

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

金利派生商品モデルの実務的活用について

加藤敏康・吉羽要直

Discussion Paper No. 99-J-24

IMES

**INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES
BANK OF JAPAN**

日本銀行金融研究所

〒100-8630 東京中央郵便局私書箱 203 号

備考： 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

金利派生商品モデルの実務的活用について

加藤敏康・吉羽要直*

要 旨

本稿の目的は、金利派生商品市場の状況を紹介したうえで、価格評価モデルの特性や問題点を実務的観点から考察することである。近年の金利派生商品の発展にはモデルの果たした役割が大きく、本稿ではこうしたモデルのうち、金利期間構造モデル（とくに HJM モデル）と定弾性拡散モデル（CEV モデル）に焦点を当てた。具体的には、円金利キャップの市場価格データを基に各モデルのキャリブレーションを行い、将来の金利動向に関する市場参加者の期待確率分布を分析した。この結果、円金利市場では対数正規分布と正規分布の中間的な確率分布がインプライされていることなどがわかった。また、実務上のインプリケーションとして、特定のモデルに極度に依存したリスク管理は危険であること、モデルを使用する際にはパラメータ・キャリブレーションに十分注意を払う必要があることなどを示した。

キーワード： 金利派生商品、確率分布、金利キャップ、ボラティリティ・スマイル、HJM モデル、CEV モデル

JEL classification: G13

*日本銀行金融研究所研究第1課(E-mail: toshiyasu.katou@boj.or.jp, toshinao.yoshiba@boj.or.jp)

本論文を作成するに当たっては、木島正明教授（東京都立大）から有益なコメントを頂戴した。

目次

1 . はじめに	1
2 . モデルの利用状況	1
(1) イールドカーブ・モデル	1
(2) 金融機関のモデル利用状況	2
(3) 最近の OTC 金利派生商品市場の状況	5
3 . CEV モデル	7
(1) CEV モデルの概要とバックグラウンド	7
(2) OTC 金利オプション	9
(3) 実証分析	10
(4) インプリケーション	13
4 . HJM インプライド・アプローチ	14
(1) HJM モデルについて	14
(2) アミン・モートンの研究	15
(3) 実証分析	16
(4) の推定	18
(5) インプリケーション	18
5 . おわりに	19
補論 1 . ブラック・モデル	20
補論 2 . CEV モデル	21
補論 3 . HJM モデル	21
補論 4 . キャップを用いたインプライド・アプローチ	23
参考文献	26

1. はじめに

金融商品、中でも金利派生商品は近年飛躍的な進歩を遂げた。債券先物、債券先物オプション、金利先物、金利先物オプション、金利スワップ、スワップション、キャップ、フロアーやこれらを組み合わせた商品等、多種多様な商品が取引されている。これらのうち、とくにキャッシュ・フローが複雑であったり、特殊なオプションを内包する商品をエキゾティック・デリバティブというのが、金利を対象としたエキゾティック・デリバティブを開発するために大きな役割を果たしたのが金利期間構造モデル（イールドカーブ・モデル）である。イールドカーブ・モデルは金利派生商品のプライシングやリスク管理に有用であり、これまでにさまざまなイールドカーブ・モデルが提唱されてきた。

本稿の目的は、大別して次の2点である。第1には、イールドカーブ・モデルの利用状況と現在の金利派生商品市場の状況を紹介することである。第2には、金融機関の実務と同様に、金利派生商品の市場価格からイールドカーブ・モデルのパラメータを推定したうえで、モデルの特性やパラメータ推定に関する問題点を考察することである。その過程では、先行研究の少ない日本円金利を対象として分析を行った点が特徴となっている。

本稿の構成は次のとおりである。まず第2章では、金融機関におけるモデルの利用状況を説明する。また、ヒース・ジャロー・モートン・モデル（HJMモデル：Heath, Jarrow and Morton[1992]）を中心に現在の金利派生商品市場の状況について言及する。次に第3章では、スマイルやスキュー¹と呼ばれるボラティリティ構造を取り扱うモデルの例として、定弾性拡散モデル（Constant Elasticity of Variance Model、以下CEVモデル）を紹介し、実証分析を行う。さらに第4章では、HJMモデルを用い、パラメータ推定の実証結果からイールドカーブ・モデルの問題点を明らかにする。最後に第5章で簡単な結びを述べる。なお、分析の詳細やモデルの内容の詳細については補論の中で解説した。

2. モデルの利用状況

(1) イールドカーブ・モデル

一般的に金利派生商品は、株式や為替関連派生商品と比較して、その評価やリスク管理が難しいといわれている。その理由としては、

- ・ 評価には金利の期間構造を取り入れる必要があること、

¹ ボラティリティのスマイル効果の一種。スマイルのようにアット・ザ・マネーのボラティリティが一番小さくなるのではなく、ストライクの高低どちらかにボラティリティが傾いている状態（スキューは第3章で詳述する）。

(期日の違う金利それぞれが関連性を持って確率的挙動をしていること)

- ・金利は平均回帰性を持つこと、
 - ・金利は金利派生商品の価値を決定する指標として以外に、派生商品の現在価値を算出する為の割引率という意味もあること、
- 等が挙げられる。これらの問題を克服するために指標金利が単独で確率的挙動をすると考えるのではなく、金利の期間構造全体が確率的挙動をすると考えるモデル、すなわちイールドカーブ・モデルが研究されてきた。

今まで様々なイールドカーブ・モデルが提唱されてきたが、なかでも HJM モデルは フォワードレート²に関する確率過程をモデル化したこと マルチファクター・モデル³であることから、説明力が優れており、多くのイールドカーブ・モデルを包含する一般化されたモデルであるといわれている。金融機関では、金利エキゾティック・デリバティブの中でもとくにキャッシュフローが複雑な金利派生商品を扱う上でこの HJM モデルを用いる例が多いので、以下、同モデルを中心にイールドカーブ・モデルの利用状況を調査した。

(2) 金融機関のモデル利用状況

イ . HJM モデルの利用例

はじめに、市場参加者の中で聞かれる情報に基づき、金融機関のフィナンシャル・エンジニアリング部門における HJM モデルの利用例を列挙すると次のとおりである⁴。

銀行子会社の例

- ・ 1 ファクター、2 項格子タイプの HJM モデルを使用 (場合により 2 ファクター・モデルも併用) 。
- ・ ボラティリティのスキューの影響についても考慮。

証券会社の例 (1)

- ・ モンテカルロ法を利用して、HJM モデルによりバーミュダ・オプション⁵

² 先スタート金利のこと。モデルの中では、瞬間的な先スタート金利を指す場合が多い。これに対し、現時点スタートの金利をスポットレートと呼ぶ。

³ 確率過程に 2 つ以上の確率変動の項 (ボラティリティ項) を含んでいるモデル。

⁴ ここでの内容は、いわゆる市場ルーマーを列挙したものであり、その検証は行っていない点を断っておく。

⁵ 権利行使が利払にタイミングを合わせて複数回あるもの。ヨーロッパン・オプションの一度だけの権利行使、アメリカンの随時権利行使に対して (中間を取って) バーミュダ・オプションと呼ぶ。以前はエイジアン・オプションと称していた時期もあったが、アベレージ・オプションとの混合を避けるために、最近ではバーミュ

を評価。

証券会社の例（２）

- ・全金利派生商品のうち 20%程度の商品をイールドカーブ・モデルで評価。このうち約 1/4 を占める比較的複雑なエキゾティクタイプ商品の評価に HJM モデルを利用。

銀行の例（１）

- ・エキゾティクオプションの評価ツールの一つとして HJM モデルを利用。

銀行の例（２）

- ・経路依存型の金利エキゾティク・デリバティブ評価に HJM モデルを利用。

このように、多くの金融機関は HJM モデルのようなイールドカーブ・モデルを必要なツールとして位置付けている。しかし、全商品に汎用的に利用しているわけではなく、パーミューダ・オプションや経路依存型のエキゾティク・デリバティブなど限定的な利用にとどまっている。また、大半の先では多種の金利派生商品間（含むエキゾティク）で統一的なイールドカーブ・モデルを採用せずに、商品ごとにモデルを選択し、プライシングに際しても複数のモデルの計算結果を比較していることも判明した。

元来 HJM モデルをはじめとするイールドカーブ・モデルは、ローンや現物債券を含む金利関連商品すべてに適用できるモデルであるため、統一的なイールドカーブ・モデルを使い、すべての金利関連商品間の評価やリスク管理に理論的整合性を確保すべきとの意見もある。しかし、金利関連商品でもその種類別に使われるモデルは異なっているのが実態である。これは以下の 3 点が背景となっている。

