IMES DISCUSSION PAPER SERIES

デリバティブ商品価格から導出可能な市場情報を利用したマーケット分析方法

小田信之・吉羽要直

Discussion Paper No. 97-J-7

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES
BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒100-91 東京中央郵便局私書箱203 号

IMES Discussion Paper Series 97-J-7
1997 年 5 月

デリバティブ商品価格から導出可能な市場情報を利用したマーケット分析方法

小田信之・吉羽要直[†]

要　旨

本稿の目的は、デリバティブ商品価格に含まれる市場情報の抽出手法およびその市場分析への活用方法について、包括的な論点整理を行うことにある。近年におけるデリバティブ取引の拡大がもたらしたメリットの１つとして、市場で観測されるデリバティブ商品価格を分析することによって、将来の市場動向に関する市場参加者の期待をより深く考察することが可能になった点が挙げられる。本稿は、こうした分析の方法論を整理する。

注目される点は、各種デリバティブ取引の中でもオプション商品の価格情報には、将来の原資産価格に関する確率分布情報が含まれている点である。こうした情報は、非オプション商品の市場価格からは得られない新しいタイプの情報である。本稿では、このメカニズムを解説した上で、市場価格から確率分布を導出するための様々な手法について、先行研究のサーベイを交えながら説明を行う。さらに、実際にわが国の株価指数オプション取引への応用を通じて、こうした分析の有効性や手法の選択基準等に関する示唆を与える。

キーワード：オプション取引、インプライド・ボラティリティ、確率密度分布、歪度・尖度、フォワード・レート・カーブ

† 日本銀行 金融研究所 研究第１課 (E-mail: oda@imes.boj.go.jp, yoshiba@imes.boj.go.jp)

（目　次）

１．はじめに

近年におけるデリバティブ取引の拡大は、金融市場に様々な影響をもたらした。そのメリット・デメリットについては、これまでにもいろいろな角度から議論がなされてきている。特にデリバティブ取引のメリットに着目すると、取引を直接行う者にとっては、ポートフォリオのリスク・プロファイルをより柔軟に変更可能になった点が重要である。また、直接取引を行わない者にとっても、デリバティブ関連取引の市場価格動向に着眼することによって、将来の市場価格に関する市場の期待をより深く分析することが可能になった。さらに金融政策運営に携わる中央銀行としては、金融政策の波及プロセスがどのような影響を受けているかといった問題にも大きな関心を払っている。これらのテーマを網羅的に整理した文献としては、９４年末に公表されたＢＩＳ・ユーロ委員会（ＥＣＳＣ<Euro Currency Standing Committee>）のアヌーン・レポート（Bank for International Settlements [1994]）*が知られている。

本稿は、このうち「デリバティブ商品価格に含まれる市場情報」の抽出手法およびその市場分析への活用方法に焦点を当て、包括的な論点整理を行うことを目的としている。本稿の構成は以下のとおりである。

まず第２章では、デリバティブ価格からどのような市場情報を抽出できるのかについて、基本的な考え方を整理する。そこでは、従来の商品にはみられないオプション商品の豊富な情報(information content)をはじめとして、先物・スワップ等も含めたデリバティブ取引一般を対象とする。また、こうした情報が有する将来の市場予測力(predictive power)について、これまでの実証研究の結果等をレビューする。次に第３章では、有効な情報供給能力をもつオプション商品の価格情報の実際的な利用に焦点を絞り、市場価格情報から将来の原資産価格の確率分布を導く各種方法について技術的な点を詳細に解説する。それを踏まえ、第４章では、わが国の株価指数オプション市場の価格情報を利用した若干の応用例を示しつつ、現在の市場環境（デリバティブ取引の多様性や流動性など）を前提とした場合にどのような分析手法が有効であるか、またどの程度精緻な予測を追求可能であるのかについて考察する。

* この他、星(1997)は、クレジット・チャンネルの観点からデリバティブ取引の金融政策に与える影響について考察を行っている。

２．マーケット分析の基本的方法論

２－１．デリバティブ商品価格に含まれる市場情報の導出方法

２－１－１．分析の背景

金融商品の市場価格は、市場参加者の相場感を端的に反映して形成される。従って、原理的には、現時点で観測される市場価格情報を詳細に分析することにより、市場参加者の相場に対する見方を推測することが可能である。

デリバティブ商品の出現に象徴されるように、金利・債券、株式、外為、コモディティの各市場において取引される商品が多様化するにつれて、観測できる市場価格情報が増加してきた。この結果、市場参加者の相場感を推測するプロセスも多様化し、以前には知ることの出来なかった種類の情報（例えば、将来の予想価格の確率分布）を導出したり、従来から行ってきた推定の信頼度を高めたりすることが可能になった。

２－１節では以下、デリバティブ商品の市場価格情報を利用してマーケットの将来をどのように予測できるか整理する。具体的には、２－１－２節でオプションの市場価格情報を活用する手法を扱い、２－１－３節では先物・先渡・スワップの市場価格情報の活用を取り上げる。ここでは、原資産の種類を特定せず、金利・債券、外為、株式、コモディティの各市場について適用可能な議論を行う。次に、２－１－４節において、先物・先渡・スワップ価格の中でも特に金利関連市場の情報に焦点を当て、イールド・カーブ分析の方法論を整理する。

２－１－２節から２－１－４節では、議論の見通しをよくするため、市場参加者がリスク中立的であるという世界を想定して話を進めることにする[1]。この仮定の妥当性については２－２節で言及するが、予め概略を述べると、原資産の種類により近似的に仮定が成立するものもあればしないものもある。

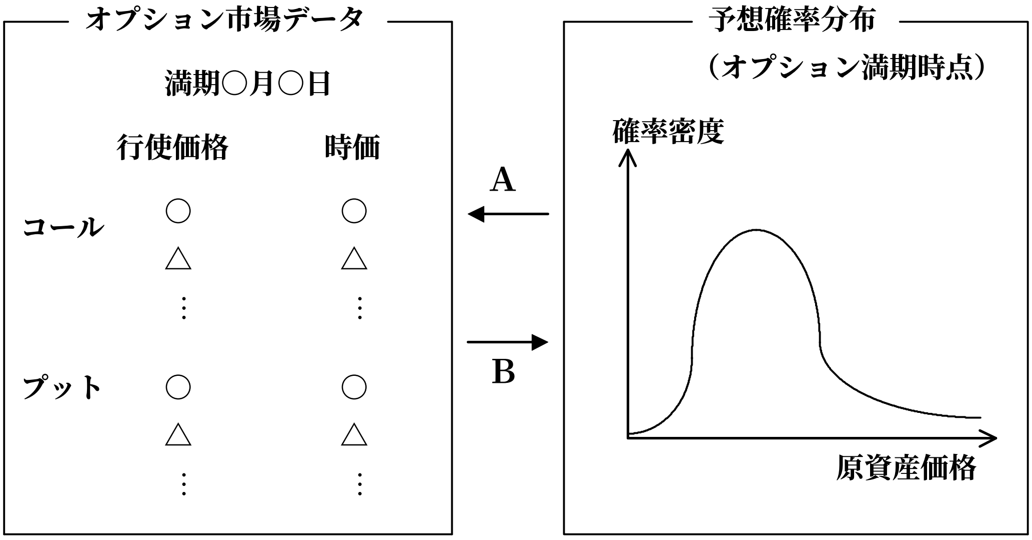
---

[1] 市場参加者がリスク中立的であるという仮定の成否は、資産価格の期待収益率の取扱いに影響を与える（詳細は２－２節）が、デリバティブの価格理論には影響を与えない点を指摘しておく。デリバティブの価格理論のほとんどは、無裁定条件（リスクを取らない場合にはｒ＜リスク・フリー・レート＞を超える収益率を稼ぐことができないという条件）を前提とするものの、市場参加者のリスク中立性までは要求していないからである（Hull [1997]）。

もっとも、後者についても、リスク・プレミアムの大きさを計測できる場合にはその効果を修正することにより、本稿で論じたリスク中立的な世界での議論を適用できることが知られている。

２－１－２．オプション価格から将来の原資産価格の確率分布を推測

オプション商品（以下、満期時点で権利行使が可能になるヨーロピアン・オプションだけを対象とする[2]）の時価（下図左）は、満期時点に原資産価格がどのような確率でどのような水準にあるかという予想分布（下図右）に応じて形成される（下図矢印Ａ）。従って、市場で観測したオプション価格から、逆に将来の予想原資産価格の分布型がどのような形であるのか調べることができる（下図矢印Ｂ）。

