

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

流動性リスクの評価方法について：
理論サーベイと実用化に向けた課題

小田信之・久田祥史・山井康浩

Discussion Paper No. 99-J-31

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES
BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒100-8630 東京中央郵便局私書箱 203 号

備考： 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

流動性リスクの評価方法について:

理論サーベイと実用化へ向けた課題

小田信之・久田祥史・山井康浩*

要 旨

バリュー・アット・リスク (VaR) によりポートフォリオの市場リスクを計量する上では、市場に十分な流動性があり、保有する金融商品が短期間に市場中値で売却可能であることを前提とする場合が多かった。しかしながら、97年10月のアジア危機、98年8月のロシア危機などの経験は、流動性リスクの存在と VaR の限界を改めてクローズ・アップした。

本稿の目的は、従来の VaR に改良を加え、流動性リスクを考慮した「修正 VaR」を算出する理論的枠組みを紹介し、さらにその実用化へ向けた課題を整理することである。具体的には、Subramanian and Jarrow(1999)、Lawrence(1996)および Robinson(1995)で提示されたアプローチを中心に解説を行う。これらの枠組みでは、個々の投資家の取引が価格に与える影響(マーケット・インパクト)を考慮した最適執行戦略が導出され、この最適執行戦略に従って保有ポジションの流動化を完了させるまでの間にどの程度の損失を被る可能性があるかによって修正 VaR が算出される。これを実際のポートフォリオのリスク量算定に応用するには、マーケット・インパクトの定式化、金融商品間の相関の取扱い、マーケット・ストレスの取扱い、など解決すべき実務上の問題点が存在する。今後、流動性リスクの評価を実用化させるために、これらの分野での理論・実証両面に亘る研究の発展が期待される。

キーワード：流動性、バリュー・アット・リスク、市場リスク、マーケット・インパクト、最適執行戦略、最適保有期間

JEL classification: G21

* 日本銀行金融研究所研究第1課(E-mail: nobuyuki.oda@boj.or.jp, yoshifumi.hisata@boj.or.jp, yasuhiko.yamai@boj.or.jp)

(目次)

1. はじめに	1
2. 流動性リスクを考慮した市場リスク計量の方法	2
2.1. 流動性リスクを考慮した市場リスクの計量の枠組み	2
2.2. 内生的アプローチによる修正 VaR 算定の枠組み	4
2.2.1. マーケット・インパクトの定式化	4
2.2.2. 最適執行戦略の導出	5
2.2.3. 流動性を考慮した修正 VaR の算定	6
3. スプラマニアン・ジャロー・モデル (SJ モデル)	7
3.1. モデルの設定	7
3.2. 最適執行戦略および修正 VaR の導出	8
3.3. モデルの拡張の可能性	10
4. ローレンス・ロビンソン・モデル (LR モデル)	11
4.1. 流動化コスト	11
4.2. 最適執行戦略	15
4.3. 修正 VaR の算定	15
5. 流動性リスク計量に向けた今後の課題	16
6. 終わりに	17

1. はじめに

従来、市場参加者が保有ポートフォリオのプライシングやリスク管理を行う際、特にリスク管理の標準的ツールとなったバリュー・アット・リスク（以下、VaR）に関しては、保有する金融商品が短期間に市場中値で売却可能であることが前提とされてきた。しかしながら、97年10月のアジア危機、98年8月のロシア危機などの経験は、「保有ポジションを適切なタイミングかつ適切な価格で流動化できないリスク」という意味での流動性リスク¹の存在を改めてクローズ・アップし、従来のリスク管理の在り方が問い直される結果となった。このため、VaRの限界も強く認識され、流動性リスクを明示的に考慮した市場リスク把握方法の開発が、金融当局および市中金融機関の関心事項となっている。

そこで本稿では、こうした問題意識に基づいて近年提示された二つのモデル(Subramanian and Jarrow(1999)、Lawrence(1996)およびRobinson(1995))を中心に解説を行い、その実用可能性などについて若干の考察を行う²。これらのモデルでは、市場流動性や投資家の保有ポジションの大きさに応じてポートフォリオの清算価値が影響を受けるメカニズムが取り込まれている。すなわち、流動性リスクを考慮した修正バリュー・アット・リスク（以下、修正 VaR）を算定する枠組みを提示している。

こうした流動性リスクの計量に向けた研究は今後さらに発展していくものとみられるが、本稿で紹介する内容はその土台となり得るアイデアを提供するものである。従って、本稿は流動性リスク評価の包括的な枠組みを整理するものではなく、基礎的モデルの紹介を通じて今後の研究の方向性を探ることを狙いとしている。

本稿の構成は次の通りである。第2章で、これまでに提示された流動性リスクを考慮した市場リスク計量の枠組みについて簡単に解説を行う。次に具体例として、第3章で、スブラマニアン・ジャロー・モデル(Subramanian and Jarrow

¹ 流動性という言葉は、資金繰り上のアベイラビリティを意味する場合もある。しかしながら、本稿においては、大澤・村永（1998）における流動性リスクの定義を踏襲している。

² なお、本稿は、Subramanian and Jarrow(1999)、Lawrence(1996)、Robinson(1995)をもとに作成したが、原文の内容を補うために追加的な説明を加えたり、表記を適宜変更した点を予め断っておく。

model、以下 SJ モデル)、第 4 章ではローレンス・ロビンソン・モデル³(Lawrence and Robinson model、以下 LR モデル)を紹介・解説する。第 5 章では、今後の課題として、こうしたモデルを実用化する際に問題となる点を整理し、最後に第 6 章でまとめを行う。なお第 3 章、第 4 章には、モデルの詳細を解説する上で必要最小限の数学的記述が含まれる。モデルの考え方についてだけ関心がある場合は、第 2 章と第 5 章だけを読むことも可能である。

