

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

市場取引発生タイミングに関する実証分析

加藤敏康・丸茂幸平

Discussion Paper No. 99-J-27

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES
BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒100-8630 東京中央郵便局私書箱 203 号

備考：日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

市場取引発生タイミングに関する実証分析

加藤敏康・丸茂幸平*

要 旨

本稿の目的は、各種の金融市場における取引発生タイミングの統計的性質を実証分析することである。取引発生時間経過に関しては、これまでマーケット・マイクロストラクチャーの理論研究で扱われた例は有るが、実証的な研究例は極めて少ない。

本稿では、取引発生を秒単位で記録したティック・データを用いて、取引が時間的にランダムに発生するかどうか（統計的には、取引発生タイミングが斉時ポアソン過程にしたがうかどうか）を検証した。仮に取引がランダムに発生しているならば、ある時点での取引発生が将来の取引発生時刻に影響を与えないという意味において、取引間に相互作用がないと言える。

分析の結果、観測したすべての市場で斉時ポアソン過程からの乖離が検出された。また、取引形態や市場参加者の性質が類似した市場では、こうした乖離の程度が類似する傾向がうかがわれた。この結果については、各市場の構造に応じて取引間に相互作用が現われるという仮説を与え、若干の考察を行った。

キーワード：ポアソン過程、取引発生タイミング、マーケット・マイクロストラクチャー

JEL classification: C42

* 日本銀行金融研究所研究第1課
(E-mail: toshiyasu.katou@boj.or.jp, kouhei.marumo@boj.or.jp)

本論文を作成するに当たっては、高安秀樹氏（ソニーコンピュータサイエンス研究所）、小林正人 助教授（横浜国立大学経済学部）、井上健氏（東京大学大学院経済学研究科）から有益なコメントを頂戴した。

目 次

1 . はじめに	1
2 . 取引発生タイミングと斉時ポアソン過程 (概論)	1
(1) 斉時ポアソン過程	2
(2) 取引発生頻度の日中変化	3
3 . 取引発生タイミングの検定	6
(1) データ	7
(2) χ^2 適合度検定	8
(3) 考察	11
4 . おわりに	12
補論 1 . 斉時ポアソン過程	13
補論 2 . χ^2 適合度検定	14
補論 3 . データの持つ誤差に関して	16
参考文献	17

1. はじめに

近年、市場取引に関係する理論や実証分析は多種多様な展開を遂げている。中でも市場取引の発生構造を分析するマーケット・マイクロストラクチャーは、マクロ的な需給に基づいた価格決定構造ではなく、規制等の市場インフラ、情報の非対称性、市場参加者の行動特性等ミクロの要因に基づき価格形成過程を説明するアプローチとして急速に発達している。

このように様々な要因が絡み合う取引の発生構造を実証的に分析するうえで、取引発生タイミングが、有益なデータの 1 つと考えられる。しかし、Garman[1976]が取引の発生はポアソン過程にしたがっていると先験的に論じて以来、その妥当性を検証した研究は報告されていない。理論的な先行研究をみると、例えば Diamond and Verrecchia[1987]や Easley and O'Hara[1992]において、特定の市場モデルを想定した場合に取引がどのようなタイミングで発生するかについてインプリケーションが与えられているが、それをデータ面から検証するような研究は極めて少ないのが現状である。

本稿の目的は、市場取引のティック・データを使い、取引発生タイミングの統計的性質を分析することである。仮に取引が時間的にランダムに発生している（統計的にみて取引の発生タイミングが斉時ポアソン過程¹にしたがう）ならば、ある時点での取引発生が将来の取引発生時刻に影響を与えないと言える。本稿では、こうした取引発生タイミング間の依存性を取引間の相互作用と呼び、分析結果を解釈するうえでの重要な要素と考える。

本稿の構成は、次の通りである。まず第 2 章では、取引発生タイミングが一般的にどのような性質を持つか概観するため、取引発生頻度の日中変化を調べたうえで、取引発生タイミングと斉時ポアソン過程との関わりを定性的に述べる。次に第 3 章では、分析対象銘柄を増やしたうえで、 χ^2 適合度検定²を用いて取引発生タイミングの分析を定量的に行い、その結果と取引間の相互作用との関係を考察する。最後に、第 4 章で結びを述べる。

2. 取引発生タイミングと斉時ポアソン過程（概論）

個々の市場参加者は、それぞれの判断に基づいて適切なタイミングで注文を出し、取引を成立させていると考えられる。それでは、こうした取引発生タイミングをマクロ的に観察すると、どのような性質が現われるのであろうか。

¹ 斉時ポアソン過程の特徴については補論 1. 参照。

² χ^2 適合度検定の詳細は補論 2. 参照。

(1) 斉時ポアソン過程

取引がどの瞬間をみてもランダムに発生していることは、理論的には、取引発生タイミングが斉時ポアソン過程にしたがうということである。

実際に、取引の発生過程が斉時ポアソン過程に近い例を示す³。図1は、円・ドル為替、日経平均株式指数先物（日経先物）、個別株式（米国 P&G 社）について、1999年2月23日のそれぞれ特定の時間を取り出し⁴、その中に含まれる取引発生間隔の累積頻度⁵を片対数軸にプロットしたものである。