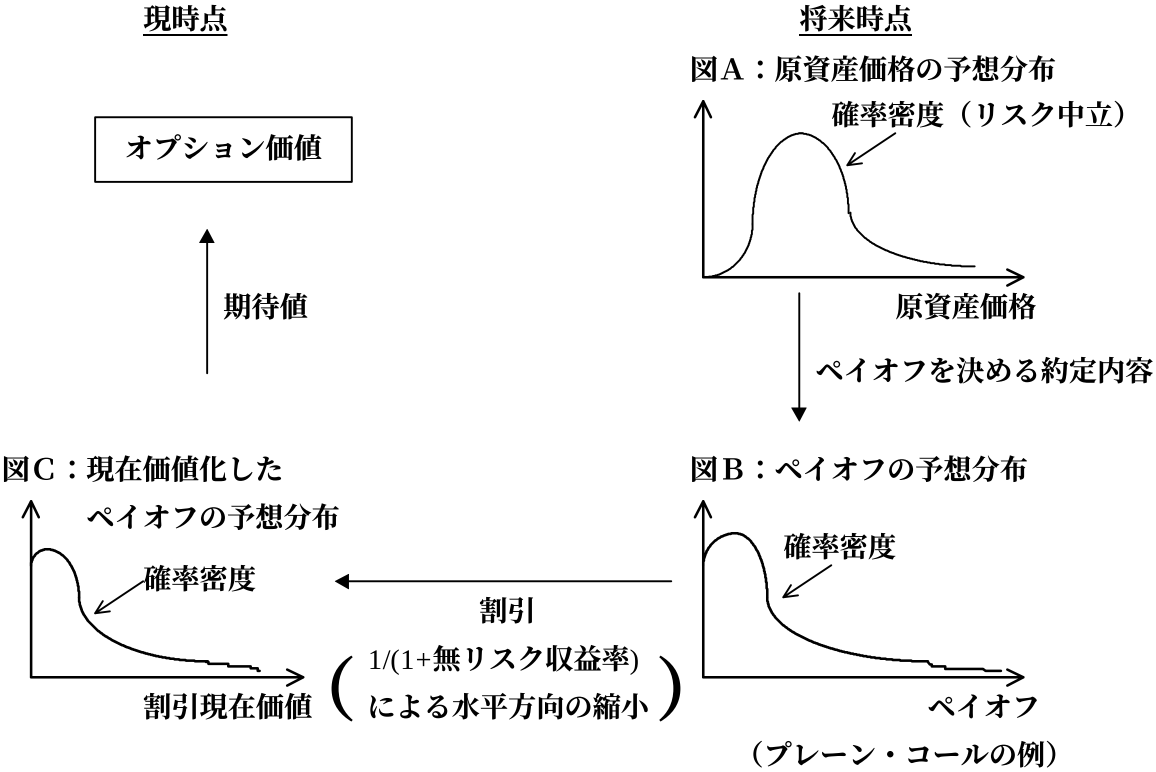


---

[2] アメリカン・オプションは、期前行使の可能性を認めた商品であるため、満期時点の原資産価格のほかに満期以前の原資産価格の予想値からも影響を受けて価格形成が行われる。このため、将来の原資産価格の確率分布を予想する上での扱いが複雑になる。アメリカン・オプションについても、その価格を近似的に算出するＢＡWの公式（Barone-Adesi and Whaley [1987]）等を利用した分析が可能ではあるが、本稿ではこの問題には立ち入らない。

オプション商品の時価の形成プロセスを直観的に示すと、下図のとおりである。市場参加者が将来のある時点における原資産価格に関して何らかの確率分布（確率密度関数）を有している（図Ａ）と考えると、商品の約定内容に従い実現する受渡金額（ペイオフ）およびこれを無リスク収益率で割引いた割引現在価値についてもそれぞれ確率分布が存在し（図Ｂ、Ｃ）、これに基づく割引現在価値の期待値がオプション商品の時価となる。

なお、将来の価格について確率分布という形で情報を抽出できるのは、オプション商品の市場価格に特有の性質であり、オプション以外のデリバティブ（先物・先渡・スワップ等）取引にはみられないものである。

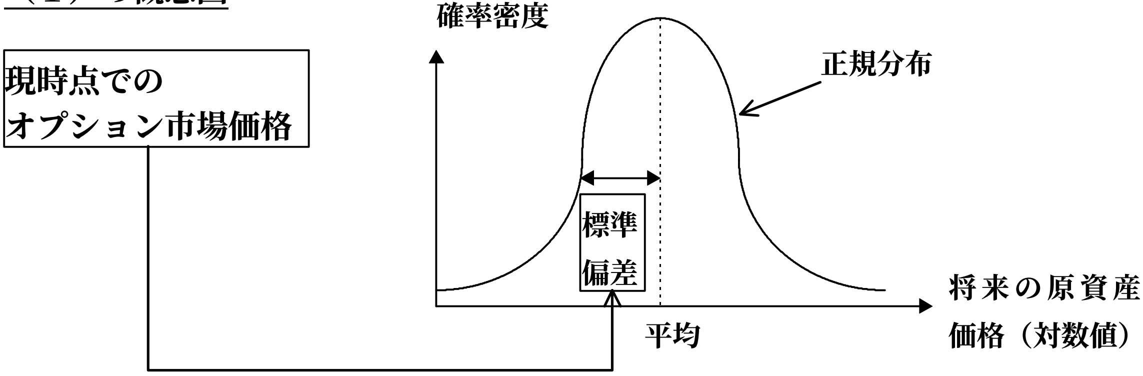


将来の予想原資産価格の確率分布を導出する方法については、どのような仮定を置いて計算するかにより、様々なバリエーションがありうる。ここではそれらを次の（１）～（４）に分類し、各々の特徴点等を簡単に示す。技術的な導出方法について詳細は、第３章で解説する。

（１）将来の原資産価格の分布型として対数正規分布[3]を仮定し、ブラックーショールズ式を利用してインプライド・ボラティリティ[4]を算出する方法[5]

計算の簡便性、理解の容易さ、所要データの少なさ[6]等のメリットから、現在最も頻繁に利用されている分析方法である。ただ、現実の原資産価格データは、多くの場合、対数正規分布では十分な近似を得られないことが知られており、そのずれが問題になり得る。

（１）の概念図



（２）対数正規分布を出発点とするものの、併せてそれからのずれも評価しようとする方法

---

3 原資産価格の対数値が正規分布に従うとき、原資産価格が対数正規分布に従うという。なお、原資産価格の分布として単純な正規分布の代わりに対数正規分布を仮定するのが通例となっている理由は、もし前者を仮定すると原資産価格が負の非現実的な値を取る可能性があるという問題が生ずるためである。これに対し、原資産価格の対数値に対し正規分布と仮定することは、原資産の価格変動率（収益率）に対し正規分布と仮定していることと同一である。このとき、価格変動率自体は負の値を取りうるが、原資産価格は常に正の値を取ることとなるので、前述の問題を回避できる。また、実証研究をみても、多くの原資産価格は、正規分布より対数正規分布によってより的確に近似されることが知られている。

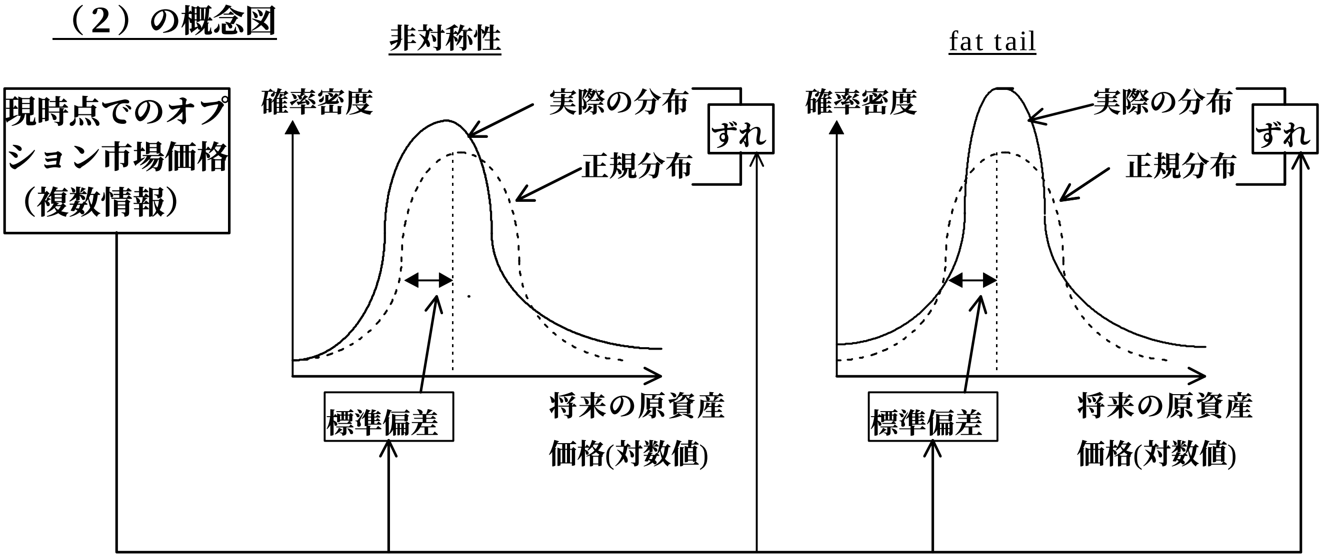
4 原資産価格の対数値が従う正規分布の標準偏差（分散の平方根）。

5 この計算の目的は、分布の標準偏差の導出にあり、分布の平均を算出する必要はない。これは、後掲３－１節で述べるように、リスク中立的な世界における確率分布の平均値は無リスク収益率を反映した値に確定しているためである。

6 この方法では、たった１つのオプション価格を観測しただけでも、結果を得られる。

（1）で捉えられなかった対数正規分布からのずれを表す幾つかの情報も算出する方法である。具体的には、分布の非対称性や裾野部分の厚み(fat tail)を評価する指標を同時に推定する。

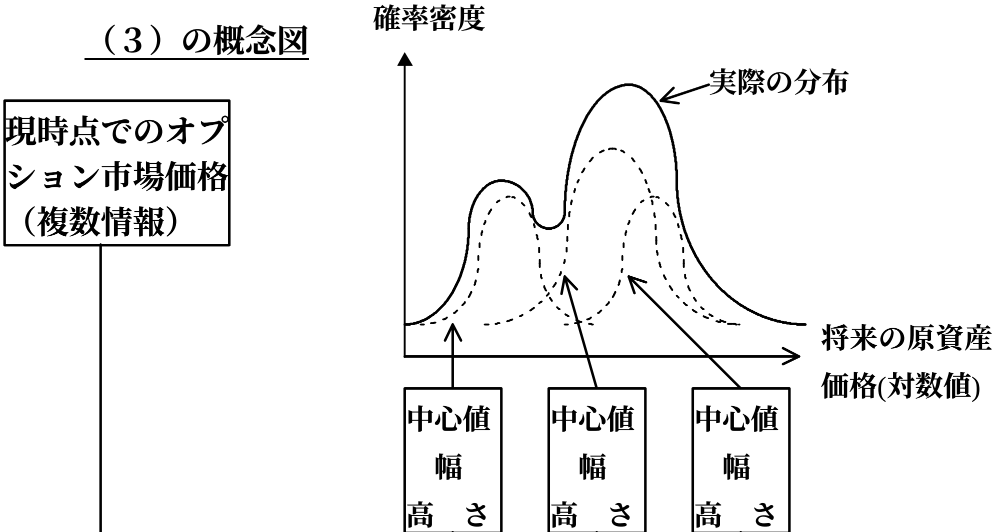
（2）の概念図



（3）より現実的な確率分布型を仮定したうえ、分布のパラメータを特定する方法

単純な対数正規分布の代わりにより現実的と思われる分布型を仮定し、分布のパラメータを推定する方法である。どのような分布型を出発点とするかによって多くのバリエーションがある。一例としては、複数個の対数正規分布を重ね合わせた分布型を前提として分析することができる。