2. 流動性リスクを考慮した市場リスク計量の方法

2.1. 流動性リスクを考慮した市場リスクの計量の枠組み

第 1 章で述べた通り、従来の VaR では、保有ポジションのサイズに関係なく一定の時価、一定の期間(典型的には 1 日)でポジションをクローズできることが前提とされていた。すなわち、

個々の投資家による取引が価格を変動させる可能性(マーケット・インパクト)を考慮しない、

保有ポジションの解消は、短期間で行うことが可能、

金融商品の中値の変動のみを市場リスクとして認識する一方、これと売値あるいは買値との乖離(ビッド・アスク・スプレッド)の変動を考慮しない、

といった仮定の上でリスクが計量されてきた。

しかしながら、こうした前提は、最近のロシアやアジアの金融危機でみられたようなストレス時はいうまでもなく、平常時においても現実的な前提とはいえない⁴。例えば、本邦国債を保有していて、金利上昇による損失発生を回避す

³ ローレンス・ロビンソン・モデルの説明は、Lawrence(1996)、Robinson(1995)などの公開セミナー資料に基づく。これらの資料は、Lawrence および Robinson が当時所属していた BZW (現 Barclays Capital) 社での開発成果の概要を解説するために作成されており、企業秘密に当たるモデルの詳細部分については不明な点が多い。このため、これらの公開資料の説明が不十分な部分に関しては、当方で独自に推量を行った上で解説した事にご留意頂きたい。

⁴ ビッド・アスク・スプレッドの変動やマーケット・インパクトに関する実証的な先行研究のサーベイ、およびこうした要因が VaR に及ぼすインパクトについては、大澤・村永(1998)参照。

るために売却を行う場合、(イ)自らの売り注文のために市場価格が低下する、(ロ)売り注文がなかなか出合わない間に外部要因から市場価格が下落する、(ハ)ビッド・アスク・スプレッドが拡大する、といった事態が発生し、従来のリスク計測の枠組みでは予期し得なかった損失を被る可能性が存在する。

こうした問題へ対応するために、現在一部の金融機関で取られている方法として、各商品の流動性に依拠して保有期間を決定して VaR を算定するアプローチがある。これには、実務上の簡便性といったメリットがある一方で、保有期間をディーラーの経験や勘に頼って主観的に決めざるを得ないといった問題がある。そこで、流動性リスクをより客観的に評価するために、流動性リスクを明示的に考慮した修正 VaR を算定する方法が提案され始めている。各種先行研究は、大別して以下の2種類に分類可能である。

マーケット・インパクトを考慮した市場リスクの算定方法

個々の投資家の取引が価格に与える影響(マーケット・インパクト)を考慮した最適執行戦略(optimal execution policy)を導出し、これをもとに、流動性リスクを考慮した修正 VaR を算定する。具体的には、売却の意思決定を行ってから最適執行戦略に従って保有ポジションの流動化を完了するまでの間に、どの程度の損失を被る可能性があるかによって修正 VaR を算定(Subramanian and Jarrow(1999)、Lawrence(1996)、Robinson(1995))。

ビッド・アスク・スプレッドの変動を外生的に取り入れた市場リスクの算定方法

マーケット・インパクトのメカニズムには立ち入らず、ビッド・アスク・スプレッドの変動を過去のデータに基づき確率的挙動として定式化。これにより、中値の変動によるリスク値という従来型の VaR に、ビッド・アスク・スプレッドの変動から生じるリスク量を加える(Bangia, et al. (1999)、大澤・村永(1998))。

前者は、自らの取引行動が売買価格ひいては自己の損益に跳ね返るメカニズムを取り込んでいるという点で、内生的(endogenous)アプローチと呼ぶことが出来る。一方、後者については、自らの取引行動には関わらない市場全体の変動が自己の損益に与える影響を分析するという点で、外生的(exogenous)アプローチと呼ぶことが出来る⁵。これらは、互いに排他的ではなく、それぞれの重要性は市場や投資家の性質に依存している。例えば、先進国通貨の為替市場では、市場が非常に厚く、個々のトレーダーが市場価格に与える影響は相対

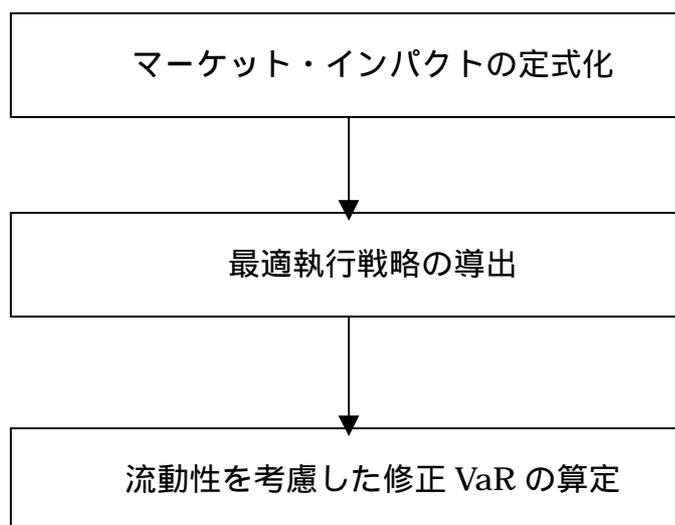
⁵ 内生的・外生的アプローチという分類は、Bangia, et al (1999)による。