- ・一般的に、イールドカーブ・モデルには、推定しなければならないパラメータが多いため、推定するたびにパラメータの変動が大きく安定性に欠けたり、同一日でありながら使う市場データの種類によってパラメータが大きく変化するなどの問題がある（市場実勢に合わせたパラメータ推定については第 4 章で述べる）。
- ・多くの場合解析的な評価式が存在せず、格子法やモンテカルロ法などの数値計算が必要なため、計算負荷が大きい等の問題点もある。
- ・いずれのイールドカーブ・モデルもある種の仮定に基づいたモデルであり、極度に特定のモデルに依存したリスク管理体制はかえって危険である。

ーダ・オプションの呼称が定着した模様（ペーパーカンパニーの所在地が呼称の発祥という説もある）。

ロ． プレーンな金利派生商品

次にエキゾティック・デリバティブ以外のプレーンな金利派生商品についてみると、オプション性のない債券先物、金利先物や金利スワップ等は FRA 評価で用いられるディスカウント方式を採用しており、債券先物オプション、金利先物オプション、金利スワップション、キャップやフロアー等のオプション系商品はブラック・モデル (Black[1976])⁶で評価されている。このうち、ディスカウント方式は、ゼロイールドカーブを作成し、得られたイールドカーブからインプライド・フォワード・イールドを計算、それに基づき個々の金融商品のインプライド・キャッシュフローを算出し、キャッシュフローを現在価値にディスカウントする方法であり、現物債券評価でも広く用いられている。一方、ブラック・モデルは本邦において債券先物オプション・金利先物オプションなどで支配的な地位を占めており、多くの金融機関はブラック・モデルだけに頼ることはないにせよ、ブラック・モデルを用いて評価やリスク管理を行っている。

ブラック・モデルはブラック・ショールズ・モデル(Black and Scholes[1973])と同様に、期間中の割引率・ボラティリティを一定と考える等の先験的な仮定を置いており、ブラック・ショールズ・モデルと同様の限界がある。各金融機関ではブラック・モデルの限界は理解しているが、以下の理由からブラック・モデルを用いて評価・リスク管理を行っている。

- ・市場で標準モデルとして認知されており、ブラック・モデルのボラティリティを使って市場価格を表現するケースが多い。また、同ボラティリティは、将来の価格変動性を反映する指標としても市場で浸透している。
- ・解析解が存在するので、評価額やデルタ⁷等のリスク計数の計算スピードが速く、多数の取引やポートフォリオ全体の評価・リスク管理が容易(格子法等の離散モデルは、リスク計数が断続的に変化するため、ディーラーがポジションを調整する際に使いづらい)。
- ・とくに上場されているオプションでは、商品自体の流動性が高く、オプションの時価そのものを市場から入手可能。

つまり、イールドカーブ・モデルのような理論的に優れているモデルを使わずに、実際の運用を優先し使い易いモデルを利用している。別の言い方をすれば、モデルはモデルとして割り切っており、そのモデルの前提が実勢の市場と

⁶ 先物・先渡商品を原資産とするオプション評価に使用される。詳しくは補論 1 を参照。

⁷ 原資産価格の値動きに応じて、オプション価格が変動する程度を表わす指標。

多少異なっているとしても、運用上大きな不都合が生じない限り、モデルの前提から乖離する部分は歪みとして目をつぶり運用している。

以上みてきたように、金利派生商品によって用いられるモデルは異なり、金利エキゾティック・デリバティブのように、イールドカーブ・モデルを用いなければ評価できないような金利派生商品に限定して HJM モデルをはじめとするイールドカーブ・モデルが利用されている⁸。

表 1 典型的なモデルの利用例

商品名	プライシング方法・モデル
現物債券・債券先物 金利先物・金利スワップ FRA 等オプション性の無い金融商品	ディスカウント方式
債券先物オプション・金利先物オプション スワップション・キャップ・フロアー 等プレーンなオプション	ブラック・モデル
金利エキゾティック・デリバティブ	イールドカーブ・モデル (HJM モデル等)

(3) 最近の OTC 金利派生商品市場の状況

金利派生商品に限らず、デリバティブ全体の取引量が増加している一方で、OTC 金利派生商品市場の収益性は縮小傾向をたどっている。10 年前には単純な金利スワップで 100bp 以上あった Bid-Offer スプレッドが、現在は金利エキゾティック・デリバティブで数十 bp、金利スワップでは数 bp に満たない状況となっている。

この背景には、OTC デリバティブの供給側の側面として、
 ・コンピュータの発達やソフトウェア開発によって、扱い易くしかも安価な金融派生商品の評価ツールが登場したことで、5～10 年前に新規の金融機関が市場に参入、競争が激化したこと、
 が挙げられる。

一方、需要側の側面として、

⁸ ただし、このような運用方法では、例えばスワップ・トレーダーは債券市場と金利スワップ市場を同一モデルで評価しているにもかかわらず、リスク管理担当者は別々のモデルで評価するといった不一致も生じ、問題なしとはいえない。また、OTC 取引では、使用しているモデルが市場で一般的に認められているモデルと異なっていた場合、評価価格が実際に取引できる価格と乖離し、気付いた時に多大な損失が発生する可能性もある。

- ・ P&G 損失事故⁹に代表される不透明なデリバティブ取引が表面化したことから、デリバティブ悪玉論が台頭し、金融機関・企業両者の取引インセンティブが低下したこと、
- ・ 時価会計移行に伴い、企業にとって OTC デリバティブの管理コストが増加してきたこと、
- ・ もともと、各国の会計や税務制度の隙間で魅力のある金融派生商品が開発されてきたが、制度の改革とともにそうした魅力が薄れてきたこと、
- ・ 世界的な信用不安から、信用に大きく依存する OTC デリバティブそのものが取引しにくくなってきていること、

等が挙げられる。もちろん、OTC 金利派生商品は資産・負債両サイドのキャッシュフロー管理に有益であり、今後も無くなるとは考えにくい、すでに特殊な金融商品ではなく、債券先物のような普通の金融商品に近づいたともいえる。今や多くの金融機関では金利派生商品だけを取り扱う部署はなくなりつつあり、キャピタルマーケット¹⁰や債券トレードにおけるツールの一つとして考えられている。

これらの傾向は金利エキゾティック・デリバティブにも当てはまる¹¹。イーールドカーブ・モデルは金利派生商品でもエキゾティック・デリバティブに対して利用される場合が多く、中でも HJM モデルは特殊な金利派生商品に利用されていることはすでに記した。したがって、利用対象となる取引自体の低迷も、市中金融機関でこれらのモデルが限定的な用途にとどまっている原因の一つといえよう。

また、先にイーールドカーブ・モデルのパラメータ推定の困難さに触れたが、それゆえ金融機関はさまざまなモデルを独自に変更して自行モデルとしている。つまり、イーールドカーブ・モデルもオリジナル論文通りの式を使っているわけではない。代表的な例はブラック・ダーマン・トイ・モデル (BDT モデル: Black, Derman and Toy[1990])、BGM モデル (Brace, Gatarek and Musiela[1997]) であり、ほとんどの金融機関がモデルに独自の修正を加えていると言われている¹²。また、金融機関はモデルで必要となるパラメータの推

⁹ プロクター & ギャンブル社とバンカース・トラスト銀行の間で訴訟に発展した取引。ドル金利やマルク金利を指標とした高レバレッジ金利スワップが原因となり、1994年のドル金利上昇で、P&G に 150 百万ドルにおよぶ損失が発生したといわれている。