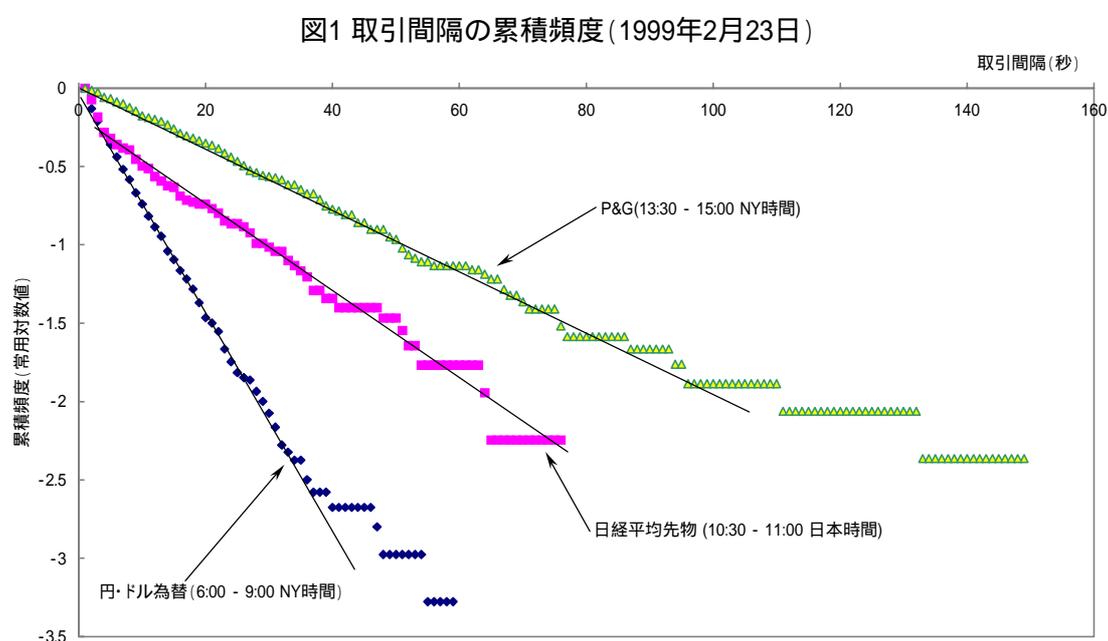


図1から、円・ドル為替、日経先物、P&G株式のいずれも片対数プロットは直線に近いと判断できる。このことから、この時間帯に限って言えば、取引発生タイミングは斉時ポアソン過程すなわちランダムに近いと言える⁶。

³ 本章で例示するデータは第3章の分析対象の一部である。データの詳細は第3章(1)節で述べる。

⁴ 取引の発生頻度（後述）が比較的安定していた時間帯を選択した。円・ドル為替 6:00-9:00 (NY 時間)、日経先物 10:30-11:00 (日本時間)、P&G 株式 13:30-15:00 (NY 時間)。

⁵ 観測値が x 秒より大きな値をとった回数を累積回数 $h(x)$ とし、これを全観測数 N で規準化した $h(x)/N$ を累積頻度とした。

⁶ 指数分布の生存関数 $S(x)$ が $S(x) = \Pr\{X > x\} = e^{-\lambda x}$ で与えられることから、累積頻度の片対数プロットが直線に近ければ観測値の分布が指数分布に近く、同値関係

(2) 取引発生頻度の日中変化

(1) 節の結果は、一般的な性質と考えてよいのだろうか。この点を分析するために、取引の発生頻度の時間変化を市場別に観察した。取引の発生頻度 $\hat{\lambda}$ は、単位時間当たりの取引発生回数を表し、

$$\hat{\lambda} = \frac{\text{発生回数}}{\text{観測時間}} \quad (1)$$

と計算される。

図 2~4 に円・ドル為替、日経先物、P&G 株式会社について、1999 年 2 月 23 日（火曜日）~25 日（木曜日）における取引発生頻度を 10 分刻みで計算し、日付別に重ね合わせた結果を示す。

図2 円・ドル為替取引発生頻度の時間推移
(1999年2月23日~25日、10分刻み)

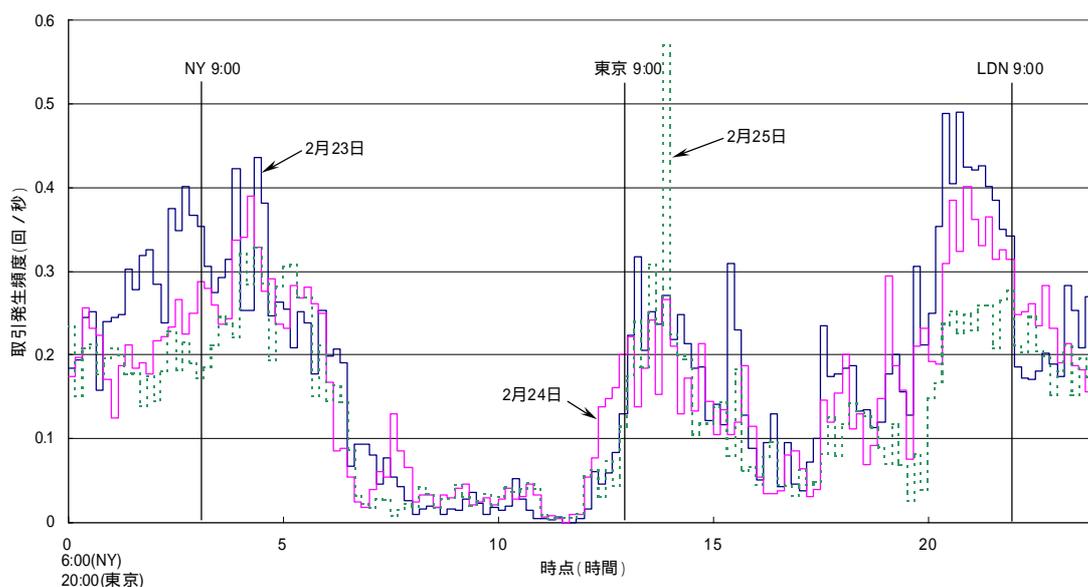


図 2 から、円・ドル為替ではロンドン・ニューヨーク・東京といった主要な市場が閉まっている時間帯⁷の取引は疎らであり、主要市場のオープン時、特に午前中に取引発生頻度が大きくなっていると読み取れる。図 3 から、日経先物では取引開始直後と取引時間終了間際で取引発生頻度が大きくなってい