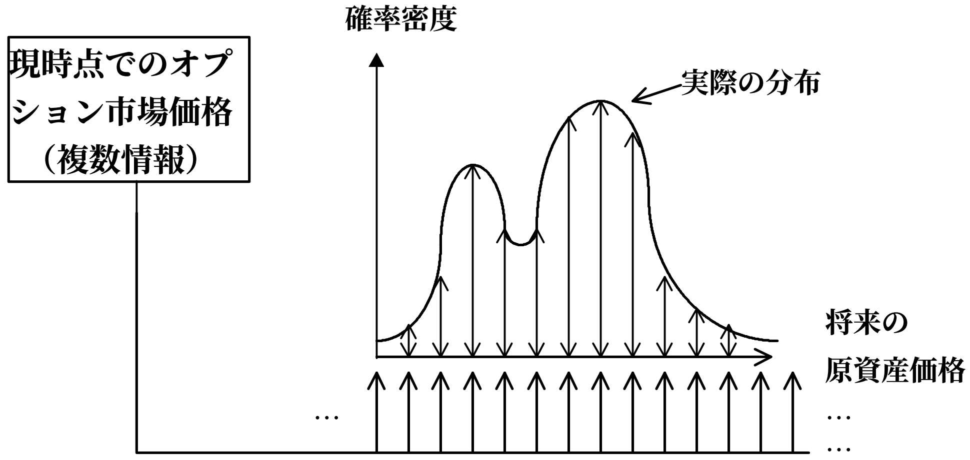
（3）の概念図



（４）特定の確率分布型を前提とはせず、ノンパラメトリックに分布を推定する方法

オプション商品の価格データから直接原資産価格の分布型を推定する方法である。第４章では、わが国の株式指数オプションへの適用例を示す。

（4）の概念図



上記の４つの手法は、少ない情報から将来価格に関する情報を得るために比較的強い仮定を置いて推定を行うタイプの手法（典型的には（１））から、強い仮定は置かずに多くの情報を取り入れることにより推定を行おうとするタイプの手法（典型的には（４））へという順序で並んでいる。一般に、計算モデルの柔軟性を確保するには分布を記述するパラメータの個数を増やす必要があるが、これに伴いパラメータを決定するために必要なオプション商品の価格情報も増加する点には注意を要する。換言すれば、観測可能なオプション商品の価格が少ない状況下で多くのパラメータを決定しようとすると、推定結果が不安定となり信頼度が低下する惧れがある。従って、利用可能かつ正確な価格情報の量に応じて、最適な計算方法を選択することが望ましい（この点については、第３章、第４章でも再び言及する）。

２－１－３．先物・先渡・スワップ価格から将来の原資産価格の期待値を推測

オプション商品の価格情報が将来の原資産価格の確率分布という従来では導出不可能であった情報を与えるのに対し、先物・先渡・スワップ商品の価

格情報は、将来時点の原資産価格の期待値のみを与える[7]。

期待値という情報は確率分布という情報の中の一部分に過ぎない。また、先物・先渡・スワップ商品の価格を利用しなくても伝統的な直物（現物）取引の価格情報だけから間接的に期待値の情報を引き出すことができる。このような観点から、先物・先渡・スワップ商品の価格情報は、オプション商品ほど有効でないという見方もある。しかし一方で、後述のように、先物・先渡・スワップ商品の価格情報は、従来間接的にしか得られなかった情報の信頼度を高める役割を果たしているのも事実であり、この点は高く評価できる。

先物・先渡[8]理論価格は、前述のオプション商品のプライシングと同様の考え方を利用して導出できる（下図＜次頁＞参照）。すなわち、満期時点における原資産価格（この予想分布が図A）およびその対価として受渡されるキャッシュの金額（これが先物・先渡価格の定義であり、契約時点に固定され

---

7 デリバティブに関する教科書・解説書の多くは、先物・先渡価格（$F_{t,T}$＜現時点 t, 満期 T＞）は無裁定条件を介して現物価格(S_t)と一対一に対応した価格であると解釈し、現物価格と無リスク金利(r)を超えた新しい情報を全く持たないとしている。具体的には、適当な２つのポートフォリオ（例えばポートフォリオ１＜現物のロング・ポジション１単位、そのファンディング資金の無リスク金利による借入れ、および先物のショート・ポジション１単位とから成る＞およびポートフォリオ２＜先物のロング・ポジション１単位のみから成る＞）を想定すると、両者の満期におけるペイオフは確実に一致することから、現時点での時価も一致する必要があるという論理（無裁定条件の適用）に従い、$F_{t,T}=S_t\cdot e^{rT}$ という関係が導出される。

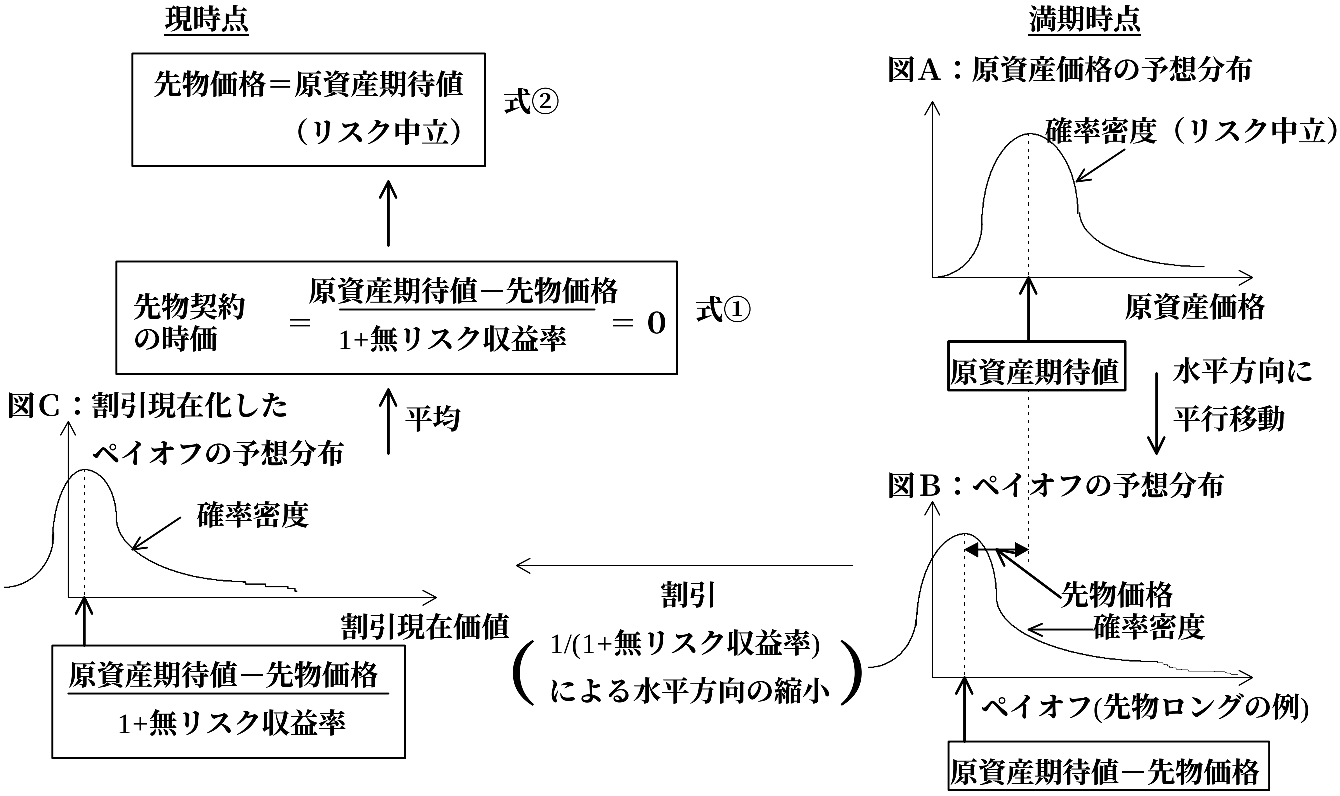
このような考え方に対し、本稿では、先物・先渡価格の解釈として、本稿のテーマ（将来の価格予想）に照らして最も有益なインプリケーションを与える「リスク中立的な世界における原資産価格の期待値」という見方を採用する。リスク中立的な世界ではあらゆる資産の期待収益率($E_t[S_T]/S_t$)が無リスク金利による運用収益率(e^{rT})に一致することから、$E_t[S_T]=S_t\cdot e^{rT}$ という関係が成立し、これと前述の関係式から $F_{t,T}=E_t[S_T]$を得る。

従って、先物・先渡価格に関するこれら２つの考え方はいずれも正しく、同一の対象を異なった角度から眺めた（無裁定条件のみからみるか期待値からみるか）に過ぎない点を指摘しておく。

8 先物取引と先渡取引の関係については、証拠金・値洗い・差金決済の有無といった制度上の相違を反映して、価格（レート）にも微小なずれが存在することが知られている（例えば、Duffie [1989]を参照）。ただし、本稿ではこの点には立ち入らず、両者を区別しないで議論する。