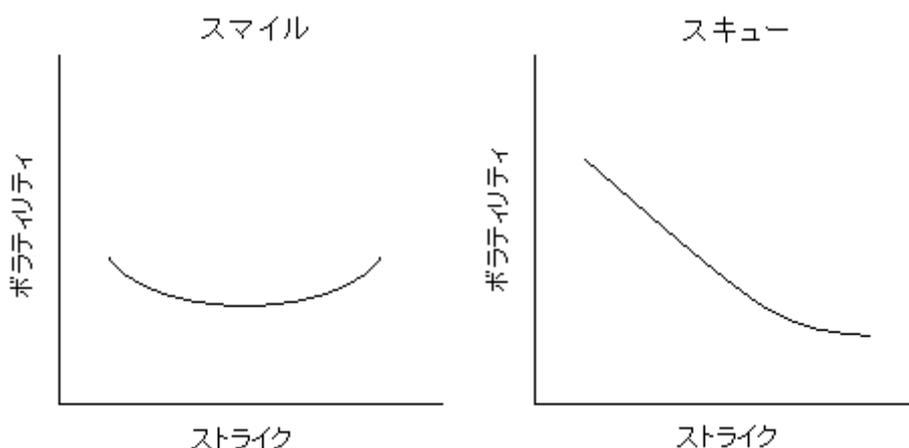
¹⁰ 債券引受やリパッケージ債組成・販売等を含む市場部門の顧客取引の総称。

¹¹ エキゾティック・デリバティブは業者間のディーリングとしてのニーズは無く、顧客向けの仕組み商品としてのニーズのみがある。したがって、上述の顧客取引の影響を最も受けるために取引量は減少している。

¹² モデルおよびパラメータの詳細は各金融機関の機密情報であり、詳しい内容は明ら

イリティ (I.VOL)¹⁴が表示されている。このインプライド・ボラティリティを計算する時に使用されているモデルがブラック・モデルである。ブラック・モデルでは、満期までのボラティリティをストライクに依存せず一定とするとの仮定が置かれているが、図 1 から、市場ではモデルの理論どおりの価格付けがなされていないことがわかる。また、インプライド・ボラティリティの水準は、それぞれのオプションごとに異なっているが、同じストライクのコール・プットではほぼ等しい。このように満期が同じでストライクが異なるオプション間にボラティリティの違いがあるという事実は、債券先物オプションに限られたものではなく、株式や為替などほとんどのオプションに当てはまる。図 2 のようなボラティリティ・ストライク・グラフの形状に応じて、こうした現象を、スマイル(笑っている唇)やスキュー(傾いた状態)という。

図 2 ボラティリティ・ストライク・グラフ(概念図)



第 2 章で触れたが、上場オプションについてはスマイルやスキューがモデルの可否を問うような問題とはなっていない。しかし、OTC オプションを扱う時は注意が必要である。いくつかの金融機関で、これらに関連した評価ミスが多大な損失につながったといわれているからである。その教訓を生かし、多くの金融機関ではノーマルタイプといえどもブラック・モデルだけで取引を判断せず、他のモデルを併用して評価やリスク管理を行う例も見られるようになってきた。その代表的なモデルが CEV モデルであろう。CEV モデルにおける原資産価格の挙動を示す確率微分方程式は(1)式で表される。

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW(t) \quad (1)$$

¹⁴ 市場で観測されるオプション・プレミアムから逆算して求められるボラティリティ。

ここで S は原資産価格、ドリフト項の係数は μS 、ボラティリティ項の係数は σS である。したがって、原資産価格分布は $\gamma = 1$ の時を除いて対数正規分布にならず、分布形状は γ の値に応じて変化する。

図 3 原資産価格分布の比較（概念図）

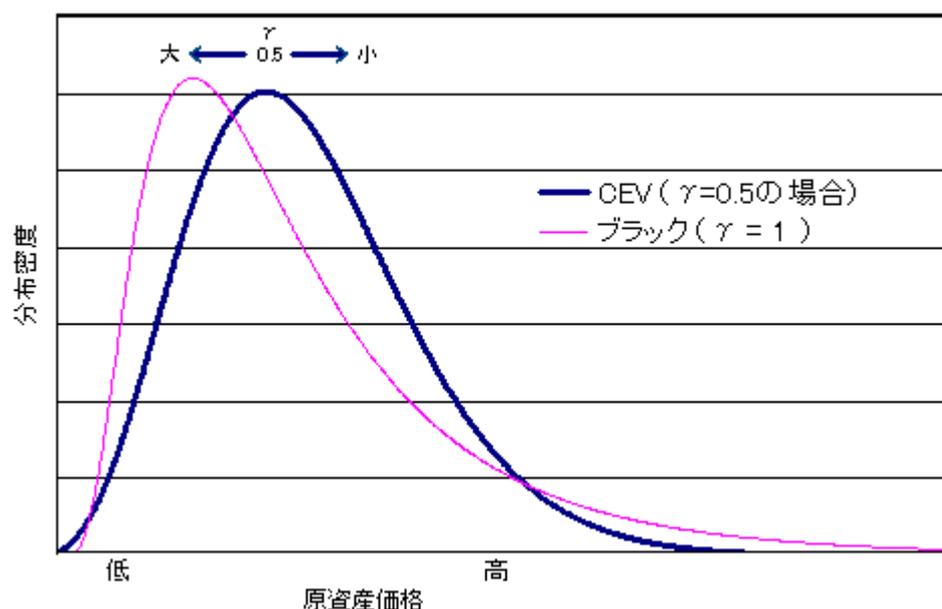


図 3 にブラック・モデルが仮定している原資産価格分布（対数正規分布）と CEV モデルが仮定している原資産価格分布の例（ $\gamma = 0.5$ の場合）を示す。後者の分布は中心が右に寄っており、原資産価格が高い領域では分布密度が相対的に小さいことがわかる。CEV モデルは $\gamma = 1$ でブラック・モデルとなり、 $\gamma = 0$ に近づくにつれて分布は右寄りにシフトする。

（ 2 ） OTC 金利オプション

スワップション、キャップ、フロアーと呼ばれるノーマルタイプの金利オプションは OTC 市場で取引されるオプションである。したがって、その時価は各金融機関が独自の方法で算出し、リスク管理も独自に行っている。これら OTC 市場でのノーマルタイプもブラック・モデルで表現されるのが一般的で、ブラック・モデルをもとにしたボラティリティ表示で取引されている¹⁵。図 4 は Tokyo-Forex 社による円金利キャップのインディケーションで、第一列がキャップのストライク、第一行がキャップ満期までの期間である。図 4 から明ら

¹⁵ もちろん実際に受け渡されるのはプレミアム金額（オプション料）である。

かなように、各満期ごとにストライクの低いキャップはボラティリティが高く、ストライクの高いキャップはボラティリティが低い。このスキューは円金利キャップのマーケットでは恒常的に発生している。

図 4 円金利キャップ・インディケーションの例 (平成 11 年 3 月 31 日時点)
IMPLIED VOLATILITIES(MID VALUES)

YEN CAP VOLATILITIES								DATE: MAR 31 1999
K	1y	2y	3y	4y	5y	7y	10y	
0.50	120	110						
0.75	115	107	97.5	85	78			
1.0	110	104	91	80	73	60.5		
1.5		101	85.5	75	68	55.5	47	
2.0		98	80.5	70	63	51.5	43	
2.5		95	76.5	66	59	47.5	40	
3.0		92	73.5	63	56	44.5	38	
3.5			71.5	61	53.5	43	36.5	
4.0			69.5	59.5	51.5	42	35	
4.5			67.5	58.5	50	41	34	
5.0			66.5	57.5	49	40.5	33	
5.5					48			

THE TOKYO FOREX Co., Ltd.

スキューの発生理由は、低金利環境下において将来の金利低下の可能性が上昇の可能性より少ないこと、金利の低下率と上昇率が同じ場合、上昇した方がオプションから得られる利益額が大きいこと¹⁶などといわれている。前述のように、スマイルやスキューはブラック・モデルが仮定している世界と現実との乖離を表しているが、この事実を踏まえつつも、第 2 章で示した運用上の理由から市中では敢えてブラック・モデルを標準モデルとしているのである。

(3) 実証分析

モデルのパラメータを決定する場合、リスク管理上はヒストリカル・データを用いる場合も多い。バリュー・アット・リスク (以下 VaR) の算出はその一

¹⁶ ブラック・モデルにおけるボラティリティは原資産価格の変動率を基準にしている。例えば、原資産価格が半分になることと倍になることをブラック・モデルでは同じ確率と考えているが、実際にオプションを行使して得られる利益額はストライクと原資産価格の差であるため、低下率と上昇率が同じでもオプション行使時の利益額は上昇した場合の方が大きくなる。このことから、低下方向へのボラティリティは高くても当然とする意見もある。

例だが、これを全商品に跨って大規模に計算する時には、リアルタイムで市場データを更新したりすべてのエキゾティク・デリバティブのパラメータ推定を行うのは計算負荷が大きく実務上対応できない。一方、プライシングをする時にはヒストリカル・データを用いることは希で、オプション価格や金利データは取引時点のリアルタイム・データを用いて計算される。図 1 や図 4 で示したように、ボラティリティも過去のヒストリカル・データは使用せず、現在のオプション・プレミアムから逆算し、それをもとに分析・プライシングを行う。このように市場データに基づきパラメータを決定する理由は、プライシングの際に市場実勢との整合性を確保するためである。逆に、ヒストリカル・データに基づいてパラメータを決定すると、市場実勢と乖離が生じ、取引した瞬間に損益が発生するケースもありうる。