から取引発生タイミングが斉時ポアソン過程に近い性質を持つと言える。詳細は補論 1. 参照。

図3 日経平均先物取引発生頻度の時間推移
(1999年2月23日～25日、10分刻み)

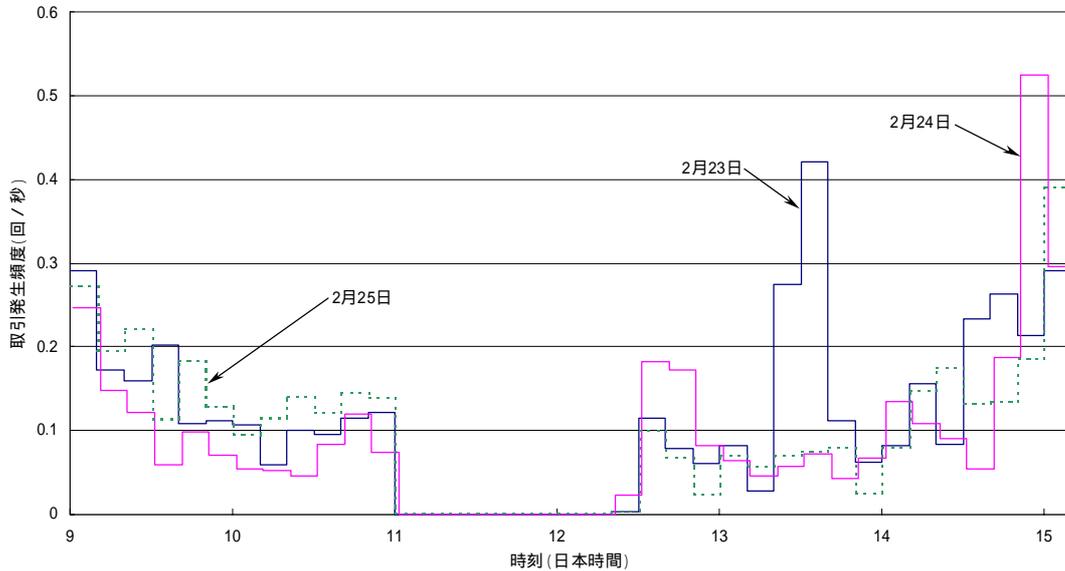
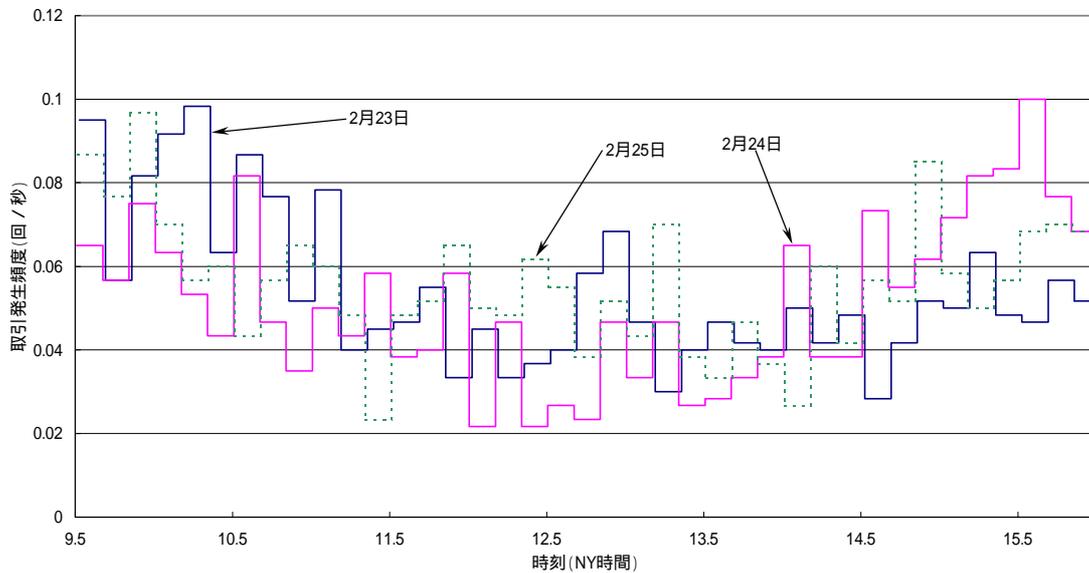


図4 P&G株式取引発生頻度の時間推移
(1999年2月23日～25日、10分刻み)



ると読み取れる。図3の中央に全く取引がない時間帯があるが、日経先物が上場されている大阪証券取引所(大証)の昼休みにあたる。図4からは、ニューヨーク証券取引所(NYSE)で取引が行われているP&G株式では取引開始から徐々に取引発生頻度が落ち取引時間終了間際に向けてわずかに上がって行く

⁷ 為替の取引は相対で行われ、取引時間が明確に定められているわけではない。

傾向が読み取れる。

以上のように、1日という単位でみた場合少なくとも円・ドル為替、日経先物、P&G株式の取引についてはすべての時間帯を通じて取引発生頻度が同程度と言えず、むしろ1日単位の周期的な変動が見られる。大澤・村永[1998]も時間帯による取引発生頻度の違いを指摘しており、このことは一般的な傾向と考えられる。

このように、取引の発生タイミングと斉時ポアソン過程のような確率モデルとの比較を行う場合には、時間帯による性質の違いを考慮し、確率モデルのパラメータの時間変化つまり非斉時性を念頭において分析を行う必要がある。

図5は、取引発生間隔の時間変化を考慮せず、1999年2月23日(火曜日)~25日(木曜日)の期間に含まれるデータすべてを使って図1と同様に取引発生間隔の累積頻度を片対数軸にプロットしたものである。