る）との差額が将来発生するペイオフ（この予想分布が図B）である。さらに、このペイオフの割引現在価値（この予想分布が図C）の期待値を契約時点における「取引」[9]の時価と考えることができる。この「取引」時価の大きさは、定義から、契約時点で固定する先物・先渡価格の大きさに依存するが、通常の先物・先渡取引では、逆に「取引」時価が丁度ゼロとなるように先物・先渡価格が設定される。この条件を表すと下図の式①となり、直ちに式②が導出される。このように、理論的な先物・先渡価格が原資産価格の期待値に一致することを示すことができる。

　また、逆に市場で観測された先物・先渡価格を将来の原資産価格の期待値と見看すことができる。



　期待値の推定は、仮に先物・先渡・スワップ取引が存在していないとしても、伝統的な直物（現物）取引の価格情報から間接的に行うことが可能であると述べたが、この理由は、直物（現物）取引と単純な貸借取引（無リスク金利ベース）を適切に組み合わせることによって合成先物ポジションを作る

[9] ここでいう「取引」とは、先物・先渡満期時点における原資産の受取り（支払い）と固定価格のキャッシュの支払い（受取り）とをセットでみた金融契約をいう。

ことができるからである。無裁定条件（リスクを取ることなく収益を獲得することはできないという条件）が成立する限り、合成先物の価格は、先物・先渡取引が実在した場合の価格と同一であることが理論的に示される。

なお、スワップ取引は、先物取引を多期間に拡張したものと解釈できる。このため、本稿の主題である価格情報の活用という観点からは、先物・先渡取引とほぼ同様の議論を展開することが可能である。従って、本稿では、特にスワップ取引のみに着目した議論は行わず、原則として先物・先渡価格の取扱いに絞った説明を行う。

先物・先渡取引の存在は、直物（現物）取引価格からだけでは間接的にしか把握できなかった期待値情報の信頼度を高める効果をもつ。こうした効果が現れる要因としては、主として次の２点を指摘可能である。

①先物・先渡取引は、少額の資金（証拠金等）によって取引可能である（レバレッジ効果が大きい）ことから、直物（現物）取引と比較して、取引ボリュームが大きく流動性が高い。この結果、ビッド・オファー・スプレッドが比較的小さく、より競争的な価格付けが行われている。

②先物・先渡取引は、ショート・セールが容易であるため、より裁定が働き易く、合理的な価格形成が行われ易い。

２－１－４．イールド・カーブ分析の意義

前節までは、原資産の種類を特定せずに、オプション商品および先物・先渡・スワップ商品の価格情報について一般的な議論を行った。これに対し本節では、原資産の対象を金利・債券に絞り、その先物・先渡・スワップおよび直物価格情報を活用する分析（イールド・カーブの分析方法）について整理する。各種の原資産カテゴリーの中で、金利・債券は、期間構造をもつ点が特徴的であり、このため他の資産に比べプライシング、リスク管理あるいはマーケット分析上の取扱いが複雑である。このため、本節で特に焦点を当てることとする。

市場参加者の金利観をみるには、各期間毎に金利水準をプロットしたイールド・カーブを描くと便利である。一口にイールド・カーブと言っても幾つかの種類があるが、分析目的に応じて、①スポット・レートを表現したイールド・カーブまたは②フォワード・レートを表現したイールド・カーブのいずれかを形成・分析するのが理論的に有効な方法である。また、実務上は、

債券の内部収益率[10]（ＩＲＲ＜Internal Rate of Return＞またはＹＴＭ＜Yield to Maturity＞とも呼ばれる）をそのままプロットしたカーブを作成し、①の代用とする場合もある。この方法は、理論的には必ずしも正確な分析とは言えない[11]が、煩雑な計算を行うことなくスポット・レートの概略を把握できるため、市場でしばしば利用されている。

次に、各イールド・カーブをどのような分析に利用できるか整理する。まず、スポット・レートのイールド・カーブは、現時点スタート、各期間毎の割引債の金利（ゼロ・レートと呼ばれる）を表す曲線である。従って、例えば金融商品のプライシングを行う際の割引金利をみる場合に便利である。一方、フォワード・レートのイールド・カーブは、将来の各時点スタート、期間一定の先物・先渡レートを表す曲線である。前節までの議論から分かるように、リスク中立的な世界を想定すれば、この先物・先渡レートは、現時点で市場参加者が予想する将来時点の原資産金利（スポット・レート）の期待値に一致する。従って、フォワード・レートのイールド・カーブは、原資産金利が将来どのようなパスを辿って変化していくと予想されているのかをみる上で有効である。このように、本稿のテーマとの関連では、特にフォワー

---

[10] ある一定の割引金利（ｒ）に基づき債券の将来のキャッシュ・フローの割引現在価値を計算するとき、その結果が現在の市場価格に一致するようなｒを内部収益率（しばしばＩＲＲ＜またはＹＴＭ＞とも呼ばれる）という。これを数式で表すと、

$$MV = \frac{C_1}{(1+r)} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{C_T + 100}{(1+r)^T}$$

となる。ただし、MVは債券（額面１００、満期T）の市場価格、C_iはｉ期のクーポンを表す。この式がＩＲＲ（r）の定義を与える。なお、各期のスポット・レート $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_T$ を既知とすれば、上記のMVに対して、

$$MV = \frac{C_1}{(1+r_1)} + \frac{C_2}{(1+r_2)^2} + \frac{C_3}{(1+r_3)^3} + \cdots + \frac{C_T + 100}{(1+r_T)^T}$$

という関係も成り立つ。これら２式により、各期のスポット・レートと内部収益率との対応を理解できる。

[11] 例えば、残存期間５年のある利付債に対応したＩＲＲは、５年ものスポット・レートだけでなく５年未満の各期間のスポット・レートからも影響を受けて決まる（前注の数式を参照）。この影響の度合いは、同債券のクーポンの大きさに依存する。このため、同一の残存期間を持つ債券のＩＲＲを評価しても、クーポンが異なれば異なったＩＲＲを得ることとなる。この性質からも分かるように、ＩＲＲは、スポット・レートの近似的な指標を供するに過ぎない点には留意の要。

ド・レートのイールド・カーブの分析が重要である。

実際にわが国金融市場で直接観察できる金利は、次の３種類に分類可能である。

(1)スポット・レート[12]

・マネー・マーケット・レート（期間は、短期＜O／N～１年＞）

(2)内部収益率（ＩＲＲ＜Internal Rate of Return＞）

・スワップ・レート[13]（期間は、中・長期＜１年～１０年強＞）

・利付債価格（期間は、中期[14]～超長期＜～２０年＞）

(3)フォワード・レート

・金先レート・ＦＲＡレート（期間は、短・中期＜～３年強＞）

将来の市場情報を得るためには、フォワード・レートのイールド・カーブを導出する必要がある。しかし、市場で直接観測可能なフォワード・レート（上記(3)）が短・中期ものに限られているため、長期ものについては(1)や(2)をフォワード・レートに変換した情報を利用する必要がある。また、離散的

---

12 市場で観察できるスポット・レートとしては、マネー・マーケット・レートのほかに、割引債レート（期間は、短・中期＜～５年＞）を挙げることもできるが、ＴＢを除いては流通市場での取引が僅少であるため、信頼できる価格（金利）情報を得ることが困難である。

13 スワップ・レート（r_s）とは、プレーンな金利スワップ（以下、想定元本を１００とする）において、変動金利がＬＩＢＯＲ（スプレッドなし）である場合に対応した固定金利の水準として定義される。この定義を利用して、契約時点における固定金利側の現在価値と変動金利側の現在価値とが等しいことを表現すると次式（ただし、r_iはｉ期における各スポット・レートを表す）を得る。これにより、スワップ・レートr_sは、時価がパー（１００）となっている債券を想定した場合のクーポン・レートに一致することが分かる。このため、スワップ・レートは、しばしばパー・レートとも呼ばれる。

$$100 = \frac{100 \cdot r_s}{(1+r_1)} + \frac{100 \cdot r_s}{(1+r_2)^2} + \frac{100 \cdot r_s}{(1+r_3)^3} + \cdots + \frac{100 \cdot r_s + 100}{(1+r_T)^T}$$

なお、時価がパーである債券に対するＩＲＲは、同クーポン・レートに一致するという恒等的な性質があることから、スワップ・レートは、時価がパーである債券のＩＲＲであると解釈することも可能。

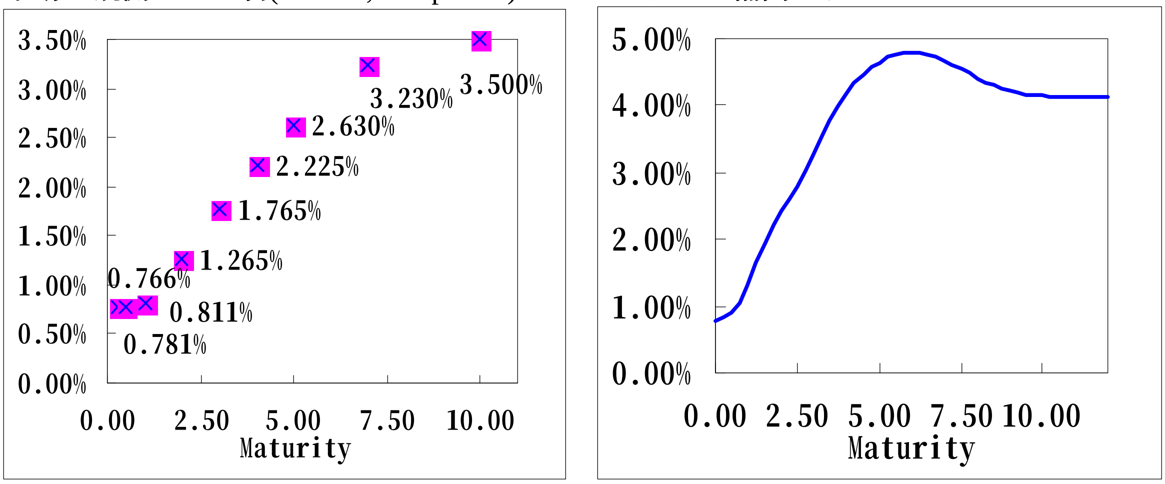
14 債券については、原理的には、流通市場における時価をフォローすることにより、各債券の償還までの期間に対応したＩＲＲを知ることができる。ただし、わが国の債券市場では、税制要因等を背景に、満期が近い銘柄の流通が極めて少ない傾向がある。このため、短期のＩＲＲを正確に知るのは困難である場合が多い。