本節では、以下、実務上金融機関で用いられている手法により、市場のオプションデータを用いたインプライド・アプローチから CEV モデルでの実証分析を行った。小田・吉羽[1997]はノンパラメトリックな手法を用いて原資産価格の確率分布導出を試み、白塚・中村[1998]は金融政策運用上のインプライド確率分布分析の有効性を示唆しているが、本稿の実証分析の目的も、図 3 にあるような金利の分布状況を分析することにある。データは図 4 と同様の円金利キャップの 1998 年 3 月から 1999 年 3 月の隔月末値を用いた。キャップはキャップレット¹⁷といわれるオプションの集合体であり、市場慣行では一つのキャップに内包されるキャップレットすべてに同じボラティリティ値を仮定したブラック・モデルでプレミアムを計算する。これに対し、本稿の CEV モデルでは、個々のキャップレットに自由度を与え、同満期のキャップレットに対しては異なるキャップであっても同値の CEV ボラティリティ¹⁸が適用されるように定式化した。そして、同日のキャップすべてに対して、市場で観測されたプレミアムと CEV モデルで計算したプレミアムの差が最小になるようにキャリブレーション¹⁹を行った。なお、CEV モデルを使ったキャップ計算の定式化やキャリブレーションの詳細は補論 4 を参照。

表 2 はこの実証分析の結果である。各列は分析日付で表示しており、各日付ごとに の推定値を示し、また、CEV ボラティリティの推定値をキャップレットの満期別に表示した。参考値として 5 年スワップレートも表示した。表 2 で

¹⁷ キャップ、キャップレットについては補論 4 を参照。

¹⁸ 本稿では(1)式の を CEV ボラティリティと呼ぶ。CEV モデルにおけるボラティリティ項の係数は S である。

¹⁹ 本稿におけるキャリブレーションとは、モデルに適用する複数のパラメータを最小二乗法等を用いて数学的に推定することをいう。推定の際にはパラメータを逐次変更し繰り返し計算を行う。

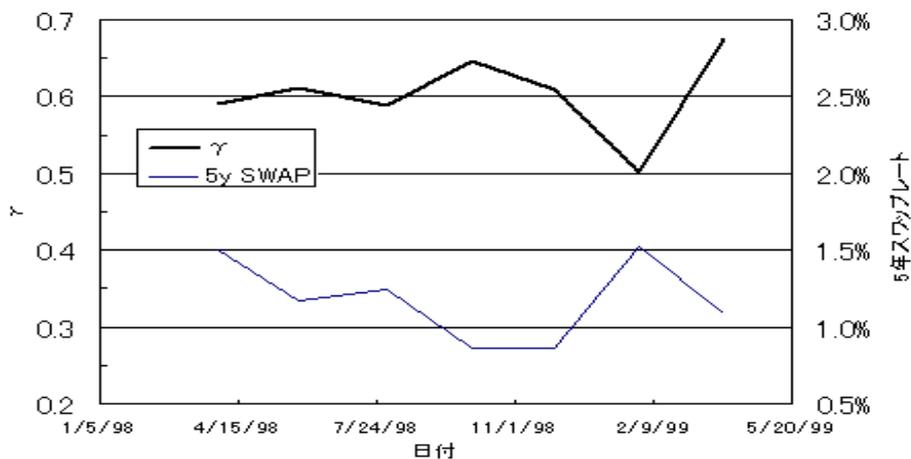
表2 分析結果

		3/31/98	5/29/98	7/31/98	9/30/98	11/30/98	1/29/99	3/31/99
5y SWAP		1.5000%	1.1725%	1.2425%	0.8650%	0.8600%	1.5250%	1.0900%
	γ	0.590	0.612	0.589	0.647	0.609	0.501	0.675
CAPLET満期								
CEV Vol	0.5	54.6%	56.1%	56.1%	66.8%	67.8%	63.1%	90.0%
	1	55.1%	31.6%	31.9%	51.5%	25.5%	32.1%	40.4%
	1.5	67.1%	71.5%	75.0%	87.8%	73.3%	78.2%	109.7%
	2	82.7%	82.4%	80.3%	88.4%	77.3%	84.6%	98.3%
	2.5	46.7%	50.6%	49.2%	51.9%	54.7%	62.7%	79.7%
	3	57.2%	62.8%	62.2%	72.2%	69.6%	71.2%	77.2%
	3.5	48.8%	53.4%	52.7%	64.3%	61.7%	63.2%	72.8%
	4	53.7%	56.8%	56.6%	66.3%	68.4%	64.1%	70.5%
	4.5	46.9%	49.7%	49.5%	61.8%	60.5%	55.6%	63.5%
	5	56.3%	59.0%	58.9%	63.1%	70.1%	67.7%	65.3%
	5.5	48.9%	52.3%	52.1%	58.9%	63.9%	61.4%	58.8%
	6	44.1%	46.1%	45.9%	55.8%	56.4%	53.6%	50.7%
	6.5	38.4%	40.1%	39.9%	53.7%	48.9%	46.0%	42.8%
	7	54.9%	49.1%	49.1%	56.5%	61.9%	60.3%	58.6%
	7.5	45.7%	44.3%	44.3%	52.5%	58.1%	56.5%	54.7%
	8	41.3%	41.8%	41.8%	50.4%	53.4%	51.6%	49.8%
	8.5	35.6%	39.6%	39.6%	48.3%	48.4%	46.6%	44.7%
	9	29.9%	36.8%	36.9%	46.1%	41.6%	39.8%	37.7%
	9.5	22.5%	34.3%	34.3%	44.0%	34.2%	32.2%	30.1%

は金利分布の指標となる γ が概ね 0.6 であると読み取れる。実際、市中金融機関の間でも $\gamma = 0.6$ とモデル化するケースが少なくないようである。これは、円金利キャップ市場参加者が考えている金利分布状況は $\gamma = 0.5$ より若干ブラック・モデル ($\gamma = 1$) に近い状態 (図3を参照) にあることを示す。図5には分析期間の γ の推移をグラフで表示する。

図5から、 γ は概ね 0.6 で推移しているが、金利水準と逆相関で変化してい

図5 推移



るように読み取れる。これは、金利がゼロに近づくとも一層の金利低下余地が減

り、その結果分布が対数正規分布に近い形状になるためと解釈できる。つまり、市場のオプション価格が原資産価格の下限值(ゼロ金利)接近を意識して、図 3 でいう分布が左寄りにシフトしたものと考えられる。次に、分析で得られた CEV ボラティリティを図 6 に表示する。

図 6 CEV ボラティリティ変化

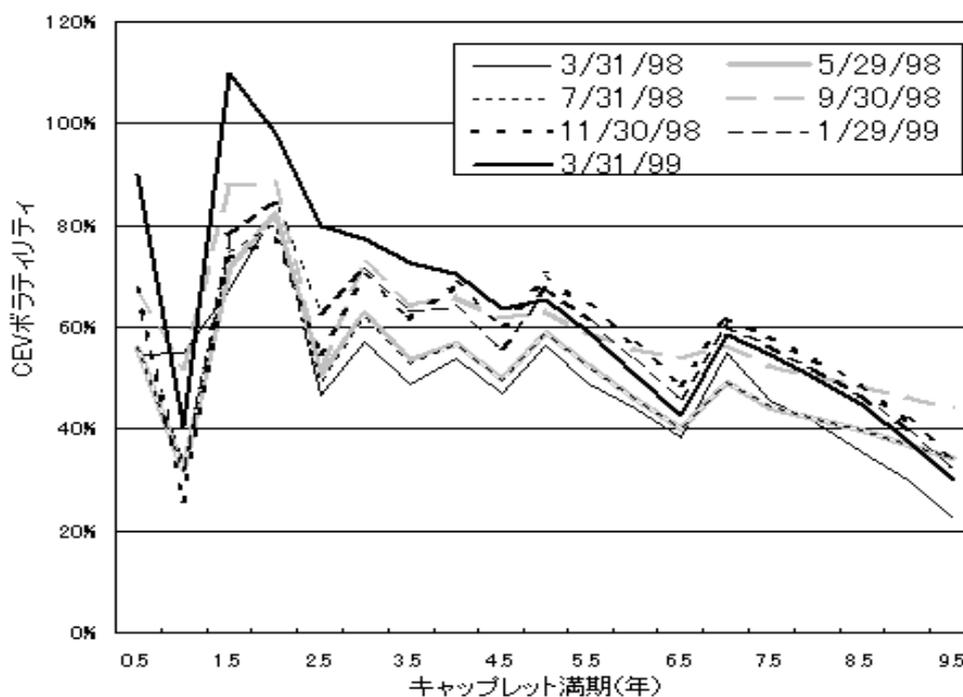


図 6 では、オプション満期までの時間が長くなると、CEV ボラティリティの水準が低下する傾向がうかがわれる。これは図 4 におけるブラック・モデルのボラティリティにも現われており、一般的な傾向と考えてよい。図 6 で特徴的なのは、オプション満期まで 1 年と 6.5 年のキャップレットは前後のキャップレットに比べボラティリティが低いこと、また、同一日でも隣り合う期間のボラティリティが滑らかにつながっていないことである。これが、本稿で用いた CEV モデルの仮定に起因するものか、あるいは市場の構造的な要因(CEV モデルで市場を表現できない可能性も含めて)によるものかを検討するのは、今後の課題である。