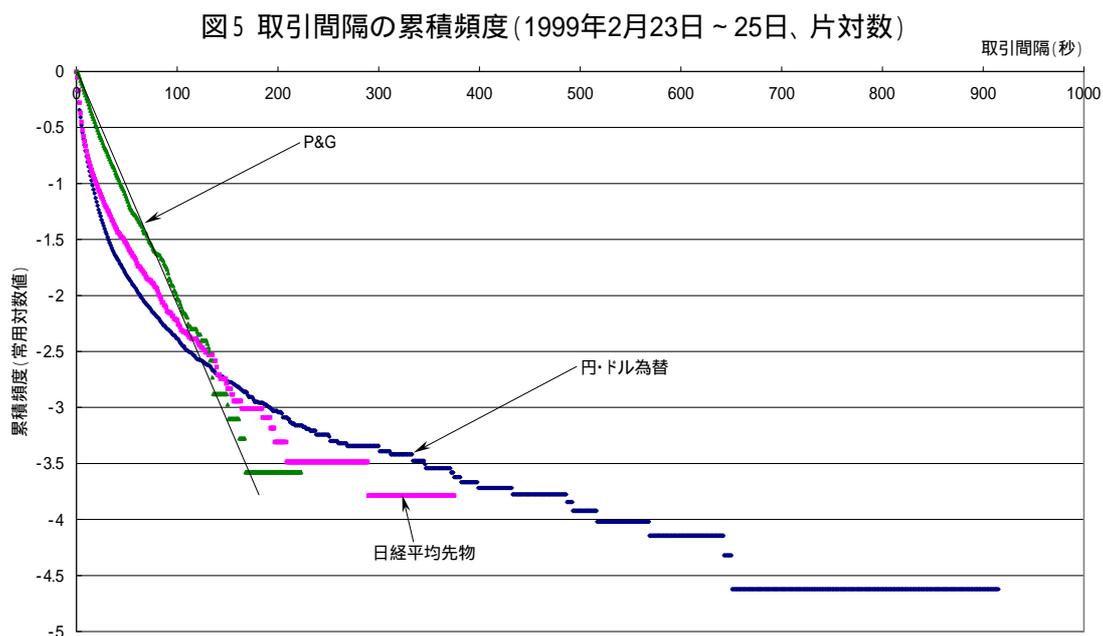
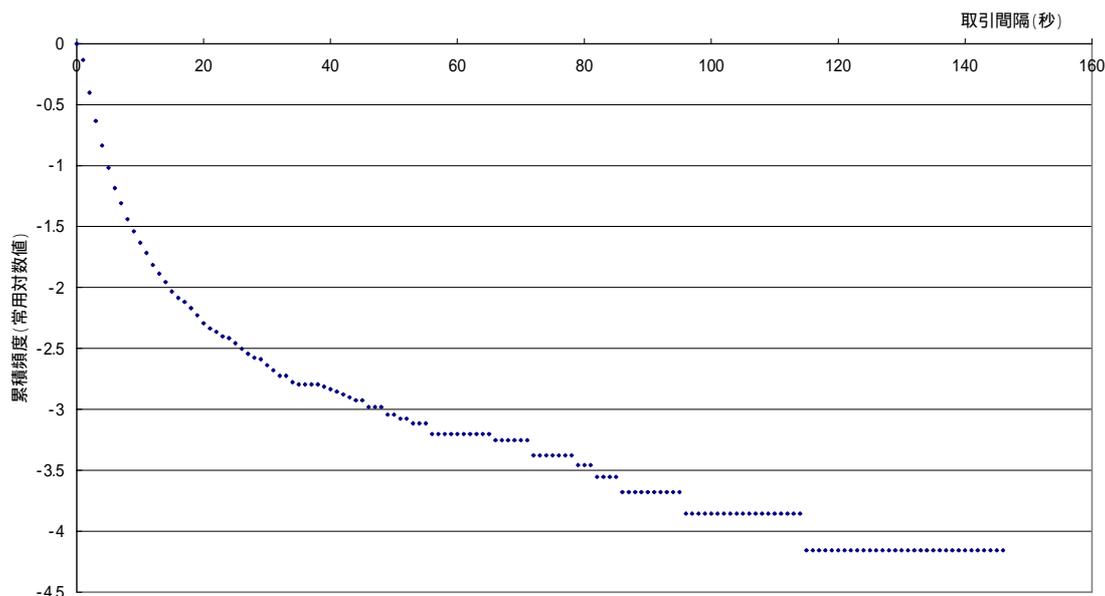


図5から、取引発生頻度の時間変化が比較的大きい円・ドル為替については取引間隔の累積頻度が指数分布から大きく外れて片対数プロットで曲線となっていることが読み取れる。それに対し、取引発生頻度の時間変化が比較的小さいP&G株式は、3日分のデータを通してみても指数分布に近く斉時ポアソン過程に近い性質を残していることがわかる。図6は、パラメータを大きく変化させ

た非斉時ポアソン過程のシミュレーション結果⁸である。図6の累積頻度をみると、円・ドル為替と同じ形状を持つことがわかる。このように、取引発生頻度が異なる長時間のデータを一括して扱っていると(1)節で観測された斉時ポアソン過程の徴候が弱められてしまうことがわかる。

図6 非斉時ポアソン過程(シミュレーション、片対数)



3. 取引発生タイミングの検定

本章では、取引発生タイミングと斉時ポアソン過程の関係を χ^2 適合度検定によって分析する。検定は、取引間の相互作用に焦点を当てるため極力短い時間区間を分析対象にする。短時間内の分析であれば、市場の状態(情報や市場参加者)が均一であると考えることができ、第2章で明らかになった取引発生頻度の時間変化の影響を回避できる。

分析方法としては、銘柄ごとに定時間内の取引データセットを検定するアプローチと定データ数の取引データセットを検定するアプローチの2通りを考えた。取引間の相互作用だけに焦点を絞って分析するためには、隣り合う取引同士を比較する等、極力短時間で分析するのが望ましい。しかし、時間を短くす

