
に便利である。

これについて Rebonato [1999b]は、スワップ・レートを中心としたモデルを
構築し、その下で両者ともに対数正規分布に従うという仮定を置いた場合の価
格の誤差を計算し、それが殆ど影響を及ぼさない程度(ビッド・アスクの範囲
内)であることを示している。

Brace, Dun and Barton [1998]においても、LIBOR を中心としたモデルを構築
し、その下でモンテカルロ・シミュレーションによって求められたスワプショ
ンの価格およびリスク指標(デルタ・ガンマ・ベガ)と、近似的に求められた
スワプション価格およびリスク指標を比較し、アット・ザ・マネー近辺ではか
なり精度の高い結果が得られていると報告している。

Matsumoto [1999]は、BGM モデルを、BGM 論文とは異なったアプローチで
近似することにより、スワップ・レートを近似的に対数正規過程と見なしたス
ワプション価格が導出できることを示している。

なお、Matsumoto [1999]は、BGM 論文において LIBOR の期間が一定と置か
れている点にも着目している。実務では、休日の問題などから一定とはならな
い。そこで、Matsumoto [1999]は、期間が一定となっている理想的な LIBOR が
BGM モデルに従うと想定し、その理想的な LIBOR よりも期間が少しだけ異な
る LIBOR についても、近似的に対数正規過程に従うことを示している³²。

³¹ スワップ取引を実行するかどうか、ある時点の LIBOR の水準によって決定される取引。

³² Matsumoto [1999]は、前者を理想 LIBOR (ideal LIBOR)、後者を擬似 LIBOR (pseudo LIBOR) と呼んでいる。

ボラティリティ・スマイルの問題についても検討する必要がある。上述したとおり、BGM モデルにおいては、ボラティリティが金利水準に依存できないため、ボラティリティ・スマイル等の効果を内包することはできない。これについて、安岡 [1999]は、アット・ザ・マネーでのキャリブレーション結果を基に、アット・ザ・マネー以外のキャップの価格情報からアット・ザ・マネー以外のスワプシヨンの価格を推定する方法を紹介している。また、右下がりのスマイル効果（スキュー効果）を織込める LIBOR モデルを提示している。

また、一般にキャップ取引やスワプシヨ取引には信用リスクが伴うことから、BGM モデルを用いて、デフォルトの可能性を織込んだモデルを検討することも考えられる。例えば、Lotz and Schlögl [1998]は、

- デフォルトのない LIBOR が対数正規過程に従う
- デフォルトの強度は確定的な関数で、デフォルト時の回収率は一定

と仮定した上で、デフォルト可能性のある LIBOR やスワップ・レートの定式化を試みている。その結果、LIBOR については解析解が得られるが、スワップ・レートは BGM モデルで解析解が得られないことから、期待値の表現のみに止まっている（BGM 論文で行われているような近似的計算はなされていない）。

5 おわりに

本稿では、BGM モデルの概要を説明し、LIBOR が対数正規過程として記述されることから実務的に有用な特徴が生まれることなどを解説した。Brace, Gatarek and Musiela [1997]は数学的に非常に難解な内容を含んでおり、またその理論的課題について取り組んでいる各種論文（例えば Jamshidian [1997]など）も相当に難解である。本稿は、実務家に対してそうした研究への橋渡しをすることを目的の一つとして、本文中では極力数式を用いず、直感的な理解が得られるように工夫した。一方、モデルの設定および解析解の導出に関する厳密な数学的展開は、補論において詳説した。

また、第3章では、ボラティリティ関数をいくつか想定した上で、最近の日本の金利デリバティブ市場のデータを用いて BGM モデルのキャリブレーションを行い、そのフィット度合い、ボラティリティ関数の相互比較、モデルの安定性等に関する検証を行った。実証結果の要点は次のとおりである。