な金利データを滑らかな曲線で結ぶためにも、技術的工夫を要する。これらの点については、実務上の重要性が高いため数多くの研究がなされている[15]。下図は、幾つかの市場データを入力しスプライン関数[16]を用いて滑らかなフォワード・イールド・カーブを描くコンピュータ・プログラムの利用例である。

フォワード・イールド・カーブ作成プログラムの入・出力情報の例

入力情報　　　　出力情報

市場で観測した金利(LIBOR, Swap Rate)　　スプライン補間されたフォワード・レート



２－２．予測力に関する実証報告

２－１節で整理した各種分析の最終的な目的は、将来に実現する原資産価格の期待値または確率分布を正しく推定することにあった。この目標が達成されるためには、次の２つの命題がいずれも正しくなくてはならない。

①デリバティブ商品の市場価格から導出された将来の原資産価格の期待値・確率分布は、現時点において市場参加者が予想している期待値・確率分布を正確に反映している。

②市場参加者は、将来に実現する価格や価格変動性を正確に予測することができる。

[15] 例えば、わが国の国債価格データの扱いに関する各種方法論を整理した文献として、Oda [1996]を挙げることが可能。

[16] スプライン関数とは、複数個の多項式曲線を滑らかに繋ぎ合わせた関数。与えられた有限個のデータ（ここでは金利）に対し補間や当てはめを行う目的でしばしば利用される。

上記の①を検証するには、次の２点を確かめる必要がある。

(i) デリバティブ商品価格の合理性

(ii) 市場参加者のリスク中立性

(i)は、デリバティブ価格が市場参加者の見方を的確に反映して形成されたかという問題である。例えば、デリバティブ商品の取引市場が寡占的である場合や制度上何らかの制約がある場合には、この前提が崩れてしまう。ただ、このようなケースに該当するかどうかは、ビッド・オファー・スプレッドを観測したり簡単な市場調査を行うことにより判別可能である。従って、デリバティブ商品を選択する際、(i)の前提が満たされている商品だけを分析対象とすることによりこの問題を回避できると考えられる。

次に、(ii)は、市場参加者がリスク中立的であるかどうかという問題である。オプションの価格理論によれば、価格を決定づけるのは市場参加者が実際に抱いている確率（これを主観的確率と呼ぶ）ではなく、全ての市場参加者がリスク中立的であると仮定した場合の確率（これをリスク中立確率と呼ぶ）である（例えば Hull [1997]を参照）。従って、観測されたオプションの市場価格から再現される確率分布はリスク中立確率であり、これが主観的確率に（近似的に）一致しているかを検証する必要がある。また、先物についても、その理論価格はリスク中立確率に基づく価格期待値に一致しているのであって、主観的確率と直接結びついている訳ではない。

こうした事情を踏まえ、リスク中立確率が主観的確率に一致しているかどうかに関する実証研究をみると、対象とする原資産の種類や分析方法によりバラツキのある結果がみられる。具体的には、金利を原資産とする場合については、米国においてリスク中立性を棄却できないという実証報告があるほか、日本でも近似的に成立している期間が長いという結果が報告されている（飯田・小守林・吉田 [1995]）。従って、金利に関しては、少なくともリスクの市場価値[17]がさほど大きくないと見看したうえで前節までに示した分析

[17] リスク中立性という概念は、①リスクの市場価値（しばしばλ値とも呼ばれる）という指標がゼロであること（例えば Hull [1997]を参照）、あるいは②原資産価格(S_t)を無リスク資産の収益率(e^{rt})で除すことにより規格化した価格（しばしば相対価格($Z_t \equiv S_t/e^{rt}$)と呼ばれる）がマルチンゲール（例えば Duffie [1989]を参照）となっていることと同一である。ただし、リスクの市場価値λとは、$\lambda \equiv (\mu - r)/\sigma$（ただし、μは原資産の価格変動率に関する期待値＜ドリフト＞、rは無リスク金利＜ペイアウトがある原資産については、rは、無リスク金利－ペイアウト比率＞、σは原資産の価格変動率に関する分散＜ボラティリティ＞）によって定義されるもので、市場参加者のリスク選好度を

を行うことが可能であると考えられる。これに対し、株価を原資産とする場合については、直観的にほとんどの局面でリスク中立性が成立していないと考えられる[18]。他に、各種のコモディティーを原資産とする場合については、その種類によって成否様々な報告がみられる（Duffie [1989]）。ただこのようにリスク中立性が成立しない原資産についても、リスクの市場価値を推定することができるならば、その効果を織り込むためには、リスク中立的な世界で得られた確率分布を水平に平行移動すればよい（Hull [1997]）。この操作により確率分布の形状は変化しない[19]ことから、本稿で論じたリスク中立的な世界での確率分布分析の方法を活用することができる。

次に前述の②（市場参加者の予測能力）の検証について考える。②を直接検証しようとすると、市場参加者の予測内容に関する情報が必要であるが、これを直接得ることは困難である。従って、通常は、①と②が同時に成立しているかどうかにつき検証を行う。すなわち、導出された将来価格の期待値・確率分布がその後実現した価格や価格変動性を正確に予測していたかどうかを検証する。実際には、確率分布全体の検証はデータの制約から困難であるため、分布の分散（ボラティリティ）のみに注目する場合が多い。

表す指標である（λが大きいほど、リスク回避的）。また、マルチンゲールの定義（の概略）を示すと、ある確率過程（確率変数の時系列$\{X_t\}$）において、将来の期待値が現時点の実現値に常に等しい（すなわち、$E_t[X_{t+1}]＝X_t$）という性質があるとき、この確率過程をマルチンゲールと言い、各確率変数の生起確率をマルチンゲール測度と呼ぶ。

簡単な計算により、相対価格(Z_t)の変動率(dZ_t/Z_t)を表す確率過程のドリフトが$(\mu\text{-}r)$であることを得る。さらに、相対価格がマルチンゲールであることは、ドリフト$(\mu\text{-}r)$がゼロであることと同値である。このようにして、リスク中立性に関する上記の２つの考え方（①、②）の対応を確認できる。

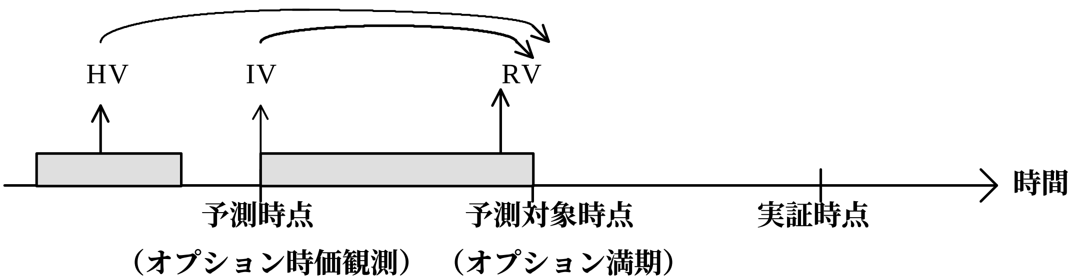
18 仮に株価についてリスク中立性が成立するとすれば、その予想価格変動率が「無リスク金利－ペイアウト比率（配当率）」に一致しなくてはならない。しかし、殆どの局面でこうした一致は起こっていない（例えば、株価の価格上昇率の長期平均が、無リスク金利の長期平均水準を上回っていることなどからも、直観的に理解できる）。

19 デリバティブ商品の原資産価格の確率過程を表す各種モデルでは、リスクの市場価値は、原資産価格の変化のトレンドを表す部分にのみ影響を与え、価格変化の不確実性を表す部分には何ら影響を与えない。このため、確率分布の形状を変えることなく、分布の期待値を修正（分布を水平移動）することにより、リスクの市場価値の効果を取り込むことが可能である。

代表的な検証方法（下図参照）は、インプライド・ボラティリティ（ＩＶ）が事後的な実現ボラティリティ（ＲＶ）に対して十分な説明力を有していたかどうかについて、回帰分析により実証を行うものである。また、ＩＶと代替的な予測変数として、現時点の市場情報（市場参加者の予測）を含まない過去の価格データだけから導出したヒストリカル・ボラティリティ（ＨＶ）を考え、これがＲＶに対して有する説明力を併せて分析・比較する例もある（この場合、ＨＶよりもＩＶの方が高い説明力を持っていれば、市場参加者が将来の価格の確率分布を予測する能力が有意であることが示唆される）。

日本の市場データに対してこの種の分析を試みた例をみると、市場参加者の予測力について肯定的な結果が多い。例えば、ＨＶとして評価時点までの過去一定期間の価格変動の実績値から単純に計算した分散値を採用し、原資産として日経平均株価を扱った研究（浅野 [1993]）では、ＩＶの予測力が有意であったとしている。また、原資産として日経平均株価のほかに債券（ＪＧＢ）先物、日本円金先、通貨（円／ドル）も扱った研究（日本銀行調査統計局 [1995]）では、日経平均株価および通貨についてＩＶの予測力を肯定し、債券先物と金先については明確な結論は導けなかったとしている。このほか、ＨＶとして単純な分散値の代わりに ARCH、GARCH といったより予測力が高いとされる統計モデルを採用し、原資産として日経平均株価を対象とした研究（Serita [1991]、袖山 [1992]）においても、短期的な予測力はＩＶがＨＶを上回っているとしている。