的に小さいと考えられる。この場合、外生的アプローチにより十分に正確なリスク評価が可能である。一方、特定の金融商品について、取引残高に占める自己保有高の割合が高く、マーケット・インパクトが無視し得ない場合には、内生的アプローチを採用する必要がある。本稿では、以下、より一般的な枠組みである内生的アプローチに焦点を絞って解説を行う。

2.2. 内生的アプローチによる修正 VaR 算定の枠組み

本節では、内生的アプローチの基本的な考え方を示すために、SJ モデルおよび LR モデルに共通する枠組みを簡単に説明する。これらのモデルは、図 1 に整理したように3つのステップを踏んで、流動性を考慮した修正 VaR の算定を行う。以下、これらのステップを順に説明する。

図 1 流動性リスクを考慮した市場リスク計量化の枠組み



2.2.1. マーケット・インパクトの定式化

マーケット・インパクトは、一般に、以下の3つの要因によって説明される。

需要曲線の弾力性

ある証券に対し、リスク・リターン・プロファイルや商品性などの面で完全に代替的な証券が存在しない限りは、証券の需要曲線は水平ではなく、一定の勾配を有する。従って、追加的な売却を行うには、価格を引き下げていく必要がある (Mikkelson and Partch(1985))。

情報の非対称性

個々の投資家の取引行動が私的情報のシグナルとして市場に受け取られる場合、売却取引は市場参加者の期待を変え、均衡価格を下押しする (Mikkelsen and Partch(1985)、Kraus and Stoll(1972))。

即時性 (immediacy) に対する対価

買い手を即座に見付けるのが難しい環境では、売却の相手となるディーラーは在庫コストやサーチ・コストを払ってマーケット・メイクを行っている。このコストは売り手に転嫁されるため、コストに応じて売却価格が引き下げられているはずである (Demsetz(1968)、Kraus and Stoll(1972)、Stoll(1978)、Ho and Stoll(1981))。

このように、マーケット・インパクトは多様な要因により決定されるため、これを定式化するのは容易ではない。このため、定式化の方法に一定のコンセンサスが得られている訳ではなく、学界・実務界でも様々なアプローチが試みられている⁶。こうした事情から SJ モデル、LR モデルは、マーケット・インパクトの定式化に対してそれぞれ異なるアプローチをとっている。すなわち、SJ モデルでは、上記の 、 の効果を念頭において、取引量が市場価格に直接的にインパクトを与えるとして定式化を行っている。一方、LR モデルでは、取引量に応じてビッド・アスク・スプレッドが拡大・縮小するという形でマーケット・インパクトの効果が定式化されており、脚注 15 で後述するように上記 の効果を反映させていると考えられる。

2.2.2. 最適執行戦略の導出

マーケット・インパクトのメカニズムをモデル化した後には、動的計画法 (dynamic programming) などの最適化手法を用いて最適執行戦略 (optimal execution policy) が導出される。一般的に、投資家は以下のトレード・オフに直面しており、最適執行戦略は、こうしたトレード・オフの中での最適解として導出される。

執行を遅らせて売却ロットを小さくすることでマーケット・インパクト

⁶ 一部の企業などでは、顧客のポートフォリオ運用支援等を目的にマーケット・インパクトの計量モデルを開発、これを機関投資家などに販売する動きもみられている。こうしたモデルの概要としては Torre(1998)、Torre and Ferrari(1998)参照。また、このほか実証分析の最新の試みとしては、ニューラル・ネットワークを用いて非線形回帰分析を試みた Kempf and Korn(1999)が挙げられる。

に伴う売却価格の低下を抑制することが出来る。

一方、執行を遅らせると、その間より多くの市場リスクに晒される。

また、ディーラーの固定費用などにより、取引コストに規模の経済効果が存在する場合、売却ロットを小さくすることで単位取引量当りの取引コストが逡増、全体の取引コストが増加してしまう。

SJ モデルでは、執行戦略の最適化問題を、期待売却額の最大化問題として定式化し、動的計画法を用いて解を導くアプローチを提示している。一方、LR モデルにおいては、執行を遅らせることに伴うコストをヘッジング・コスト（システムティック・リスクを指数先物などによりヘッジする上で必要なコスト）およびエクスポージャー・コスト（ヘッジの対象となっていない個別リスクに晒されることによるコスト）として認識する一方、執行を早めることに伴うマーケット・インパクトをビッド・アスク・スプレッドの拡大による取引コストとして定式化し、これら全てのコストの合計を最小化する問題を解くアプローチを提示している。

2.2.3. 流動性を考慮した修正 VaR の算定

最適執行戦略を得た後には、流動性リスクを考慮した修正 VaR を算定する。具体的には、最適執行戦略に基づいて売り注文を行い保有ポジションの流動化を完了するまでの間に、市場変動によりどの程度損失を負う可能性があるかを修正 VaR として算定する。

SJ モデルでは、最適化問題の解として導出された最適執行戦略に基づいて修正 VaR を算定する一方、LR モデルでは、コスト最小化問題から得られた最適保有期間に基づき修正 VaR を算定する。