- ボラティリティ関数を時点 t に依存させることにより、フィッティング精度を向上させることができた。これはボラティリティの期間構造の存在を示していると考えられる。また、ボラティリティ関数を時点 t に依存させることで、モデルの安定性も増しているという結果が得られた。
- 一方、英国市場についての実証報告等と比較すると、わが国の市場価格データは全体的にモデルとの当てはまりが悪い傾向がみられた。例えば、最もフィットが良いモデルでも平均的に 4% 程度の誤差が確認された。主な理由としては、短期と長期のボラティリティが大きく乖離しているといった、昨今の日本市場特有の現象が関与していると考えられる。

第4章では BGM モデルの派生研究を簡単にサーベイした。現状、BGM 論文が発表されてからまだ日が浅いこともあり、公表された派生研究はそれほど多くない。キャリブレーションやスマイル効果の織込みなどの応用分野で、今後も一層の研究が期待される。

補論：BGM モデルおよび解析解の導出について

本補論では、BGM モデルおよび同モデルによる金利デリバティブの解析解の導出方法について、数式を用いて詳しく解説する。

本文第2章でも述べたように、BGM 論文では HJM モデル同様、瞬間的なフォワード・レートのモデル化から始めている。HJM モデルは、時点 t で観測される将来時点 T のフォワード・レート $f(t, T)$ をモデル化しているが、BGM 論文は、時点 t で観測される時点 t から x 時点後のフォワード・レート $r(t, x)$ という表現を用いている（両者には、 $r(t, x) = f(t, t+x)$ という関係が成立する）。BGM 論文では、出発点として $r(t, x)$ がリスク中立測度下で次の確率微分方程式を満たすと仮定する。

$$dr(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[r(t, x) + \frac{1}{2} |\sigma(t, x)|^2 \right] dt + \sigma(t, x) \cdot dW(t) \right\} \quad (A1)$$

但し $\sigma(t, 0) = 0$ とする。式(A1)は一見複雑であるが、HJM モデル同様、無裁定条件を満たしていることが次のようにして示される。

無裁定条件を満たすには、任意の満期の無リスク割引債について、銀行預金（money market account）をニューメールとする相対価格がマルチンゲールとなる必要がある。フォワード・レート $r(t, x)$ を用いると、満期 T の無リスク割引債は、

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_0^{T-t} r(t, u) du \right)$$

で表現できるが、それを銀行預金

$$\beta(t) = \exp \left(\int_0^t r(s, 0) ds \right) \quad (A2)$$

で割った相対価格を $P^*(t, T)$ と書くと、

$$\log(P^*(t, T)) = - \int_0^{T-t} r(t, u) du - \int_0^t r(s, 0) ds$$

が成立する。この両辺を t で微分すると、

$$d\{\log(P^*(t, T))\} = r(t, T-t)dt - \int_0^{T-t} [dr(t, u)]du - r(t, 0)dt \quad (A3)$$

が得られる。式(A3)に式(A1)を代入し、伊藤の公式を用いることで

$$\frac{dP^*(t,T)}{P^*(t,T)} = -\sigma(t,T-t) \cdot dW(t) \quad (\text{A4})$$

が得られ、任意の満期 T に対して $P^*(t,T)$ はマルチンゲールとなることが示され、式(A1)は無裁定条件を満たしていることが分かる。また、式(A4)から式(A1)の $\sigma(t,x)$ は債券価格のボラティリティを示していることも分かる。

さて、実際にモデル化したいのはフォワード LIBOR³³である。時点 t で観測される時点 t から x 時点後のフォワード LIBOR を $L(t,x)$ (LIBOR の期間は δ で一定とする) と記せば、 $L(t,x)$ は $r(t,x)$ を用いて、

$$1 + \delta L(t,x) = \exp\left(\int_x^{x+\delta} r(t,u) du\right) \quad (\text{A5})$$

と定義できることから、

$$dL(t,x) = \frac{1}{\delta} d\left[\exp\left(\int_x^{x+\delta} r(t,u) du\right)\right] \quad (\text{A6})$$

が得られる。右辺の () 内の積分形については式(A1)から

$$d\left[\int_x^{x+\delta} r(t,u) du\right] = \left\{r(t,x+\delta) - r(t,x) + \frac{1}{2}|\sigma(t,x+\delta)|^2 - \frac{1}{2}|\sigma(t,x)|^2\right\} dt + \{\sigma(t,x+\delta) - \sigma(t,x)\} \cdot dW(t)$$