RV, IV, HV の計測時期の関係



以上の結果を総合的にみると、２－１節で展開した方法は、将来の価格（分布）を予想する上で一定程度有効な情報を提供するものと評価できる。ただし、本節で取り上げた各前提が厳密には成立しない場合があるのも事実であるから、こうした限界を認識しておくことは重要である。

２－３．デリバティブ商品の市場情報活用に関するその他の論点

デリバティブ商品の取引に伴ってマーケットから得られる情報のうち、マーケット分析という観点から最も有効な情報は市場価格情報であり、これを活用することが本稿の主題であった。これに対し本節では、市場価格の他にマーケットから得られる情報として、取引量の多寡に関する情報の活用可能性と限界につき簡単に整理しておく。

取引量は、以下にみるとおり、市場価格とは異なり市場参加者の相場観を直接的に反映するタイプの情報ではない。従って、取引量情報から得られるインプリケーションも、市場価格の場合に比べるとかなり弱い意味しか持たない点には注意を要する。

取引量に関連した情報は、①一定期間中の取引ボリューム（フローの情報）と②ある時点における取引残高（ストックの情報）に分けられる。以下、順にこの２つについて整理する。

ファイナンス研究者の間における①に関する代表的な見方は次のとおりである。マーケットに何か新しい情報が入ってくると、それを市場価格に織り込む過程で取引ボリュームが膨らむ。一方、新しい情報は市場価格の変動をもたらすものであり、より多くの情報が入ってくるほど市場価格は激しく変動する傾向がある。従って、取引ボリュームと価格変動性（例えば、ボラティリティ）の間には正の相関があると考えられ、実際これは実証研究によっても確かめられている（Watanabe [1993]）。この性質を利用すると、取引ボリューム情報は、目先の価格変動性に関する定性的な示唆を与えてくれるものとも言え、前節でみたインプライド・ボラティリティ情報などを補完する役割が期待される。

ただし、取引ボリュームの情報は、将来の価格変動性を示唆するという意味での先行性をもっていると言えるのか、もし先行性があるとしても将来のどの時期に対応した情報を与えるのかは、明確でない。また、取引ボリュームと価格変動性との間に定性的な関係があるとしても、安定した定量的な関係を見出すのは困難であるほか、理論的定式化もなされていない。従って、実際に取引ボリューム情報をマーケット分析に利用する場合には、こうした限界を念頭に置き、あくまでも補完的な情報という位置づけを保つのが現実的である。

一方、前述の②に対応する代表的な情報は、先物を利用した裁定取引残高である。市場関係者間でしばしば囁かれる典型的なシナリオは、株価指数取引において現物・先物間の裁定を狙った現物買い・先物売り取引[20]が大量に積み上がっている場合、将来利食いの機会を得た時点においてその反対ポジションが構築されると予想され、これに伴う大量の現物売りの結果現物株価指数が下落するであろう、といったものである。ここでは、裁定取引残高の数字を知ることにより[21]、現物価格の値下がり・値上がり圧力を評価しようとしている。

ただし、市場参加者の多くがこうした裁定取引残高の情報を知っているのであれば、そこから予想される価格変動圧力の情報が現時点の市場価格に速やかに織り込まれるはずであることに留意する必要がある。例えば、前例のように現物株価指数に大きな下落圧力があると予想されれば、市場参加者の多くは即座に現物または先物をショートするであろうから、その結果現時点で市場価格が低下している筈である。このような形で将来の価格変動が現物価格に織り込まれてしまえば、将来、さらに価格が低下する必要はなくなる。従って、裁定取引残高（現物買い／売り）が大きな数字であるという理由だけから、将来の市場価格が現在の水準より上昇／下降するといった予想を立てるのは早計である。マーケット分析を行う際には、こうした点を認識しつつ、他の情報も併用して総合的な判断を下す必要がある。

[20] 東証における売買高上位１５会員の取引状況につき、株式指数裁定取引に関する売買量（ボリューム）および残高の数字が日々公表されている。ただし、どのような取引を「裁定取引」と呼ぶか（例えば、現物指数バスケットの構成等）について、定義が不明確なまま情報が公表されており、この点で情報価値が今一つであるといった指摘もある。

[21] 現在、先物を利用した裁定取引残高に関する情報が公表されているのは、株式指数に関連したものだけである。ただ、他の商品にかかる裁定取引についても、もし相対ベースで大雑把な売買残高を把握することが出来る場合には、同様の議論が当てはまる。

３．オプションの価格情報を利用した原資産価格の確率分布の具体的な導出方法

第２章で概観したように、オプション商品の価格情報を利用して将来の予想原資産価格の確率分布を導出するという作業は、オプション商品に特有の市場分析方法であり、技術的に開発途上の領域である。このため、実際に分析を行うとき、利用可能な価格情報やマーケットの局面等に応じてどのような計算方法を選択すべきかは必ずしも自明でない。そこで、本章では、現時点で考えられる計算方法を具体的にサーベイすることにより、今後の応用分析に必要な情報を供する。

３－１．各種計算方法

２－１－２節では、オプション商品の市場価格情報を利用して将来の予想原資産価格の確率分布を導出する諸方法を４つのグループに分類した。以下では、そのグループ毎に、計算方法の具体例や特徴点をやや詳細に解説する。

３－１－１．将来の原資産価格の分布型として対数正規分布を仮定し、インプライド・ボラティリティを算出する方法

最も普及しているオプション・プライシング法（ブラック－ショールズ式）では、予想原資産価格の対数値が正規分布に従うという仮定に基づきオプションの理論価格を算出する。正規分布は、平均と分散という２つのパラメータのみによって形が定まる簡単な分布であるから、この２つの情報さえ分かれば価格を求められる。リスク中立的な世界では、原資産の期待価格上昇率が無リスク金利[22]に一致するという条件が課されるため、正規分布の平均値は既に確定している。このため、残された分散という一情報を与えることにより、分布型が確定し、オプションの理論価格が決定される。

このように、オプションの理論価格と分布の分散とが一対一に対応していることから、市場で１つのオプション価格を観測すれば、将来の原資産価格分布の分散を逆算し、確率分布を確定させることができる。市場では、

---

[22] 原資産にペイアウト（配当や利払い）がある場合には、原資産の期待価格上昇率が「無リスク金利－ペイアウト率」に一致するという条件となる。

この分散値の平方根（すなわち標準偏差）をインプライド・ボラティリティと呼ぶ。この情報は、予想原資産価格の対数値を表現する正規分布の拡がりの程度、換言すれば、予想原資産価格の不確実性の程度を示している。

３－１－２．対数正規分布を出発点とし、併せてそこからのずれも評価する方法

前節では、原資産価格の対数値が正規分布に従うことを大前提としていた。この仮定は、近似的に成立する場合こそ多いものの、厳密には正確でないことが実証研究により知られている。そこで、正規分布を特徴づける分散の値と共に、正規分布からのずれを表す幾つかの情報を同時に算出することを考える。正規分布にずれの効果を加えた分布型を再現すれば、より正確な確率分布を得ることができる。

ずれを評価する代表的な指標としては、分布の非対称性をみる歪度(skewness) s や裾野部分の厚み(fat tail)をみる尖度(kurtosis) k がある[23]。

これらのずれは、数学的には、次のように扱うこともできる。一般に、分布型を表現するある関数（第２特性関数と呼ばれる関数）を原点回りでテーラー展開したとき、２次までの項により完全に記述される分布が正規分布であることが知られている。従って、真の分布型に対応した第２特性関数が高次の項を持つ場合には、その３次以上の項を正規分布からのずれと解釈できる。数学的には、３次の項の係数κ_3（３次のキュミュラントと呼ばれる）が歪度 s に対応し、４次の項の係数κ_4（４次のキュミュラントと呼ばれる）が尖度 k に対応している[24]。

計算方法としては、満期が同一で行使価格が相異なる複数個のオプション商品の価格を観測し、その情報から分布型の分散、歪度、尖度といった指標を同時に決定する。決定すべき指標の数が分布を記述する自由度であるから、これと同じかそれ以上の数のオプション商品について価格を知ったうえで、非線形最小自乗法や非線形最尤法により最適な指標を見出す。

---

[23] 歪度 s は期待値の回りの３次モーメント(μ_3)を、尖度 k は同４次モーメント(μ_4)をそれぞれ同２次モーメント（分散μ_2）を用いて無次元に規格化した指標である。すなわち、$s \equiv \mu_3 / \mu_2^{3/2}$, $k \equiv \mu_4 / \mu_2^2$。

[24] ２次のキュミュラントκ_2は、$\kappa_2 = \mu_2$（分散値）と定義される。同様に、$\kappa_3 = \mu_3 = s \cdot \mu_2^{3/2}$、$\kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 = k \cdot \mu_2^2 - 3\mu_2^2$となる。

５次以上の高次キュミュラントを無視することとすれば、４次までのキュミュラントを用いてオプションの理論価格式を記述することができる（Jarrow and Rudd [1982]、吉羽 [1996]）。従って、市場価格情報から逆に各次のキュミュラントを推定したり、さらにこれを歪度、尖度に変換することが可能である。後掲４－２節では、この手法を応用した計算例を紹介する。

特に分布の非対称性だけを評価すれば十分である場合には、リスク・リバーサルと呼ばれる取引[25]に着目し、コールとプットの各々のインプライド・ボラティリティの差（ボラティリティ・スプレッドと呼ばれる）を非対称性の指標として用いる方法もある（吉羽 [1996]）。市場でリスク・リバーサルの取引量が十分多い場合には、この方法により、複雑な推定計算を行うことなく簡便に非対称性の程度を評価できる。

ただ、ボラティリティ・スプレッドという指標のままでは統計的な意味が必ずしも明確でない点には注意を要する。確率分布の形を把握する必要があるならば、ボラティリティ・スプレッドを分布の非対称性を直接表現する指標（例えば歪度）に変換しなくてはならない。