以下では、具体的に SJ モデルおよび LR モデルを説明する。

3. スプラマニアン・ジャロー・モデル (SJ モデル)

SJ モデルでは、流動化すべきポジションと流動化しなければならない期限が与えられた時、どのようなスケジュールで売却を進めれば合計売却価格を最大化出来るかといった形で最適執行戦略を導出する。その際、マーケット・インパクトの効果を取り入れるほか、取引量に応じて取引注文から執行までに時間的ラグが存在し、その間に価格変動リスクがあることも勘案する。

3.1. モデルの設定

時刻 t での市場価格を $p(t)$ とし、これを無リスク金利 r で割引いた時点 0 での現在価値を $P(t) \equiv p(t)e^{-rt}$ とする。市場価格の変動は幾何ブラウン運動に従うとすると、 $W(t)$ をウイナープロセスとして、 $P(t)$ は次の確率微分方程式に従う⁷。

$$dP(t) = P(t)(\mu dt + \sigma dW(t)) \quad \text{ただし} \quad \mu = \alpha - r \quad (3.1)$$

は市場価格の期待収益率、 σ は市場価格のボラティリティ、 μ は超過期待収益率である。ここでは、 α 、 σ 、 μ とともに一定であることが仮定されている。

マーケット・インパクトを以下のようにモデル化する。時刻 t で取引量 s の売却を行うケースを考える。取引直前の市場価格（現在価値ベース、以下同じ）は $P(t)$ であるが、マーケット・インパクトにより実際の売却価格はこれを下回る。取引量 s についての平均売却価格 $P(t^+)$ を

$$P(t^+) = c(s)P(t) \quad \text{ただし} \quad 0 \leq c(s) \leq 1 \quad (3.2)$$

と表す。 $c(s)$ は、マーケット・インパクトの程度を表す乗数であり、売却取引については $c(s) \leq 1$ が成り立つ⁸。

さらに、取引注文から執行までの時間的ラグ（執行ラグ）は 1 回毎の取引量 s の関数 $\Delta(s)$ として定式化する。時刻 t で取引量 s の売却を行う場合、実際にそ

⁷ 市場価格 $p(t)$ に関する確率微分方程式は次の通りである。

$$dp(t) = p(t)(\alpha dt + \sigma dW(t)) \quad \text{ただし} \quad \alpha \text{ は定数、} \sigma \text{ は } \sigma > 0 \text{ である定数}$$

⁸ 取引を行わない時は $s = 0$ である。取引を行わなければ、マーケット・インパクトは存在しないため掛け目である $c(0)$ は 1 である。

の取引が執行されるのは時点 $t + \Delta(s)$ となり、また、 $\Delta(s)$ は s の増加関数であると定義する。

3.2. 最適執行戦略および修正 VaR の導出

流動化しなければならない期限を時刻 T とし、流動化しなければならない全ポジションを S とする。例えば、10 日後までに債券を 1000 枚売らなければならない状況 ($T=10$ 日、 $S=1000$ 枚) を想定する。1 日目にすべて売却してもよいし、100 枚ずつ 10 日間で売ってもよいが、取り得る全ての流動化スケジュールの中で、最も期待合計売却額が大きいプランを選択すると考える。

ここでは、投資家は売却の頻度 (n)、売却時点 (t_i)、1 回毎の売却額 (s_i) をそれぞれ選ぶことによって最適執行戦略を導出するものとする。すなわち、関数 $c(s)$ および $\Delta(s)$ を所与として、以下の (3.3) 式を最大化するような変数 $\{n, (t_i, s_i) \ i=1, \dots, n\}$ を求める。

$$\max_{s_i, t_i, n} \left\{ E_{p, S, 0} \left[\sum_{i=1}^n s_i c(s_i) P(t_i + \Delta(s_i)) \right] \right\}$$

$$\text{ただし } i=1, \dots, n \text{ に対して } s_i \geq 0, \sum_{i=1}^n s_i = S \quad (3.3)$$

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq T, \quad t_{i+1} - t_i \geq \Delta(s_i)$$

ここで、 $E_{p, S, 0}[\bullet]$ は時刻 $t=0$, $P(0)=p$, ポジション量 S に対する条件付き期待値を表す⁹。

最適執行戦略 $\{n^*, (t_i^*, s_i^*) \ i=1, \dots, n^*\}$ は、この最適化問題の解として得ることができる。但し、一般的には解析的に解くことはできず、数値計算により解を導出することが必要となる。Subramanian and Jarrow(1999)では、動的最適化などの手法を用いてこの最適化問題を解く手法¹⁰を提示している。

⁹ ここで期待効用ではなく期待売却額の最大化として定式化していることは、市場参加者のリスク選好の中立性を仮定しているのと同値であることに留意する必要がある。しかし、後にも述べるように、Subramanian and Jarrow(1999)では、効用関数が指数関数である場合にも同様のフレームワークで分析が出来ることが示されており、限定的ながら、リスク選好がリスク回避的である場合も同様の分析が行えることが分かっている。

¹⁰ 具体的な解法は Subramanian and Jarrow(1999)、pp.8-9 および pp.12-14 参照。

次に、上記の枠組みで最適執行戦略を得たとして、修正 VaR を算出する考え方を示す¹¹。

まず、 d を保有期間として、従来型の VaR (約 97.5 パーセントイルの例) は次のように定義される。

$$VaR = \left| SP(0) \left[E \left[\log \frac{P(d)}{P(0)} \right] - 2STD \left[\log \frac{P(d)}{P(0)} \right] \right] \right| \quad (3.4)$$