となるので、式(A6)に伊藤の公式を適用し、

$$dL(t,x) = \frac{1}{\delta} \exp\left(\int_x^{x+\delta} r(t,u) du\right) \times \left[\left\{r(t,x+\delta) - r(t,x) + \frac{1}{2}|\sigma(t,x+\delta)|^2 - \frac{1}{2}|\sigma(t,x)|^2\right\} dt + \{\sigma(t,x+\delta) - \sigma(t,x)\} \cdot dW(t) + \frac{1}{2}|\sigma(t,x+\delta) - \sigma(t,x)|^2 dt \right] \quad (\text{A7})$$

³³ 本文中では簡便性を優先させ、フォワード LIBOR も LIBOR と記した (3ページの脚注5参照) が、補論では厳密さを優先させ、必要に応じてフォワード LIBOR と記すこととする。スワップ・レートについても同様である。

が得られる。式(A5)およびそれを x で微分した

$$\frac{\partial}{\partial x} L(t, x) = \frac{\{r(t, x + \delta) - r(t, x)\}}{\delta} \exp\left(\int_x^{x+\delta} r(t, u) du\right)$$

という関係を用いることで

$$\begin{aligned} dL(t, x) = & \left[\frac{\partial}{\partial x} L(t, x) + \frac{1 + \delta L(t, x)}{\delta} \sigma(t, x + \delta) \cdot \{\sigma(t, x + \delta) - \sigma(t, x)\} \right] dt \\ & + \frac{1 + \delta L(t, x)}{\delta} (\sigma(t, x + \delta) - \sigma(t, x)) \cdot dW(t) \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

となる。式(A8)で表現されたフォワード LIBOR $L(t, x)$ が対数正規過程に従うようにするには、本文5ページで述べたように、 $\gamma(t, x)$ をある確定的で有界かつ区分的に連続な関数として、

$$dL(t, x) = \dots dt + L(t, x) \gamma(t, x) \cdot dW(t)$$

が任意の x について成立すればよいことが知られているので、式(A8)の右辺第二項の形から、

$$\sigma(t, x + \delta) - \sigma(t, x) = \frac{\delta L(t, x)}{1 + \delta L(t, x)} \gamma(t, x) \quad (\text{A9})$$

が成り立てばよいことが分かる。式(A9)が成立すると仮定すれば、式(A8)は、

$$\begin{aligned} dL(t, x) = & \left\{ \frac{\partial}{\partial x} L(t, x) + L(t, x) \gamma(t, x) \cdot \sigma(t, x + \delta) \right\} dt + L(t, x) \gamma(t, x) \cdot dW(t) \\ = & \left\{ \frac{\partial}{\partial x} L(t, x) + L(t, x) \gamma(t, x) \cdot \sigma(t, x) + \frac{\delta L^2(t, x)}{1 + \delta L(t, x)} \left| \gamma(t, x) \right|^2 \right\} dt \\ & + L(t, x) \gamma(t, x) \cdot dW(t) \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

となる。また、式(A9)から、 $0 \leq x < \delta$ での $\sigma(t, x)$ が与えられれば、 $x \geq \delta$ での $\sigma(t, x)$ は自動的に決まることが分かる。特に、

$$\sigma(t, x) = 0, \quad 0 \leq x < \delta \quad (\text{A11})$$

と仮定すれば、

$$\sigma(t, x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x/\delta \rfloor} \frac{\delta L(t, x - k\delta)}{1 + \delta L(t, x - k\delta)} \gamma(t, x - k\delta), \quad x \geq \delta$$

となる。ここで、 $\lfloor x/\delta \rfloor$ は x/δ を超えない最大の整数を表す。

数学的には、式(A1)および式(A10)に解が存在すること、つまり瞬間フォワード・レート $r(t, x)$ やフォワード LIBOR $L(t, x)$ が存在することを確認することが重要となる。フォワード LIBOR については $\gamma(t, x)$ が有界で区分的に連続で、 $\sigma(t, x)$ について式(A11)が満たされていれば、 $L(t, x)$ について一意の解が存在すること、さらに、初期値が $L(0, x) > 0$ を満たせば、 $t > 0$ で $L(t, x)$ も正となることが示されている。また、 $L(0, x)$ や $\gamma(t, x)$ の滑らかさに関する条件（例えば $\gamma(t, x) \in C^k(\mathbf{R}_+)$ など）やその他の条件（例えば $(\partial^j / \partial x^j) \gamma(t, x)|_{x=0} = 0$ など）が付加されることで、より滑らかな解の存在が示される。