(4) インプリケーション

前述のように、CEV モデルの α の値が 1 の時、CEV モデルはブラック・モデルと同一になる。CEV モデルの α の値が 0.6 付近で安定していることは、円

金利キャップ市場参加者の分布に対する見方が、ブラック・モデルつまり対数正規分布でないことを示している。すなわち、市場参加者の平均的期待として、将来の円金利の分布状態は対数正規分布ではなく、 $\alpha=0.6$ の CEV モデルの分布に近いと考えられているといえよう。

Chan, Karolyi, Longstaff and Sanders[1992]や Hiraki and Takezawa[1997]はヒストリカル・データを用いた実証分析で、金利スポットレートの分析を行っている。その結果、CEV モデルの α に対応するパラメータが 1 ではないことを確かめている。つまり、ヒストリカル・データからも金利分布状態が対数正規分布とならない例が示されており、金利の分布状況を盲目的に対数正規分布と仮定するのは危険であるといえよう。したがって、ブラック・モデルだけに依存せず、CEV モデルなども併用して金利派生商品の評価やリスク管理を行う意義があると考えられる。とくに OTC 取引については、上場価格からその時価を入手できないので、その点注意が必要である。

4 . HJM インプライド・アプローチ

Miyazaki and Yoshida[1998]では国債のヒストリカル・データから 1~3 ファクター HJM モデルのパラメータを推定している。これに対し、本章では第 3 章と同様にインプライド・アプローチで、円金利キャップの市場データから HJM モデルのパラメータを推定する。HJM モデルにおいても実際の市場データからパラメータ推定を行わないと、市場の実勢価格と異なる取引価格を提示してしまう可能性があり、実際多くの金融機関でもインプライド・アプローチでパラメータ推定が行われているようである。

(1) HJM モデルについて

HJM モデルはイールドカーブ・モデルの中でも他の多くのイールドカーブ・モデルを内包するという意味で最も包括的な枠組みである。

HJM モデルを用いての評価やリスク管理が金利エキゾティック・デリバティブに限定されていることは第 2 章で述べた。HJM モデルは汎用性が高く、モデルとしての説明力も優れており、多くの金融機関で用いられている。しかし、通常非マルコフ過程²⁰であり、格子法を用いる場合の計算負荷が飛躍的に増大する。したがって、モンテカルロ法を用いて計算する 경우가多く、本稿の

²⁰ マルコフ過程とは、対象物の確率挙動が観測時点以前の情報に左右されない状態をいう。非マルコフ過程はその逆で、観測時点以前の情報によって対象物の確率挙動が影響を受ける状態をいう。

実証分析でもモンテカルロ法を用いた。また、パラメータを市場データに合わせるためにボラティリティに複雑な関数形を与えたりする例もあり、他のイーランドカーブ・モデルよりも取扱いが難しいモデルといえる。さらに、未知パラメータの個数を多くするとキャリブレーションが困難になる場合もある。

(2) アミン・モートンの研究

HJM モデルにインプライド・アプローチを適用した先行研究としてはアミン・モートンの研究 (Amin and Morton [1994]) がある。アミン・モートンでは、ユーロドル先物と先物オプションの市場データを使ってフォワードレートの期間構造とボラティリティ関数を推定している。対象としている HJM モデルは次の 1 ファクター・モデルである。

$$df(t, T) = \alpha(t, T, \cdot)dt + \sigma(t, T, f(t, T))dW(t) \quad (2)$$

ここで、時点 t における満期 T の瞬間フォワードレート (すなわち、 $[T, T+dT]$ に適用される金利) を $f(t, T)$ とし、ドリフト項の係数を (t, T, \cdot) 、 $W(t)$ を標準ブラウン運動とした。

アミン・モートンでは、ボラティリティ項の係数であるボラティリティ関数 $\sigma(t, T, f(t, T))$ に次の 6 つを想定している。

Absolute モデル: $\sigma(\cdot) = \sigma_0$

Square Root モデル: $\sigma(\cdot) = \sigma_0 f(t, T)^{1/2}$

Proportional モデル: $\sigma(\cdot) = \sigma_0 f(t, T)$

Linear Absolute モデル: $\sigma(\cdot) = [\sigma_0 + \sigma_1(T - t)]$

Exponential モデル: $\sigma(\cdot) = \sigma_0 \exp[-\lambda(T - t)]$

Linear Proportional モデル: $\sigma(\cdot) = [\sigma_0 + \sigma_1(T - t)]f(t, T)$

～ が 1 パラメータ、～ が 2 パラメータ・モデルである。アミン・モートンはこれらのパラメータをインプライド・アプローチで推定している。以下各モデルの考え方をまとめておく。Absolute モデルはフォワードレートの変動が期間中一定と考えるモデルである。これに対し、Proportional モデルはフォワードレートの収益率の変動が期間中一定と考えるモデルである。Proportional モデルは のようにパラメータにフォワードレートを掛け合わせたかたちのボラティリティ構造を持っている。したがって、フォワードレートが小さくなるとボラティリティ項も小さくなるため、理論的にはフォワードレートが負になることがないのがその特徴の 1 つである (他方、Absolute モデルでは負のフォ

ワードレートが生じうる)。Absolute モデルはフォワードレートが正規分布に従うことを仮定しているという意味で「正規モデル」ともいえる。一方、Proportional モデルはフォワードレートの対数値が正規分布に従うという意味で「対数正規モデル」ともいえる。Square Root モデルは Absolute モデルと Proportional モデルの中間的なモデルである。Linear Absolute モデルはフォワードレートの変動が、期間中一定な部分と満期までの期間によって増加（ないし減少）する部分とで構成されるモデルである。レートの変動ではなく収益率の変動について同様の見方をしたモデルが Linear Proportional モデルである。Exponential モデルは、満期までの期間に応じてフォワードレートの変動が指数的に減少（ないし増加）するモデルである。

（３） 実証分析

（２）節で示したアミン・モートンの６つのモデルに対し、第３章と同一の市場データを適用してパラメータを推定した。HJM モデルによるキャップのプレミアム計算にはモンテカルロ法を用い、第３章と同様に市場で観測されるプレミアムとの差を最小化するようにキャリブレーションを行った（詳細は補論３および補論４を参照）。

結果は表３～６のとおりである²¹。表中の「種」は乱数の種²²を、²は上記キャリブレーション後のプレミアム誤差最小値（補論４(A-6)参照）を示す。²は Linear Absolute モデルを除いて²³、Square Root モデル、Exponential モデル、Absolute モデルの順に大きくなっていることがわかる。²は市場データと HJM モデルとの誤差最小値なので、分析期間中のデータでは、アミン・モートンの ~ のモデルの中で、Square Root モデルが相対的に市場への当て

²¹ 本稿の分析で、Proportional モデルと Linear Proportional モデルは、キャリブレーションの途中で観測されるフォワードレートやプレミアムが異常な値となってしまったため結果から除いた。両モデルでは市場データとの乖離が大きく解が収束しなかったと考えられる

²² モンテカルロ法における乱数発生初期値。乱数は発生させる手法によってパターン（乱数集合）が異なるだけでなく、手法が同じでも初期値によってできあがったパターンが異なる。