ここで、 $STD[\bullet]$ は標準偏差を表す。左辺第一項は、保有期間中の期待収益に相当し、第二稿は同期間中のダウンサイドリスクに相当する。ここでは d 期間後に全てのポジションを一括売却するような執行戦略が暗に想定されている。

これを修正 VaR に変換するためには、保有ポジションの売却額を最適執行戦略に基づいたものに置き換えればよい。すなわち、時点 t_i^* ($1 \leq i \leq n$) でポジション s_i^* の売却注文を出し、それが時点 $t_i^* + \Delta(s_i^*)$ で取引される場合の期待収益およびダウンサイドリスクを考えると、修正 VaR は、

$$VaR_{LQ} = \left| SP(0) \left[E \left[\log \frac{\sum_{i=1}^n s_i^* P(t_i^* + \Delta(s_i^*)) c(s_i^*)}{SP(0)} \right] - 2STD \left[\log \frac{\sum_{i=1}^n s_i^* P(t_i^* + \Delta(s_i^*)) c(s_i^*)}{SP(0)} \right] \right] \right| \quad (3.5)$$

となる。ここで、マーケット・インパクトの効果は、関数 $c(s)$ によって取入れられている。(3.5)式右辺は(対数)正規分布のような既知の確率分布では特

¹¹ ここで示す考え方は、本稿筆者が独自に整理した内容であり、必ずしも Subramanian and Jarrow(1999)で明示されているものではないことを断っておく。因みに、Subramanian and Jarrow(1999)では、リスク計量の正確性よりも保守性を重視するとして、期待売却額が最小となる戦略である期初での一括売却を行う場合に負うリスクを修正 VaR と定義し、

$$VaR_{LQ} = \left| P(0) \left[E \left[\log \frac{P(\Delta(S))c(S)}{P(0)} \right] - 2STD \left[\log \frac{P(\Delta(S))c(S)}{P(0)} \right] \right] \right|$$

という結果を導いている。これに対し、本稿ではリスクをより正確に計量する場合の枠組みを提示した。

徴づけることが出来ないため、一般にモンテカルロ・シミュレーションによって算出する必要がある。

3.3. モデルの拡張の可能性

Subramanian and Jarrow(1999)では、上記のモデルに以下の4通りの拡張を行ってもこうしたフレームワークが有効であり、最適執行戦略を導く方法が存在することを示している。

マーケット・インパクト関数 $c(s)$ および執行ラグ関数 $\Delta(s)$ をランダム・プロセスとする。

これまで $c(s)$ および $\Delta(s)$ が確定的 (deterministic) としてきたが、これらが価格過程とは独立な確率変数である場合も、 $c(s)$ を $E[c(s)]$ 、 $\exp(m\Delta(s))$ を $E[\exp(m\Delta(s))]$ と置きかえることにより、同様の分析を行うことができる。すなわち、マーケット・インパクトおよび執行ラグは必ずしも確定的 (deterministic) である必要はなく、これらがランダムであってもよい。

価格変化にジャンプ・プロセスを導入する。

これまで、取引が行われた時以外の価格変化は連続的である (幾何ブラウン運動によって記述できる) と仮定してきたが、価格変化にジャンプ・プロセスを導入した場合にも同様の分析を行うことができる。

マーケット・インパクト関数 $c(s)$ を時間と取引量の変数にする。

マーケット・インパクト関数 $c(s)$ を拡張し、関数が取引量のみでなく時間にも依存するとしても ($c(s) \rightarrow c(s,t)$)、執行ラグがない限りは、これまでと同様の分析を行うことができる。

指数型の効用関数を導入する。

これまでの分析では、最適化問題を期待売却額の最大化として定式化しているが、これは投資家のリスク中立性を暗黙のうちに仮定していることになる。しかし、Subramanian and Jarrow(1999)では、効用関数が指数関数 (power utility function) ¹²である場合にも同様の分析を行えることが示されている。

¹² $f(x) = x^\gamma$ (γ は定数) の形をとる関数。

4. ローレンス・ロビンソン・モデル (LR モデル)

LR モデルでは、SJ モデルとは異なるアプローチがとられている。まず、保有ポジションを流動化するのにかかるコスト（これを流動化コストと呼ぶ）を定式化する。マーケット・インパクトの効果は、この流動化コストの一部である取引コストの中に取り込まれている。一方、最適執行戦略は、売却の意思決定を行ってから執行が完了するまでの期間である執行期間によって規定されると仮定する¹³。流動化コストを最小化する執行期間を算定することによって最適執行戦略を導き、従来型の VaR の保有期間をこの最適な執行期間で置き換えることにより、修正 VaR を算定する。

4.1. 流動化コスト

LR モデルでは、流動化コストが以下の3種類のコストから構成されると定式化している。

取引コスト

売却を行う際にかかるコストで、主にビッド・アスク・スプレッド、業者への固定手数料から構成される¹⁴。

ヘッジング・コスト

売却の意思決定を行ってから売却が完了するまでの間、エクスポージャーの一部をヘッジするためにかかるコスト。

エクスポージャー・コスト

上記エクスポージャーのうち、ヘッジを行わなかった部分が晒される市場

¹³ 実際には、最適執行戦略を規定するためには、1回毎の売却ロットや売却タイミングなども決定する必要があり、必ずしも執行期間のみによっては戦略は一義的に定まらない。しかしながら、例えば每期同じ量のロットで売却を進めるなど、執行戦略に関して予め一定の制約を置くことによって、執行期間のみで執行戦略を規定することが出来る。この点に関する LR モデルの前提は明確でないが、暗黙のうちにこうした前提が置かれているものと考えられる。