一方、瞬間フォワード・レート $r(t, x)$ が存在するには、 $\gamma(t, x) \in C^1(\mathbf{R}_+)$ でかつ $(\partial / \partial x) \gamma(t, x)|_{x=0} = 0$ が満たされる必要がある。

次に、解の存在が示された式(A10)を用いて、キャップおよびスワプションの解析解を導出する。以下で用いる記号は、本文中の式(1)（4ページ）で定義されたものと同じとする。

一般にキャップ価格は、リスク中立測度下においてペイオフの相対価値の期待値をとる。すなわち、

$$\text{Cap}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \delta E \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_{i+1})} \{L(T_i, 0) - \kappa\}^+ \middle| F_t \right] \quad (\text{A12})$$

から得られる（ここで $\beta(t)$ は式(A2)で表現される銀行預金、 F_t はフィルトレーション³⁴を表す）。ただし、式(A10)の形からも分かるとおり、 $L(t, x)$ はリスク中立測度下でマルチンゲールとはならない（トレンド成分が残る）ので、さらに2つの工夫が必要である。

一つはリスク中立測度をフォワード中立測度に変換することである。フォワード中立測度とは、ニューメルールとしてある満期 T を持つ割引債を採用した場合に、原資産の相対価格（これは先渡価格になる）がマルチンゲールとなるような測度であり、その期待値を $E^T[\]$ と記せば、デリバティブ X の価格を通じて、リスク中立測度との間に、

$$E \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} X \middle| F_t \right] = P(t, T) E^T[X] \quad (\text{A13})$$

が成立することが知られている。また、

³⁴ t 時点までに入手可能な情報のこと。数学的には、部分集合代数の増大列のことである。

$$dW^T(t) \equiv \sigma(t, T-t)dt + dW(t) \quad (\text{A14})$$

と定義すると、 $W^T(t)$ はフォワード中立測度下で標準ブラウン運動となることも分かる³⁵。

もう一つの工夫は、フォワード LIBOR の表現方法を $L(t, x)$ から t 時点で観測される T 時点のフォワード LIBOR $K(t, T)$ に替えることである。両者には、

$$K(t, T) = L(t, T-t)$$

という関係があるので、

$$dK(t, T) = dL(t, T-t) - \left. \frac{\partial}{\partial x} L(t, x) \right|_{x=T-t} dt$$

が導かれ、これを式(A10)に代入すれば、

$$dK(t, T) = K(t, T)\gamma(t, T-t) \cdot \{\sigma(t, T+\delta-t)dt + dW(t)\} \quad (\text{A15})$$

となる。式(A15)右辺の $\{\}$ 内は、式(A14)から時点 $T+\delta$ を満期と考えた場合のフォワード中立測度に関する標準ブラウン運動 $dW^{T+\delta}(t)$ となるのが分かるので、この測度の下で $K(t, T)$ はマルチンゲールとなり、さらに $\gamma(t, x)$ が確定的であるから、対数正規過程となる。キャップを構成している各フォワード LIBOR $K(t, T_i)$ については、時点 $T_{i+1} = T_i + \delta$ を満期と考えた割引債によるフォワード中立測度に対してマルチンゲールかつ対数正規過程となる。

以上から、キャップの価格式(A12)は次のように書き直せる。

$$\begin{aligned} \text{Cap}(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} \delta E \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_{i+1})} \{L(T_i, 0) - \kappa\}^+ \middle| F_t \right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \delta P(t, T_{i+1}) E^{T_{i+1}} \left[\{K(T_i, T_i) - \kappa\}^+ \middle| F_t \right] \end{aligned}$$