⁸ 比較のために非斉時ポアソン過程のサンプルパスを乱数を用いて発生させた。非斉時性としては、ポアソン過程のパラメータ λ が2時間一定速度で1から0まで低下するとした。図6はその結果得られた仮想取引間隔の累積頻度を片対数軸にプロットしたものである。

れば検定に使用するデータ数が少なくなり、検定力が低下する。また、各市場の状態の時間変化を同程度に揃えて比較分析を行うには定時間ベースの分析が望ましいが、その場合銘柄ごとのデータ数に大きな違いがあるため検定力に大きな差が生じるという点で銘柄間の比較が必ずしも容易ではないという問題が残る。この問題に対処するには、定データ数ベースの分析を行うことが考えられる。こうした事情から、本章では定時間と定データ数の両面から分析を行った。

(1) データ

分析に使用したデータは、表1の通りである。これらはすべて、Bloomberg社から入手した⁹。

表1：銘柄（市場）

銘柄	取引所	期間中安値高値	HV平均(%) ¹⁰
債券先物(3月限)	東証	130.50 - 133.12	9.4
日経先物(3月限)	大証	14,100 - 14,530	13.6
日立	東証	730 - 764	21.3
HIS	JASDAQ	2,500 - 2,940	66.3
GM	NYSE	82 9/16 - 87 7/8	31.4
P&G	NYSE	87 11/16 - 93	23.2
Yahoo!	NASDAQ	131 7/8 - 160 1/2	110.4
円・ドル	-	119.07 - 122.53	19.1
ドル・ユーロ	-	1.0926 - 1.1079	11.4

対象期間：1999年2月22日（月曜日）～26日（金曜日）

分析の対象期間は、日本、イギリス、アメリカ、ドイツなど主要な市場を持つ国に休日がなく、市場に為替介入等大きなイベントがなかった¹¹と思われる1週間を選択した。なお、複数市場に上場されている銘柄（例えば債券先物や日立株式）は主要市場のデータのみを扱った。また、為替データには顧客と金

⁹ Bloomberg社のニューヨークにあるデータサーバから取得した。データに含まれる誤差等の考察は補論3参照。

¹⁰ 10日間ヒストリカル・ボラティリティ平均（年率260日ベース）

¹¹ 債券先物と日経先物は、最終取引日が3月11日であったがまだ限月交代はされておらず、取引量も圧倒的に3月限が多かったため、3月限を使用した。個別株式では、2月8日にYahoo!が株式分割、25日にHISが自社株購入、25日にジェネラル・モーターズ（GM）がカナダにおける1,100人の人員削減を実施・報告しているが、いずれも取引材料視されず、値動きは通常時と大差なかった。

融機関が行う取引は含まれておらず、ブローカーを通じた取引のデータを使用している。

参考までに各市場の取引時間（現地時間）を示すと、東京証券取引所（東証）は 9:00-11:00,12:30-15:00、大阪証券取引所（大証：日経先物）は 9:00-11:00,12:30-15:10、日本証券業協会店頭株式市場（JASDAQ）は 9:00-11:00,12:30-15:30、ニューヨーク証券取引所（NYSE）は 9:30-16:00、NASDAQ は 9:30-16:00、また、スポット為替（円・ドル、ドル・ユーロ）は金融業者間店頭市場であり 24 時間取引可能である。なお、日本の市場（東証、大証、JASDAQ）の特徴として昼休みが存在するが、分析は昼休みを跨いだ時間区間を除いて行った。また、表 2 には期間中の銘柄別の取引回数を示しておく（ニューヨーク時間ベース）¹²。

表 2：取引発生回数（一日当り）

銘柄	2月22日	2月23日	2月24日	2月25日	2月26日	計
債券先物	4,207	3,792	4,640	3,284	3,844	19,767
日経先物	1,872	2,524	2,026	2,208	1,907	10,537
日立	454	626	420	435	548	2,483
HIS	108	70	62	37	95	372
GM	982	1,019	997	962	859	4,819
P&G	1,267	1,269	1,211	1,308	998	6,053
Yahoo!	21,275	27,182	21,489	20,016	16,301	106,263
円・ドル	7,631	15,823	14,026	11,944	14,404	63,828
ドル・ユーロ	5,128	12,950	13,184	12,929	13,465	57,656

(2) χ^2 適合度検定

検定の具体的な方法は次の通りである。

検定区間の定義：

定時間ベースの分析では、1 つの検定区間を 3 分間¹³（HIS は取引回数が極端に少ないため 1 時間）とした。定データ数ベースの分析では、1 つの検定区間を 25 個の取引データとした。

¹² 日付区分がニューヨーク日付となっているため、22 日（月曜日）の為替の取引回数は極端に少ない。また、他の銘柄に比べて Yahoo!株式の取引量が圧倒的に大きい、インターネット・トレーディングによるデイトレーダーの影響が考えられる。上述したが、期間中は際立った価格のジャンプは観測されず、比較的落ち着いた値動きであった。

¹³ 3 分未満では検定に十分なデータが得られない場合が多く、経験的に 3 分間とした。

検定区間抽出方法：

対象期間の市場オープン時間内から乱数によってランダムに日付および時刻を決定し、その時点から始まる検定区間を抽出する。このランダム・サンプリングを 100 回繰り返し、各銘柄ごとに 100 区間を検定の対象とした。乱数は無制約で作成したため、データの重なりを許している¹⁴。

検定方法：

「抽出した区間に含まれる取引の発生間隔が期待値 $1/\lambda$ の指数分布に従う」という帰無仮説¹⁵を、 χ^2 適合度検定によって検定した。検定に含まれる未知パラメータ λ は、抽出した区間の取引発生頻度 $\hat{\lambda}$ で代用した¹⁶。