¹⁴ 取引コストを明示的(explicit)取引コストと潜在的(implicit)取引コストに分類すると、ここではその両者を考えていることになる。ここで言う明示的取引コストとは、市場参加者から見て取引を執行する際に幾らかかるか事前に分かっているコストであり、一方、潜在的取引コストは、情報の非対称性などにより事前に正確な金額が分からないコストである。業者への固定手数料は明示的取引コストであり、ビッド・アスク・スプレッドの変動は不確実であるため、潜在的取引コストである。

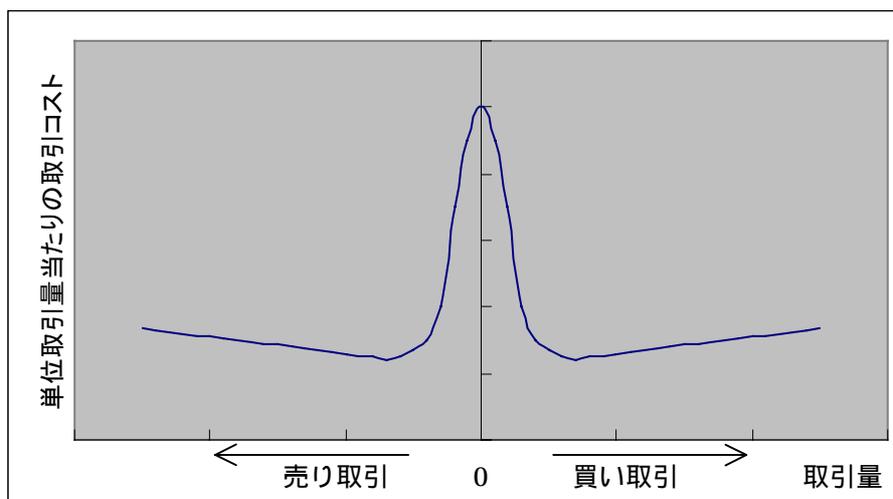
リスクをカバーするのに必要なコスト。

以下では、これらのコストについて順を追って解説する。繰り返しになるが、LR モデルに関する公表資料では、モデルの詳細について必ずしも全てが明らかにされている訳ではない。そこで、公表資料では不明な部分を補うために、筆者が独自に推量を加えて解説を行っている事にご留意頂きたい。

取引コスト

市場参加者にとっての取引コストにはビッド・アスク・スプレッド、取引業者手数料、税金等、様々な要素が考えられる。LR モデルにおいては、このうち、(イ)ディーラーの固定費用などによる規模の経済効果のため、一定の取引量までは平均取引コストが減少すること、(ロ)一定の取引量を超えるとマーケット・インパクトのために平均取引コストは再び上昇すること、の二点に着目する。この性質を踏まえ、単位取引量当たりの取引コストが図 2 のように取引量に対して凹性を持つ関数であると仮定する¹⁵。

図 2 単位取引量当たりの取引コストと取引量



¹⁵ この仮定の背景にあるのは、ディーラーの最適化問題からビッド・アスク・スプレッドやマーケット・インパクトを説明しようとする在庫モデル (inventory model, O'Hara(1995) pp.13-52 参照) の考え方があると思われる。こうした在庫モデルの先駆的研究である Stoll(1978)では、証券を買い取ることに伴う在庫リスクやディーラー業を営むための固定費用、ビッド・アスク・スプレッドによる利鞘収入を考慮したディーラーの最適化行動の結果、ビッド・アスク・スプレッドは取引量に対して凹性を持った関数になることが示されている。

この単位取引量あたりの取引コストが推定できたとすると、特定のポジションの流動化が完了するまでにかかる取引コストの合計値（ T で表す）が次のようにして計算される。まず w を一回当りの取引量とし、推定した単位取引あたりの取引コスト関数を $f(w)$ とすると、一度の取引にかかる取引コストは $f(w)w$ となる。次に簡単のために、一日に一度、一定額 a の取引を行うと仮定する¹⁶。保有ポジションを v とすると、 v を流動化するのに必要な期間（つまり保有期間） d は $d = \frac{v}{a}$ となる。これは、逆に一回当りの取引量 a は $a = \frac{v}{d}$ であることを表している。これを d 日間行うから、保有ポジション v の流動化にかかる合計取引コストは、 $T = f\left(\frac{v}{d}\right)\frac{v}{d}d = f\left(\frac{v}{d}\right)v$ となる。以上から LR モデルでの取引コストは、保有ポジション v と保有期間 d の関数として、

$$T = T(d, v) \quad (4.1)$$

と表わされる¹⁷。

ヘッジング・コスト

ヘッジング・コストは、取引執行を先延ばしすることに伴う価格変動リスクのうち、システムティック・リスクをヘッジする場合にかかるコスト¹⁸である

¹⁶ここでは、簡単化のために均等売却を前提として議論を進めるが、執行期間のみで執行戦略が規定されるよう執行戦略に関して予め一定の制約が置かれているのであれば、均等売却でなくとも、取引コストが保有ポジションと執行期間で表わされるという結論は変わらない。