最右辺の期待値は、ブラック・モデルにおける解析解と全く同様に計算ができ、結果として、

$$\text{Cap}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \delta P(t, T_{i+1}) \{K(t, T_i) \Phi(h(t, T_i)) - \kappa \Phi(h(t, T_i) - \zeta(t, T_i))\} \quad (\text{A16})$$

$$\text{ただし、} \quad h(t, T) = \frac{\log \frac{K(t, T)}{\kappa} + \frac{1}{2} \zeta^2(t, T)}{\zeta(t, T)}$$

³⁵ フォワード中立測度のこうした性質については、例えば木島 [1999]を参照のこと。

$$\zeta^2(t, T) = \int_t^T |\gamma(s, T-s)|^2 ds$$

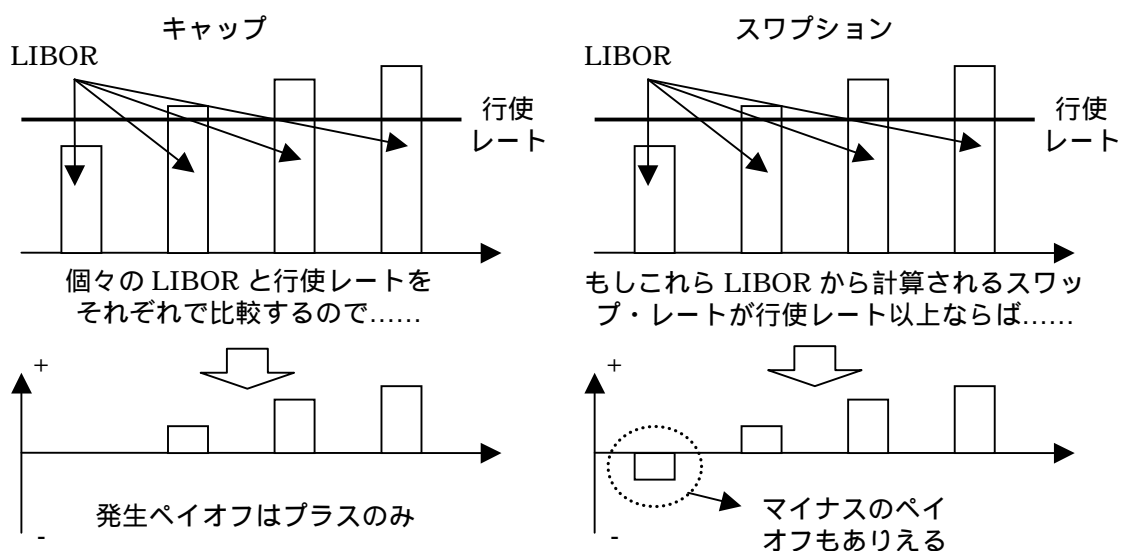
が得られる。ここで、 $\gamma(t, x) = c > 0$ (t や x の値によらず一定) であるとするれば、 $\zeta(t, T) = \sigma\sqrt{T-t}$ となり、式(A16)は本文中の式(1)にあるブラック・モデルのキャップ解析解に完全に一致することが分かる (c がいわゆるインプライド・ボラティリティに対応する)。

次にスワプシヨンの価格式について考える。本文中にも述べたように、一般に BGM モデルではスワプシヨンについては厳密な意味での解析解が求められないため、何らかの近似が必要となる。ここでは、BGM 論文で行われた近似を説明する前に、何故キャップとは異なり、スワプシヨンでは解析解が得られないのかという点について説明する。

キャップとスワプシヨンの一番の違いは、キャップが単一のペイオフを持つオプション(これをキャプレットと呼ぶ)の束となっているのに対し、スワプシヨンは、複数のペイオフを入手するかどうかを選択できる一つのオプションであるという点である。

この関係を図示したものが【図表 A-1】である。

【図表 A-1】キャップとスワプシヨンのペイオフの違い



したがって、ペイオフ関数には個々の LIBOR ではなく、スワップ・レートと行使レートとの関係が必要となる。スワップ・レートが LIBOR の加重平均で表さ

表されることから、その重みを ω_i として、単純化して表現すれば、例えばペイヤーズ・スワプションの価格は、

$$E \left[\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i L(t, T_i) - \kappa \right\}_+ \right] \quad (\text{A17})$$