分布の非対称性を評価するために利用される指標としては、リスク・リバーサル取引のボラティリティ・スプレッドの他に、プット・コール・プレミアム比率がある。これは、対称な行使価格[26]を持ち満期が同一であるアウト・オブ・ザ・マネーのプットおよびコールにつき、各市場価格（Ｐおよびにとする）の比率（Ｐ／Ｃ）を算出したものとして定義される。理論的には、原資産価格の予想確率分布が対数正規分布であれば、この比率が行使価格と先物理論価格の比率に一致することが知られている（吉羽 [1996]）。例えば、日経平均株価が 17,000 円であるときに短期の日経平均株価オプションで行使価格が 17,500 円のコールと 16,500 円のプットに注目すると、両者は、先物理論価格（短期であるため原資産価格にほぼ一致し、約 17,000 円）を基準点としてそれぞれ約 3%ずつアウト・オブ・ザ・マネー

[25] リスク・リバーサルとは、ある特定のプレーン・コール（アウト・オブ・ザ・マネー）とプレーン・プット（アウト・オブ・ザ・マネー）を１単位ずつセットにした取引であり、通貨オプション市場で頻繁に取引されている。

[26] ここで言う対称な行使価格とは、オプションの原資産にかかる理論先物価格の対数値を中心として、プット・コールの各行使価格の対数値が互いに逆方向に同幅だけ離れている状況をいう。

となった対称な行使価格をもっている。従って、オプション満期時点の日経平均株価の予想確率分布が対数正規分布であれば、理論上のプット・コール・プレミアム比率は約 1/1.03（ 0.97）となる。もし分布に非対称性があると同比率が 0.97 からずれることとなるから、逆にそのずれを観察することにより分布の非対称性を評価できる。具体的には、比率が 0.97 より大き（小さ）ければ、分布が株高（安）側に短い裾野を、株安（高）側に長い裾野を持った非対称な形状となっている。従って、満期までの予想株価変動率を無リスク収益率を基準としてみたとき、市場参加者は、一定の超過収益率が実現する可能性より同率の損失を被る可能性の方が相対的に大きい（小さい）と予想していることになる。なお、この手法は、Bates [1991] によって利用されて以降、しばしば見受けられるようなったものである。

３－１－３．より現実的な確率分布型を仮定したうえ、分布のパラメータを決定する方法

本節と次節では、単一の対数正規分布を仮定することなく、現実の分布を再現する方法を示す。まず本節では、対数正規分布以外の特定の分布型を前提とし、その分布のパラメータを推定するためにオプションの市場価格情報を活用するタイプの手法を取り上げる。ここでは、どのような分布型を出発点とするかにより無数のバリエーションがある。分析対象とする原資産価格の性質や局面に応じて適切な分布型を選択すれば、より正確な分析が可能になる。

前提とする分布型の例としては、

①幾つかの相異なる正規分布を重ね合わせた分布（Melick and Thomas [1996]）、

②価格の連続的変化を表現する分布（例えば正規分布）に非連続的変化（ジャンプ）を表現する分布（例えばポアソン分布）を加えた分布（ジャンプ・ディフュージョン・モデルと呼ばれる。Malz [1995]、Bates [1991]）、

③スマイル・カーブ（行使価格に対してインプライド・ボラティリティを表現した関数）に２次曲線を当てはめるモデル（Shimko [1991, 1993]）から導出される分布、

④金利の期間構造の変化を明示的にモデル化した各種イールド・カーブ・モデル[27]から導出される分布（ただし、これは金利関連オプションへの適用に限られる）、

などを挙げられる。

Melick and Thomas [1996]では、３種類の正規分布を重ね合わせた分布型を仮定した上で、観測されたオプション市場価格に合致するように各正規分布の平均、分散およびウエイトを決定するプロセスを採用している。また、応用として、湾岸戦争中(1990-1991 年)に原油オプションの価格データから将来の原油価格の予想分布を求めるとどのような示唆を得るかといった分析を行っている（下図＜次頁＞参照）。結論としては、戦争の成り行き如何で将来の原油価格が高騰する可能性と現水準近辺で推移する可能性の２つが混在し、２つの離れた正規分布を重ね合わせたような分布が予想される局面もあったことを示している。例えば下図では、1 月 14 日、16 日には将来の価格暴騰の可能性を反映して２つの山型状の確率分布が観測されているのに対し、同 17 日に“good news”が届き価格暴騰観測が遠のいた結果、17 日、18 日に観測された確率分布は１つの山型状となっている。こうした例は、市場環境如何では３－１－１節や３－１－２節で示した比較的簡単な分析では知りえない情報が存在する可能性を例示したものとみることもできる。

なお、Melick and Thomas [1996]は、満期日以前にオプションを行使可能なアメリカン・タイプのオプションの価格を分析対象とする場合の対処方法についても提案を行っており注目される。

このほか、Malz [1995]は、ＥＭＳ通貨間の為替レート予想値の分布を分析対象とし、レートがジャンプする可能性を織り込んだ上で、リアラインメントが引き起こされる確率を推定している。この結果、ジャンプの可能性を考慮しなかった場合よりも優れた結果を得られたとしている。また、Bates [1991]は、1987 年 10 月のブラック・マンデー以前における将来の予想株価の確率分布を分析対象とし、市場参加者が事前に株価の暴落を予想していた可能性を検証。特に、1986 年 10 月から 1987 年 8 月における予想株価分布において、分布型が負の方向に偏っていたことと株価ジャンプの可能性が高くなっていたことから、クラッシュがある程度予期されていたと結論

[27] イールド・カーブ・モデルに関する解説としては、Hull [1997]等を参照。

している。

原油価格の予想確率分布の推定結果

（Melick and Thomas [1996]より）

この部分の図表は Word ファイルとしては表示できません。

３－１－４．特定の確率分布型を前提とはせず、ノンパラメトリックに分布を形成する方法

３－１－１節～３－１－３節ではパラメトリックな確率分布型を前提としたのに対し、本節では、特定の確率分布型を仮定することなく、オプション価格データから直接原資産価格の分布型を形成する。すなわち、プレーン・コール・オプション（またはプレーン・プット・オプション）において、満期 T を固定した上、行使価格 K を連続的に変化させた時、常に取引を成立させることが可能であり時価 P(K,T)を得られる場合には、この関数 P(K,T)から次の関係式に従い、時点 T において原資産価格が K となる確率分布関数 f(K,T)を導出できる（Breeden and Litzenberger [1978]）。

$$f(K,T)=e^{r(T)T}\cdot\partial^2P(K,T)/\partial K^2$$

ただし r(T)は、期間 T の無リスク金利

実際に市場で取引が成立しているのは有限個の行使価格に限られているため、市場データから直接に連続的な関数 P(K,T)を得ることはできない。しかし、有限個とはいえ十分多くの価格データがあれば、それを滑らかに結んだ曲線によって関数 P(K,T)を近似することができる。技術的には、スプライン関数と呼ばれる円滑化曲線を利用することができる。この手法については、後掲４－１節で具体例を紹介する。

なお、オプション価格データが有限個しかないことへの対応としては、円滑化により近似関数を組み立てる方法のほかに、有限差分近似を利用する手法も研究されている。この場合には将来の原資産価格が有限幅の区間に入っている確率を論ずることとなるため、導出される確率分布は連続関数でなくヒストグラムとなる（例えば、Neuhaus [1995]）。

３－２．より高度な分析方法

３－１節では、将来の原資産価格の確率分布を導出するための基本的な手法を概観した。これを踏まえ、以下では、さらに高度な分析として、①将来の確率分布の経時変化分析および②複数の原資産価格間の相関分析を順に取り上げ、その方法と限界について整理する。

３－１節では、ある一時点の確率分布を導出することに焦点を当ててきた。ところで、市場には、同一原資産でも満期が異なったオプション商品が複数存在している。従って、各々の満期のオプション商品群から、当該満期時点における原資産価格の確率分布を導出することが可能である。各時点の確率分布を合わせてみれば、分布の経時変化を推察することができ、いわば予想確率分布のダイナミクスを調べることとなる。

こうした分析がどの程度の精度で可能かは、オプションの満期がどの程度の刻みで存在しているかに依存する。店頭取引であれば、様々な満期が存在しうるが価格情報の信頼度は低下する一方、流動性の大きい上場取引であれば、満期の設定は数カ月毎といった粗い刻みでなされているのが通例である。このように、ここまでにみた一連の方法を現在のマーケットに適用する場合には、刻々と変化する確率分布を正確に導出するには至らないという限界がある。

一方、上記とは別の手法を利用して、より細かい時間刻みで原資産価格の予想確率分布のダイナミクスを分析する研究もなされている。これらを大別

すると、次の２つに分類可能であり、それぞれ幾つかの実証報告例がある。

①オプション価格理論における格子法を拡張した手法。各節点毎にリスク中立確率を算出し、時点毎の確率分布を再現する。

②ボラティリティ（正規分布における標準偏差）の経時的な不均一性（heteroscedasticity）を明示的にモデル化する方法。

①の特徴点は、（対数）正規性を前提とせず、インプライド・ボラティリティのスマイル構造を取り込んだ柔軟な分布型を形成できる反面、分布を決定するためにはかなり多くのオプション価格情報が必要となることである。代表的な手法として、次の３つを掲げておく。

(i) ルービンシュタインのインプライド二項ツリー法(Implied Binomial Tree Method <Rubinstein [1994]>)

はじめに、ある特定の満期を持つオプション商品の価格情報から同満期時点における原資産価格の確率分布を推定。その後、現時点から満期までのツリー展開において格子再結合の仮定を置くことにより、確率分布の時間変化を決定する。わが国の市場価格データを扱った研究報告もある（例えば、ワラント債価格への適用例として、Kuwahara and Marsh [1994]）。

(ii) ダーマン－カニのインプライド二項ツリー法(Implied Binomial Tree Method <Derman and Kani [1994]>)