¹⁷ LR モデルでは、通常の市場における取引量をノーマル・マーケット・サイズ(Normal Market Size 以下 NMS)、ビッド・アスク・スプレッドを s として定義し、取引コストが $T = T(s, NMS)$ で表わされるとしている。しかしながら、NMS の定義が明確でないほか、 s および NMS とも個々の投資家が影響を与え得ない市場全体の計数であり、この関数の形では個々の投資家のマーケット・インパクトがコストに反映されていないことになり、モデルの前提と矛盾が生じることになってしまう。このため、本稿ではこの原資料の定式化は採用せず、当方が独自に考察した内容を議論することとする。

¹⁸ 例えば、イニシャル・マージンやメンテナンス・マージンのコストが考え得る。

例えば、日本株のポートフォリオのシステマティック・リスク（一般市場リスク）を TOPIX 指数先物などを使ってヘッジする場合などを想定できる。ヘッジのサイズは、ベータ値²⁰（ b ）および保有ポジション v によって決定される。ヘッジング・コスト（ H で表す）はヘッジ・サイズに応じて決まることから、次のように定義される。

$$H = H(v, b) \quad (4.2)$$

エクスポージャー・コスト

保有ポジションの価格変動リスクのうち、上記ヘッジの対象となっていないアンシステマティック・リスク（個別リスク）に対しては、潜在的損失の発生をカバーするリスク・キャピタル（VaR 相当額）を用意する必要がある。エクスポージャー・コストはこのキャピタルの資本コストとして定義することが出来る。従って、エクスポージャー・コスト（ E で表す）は、VaR を規定する各種変数、すなわち保有期間 d 、リスク・ファクターの相関行列 Σ を用いて、

$$E = E(d, v, \Sigma) \quad (4.3)$$

と定義される。

以上では、流動化コストを 取引コスト、 エクスポージャー・コスト、ヘッジング・コストに分類した。よって、(4.1)式、(4.2)式、(4.3)式を用いて流動化コスト（ C で表す）は、

$$C = T + E + H \quad (4.4)$$

と表わされる。

¹⁹ ここで、LR モデルでは、ヘッジの対象がシステマティック・リスクに限定されることが仮定されている。一般的には、ヘッジの対象をシステマティック・リスクに限定する必要はない。しかしながら、例えば株式ポートフォリオを想定した場合、ヘッジのための手段として最も流動性が高くコストが低いのは市場指数に連動した先物・オプションであり、この点でシステマティック・リスクにヘッジの対象を限定するのも妥当といえる。

²⁰ 市場ポートフォリオの投資収益率の変動に対する当該証券の反応度。

4.2. 最適執行戦略

取引コストを低減させるためには、小規模な取引を長期間に亘って行うことが好ましい。一方、これにより長期間に亘り市場リスクに晒される分、エクスポージャー・コストが増加する。最適執行戦略は両者のトレードオフにより決定される。これを定式化すると、流動化コストを最小にする取引期間（最適保有期間）は

$$\frac{\partial C}{\partial d} = \frac{\partial}{\partial d}(T + E + H) = 0 \quad (4.5)$$

を満たす解 d^* として求められ、それによって最適執行戦略が規定される。

4.3. 修正 VaR の算定

従来型の VaR での保有期間（1日）を、4.2節で求めた最適保有期間で置き換えることにより、流動性リスクを考慮した修正 VaR を算定することが出来る（考え方自体は、3.2節で示した枠組みとほぼ同様）。Robinson(1995)では、一つの計算例として、英国企業株式の修正 VaR の計算を行っている（表 1）²¹。

表 1 修正 VaR (例)

	ポジション額 (千£)	最適 保有期間 (日)	従来のVaR (保有期間1日) (千£)	修正 VaR(千£)
流動性が高いA社株	1,000	0.34	29	41
〃	100	0.07	2.9	1.9
流動性が低いB社株	100	49	4.0	31

表 1によると、流動性対比でみて大きな（小さな）ポジションをとっているポートフォリオについては、従来の VaR は過小（過大）評価することが分かる。例えば、流動性が高い A 社株についてみると、ポジション額が 100 千£の場合は従来の VaR（2.9 千£）が修正 VaR（1.9 千£）に比べ過大評価となっている一方、ポジション額が 1,000 千£の場合は従来の VaR は過小評価となってい

²¹ この計算例の計算方法の詳細は示されておらず、計算方法の妥当性などの検証を行うことは不可能であるが、ここでは、LR モデルの概要を理解するとの観点から、この計算例を紹介することとした。

る（従来の VaR 29 千 £、修正 VaR 41 千 £）。

また、従来の VaR ではポジションが 10 倍になるとリスク量も 10 倍であるのに対し、修正 VaR では、マーケット・インパクトのために保有期間が長期化することから、ポジションが 10 倍になるとリスク量はそれ以上に増大することが分かる。例えば、A 社株についてみると、ポジション額が 1,000 千 £ の場合の修正 VaR（41 千 £）は、ポジション額が 100 千 £ の場合の修正 VaR（1.9 千 £）の約 21 倍となっている。

5. 流動性リスク計量に向けた今後の課題

このように、内生的アプローチでは、最適執行戦略という概念を新たに導入することにより、従来主観的に扱われていた流動性リスクを客観的な方法で VaR に織込むことに理論的には成功している。しかしながら、実際のポートフォリオのリスク量算定に適用するためには、解決すべき実務上の問題点がいくつか存在する。本節では、今後の研究課題としてこうした実務上の問題点を整理する。