となる³⁶。式(A17)において総和記号 (Σ) は、通常は中括弧 $\{\}$ の外、つまり期待値の外に出せない。したがって、このまま計算するためには、この LIBOR 加重平均値 (すなわちスワップ・レートそのもの) がマルチンゲールに従うような測度の下で、その確率分布を知る必要がある。ところで、上記キャップの計算ではフォワード中立測度を使っていたが、各フォワード LIBOR 毎に用いる測度は異なっていた。仮にそれが統一できたとしても、一般に2つの対数正規分布に従う確率変数の和は対数正規分布とならないことから、フォワード LIBOR が対数正規分布に従っている場合でも、その加重平均値は対数正規分布とはならない。これが、BGM モデルでスワプション価格を解析的に求めることが難しい原因である。ブラック・モデルでは、スワプション価格導出に際し、フォワード・スワップ・レートが対数正規過程に従っていると最初から仮定していたので計算できたに過ぎない。

ただし、バシチェック・モデルやハル・ホワイト・モデルのように、1ファクターのスポット・レート・モデルで、各金利がスポット・レート r と同一の方向に変動する場合においては、式(A17)の総和記号を中括弧 $\{\}$ の外に出すことができ、結果として解析解が得られることを Jamshidian [1989] が示した³⁷。そのアイデアは次のようなものである。

この場合、各フォワード LIBOR は r によって表現できるので、式(A17)は、

$$E \left[\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i L(r, t, T_i) - \kappa \right\}_+ \right] \quad (\text{A18})$$

と書ける。上述した前提から、各 $L(r, t, T_i)$ は r に対する単調増加関数となっている。ここで、

³⁶ 分かりやすさを優先させ、LIBOR の期間 やニューメレール等は省略してある。

³⁷ 実際に、Jamshidian [1989] で示されているのは利付債のヨーロピアン・オプションの解析解であるが、スワプションも全く同様である。

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i L(r^*, t, T_i) = \kappa$$

となる r^* を見つけられたとする³⁸と、式(A18)は、

$$E \left[\left[\sum_{i=0}^{n-1} \{ \omega_i L(r, t, T_i) - \omega_i L(r^*, t, T_i) \} \right]_+ \right]$$

となる。ここで、 $L(r, t, T_i)$ の単調性より

$$\begin{array}{ll} r < r^* & []_+ \text{の中はマイナス} \quad \text{全ての } i \text{ に対し } \{ \} \text{の中はマイナス} \\ r = r^* & []_+ \text{の中はゼロ} \quad \text{全ての } i \text{ に対し } \{ \} \text{の中はゼロ} \\ r > r^* & []_+ \text{の中はプラス} \quad \text{全ての } i \text{ に対し } \{ \} \text{の中はプラス} \end{array}$$

であるから、結局 $[]_+$ のプラスは $\{ \}$ の中に入れることができ、

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i E \left[\{ L(r, t, T_i) - L(r^*, t, T_i) \}_+ \right] \quad (\text{A19})$$

とできる。後は期待値を計算すればよいが、(A19)の $E[]$ は行使レートを $L(r^*, t, T_i)$ とするコール・オプション価格と同様に計算できる。

BGM 論文でもこうした Jamshidian [1989] と同様の考え方をを用いている。まず準備として、フォワード・スワップ・レートの式を算出しておく。時点 t における、時点 T_0 から始まり、金利交換が n 回あるフォワード・スワップ・レートの値 $\omega_{T_0}(t, n)$ は次式で示される。

$$\omega_{T_0}(t, n) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\delta \sum_{i=1}^n P(t, T_i)} \quad (\text{A20})$$