²³ Linear Absolute モデルでは、パラメータや ² の値が「種」により大きく変動した。同じ市場データを用いても乱数のパターンでキャリブレーションの結果が大きく変わったことになる。本稿では 50 を越えるキャップデータすべてを用いてキャリブレーションを行っており、最小化させるデータが多すぎたこともモデルの当てはまりに影響したと考えられるが、とくに Linear Absolute モデルは分析期間の市場データと乖離しており、その不安定さが現われた結果と考えられる。

表3 Absolute モデル

日付	種	χ^2	σ_0
1998/3/31	1	26.27	0.0080
1998/3/31	2	26.77	0.0078
1998/3/31	3	27.93	0.0074
1998/5/29	1	16.57	0.0105
1998/5/29	2	17.53	0.0103
1998/5/29	3	17.71	0.0102
1998/7/31	1	13.41	0.0111
1998/7/31	2	14.18	0.0110
1998/7/31	3	14.71	0.0109
1998/9/30	1	17.48	0.0111
1998/9/30	2	18.60	0.0110
1998/9/30	3	19.16	0.0108
1998/11/30	1	16.26	0.0100
1998/11/30	2	17.40	0.0099
1998/11/30	3	16.35	0.0098
1999/1/29	1	21.55	0.0108
1999/1/29	2	22.06	0.0107
1999/1/29	3	23.07	0.0104
1999/3/31	1	30.61	0.0093
1999/3/31	2	31.18	0.0092
1999/3/31	3	32.03	0.0088

表4 Square Root モデル

日付	種	χ^2	σ_0
1998/3/31	1	3.75	0.084
1998/3/31	2	3.74	0.084
1998/3/31	3	3.98	0.082
1998/5/29	1	3.08	0.086
1998/5/29	2	3.12	0.086
1998/5/29	3	3.14	0.084
1998/7/31	1	3.59	0.084
1998/7/31	2	3.49	0.084
1998/7/31	3	3.60	0.082
1998/9/30	1	2.59	0.097
1998/9/30	2	2.38	0.098
1998/9/30	3	2.51	0.096
1998/11/30	1	3.89	0.086
1998/11/30	2	3.19	0.088
1998/11/30	3	3.94	0.085
1999/1/29	1	4.80	0.093
1999/1/29	2	4.50	0.093
1999/1/29	3	4.59	0.092
1999/3/31	1	1.98	0.127
1999/3/31	2	1.91	0.127
1999/3/31	3	1.89	0.125

表5 Linear Absolute モデル

日付	種	χ^2	σ_0	σ_1
1998/3/31	1	5.18	0.0052	0.0040
1998/3/31	2	20.74	0.0109	-0.0083
1998/3/31	3	5.54	0.0048	0.0041
1998/5/29	1	24.25	0.0123	-0.0077
1998/5/29	2	24.36	0.0120	-0.0076
1998/5/29	3	24.45	0.0116	-0.0075
1998/7/31	1	24.84	0.0121	-0.0074
1998/7/31	2	24.91	0.0119	-0.0073
1998/7/31	3	25.05	0.0113	-0.0072
1998/9/30	1	7.02	0.0080	0.0022
1998/9/30	2	29.36	0.0118	-0.0064
1998/9/30	3	29.63	0.0113	-0.0063
1998/11/30	1	2.71	0.0064	0.0028
1998/11/30	2	23.66	0.0147	-0.0076
1998/11/30	3	2.85	0.0063	0.0028
1999/1/29	1	20.65	0.0121	-0.0097
1999/1/29	2	20.59	0.0119	-0.0096
1999/1/29	3	20.47	0.0115	-0.0095
1999/3/31	1	6.67	0.0052	0.0057
1999/3/31	2	22.48	0.0124	-0.0105
1999/3/31	3	6.91	0.0047	0.0058

表6 Exponential モデル

日付	種	χ^2	σ_0	λ
1998/3/31	1	10.22	0.0069	-0.24
1998/3/31	2	10.29	0.0067	-0.24
1998/3/31	3	11.28	0.0064	-0.25
1998/5/29	1	6.33	0.0083	-0.18
1998/5/29	2	6.84	0.0082	-0.18
1998/5/29	3	6.97	0.0081	-0.18
1998/7/31	1	5.81	0.0089	-0.15
1998/7/31	2	6.14	0.0088	-0.15
1998/7/31	3	6.47	0.0086	-0.16
1998/9/30	1	8.93	0.0092	-0.13
1998/9/30	2	9.48	0.0090	-0.14
1998/9/30	3	9.74	0.0088	-0.14
1998/11/30	1	4.79	0.0080	-0.17
1998/11/30	2	5.57	0.0079	-0.18
1998/11/30	3	4.87	0.0078	-0.18
1999/1/29	1	8.46	0.0085	-0.22
1999/1/29	2	8.47	0.0084	-0.23
1999/1/29	3	9.08	0.0081	-0.23
1999/3/31	1	13.85	0.0079	-0.26
1999/3/31	2	14.01	0.0078	-0.26
1999/3/31	3	14.70	0.0075	-0.27

はまりがよいといえよう²⁴。

²⁴ $\sigma=2$ の場合、個々のプレミアムで約 20%の誤差が残っていることになる。したがって、 σ が 2~4 程度の Square Root モデルでも市場データと乖離があることに注意が必要である。 σ の定義は補論 4(A-6)を参照。

(4) の推定

(3) 節で扱った 6 つのモデルのうち、3 つの 1 パラメータ・モデル (~) は次のようなフォワードべき乗モデルにまとめられる。

$$\sigma(t, T, f(t, T)) = \sigma_0 f(t, T)^\gamma \quad (3)$$

(3) 節では、HJM モデルのボラティリティ項におけるべき乗値 γ が 0、0.5、1 の場合について実証分析したことになる。 $\gamma = 1$ の時は解が得られず、0 と 0.5 では、 $\gamma = 0.5$ の方が市場データとの誤差が小さかった。本節では、(3) 式のべき乗モデルを用いて、予め特定の値を与えない形で γ の推定を試みる。分析の方法は (3) 節と同様のキャリブレーションであり、(3) 式の γ を変動パラメータに追加した点だけが異なる。表 7 に結果を表示する。

表 7 から、 χ^2 は 2~4 程度で市場データに対して前節の Square Root モデルとほぼ同程度の当てはまりである。 γ の値は 0.4~0.5 で推移している。この結果から、金利分布は Proportional (対数正規: $\gamma = 1$) や Absolute (正規: $\gamma = 0$) ではなく、その中間であることが示唆される。

表 7 べき乗モデル

日付	種	χ^2	σ_0	γ
1998/3/31	1	3.82	0.071	0.46
1998/3/31	2	3.74	0.077	0.48
1998/3/31	3	3.97	0.085	0.51
1998/5/29	1	2.53	0.059	0.40
1998/5/29	2	2.62	0.064	0.42
1998/5/29	3	2.68	0.059	0.41
1998/7/31	1	2.68	0.050	0.36
1998/7/31	2	2.67	0.054	0.38
1998/7/31	3	2.85	0.052	0.38
1998/9/30	1	1.86	0.065	0.40
1998/9/30	2	1.85	0.075	0.43
1998/9/30	3	1.99	0.069	0.42
1998/11/30	1	4.03	0.090	0.51
1998/11/30	2	3.51	0.097	0.52
1998/11/30	3	3.82	0.079	0.48
1999/1/29	1	4.35	0.067	0.42
1999/1/29	2	4.16	0.068	0.42
1999/1/29	3	4.34	0.067	0.42
1999/3/31	1	1.61	0.101	0.44
1999/3/31	2	1.60	0.106	0.46
1999/3/31	3	1.70	0.108	0.47

(5) インプリケーション

第 3 章の CEV モデルでは、分布に対する金利水準の依存度を示す β が 0.6

程度で安定していた。本章で扱った HJM モデルは、対象がフォワードレートであり、スポットレートを扱っている第 3 章と単純な比較はできないが、 ρ は 0.4~0.5 となっていた。このことから、本稿の HJM モデル(1 ファクター)でも、第 3 章と同様に金利分布が対数正規分布にならないことが示唆された。つまり、金利分布を先験的に対数正規分布と置くことは、金利派生商品の評価やリスク管理のうえで必ずしも安全ではなく、他のモデルを併用するなど慎重な運用を目指すべきであろう。