まず、表 3 に定時間検定の結果を示す。各銘柄ごとに 100 個の検定区間を抽出し、それぞれに対して χ^2 適合度検定を行い、そのうち一定の有意水準で帰無仮説が棄却された区間数を表示している。

表 3：定時間検定の有意棄却数（3 分間）

銘柄	1%検定で棄却	5%検定で棄却	10%検定で棄却
債券先物	30	40	51
日経先物	7	26	42
日立	5	16	30
(HIS)	(11)	(18)	(26)
GM	0	8	17
P&G	1	6	18
Yahoo!	21	39	45
円・ドル	52	61	72
ドル・ユーロ	5	16	27

(HIS の時間区間の長さは 1 時間)

表 3 をみると、例えば円・ドル為替では無作為に抽出された 100 区間のうち 52 個までは 1%検定で棄却されてしまう。すなわち、検定を行った 100 区間のうち 52 個の区間が 1%の有意水準で斉時ポアソン過程とは言えない結果となっ

¹⁴ 抽出された区間のデータで検定が行えない場合、そのデータを破棄し再度ランダムにデータを抽出した。このため、特に定時間検定において特定の時間帯が集中的に検定対象となった可能性は否定できない。

¹⁵ 斉時ポアソン過程の性質より、この帰無仮説は「抽出した時間区間で生起率が一定値をとる」とこと同値である。補論 1.参照。

¹⁶ 未知パラメータ λ の最尤推定量となる。

た。一方 P&G 株式会社では、1%検定の棄却数 1、5%検定の棄却数 6、10%検定の棄却数 18 となった。抽出された 100 区間それぞれが斉時ポアソン過程であった場合、この検定で棄却される数は、1%検定で 1 個程度、5%検定で 5 個程度、10%検定で 10 個程度になることが期待される。したがって、P&G 株式会社でも斉時ポアソン過程だけでは説明がつかない。つまり、分析したすべての銘柄について、市場の状態が均一と考えられる時間内（3 分間、HIS 株式会社では 1 時間）でも、何らかの要因によって取引発生タイミングがランダムにならないことを示している。

次に、定データ数検定の結果を表 4 に示す。一般に同一の検定を行った場合の検出力はデータ数に依存する¹⁷。表 4 は、表 3 と同様に 100 区間それぞれに χ^2 適合度検定を行い、一定の有意水準で帰無仮説が棄却された区間数を表している。

表 4：定データ数検定の有意棄却数（データ数 25 個）

銘柄	1%検定で棄却	5%検定で棄却	10%検定で棄却
P&G	1	7	16
GM	3	7	18
HIS	1	12	17
Yahoo!	2	12	21
日立	7	19	22
債券先物	15	21	31
日経先物	19	35	48
ドル・ユーロ	33	41	42
円・ドル	46	65	76

（本表は、5%検定における棄却数の順で表示）

表 4 の棄却数を比較すると、個別株式（P&G 株式会社、GM 株式会社、HIS 株式会社、Yahoo! 株式会社）、先物（債券先物、日経先物）、為替（円・ドル、ドル・ユーロ）、の 3 分類に区分できそうである。日立株式は若干違いがあるものの個別株式に近い状態と言える。これらの区分を斉時ポアソン過程に近い順番で並べると、個別株式、先物、為替となる。

¹⁷ χ^2 適合度検定結果の比較を厳密に行う場合、データ数だけではなく未知パラメータ λ も比較に影響する。しかし、パラメータ λ は実際には観測できず（観測できるのは最尤推定量 $\hat{\lambda}$ ）その効果を取り除く作業は困難なため、本稿では比較に与えるパラメータ λ の影響には言及していない。

(3) 考察

市場の日中変化の影響を回避した(2)節の分析でも、すべての銘柄において、斉時ポアソン過程からの有意な乖離が観測された(表3、4)。このように、取引発生タイミングがランダムになっていないのは何故であろうか。本稿では、その理由を計量的に分析することはしないが、「市場区分ごとに取引間の相互作用に差が存在し、その結果が(2)節で観測された斉時ポアソン過程からの乖離として現われた」という仮説を提示する。

ところで、(2)節で示した3つの市場区分別に、一般的な性質をまとめると次の通りである。

個別株式の市場では、企業の特定情報の市場参加者への伝達速度に差がある、大口取引情報が特定の証券会社に偏在している等、情報が不均一であると一般に言われている。

日本における代表的な先物市場である債券先物と日経先物は、債券と株式という銘柄の違いや東証と大証という取引所の違いはあるものの、寄付・引けの板寄せ¹⁸、システム売買取引の執行方法、昼休みの存在など類似点が多い。また、両方とも比較的流動性が高いと言われている。市場のリーダーシップを取るプレーヤーが板(指値注文の状態)を見ながら取引できる点や、市場参加者の多くがプロと呼ばれる金融機関や投資運用会社である点も同じである。

為替は、他と比較して最も流動性が高い市場と言われている。また、他の市場が取引所取引であるのに対し相対取引を基本にしている。近年では、ロイター等の電子市場化が進み、システム発注も増加している。固有の特徴としては、政府の介入やヘッジファンドによる動きが多いことも挙げられる。

これらの性質と表4の検定結果を考え合わせると、流動性が高い市場区分ほど取引発生タイミングの斉時ポアソン過程からの乖離が大きいという可能性が示唆される¹⁹。これを直観的に解釈するには、各市場の参加者の性質の違いが流動性と取引タイミングの双方に影響を及ぼすような仮説を考えるとよい。例えば、為替のように非常に高い流動性を持つ市場には、市場の動向をリアルタ

¹⁸ 取引所の開始・終了時刻に複数の取引をまとめて同一価格で一括処理する取引方法。

¹⁹ 表4で用いた χ^2 適合度検定は、銘柄間の比較を主眼に置いた分析に用いるものではなく、帰無仮説が正しいかどうかの判定を行うためのものである。分析対象の確率分布が既知であってモデル化できるような場合には、モデルからの乖離を比較することは容易であるが、検定結果を利用しての分析には限界も多い。