ペイヤーズ・スワプションがイン・ザ・マネーで終わるのは、時点 T_0 でのスワップ・レートが行使レート κ よりも高い場合なので、その事象を A で表すと、 A は式(A20)を用いて、

$$A = \{ \omega_{T_0}(T_0, n) \geq \kappa \} \quad (\text{A21})$$

と表現できる。ここで、

³⁸ r^* の計算は、内部収益率 (IRR) の計算方法と同様であり、解析解は存在しないものの、ニュートン法などの数値解法を用いることで簡単に算出できる。

$$C_j = \begin{cases} \delta\kappa & j = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1 + \delta\kappa & j = n \end{cases}$$

と置くと、式(A21)は、

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \sum_{j=1}^n C_j P(T_0, T_j) \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{\prod_{i=0}^{j-1} (1 + \delta K(T_0, T_i))} \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{\prod_{i=0}^{j-1} \{1 + \delta K(t, T_i) \exp(X_i - 1/2 \Gamma_i^2)\}} \leq 1 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A22})$$

と書ける。ただし、

$$X_i = \int_t^{T_0} \gamma(s, T_i - s) \cdot dW^{T_{i+1}}(s) \quad (\text{A23})$$

$$\Gamma_i^2 = \int_t^{T_0} |\gamma(s, T_i - s)|^2 ds \quad (\text{A24})$$

である（ $W^{T_{i+1}}(s)$ は満期 T_{i+1} に対応するフォワード中立測度の下での標準ブラウン運動）。BGM論文では、式(A22)およびフォワード中立測度の関係を使うことにより、ペイヤーズ・スワプションの価格が

$$\begin{aligned} P_s(t) &= \delta \sum_{i=0}^{n-1} P(t, T_{i+1}) E^{T_{i+1}} \left[(K(T_0, T_i) - \kappa) I_A | F_t \right] \\ &= \delta \sum_{i=0}^{n-1} P(t, T_{i+1}) \left\{ E^{T_{i+1}} \left[K(T_0, T_i) I_A | F_t \right] - \kappa E^{T_{i+1}} \left[I_A | F_t \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A25})$$

となることが証明されている。ここで、 I_A は事象 A に関する定義関数である。式(A25)はオプションを行使した場合（ $I_A = 1$ ）のみ、フォワード LIBOR と行使レートの差を計算してその期待値を求める、という形になっているので感覚的にも分かりやすい。これにより、式(A17)の総和記号が各フォワード測度による期待値の外に出せたので、あとは各フォワード測度において、 $K(T_0, T_i) I_A$ や I_A の期待値が求められればよい。しかし、事象 A はスワプションの原資産であるスワップ・レートを構成するフォワード LIBOR 全てを内包した式であるから、 I_A 等を各フォワード中立測度の下で直接計算することはできない。そのため、BGM論文では約3ページに亘り、式(A25)を計算可能にするための工夫がなされている。ここに全てを再現するのは煩雑であるため、次の2つの重要な

近似を中心に紹介する。

$$\frac{\delta K(s, T_i)}{1 + \delta K(s, T_i)} \approx \frac{\delta K(t, T_i)}{1 + \delta K(t, T_i)} \quad t \leq \forall s \leq T_0 \quad (\text{A26})$$

$$\Delta_{ij} \equiv \int_t^{T_0} \gamma(s, T_i - s) \cdot \gamma(s, T_j - s) ds = \Gamma_i \Gamma_j \quad (\text{A27})$$

この近似は一見テクニカルだが、これを用いることにより、フォワード中立測度がフォワード LIBOR 間で異なること等に対処することができる。

式(A27)をイメージ的に捉えれば次のとおりとなる³⁹。式(A15)から分かるように、 $\gamma(t, T_j - t)$ は $K(t, T_j)$ の瞬間的なボラティリティを表しているので、式(A27)は時点の異なる2つのフォワード LIBOR $K(t, T_j)$ と $K(t, T_i)$ の期間 $[t, T_0]$ における共分散であると考えられる。共分散が期間 $[t, T_0]$ における $K(t, T_j)$ と $K(t, T_i)$ のボラティリティの積に等しいということは、相関が1である(常に同一方向に変動する)ことを意味している。よって、Jamshidian [1989]のモデルと同様の状況を作り上げたということになる。