なお、本稿の HJM モデルのパラメータ推定結果は、市場データとの当てはまりがあまり良くなかった。アミン・モートンでもパラメータ推定は当てはまりが悪かったとされており、HJM モデルのパラメータ推定は不安定であることがあらためて明らかになった。したがって、実務上 HJM モデルを使う場合には、パラメータ推定の方法や市場データとの整合性を随時検討することが課題といえる。

5. おわりに

本稿では、金利派生商品市場の現状を報告するとともに、市場データを用いたキャリブレーションを行った結果に基づき、金利モデルの問題点を分析した。具体的には、

- ・モデルは、各金利派生商品に応じて使い分けられていること、
 - ・各金融機関は独自にイールドカーブ・モデルを開発・運用しており、とくにパラメータ・キャリブレーションが実務上重要であること、
 - ・実際の市場はモデルの仮定と必ずしも一致していないこと、
 - ・実証的には、金利分布は対数正規分布と正規分布の中間とみなせること、
- などを示した。

イールドカーブ・モデルは、現状では一般的な取引にまで広範囲に使われているとは言い難いが、金利派生商品(とくに金利エキゾティク・デリバティブ)の評価やリスク管理のためにはなくてはならないモデルである。金融ビッグバンに伴う新商品開発にも不可欠であろうし、今後コンピュータ性能の向上などで計算やパラメータ推定の負荷が相対的に減少してくれば、すべての金利商品に適用される統一モデルの開発へ進む可能性も否定できない。また、金融商品の時価会計移行が焦点となっているが、そのためにも使用されているモデルが正確に市場を評価できているか、モデルやパラメータを随時分析して行く必要がある。

以 上

補論 1 . ブラック・モデル

ブラック・モデルはブラック・ショールズ・モデルの拡張として当初商品先物オプションのために開発されたモデルである。ブラック・ショールズ・モデルは原資産が現物であるのに対し、ブラック・モデルは原資産が先物や先渡商品であるため、原資産価格の期待収益率がゼロとなる。この点がブラック・ショールズ・モデルとブラック・モデルで大きく異なる。以下にブラック・ショールズ・モデル (BS) とブラック・モデル (Black) のコール評価式を示す。

$$\begin{aligned} \text{BS Call} &= SN(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sqrt{T}} \quad d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sqrt{T}} \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

$$\begin{aligned} \text{Black Call} &= e^{-rT} [FN(d_1) - KN(d_2)] \\ d_1 &= \frac{\ln(F/K) + \sigma^2 T/2}{\sqrt{T}} \quad d_2 = \frac{\ln(F/K) - \sigma^2 T/2}{\sqrt{T}} \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

$N(\cdot)$: 標準正規分布の分布関数

S : 原資産価格 (現物)

F : 原資産価格 (先物・先渡)

K : ストライク

T : オプション満期までの時間

r : 満期までのゼロイールド

σ : 原資産価格のボラティリティ

両式の形状はほぼ同じであり、また同一研究者によって開発されたモデルということもあり、ブラック・モデルはブラック・ショールズ・モデルの枠組みの一部と捉えて議論される場合が多い。

なお、ブラック・モデルは商品先物オプション以外に金利先物オプションや債券先物オプション等の金利関連オプションにも幅広く利用され、先物や先渡オプションの標準モデルとなっている。ブラック・モデルを金利関連オプションのモデルとして扱う場合、金利は原資産として、また現在価値を算出する割引レートとしての二通りの意味があり、ブラック・モデルではこれらを独立した別々のものと割切って運用している点、注意が必要である。

補論 2 . CEV モデル

瞬間スポットレートの金利挙動を表現する確率微分方程式

$$dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + \sigma r(t) dW(t) \quad (A-3)$$

はバシチェック・モデル (Vasicek[1977])、CIR モデル (Cox, Ingersoll and Ross[1985])、CEV モデル (Beekers[1980], Jarrow and Rudd[1983]pp.153-163) を含む包括的なスポットレート・モデルであり、 $r(t)$ はスポットレート、ドリフト項の係数 $(\alpha + \beta r(t))$ の β はスポットレートの平均回帰水準、 σ は回帰速度である。このモデルで $\beta = 0$ の時バシチェック・モデルであり、 $\beta = 0.5$ の時 CIR モデルである。本文中でも述べたが、Chan, Karolyi, Longstaff and Sanders[1992] や Hiraki and Takezawa[1997] はヒストリカル・データから (A-3) のパラメータを推定している。(A-3) はイールドカーブ・モデルであるが、 $\beta = 0$ として原資産を株式や為替とすれば、(A-3) は (1) 式の CEV モデルになる。ブラック・ショールズ・モデルは CEV モデルの $\beta = 1$ に相当する。また、先物や先渡商品を原資産とする場合、フォワード中立から ((1) 式では μ) はゼロ、すなわちドリフト項がゼロとなる。(1) 式でドリフト項がゼロ、 $\beta = 1$ の時、(1) 式はブラック・モデルになる。

CEV モデルは元々イールドカーブ・モデルとして開発されたものではない。したがって、イールドカーブ全体の構造変化を表わすことはできないが、ボラティリティ項の係数 $r(t)$ ((1) 式では S) が原資産価格水準に依存するので、スキューを表現できる。CEV モデルは、ブラック・ショールズ・モデルやブラック・モデルと同様に、満期までのボラティリティ・割引率が一定等の仮定を置いており、ブラック・ショールズ・モデルやブラック・モデルにスキュー効果を加えたモデルといえる。

本稿では CEV モデルのパラメータ β にポイントを当てた。CEV モデルでは $\beta = 0.5$ (CIR モデル) 以外に解析解は知られていないが、キャリアレーションを簡潔にするために Hagan and Woodward[1998] の近似解を採用し分析を行った。

補論 3 . HJM モデル

HJM モデルでは、リスク中立下の無裁定条件により (2) 式のドリフト項の係数を以下のようにボラティリティ項の係数で表わせる。

$$\alpha(t, T, \cdot) = \sigma(t, T, f(t, T)) \int_t^T \sigma(t, v, f(t, v)) dW(t) \quad (\text{A-4})$$

金融派生商品であるキャップも、リスク中立下の無裁定条件を適用し、(A-4)を用いて計算できる。(A-4)からもわかるように、ドリフト項が時間に依存するため通常 HJM モデルは非マルコフ過程となる。したがって、格子法を用いて評価を行う場合、格子を再結合できないことが多く、格子ノードを増やすと飛躍的に計算負荷が大きくなる。このため、HJM モデルはモンテカルロ法を用いて計算される場合が多く、本稿でもモンテカルロ法を採用して分析を行った。

また、HJM モデルは連続金利で表現されているために、格子法やモンテカルロ法で計算する場合、離散モデルに近似する必要がある。本稿では離散の単位を半年とし、単位期間の間はボラティリティやフォワードレートは一定とした。HJM モデルの離散近似方法は木島・長山・近江[1996]pp.162-164 を参照。

本稿で用いた HJM モデルのキャップのプレミアム計算では、まず初期値に補論 4 のフォワードイールドを使い、(2)式および(A-4)の確率変動部分にモンテカルロ法からの乱数を代入しフォワードイールドを発生させる。ただし、フォワードイールドがゼロ以下にならない様に下限を設けた(理論上マイナス金利にならない場合でも離散近似により、マイナス金利が発生するケースもある)。次に、得られたフォワードイールドから、個々のキャップレットに適用される LIBOR と割引率を計算する。

$$DF(t) = \exp\left(-\int_0^t f(s, s) ds\right) \quad (\text{A-5})$$

割引率は(A-5)で定義した。得られた LIBOR から個々のキャップレットのキャッシュフローを確定し、キャップレットの現在価値の合計をキャップ・プレミアムとした。ここでのキャップレットは単独のオプションではなく、キャップを構成する要素とし、キャップを経路依存型の金利派生商品として取り扱った。なお、同一日に観測されたキャップすべてを同時に計算した。この方法で 1,000 回²⁵パスを発生させ、得られたデータを平均し HJM モデルのキャップ・プレミアムとした。なお、モンテカルロ法に用いる乱数はメルセンヌ・ツイスター

²⁵ モンテカルロ法のパスの発生回数を 10,000 回と 1,000 回 (Absolute モデルで 1998 年 3 月 3 日データ) で比較した。その結果、パラメータ値も²値もほぼ同値であったため、計算負荷軽減の観点から 1,000 回パスとした。

²⁶を使い、対称変数法²⁷を用いて分散減少化を行った。

補論 4 . キャップを用いたインプライド・アプローチ

本稿では円金利キャップの市場データを対象としたインプライド・アプローチから、CEV モデル、HJM モデルの二つの実証分析を行った。円金利キャップを対象に選んだ理由は以下のとおり。