イムで注視し、秒単位で反応するトレーダーが多数存在する。このようなタイプのトレーダーの注文は、その直前の取引動向に強く依存する可能性が高い。この場合、強い取引間の相互作用が発生し、取引発生タイミングの斉時ポアソン過程からの乖離が観測されることになる²⁰。

また、日立株式が個別株式中において比較的先物の区分に近い性質を示すことについては、同株式が東証で取引され、先物と類似した取引形態を取っていることによる、といった説明もできる。このように、表 4 に示した分析結果は取引形態などの特徴を反映している可能性もある。

4. おわりに

本稿では、現象論的な観点から、取引発生タイミングに焦点を当て市場データの分析を行った。

その結果、分析の対象とした銘柄（市場）すべてについて、取引発生タイミングは必ずしもランダムではないこと、つまり取引発生タイミングの斉時ポアソン過程からの乖離が示された。また、取引形態や市場参加者の性質が類似した市場では、こうした乖離の程度が類似する傾向がうかがわれた。この結果については、各市場の構造に応じて取引間に相互作用が現われるという仮説を与え、若干の考察を行った。

取引発生過程に関しては、マーケット・クラッシュの発生メカニズムや最適売買執行タイミングの計量化など様々な観点から研究がなされている。本稿はこうした分析のうち、今まで研究例の極めて少ない取引発生タイミングに焦点をあてた。取引発生タイミングは、市場構造を理解するうえで価格や出来高とともに不可欠な情報である。本稿では、価格や出来高等の分析に立ち入らなかったが、今後はこれらの情報を統合的に利用した研究が必要である。また、本稿で明らかにした現象の背後にあるメカニズムを解明して行くことも課題である。

以 上

²⁰ 本稿の分析では、1つの注文が多数に別れてカウントされてしまう現象を排除できない。先物取引で成行注文を出すと、多くの場合、成約価格は複数になる。これは1つの指値注文では成行注文の取引量をさばけずに、次の指値までつかって取引が行われるからである。また、為替の取引において大口の注文をブローカーが処理する場合、一人のディーラーとだけ取引せずに複数のディーラーと同時に取引を執行し、流動性を確保している。本稿の分析結果にこうした取引成約形態の違いが影響している可能性は否定できない。

補論 1 . 斉時ポアソン過程²¹

時間に関して確定的に発生しない現象を、確率を使って表現することがある。特に、どの時間をみても同じ確率で発生している現象は斉時ポアソン過程として知られている。実際の現象で斉時ポアソン過程への当てはまりが良いものとしては飛行機事故や放射性元素の崩壊などが有名である。この補論 1.では、斉時ポアソン過程と生起率、指数分布の関係について述べる。

(1) 生起率

Δt を十分小さい正の実数とし、注目する現象が微小時間区間 $[t, t + \Delta t)$ に発生する確率を $p(t, \Delta t)$ とおく。その現象は同時に発生しない (必ず時間差がある) として、時点 t における生起率 $\lambda(t)$ を

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(t, \Delta t)}{\Delta t} \quad (\text{A-1})$$

と定義する。

すなわち生起率 $\lambda(t)$ は、時点 t における瞬間の発生確率の密度を表す。

(2) 斉時ポアソン過程

注目している現象が起きた累積回数の経時変化を計数過程というが、計数過程 $\{N(t); t \geq 0\}$ 上の任意時点 t における $N(t)$ は確率変数と考えることができる。現象の生起率が一定値 λ である場合、任意時点 t における確率変数 $N(t)$ は平均 λt のポアソン分布に従い、その分布関数は

$$\Pr\{N(t) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A-2})$$

となることが知られている。このとき、計数過程 $\{N(t); t \geq 0\}$ を生起率 λ の斉時ポアソン過程と呼ぶ。逆に、任意時点 t における $N(t)$ が平均 λt のポアソン分布にしたがうとき、この計数過程で注目している現象の生起率は一定値 λ となる。斉時ポアソン過程では、現象はどの瞬間も同じ様に発生し、発生タイミングは時間軸上にランダムにばらまかれる。

²¹ ポアソン過程と指数分布の関係等の証明は伏見[1987]pp.86-102 に詳しい。

(3) 斉時ポアソン過程と指数分布

観測開始時刻を $T_0 = 0$ とし、注目する現象の発生間隔列を $D_i = T_i - T_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots$) とする。現象の計数過程が生起率 λ の斉時ポアソン過程にしたがうならば、対応する発生間隔列 D_1, D_2, \dots はそれぞれ独立に平均 $1/\lambda$ の指数分布にしたがい、この逆もまた成立する。

これらの条件

- ・現象の計数過程が生起率 λ の斉時ポアソン過程にしたがう、
 - ・現象の生起率が一定値 λ である、
 - ・現象の発生間隔が平均 $1/\lambda$ の指数分布にしたがう、
- は互いに同値である。

本稿では、この同値関係すべてを斉時ポアソン過程と表現した。

補論 2 . χ^2 適合度検定

確率は直接観測できるものではなく、またその推定値も誤差を含んでいる。このため、観測データがどのような確率分布にしたがっているかを特定することはできない。確率分布の推定には、帰無仮説に基づく検定が有効である。

取引の発生間隔および指数分布は、連続な時間軸上の概念であるため、本来であればコルモゴロフ・スミルノフ検定など連続分布の検定を行うのが自然である。しかし、本稿で扱ったデータは秒単位で整数値をとるタイムスタンプとして与えられており、検定を行う際には離散データとして扱う必要がある。そのため、検定は χ^2 適合度検定を採用した。

検定の帰無仮説は、「検定対象区間に含まれる取引発生間隔が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う」とした。