この結果、フォワード中立測度毎に期待値が計算できるようになる。結果として近似的なペイヤーズ・スワプションの価格 $P_{sa}(t)$ は次のとおりとなる。

$$P_{sa}(t) = \delta \sum_{i=0}^{n-1} P(t, T_{i+1}) \{K(t, T_i) \Phi(-s_0 - d_i + \Gamma_i) - \kappa \Phi(-s_0 - d_i)\} \quad (\text{A28})$$

ここで、 Γ_j は式(A24)で定義されたとおりであり、

$$d_i = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\delta K(t, T_k)}{1 + \delta K(t, T_k)} \Gamma_k$$

である。また、 s_0 は次式の解である⁴⁰。

$$\sum_{k=1}^n \frac{C_k}{\left(\prod_{i=0}^{k-1} (1 + \delta K(t, T_i)) \exp\left(\Gamma_i (s_0 + d_i) - \frac{1}{2} \Gamma_i^2 \right) \right)} = 1$$

³⁹ イメージといているのは、実際には $K(t, T_j)$ と $K(t, T_i)$ では違う測度を用いた結果で比較しているため。その点をクリアにするために、もう一つの近似である式(A26)が必要となる。

⁴⁰ s_0 は解析的には解けない場合も多いので、ニュートン法などの数値計算法で解くこととなる。これは、Jamshidian [1989]の手法において、 r^* を求める部分に相当している。

参考文献

- 神楽岡 優昌、「BGM 金利モデルの日本マーケットへの適用と展開」、『フィナンシャルテクノロジーのフロンティア』、MTEC、1999年、pp.109-125
- 加藤 敏康・吉羽 要直、「金利派生商品モデルの実務的活用について」、IMES Discussion Paper Series、No. 99-J-24、日本銀行金融研究所、1999年
- 木島 正明、『期間構造モデルと金利デリバティブ』、朝倉書店、1999年
- 安岡 孝司、「マーケットモデルに関する研究動向について」、ワーキング・ペーパー、富士総合研究所、1999年
- Black, F., "The Pricing of Commodity Contracts," *Journal of Financial Economics*, 3, pp.167-179
- Brace., A., T. Dun and G. Barton, "Towards a Central Interest Rate Model," *FMMA Notes*, 1998.
- Brace, A., D. Gařtarek and M. Musiela, "The Market Model of Interest Rate Dynamics," *Mathematical Finance*, Vol. 7, No. 2, 1997, pp. 127-155.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, Jr. and S. A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, Vol. 53, 1985, pp. 385-407.
- Heath, D., R. Jarrow and A. Morton, "Bond Pricing and Term Structure of Interest Rates: A New methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, Vol. 60, No. 1, 1992, pp. 77-105.
- Hull, J.C. and A. White, "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities," *Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, 1990, pp. 573-392.
- Jamshidian, F., "An Exact Bond Option Formula," *The Journal of Finance*, Vol. XLIV, No. 1, 1989, pp. 205-209.
- Jamshidian, F., "LIBOR and Swap Market Models and Measures," *Finance and Stochastics*, 1, 1997, pp. 293-330.
- Lotz, C. and L. Schlögl, "LIBOR and Default Risk," *Working Paper*, presented at the Center for Economic Policy Research Conference, 1998.
- Matsumoto, K., "Implementation of the BGM Model under the Actual LIBOR Period," *Working Paper*, University of Tsukuba, 1999.
- Musiela, M. and M. Rutkowski, "Continuous-Time Term Structure Models: Forward Measure Approach," *Finance and Stochastics*, 1, 1997, pp. 261-291.

- Rebonato, R., "Calibrating the BGM Model," *Risk*, March, 1999a, pp. 74-79.
- Rebonato, R., "On the Pricing Implications of the Joint Lognormal Assumptions for the Swaption and Cap Markets," *Journal of Computational Finance*, Vol. 2, No. 3, 1999b, pp. 57-76.
- Rebonato, R., "On the Simultaneous Calibration of Multifactor Lognormal Interest Rate Models to Black Volatilities and to the Correlation Matrix," *Journal of Computational Finance*, Vol. 2, No. 4, 1999c, pp. 5-27.
- Vasicek, O. A., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5, 1977, pp. 177-188.