- ・ ノーマルタイプの金利オプションである。
- ・ 業者間でも比較的取引量が多く、データの更新が頻繁に行われている。
- ・ OTC金利オプションのため個々の取引時価そのものを市場から入手できない。
- ・ スキューが恒常的かつ顕著に観察される。

キャップは毎回の利払いごと（通常 6 ヶ月）にストライク（上限金利）と比較してオプションの行使・非行使を決め、LIBOR がストライクより高い場合に、その金利差額分の受け渡しを行う。つまり、一つの取引の中にキャップレットといわれるオプションを複数持つオプションの集合体なのである（フロアーも同様）。例えば、満期まで 2 年のキャップには、オプション満期が半年・1 年・1 年半の 3 個のキャップレットが内包されている。図 4 のインディケーションで満期 2 年・ストライク 1%のキャップのボラティリティは 104%となっているが、これは内包されている 3 個のキャップレットすべてのボラティリティが 104%と考えて、ブラック・モデルを用いて計算したプレミアムが受渡額になる、という意味である。

キャップを用いて各モデルの評価を行う場合、個々の取引ごとのプレミアムが各モデルで同額になる必要がある。本稿の分析では、図 4 で例示したインディケーションを用いて、ブラック・モデルで市場で観測されるプレミアムを計算し、そのプレミアムと CEV モデル、HJM モデルのプレミアムの相対的な差を最小化するように、以下の²を定義した。この $PV(\cdot)$ のパラメータを繰り返し変更しキャリブレーションを行った。

²⁶ メルセンヌ・ツイスターは松本（九州大）西村（慶応大）が開発した疑似乱数発生方法。長所として 高速に生成できる（C 言語でよく用いられる drand48()より約 20 倍速い）、周期が $2^{19937} - 1$ と非常に長い、高次元均等分布になる（623 次超立方体に一周期で均等に分布）などが挙げられる。C コードは公開されており <http://www.math.keio.ac.jp/matsumoto/mt.html> より入手可能。

²⁷ 木島・長山・近江[1996]pp.145-146 を参照。

$$\chi^2(\cdot, \cdot, \cdot) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{PREM_i - PV_i(\cdot, \cdot, \cdot)}{PREM_i} \right)^2 \quad (A-6)$$

PREM: ブラック・モデルのキャップ・プレミアム

PV: CEV モデル、HJM モデルのキャップ・プレミアム

\cdot, \cdot, \cdot : CEV モデル、HJM モデルのパラメータ

分析は同日のキャップすべてを対象とした²⁸。また、(A-6)にあるように市場で観測されるプレミアムで²をウエイト付けすることで、プレミアムベースで各キャップの影響が等しくなるようにした。これは、ウエイト付けを行わないと、プレミアム額が大きい(後述 A-1 表を参照)満期までの期間が長いキャップが相対的にパラメータ推定に強く影響するためである。市場では、満期までの期間が比較的短いキャップを中心に取引されており、流動性も短期間のキャップの方が高い。したがって、満期までの期間が短いキャップにウエイト付けして²を定義したほうが、より市場実勢に近いとも考えられる。しかし、本稿では、ウエイト付けに恣意性を排除するためと、計算を簡単にするために(A-6)とした。なお、多くの金融機関では、取引量を勘案し、個々のキャップにウエイト付けを行って分析しているようである。

ブラック・モデルを用いてプレミアム計算する場合、市場慣行としてキャップに内包されるキャップレットすべてに同じボラティリティ値を適用する。したがって、同じ満期のキャップレットでもそれぞれのキャップで異なるボラティリティ値を用いることになり、「原資産価格のボラティリティは特定期間では一つしかない」という原則と矛盾が生じる。本稿の CEV モデル・HJM モデル

A-1 表 キャップ・プレミアム計算値比較例(平成 11 年 3 月 31 日時点)

Cap Premium		ブラック・モデル								CEVモデル					
Strike	1y	2y	3y	4y	5y	7y	10y	1y	2y	3y	4y	5y	7y	10y	
0.5	0.05	0.53						0.05	0.49						
0.75	0.02	0.38	1.54	3.54	6.68			0.02	0.34	1.51	3.55	6.66			
1	0.01	0.29	1.24	3.01	5.85	13.31		0.01	0.26	1.25	3.05	5.87	13.40		
1.5		0.18	0.87	2.28	4.64	10.90	23.51		0.17	0.89	2.30	4.60	10.91	23.51	
2		0.12	0.62	1.72	3.65	8.92	19.73		0.12	0.65	1.75	3.64	8.92	19.80	
2.5		0.08	0.44	1.30	2.87	7.18	16.54		0.08	0.47	1.34	2.90	7.30	16.68	
3		0.05	0.32	0.99	2.27	5.78	13.94		0.06	0.35	1.03	2.31	5.98	14.04	
3.5			0.24	0.78	1.80	4.78	11.80			0.25	0.80	1.85	4.91	11.83	
4			0.18	0.62	1.44	4.01	9.92			0.19	0.62	1.49	4.03	9.96	
4.5			0.14	0.50	1.16	3.36	8.43			0.14	0.48	1.20	3.31	8.40	
5			0.11	0.41	0.95	2.87	7.12			0.10	0.37	0.97	2.73	7.08	
5.5					0.78							0.78			

²⁸ 本稿の分析期間でキャップのインディケーション数は、最大 58・最小 52 であった。

ルでは、異なるキャップ内にあっても同じ満期のキャップレットに同値のボラティリティを用いてプレミアムを計算した。したがって、原資産価格に対するボラティリティの矛盾は回避できる。しかし、キャップ内にあるキャップレットに対して異なるボラティリティを用いることは CEV モデルの仮定に反しているため、本稿の分析においてもすべてにおいて理論的整合性が確保されているわけではない。

CEV モデルのキャリブレーションはエクセルのソルバー機能を用いたが、結果²⁹は概ね 0.1 以下となり、A-1 表に示したように市場データとの当てはまりはよかった。

HJM モデルのキャリブレーションにはマーカート法(Levenberg-Marquardt 法)²⁹を採用した。マーカート法は非線型最小二乗法の解法の標準ともいえる方法で、パラメータを逐次変更し、繰り返し計算を行うことで、最小値に到達する方法である。パラメータの変更には(A-6)のパラメータ(, ,)に関する感応度行列が必要になるが、これは数値微分(前方差分法)³⁰を用いた。マーカート法でのパラメータ変更回数は最大 50 回とし、パラメータの初期値は σ_0 , σ_1 を 0.1、 σ_2 を 1.0 とした。

なお、分析に使用する観測時点のゼロイールドカーブおよびフォワードイールド計算は、6 ヶ月 LIBOR と 1y・1.5y・2y・3y・4y・5y・6y・7y・8y・9y・10y・11y の金利スワップデータを用いてブートストラップ法(ハル[1998]pp.115-118 を参照)により求めた。各スワップ間の金利についてはフォワードイールドを按分するよう調整した。一般的に円金利のフォワードイールドは安定せず、本稿の分析で用いたフォワードイールドも分析日によっては不安定であった。このことが、とくに HJM モデルのパラメータ推定に影響を与えた可能性は否定できない。

²⁹ Press, Teukolsky, Vetterling and Flannery[1992]pp.683-688、または丹慶・奥村・佐藤・小林訳[1994]pp.505-510 を参照。

³⁰ 木島・長山・近江[1996]pp.49-51 を参照。

- Heath, D., R. Jarrow and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claim Valuation," *Econometrica*, Vol.60, No.1, 1992, pp.77-105.
- Hiraki, T. and N. Takezawa, "How Sensitive Is Short-Term Japanese Interest Rate Volatility to the Level of the Interest Rate?" *Economics Letters*, Vol.56, 1997, pp.325-332.
- Jarrow, R.A. and A. Rudd, *Option Pricing*, Richard D. IRWIN, INC., 1983.
- Miyazaki, K. and T. Yoshida, "Valuation Model of Yield-Spread Options in the HJM Framework," *The Journal of Financial Engineering*, Vol.7, 1998, pp.89-107.
- Press, W.H., S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling and B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C; Second Edition*, Cambridge University Press, 1992.
(丹慶勝市・奥村晴彦・佐藤俊郎・小林誠(訳)、『ニューメリカルレシピ・イン・シー』、技術評論社、1994年)
- Vasicek, O.A., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, Vol.5, 1977, pp.177-188.