(1) タイムスタンプの差の分布

上述のように、本稿のデータからは取引発生間隔を実数値で観測することができないため、取引のタイムスタンプの差を考えることになる。タイムスタンプが取引発生時点の小数点以下を切り捨てることによって与えられるとすると、取引の発生時点 t_1, t_2 (実数値: $t_1 < t_2$) はタイムスタンプ n_1, n_2 (整数値: $n_1 \leq n_2$) と、 $[0, 1)$ の値を取る実数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を使って、 $t_1 = n_1 + \varepsilon_1, t_2 = n_2 + \varepsilon_2$ のように表すことができる。帰無仮説のもとで取引発生間隔 $x = t_2 - t_1$ は指数分布にし

たがい、またどの瞬間の取引の生起率も等しいことから ε_1 は $[0,1)$ の一様分布になる。ここで x と ε_1 は独立である。

実際に観測できるのは、タイムスタンプ n_1, n_2 およびその差をとった $l = n_2 - n_1$ である。そこで、帰無仮説のもとでの l の離散分布を求める。

まず、 $l=0$ となる確率 p_0 を求める。これは、2 つの取引がタイムスタンプの変わり目を跨がない確率に等しく、「 $0 \leq x < 1$ かつ $0 \leq \varepsilon_1 < 1-x$ 」となる確率と言い換えることができ、

$$p_0 = \int_0^1 (1-x)\lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda}) \quad (\text{A-3})$$

となる。

また、 $l=i(i \geq 1)$ となる確率 p_i についても、「2 つの取引が i 個のタイムスタンプの変わり目を跨ぐ」確率に等しく、「 $i-1 \leq x < i$ かつ $i-x \leq \varepsilon_1 < 1$ 」または「 $i \leq x < i+1$ かつ $0 \leq \varepsilon_1 < i+1-x$ 」となる確率と言い換えることができ、

$$p_i = \int_{i-1}^i (x+1-i)\lambda e^{-\lambda x} dx + \int_i^{i+1} (i+1-x)\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda i} (e^{-\lambda} + e^{\lambda} - 2) \quad (\text{A-4})$$

となる。

(2) 検定方法

a 個の互いに背反な事象 C_0, \dots, C_{a-1} を考える。 C_0, \dots, C_{a-1} の何れかが必ず観測されるものとして、帰無仮説を

$$H_0 : \Pr\{C_i\} = p_i \quad (i=0, \dots, a-1) \quad (\text{A-5})$$

とする。ここで、 $\Pr\{C_i\}$ は「 C_i が観測される」確率を表し、 p_i は $\sum_{i=0}^{a-1} p_i = 1$ を満たす正の実数列である。

n 回の観測の結果 C_0, \dots, C_{a-1} が観測された回数をそれぞれ n_0, \dots, n_{a-1} 回とする ($\sum_{i=0}^{a-1} n_i = n$)。このとき、

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{a-1} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \quad (\text{A-6})$$

は帰無仮説のもとで χ^2 分布となり、分布の自由度は

$$\nu = (a-1) - (H_0 \text{に含まれるパラメータの数}) \quad (\text{A-7})$$

で与えられる。そこで、理論上の自由度 ν の χ^2 分布と上式により計算した χ^2 の値を比較することで検定を行った。

補論 3 . データの持つ誤差に関して

本稿の分析は Bloomberg 社のティック・データを利用した。Bloomberg 社はニューヨークにデータサーバを備えており、世界各市場からのリアルタイムデータに到着時点のタイムスタンプを押して保管している。したがって、実際に取引された時刻・時間間隔がデータに正確に反映されていない可能性がある。不確定要因には、各市場から Bloomberg 社への送信タイムラグ、Bloomberg 社のローカルホストサーバの処理時間、ローカルホストサーバからデータサーバへの送信タイムラグなどが考えられる。

タイムスタンプの誤差の程度を調べるため、大証から 60 秒毎に発信される日経平均指数について、どのような間隔で記録されているか表 A-1 に例示する。

表 A-1 : 日経平均指数のデータ間隔および観測回数
(1999 年 2 月 22 日の例、昼休みおよび引けを除く)

秒	51	52	57	58	59	60	61	62	63	64	66	72	合計
回数	2	1	4	12	53	127	58	9	1	1	1	1	270
割合(%)	0.7	0.4	1.5	4.4	19.6	47.0	21.5	3.3	0.4	0.4	0.4	0.4	100

表 A-1 から、60 秒以外にも観測値が存在することが読み取れる。60 秒という時間間隔は全体の 47.0% であり、前後 1 秒合計で全体の 88.1% になっている。

この他にも、例えば店頭取引である為替はデータが完全にシステム化されておらず、取引所のデータより誤差の入る余地が大きいと言われている。

本稿は、これら誤差の影響を含んだ分析である。これらの誤差要因が分析結果に影響を与えた可能性は否定できない。

参考文献

大澤真・村永淳、「市場リスク算出の枠組みにおける流動性リスクの計測」、
Discussion Paper No.98-J-2、日本銀行金融研究所、1998年1月

伏見正則、『確率と確率過程』、講談社、1987年

Diamond, D.W. and R.E. Verrecchia, "Constraints on Short-Selling and Asset Price Adjustment to Private Information," *Journal of Financial Economics*, Vol.18, 1987, pp.277-311.

Easley, D. and M. O'Hara, "Adverse Selection and Large Trade Volume: The Implications for Market Efficiency," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.27, 1992, pp.185-208.

Garman, M.B., "Market Microstructure," *Journal of Financial Economics*, Vol.3, 1976, pp.257-275.

O'Hara, M., *Market Microstructure Theory*, Basil Blackwell Inc., 1995.

(大村敬一・宇野淳・宗近肇(訳)、『マーケット・マイクロストラクチャー』、金融財政事情研究会、1996年)