マーケット・インパクトの定式化

第 2 章でも述べた通り、マーケット・インパクトは保有証券の需要曲線、情報の非対称性、即時性に対する対価といった様々な要因に起因して発生している。また、取引執行システムの違い（オークション市場かディーラー市場か）もマーケット・インパクトのメカニズムに影響を与えていると考えられる。従って、このように多様な要因により発生するマーケット・インパクトをモデルにより定式化するのは必ずしも容易ではない。学界・実務界でマーケット・インパクトの計量分析について様々なアプローチが続けられているが、今のところ決定的なモデルは存在していないのが実情である。

今後の研究課題としては、マーケット・インパクトのマイクロ・ファウンデーションの解明を掘り下げ、これに基づいた実証分析を進め、実務上適用可能なマーケット・インパクトの定式化を目指すことが挙げられる。

金融商品間の相関の取扱い

ポートフォリオを対象にリスクを分析する場合、各種金融商品の価格間の相

関を考慮する必要がある。しかしながら、流動性リスクを考慮した VaR では、マーケット・インパクトの大小などに応じて金融商品毎の最適執行戦略が異なるため、保有期間も商品毎に区々となる。一般に、保有期間の異なる金融商品間の相関を VaR 算定に織込むことは難しい²²。このため、保有期間が異なる金融商品からなるポートフォリオの VaR を如何にして算定するか、実務に適用可能な形でその方法論を示すことが必要となる。

マーケット・ストレス時の取扱い

内生的アプローチでは、(イ)定式化されたマーケット・インパクト関数が安定していること、(ロ)最適執行戦略の実行が随時可能であること、の二点が前提とされていた。しかしながら、近年のアジア危機、ロシア危機でみられたように、流動性が枯渇するようなマーケット・ストレス時には、こうしたマーケット・インパクトの安定性、最適執行戦略の実行可能性の前提は崩れる可能性が高い。従って、平常時のモデルとは別に、マーケット・ストレス時の流動性リスクを説明する枠組みを構築していく必要がある。

6. 終わりに

本稿では、流動性リスクを考慮した市場リスクの計量を行うモデルの一つとして、最適執行戦略の概念を導入した内生的アプローチを紹介・解説した。このアプローチでは、マーケット・インパクトの定式化、最適執行戦略の導出、最適執行戦略に基づいた修正 VaR の算定、の3つのステップを踏むことにより、流動性リスクを理論的かつ客観的に分析出来た。

しかしながら、これを実際のポートフォリオのリスク量算定に応用するためには、マーケット・インパクトの定式化、金融商品間の相関の取扱い、マーケット・ストレスの取扱い、など解決すべき実務上の問題点が存在している。特にマーケット・インパクトの定式化は、流動性リスクを考慮した客観的なリスク量算定にとって極めて重要であり、この解明が進まない限り、内生的アプローチの実用化は困難である。今後は、リスク管理における流動性リスク

²² 解析的分析は困難である。解決策の一つとしてモンテカルロ・シミュレーションなどの方法が考えられるが、その場合実務に適用するためには計算負荷の問題を解決する必要はある。

の重要性、特にマーケット・インパクトの重要性がより強く認識され、この分野での理論・実証両面に亘る分析が一層進むことが強く期待される。

以 上

参考文献

- 大澤 真・村永 淳、「市場リスク算出の枠組みにおける流動性リスクの計測」、
IMES Discussion Paper No. 98-J-2、日本銀行金融研究所、1998年
- Bangia, A., F. X. Diebold, T. Schuermann and J. D. Stroughair, “Modeling Liquidity Risk, With Implication for Traditional Market Risk Measurement and Management,” working paper, Wharton Financial Institutions Center, 1999.
- Bertsimas, D. and A. W. Lo, “Optimal Control of Execution Costs,” *Journal of Financial Markets* 1, 1998, p.p. 1-50.
- Chan, L. and Lakonishok, J., “Institutional Trades and Intraday Stock Price Behavior,” *Journal of Financial Economics* 33, 1993, p.p. 173-199.
- Chan, L. and Lakonishok, J., “The Behavior of Stock Prices around Institutional Trades,” *Journal of Finance* 50, 1995, p.p. 1147-1174.
- Demsetz, H, “The Cost of Transacting,” *Quarterly Journal of Economics* 82, 1968, p.p. 33-53.
- Ho T. and H. R. Stoll, “Optimal Dealer Pricing under Transactions and Return Uncertainty,” *Journal of Financial Economics* 9, 1981, p.p. 47-73.
- Holthausen R. W., R. W. Leftwich, and D. Mayers, “The Effect of Large Block Transactions on Security Prices: A Cross-Sectional Analysis,” *Journal of Financial Economics* 19, 1987, p.p. 237-268.
- Holthausen R. W., R. W. Leftwich, and D. Mayers, “Large-block Transactions, the Speed of Response, and Temporary and Permanent Stock-price Effects,” *Journal of Financial Economics* 26, 1990, p.p. 71-95.
- Kempf, A. and O. Korn, “Market Depth and Order Size,” *Journal of Financial Markets* 2, 1999, p.p. 29-48.
- Kraus, A. and H. R. Stoll, “Price Impacts of Block Trading on the New York Stock Exchange,” *Journal of Finance* 27, 1972, p.p. 569-588.
- Lawrence, C., “Practical Strategies for Risk Management and the Optimum Allocation of Capital,” *Presentation documents at the Risk96*, December 5, 1996.