ある時点よりも早く満期を迎える全てのオプション商品の価格情報を同時に入力して、各時点における確率分布を導出する方法。わが国の市場価格データを扱った研究報告もある（例えば、日経平均オプションの価格データへの適用例として、酒谷・五十嵐[1994]）。

(iii) デュピレのインプライド三項ツリー法(Implied Trinomial Tree Method <Dupire [1994]>)

(ii)と類似の手法を用いるが、二項ツリーの代わりに三項ツリーを利用して、各時点における確率分布を導出する方法。

一方、②の特徴点は、明示的なモデルを利用していることから比較的少ないオプション価格情報により分析が可能である反面、ボラティリティという一変数の動きをみるだけであるため（対数）正規分布を想定した分析に止まってしまうことである。代表的な手法として、次の２つを掲げておく。

(iv) ＳVM(確率ボラティリティ・モデル、stochastic volatility model)（例

えば、Hull and White [1987]）

ボラティリティが時間の経過とともにランダム性を伴って変化していくと仮定したモデル。

(v) ARCH(自己回帰条件付き不均一分散、autoregressive conditional heteroscedasticity)モデル、GARCH(一般化された<generalized> ARCH)モデルおよびその派生手法

ある時点のボラティリティは、過去のボラティリティおよび価格の実現値のみに依存し、ランダム性を伴わずに決まるとするモデル。

ここまでは、オプション商品の原資産の種類を特定することなく一般的なフレームワークで議論を進めてきたが、１つのオプション商品の原資産の数は常に１種類であるという点を暗黙に仮定してきた。

ところで、現在の先端的なマーケットをみると、複数の金融商品を同時に原資産とするオプション[28]（本稿では、コリレーション・デリバティブと呼ぶ）も取引されている。このような商品の価格は、複数の原資産価格を確率変数とする多変量確率分布を反映したものと考えることができる。すなわち、個別の原資産価格の確率分布が独立に反映されているのではなく、異なる原資産価格間の相関も織り込んだ確率分布が反映されている。従って、コリレーション・デリバティブの市場価格を観測すれば、少なくとも原理的には、これまでと同様のプロセスにより原資産価格間の相関に関する市場の予想を推定することができる（もちろん、個々の原資産価格の分散も推定可能であるし、より一般的には、予想多変量確率分布を推定することも可能である）。

もっとも、現時点では、わが国を含め世界の主要金融市場においてさえ、コリレーション・デリバティブの取引頻度はプレーン・デリバティブのそれに比べ格段に少ないことから、観測される価格情報の信頼性はかなり低い（ビッド・オファー・スプレッドが大きい）。このため、意味のある相関の値を推定するのは現時点では不可能である。従って、ここで述べた相関や多変量正規分布の推定可能性については、将来に実現するかもしれない潜在的な可能性として理解すべきである。

[28] コリレーション・デリバティブとしては、クオント・オプション(Quanto Option)、クロス・オプション、バスケット・オプションなどをはじめとして、様々な商品が存在する。これらの商品性やプライシング方法については、例えば Nelken (ed.) [1997]を参照。

４．わが国の市場データに対する若干の応用

本章では、①わが国におけるオプション商品の価格情報を対象として具体的に計算を行うことと、②３－１節で概観した多彩な計算方法の中から先行研究が報告されていない手法を利用することを同時に試みる。また、計算結果から、わが国市場で利用可能なオプション価格情報の量と質を前提とした場合に、どのような仮定を置きどの程度の自由度を確保した分析手法を利用するのが最適であるかを考察する。

具体的には、データとして日経平均株価指数オプション（満期日１９９５年８月１１日）の中から一定量以上の流動性[29]をもったコール[30]の行使価格 vs 市場価格情報（１９９５年6月９日～８月４日[31]、週次＜毎週最終営業日の終値＞）を利用する。計算方法としては、

（１）行使価格別のオプション市場価格をスプライン関数によりスムージングし、この関数からノンパラメトリックに分布を形成する方法、

（２） Jarrow and Rudd [1982]の手法を応用し、対数正規分布からのずれを表現する歪度および尖度を算出・評価する方法、

の２つを適用する。以下、この計算結果を順に示す。

４－１．行使価格別のオプション価格データを円滑に連続化した上ノンパラメトリックに分布を形成する方法

本方法は、３－１－４節で示した計算方法に対応する。対象期間における各取引日には、３～５種類の行使価格においてコール・オプションの時価データが利用可能であった。この有限個の価格データ[32]を円滑な曲線で結ぶため

---

29 具体的には、当日の売買高が３０枚以上であった商品のみをデータの対象とした。

30 コールだけでなくプットの市場価格情報を同時に利用することも原理的には可能ではあるが、本稿では、そうした計算を行わなかった。その理由は、同商品終値の価格データを調べると、必ずしもプット・コール・パリティの関係が成立しておらず、プット・コール価格間に整合的な関係を見出すことが困難であったため。このため、ここでは、取引量が相対的に多かったコールの価格情報のみを利用することとした。

31 この期間は、最近において、日経平均株価が最も大きく下落し、かつその後に大幅な上昇に転じていった期間であることから、分析対象として興味深いと考え採用した。

32 実際には、市場価格情報の他に、境界条件として、①十分にアウト・オブ・ザ・マ

には、スプライン関数[33]（具体的には、５次自然スプライン関数[34]を適用）を利用した。各行使価格に対するオプション価格データを結ぶスプライン関数が導出されれば（下例参照）、３－１－４節で示した公式に従い微分演算を行うことによって、確率分布関数を得る。

行使価格に対するオプション価格データを滑らかに結んだスプライン関数の例
（１９９５年6月９日時点）

オプション価格(円)
(プット価格換算)

この部分の図表は Word ファイルとしては表示できません。

行使価格(円)

オプション満期（１９９５年８月１１日）時点において原資産価格（日経平均株価）がどのような水準にあるかを予想する確率分布を各取引日の情報から導出した結果は、次頁に示す。ここでは、本方法によって導出した確率分布（ノンパラメトリックに形成した分布型）に加え、３－１－１節で示した単純なインプライド・ボラティリティのみから導出する確率分布[35]（対数

ネーの行使価格をもつ仮想的コールの価格がゼロ、②十分にイン・ザ・マネーの行使価格をもつ仮想的コールの価格が $e^{-dt}S-e^{-rt}K$ であるという境界条件を付した上で円滑化を行った（ただし、Ｓは原資産価格、Ｋは行使価格、d は配当率、r は無リスク金利）。

33 スプライン関数の理論的および実用的解説については、それぞれ桜井[1981]、桜井・吉村・高山[1988]を参照。

34 スプライン関数には様々なバリエーションがある。５次自然スプライン関数とは、隣接データ点間を結ぶ曲線が高々５次の多項式であるスプライン関数のうち､特に両端の曲線だけは高々２次の多項式であるという条件を課したもの｡オプション価格を表す関数としてこの５次自然スプライン関数を適用すれば､その２階微分によって表現される確率分布関数は３次スプライン関数となる。一般に、３次自然スプライン関数は、所与のデータ点を最も円滑に結ぶスプライン関数であることが知られている。

35 インプライド・ボラティリティの算出に当たっては、満期までの期間に対応した無担保コール・レートを無リスク金利とし、配当率を 0.89%とした。ノンパラメトリックな分布形成において利用した全ての行使価格に対してインプライド･ボラティリティを

日経平均株価オプションの時価情報から推定した
オプション満期時点（1995. 8. 11）の日経平均株価の確率分布型

この部分の図表は Word ファイルとしては表示できません。

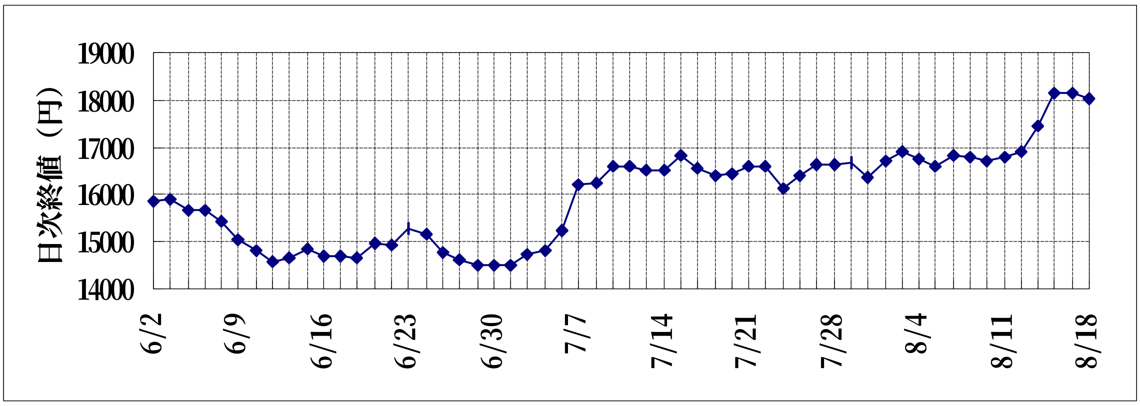
計算し、各時点においてその単純平均値を算出。この値を対数正規分布の定義式に代入・グラフ化することにより、各時点毎の確率分布を得た。

正規過程を仮定した分布型）も同時に示し、両者を比較可能にした。

この結果をみると、ノンパラメトリックに形成した分布型では、日経平均株価（株価の推移は下図参照）が年初来の最安値を探る局面（例えば、６月９日、１６日、３０日）において分布の裾野が左側（株安側）に長く尾を引いており、株価がさらに大幅に低下するかもしれないという不安を示唆している。一方、価格が（少なくとも短期的に）持ち直した局面（例えば、６月２３日および７月７日以降の回復過程）では、分布の左側裾野は特に長くはなく、極端な株安不安が薄れたことを示唆している。この間、全取引日を通じて、分布右側（株高側）の裾野は相対的に短い傾向を示している。これは、日経平均の大幅な上昇を期待できないという相場観を反映したものと考えられる。

これに対し、完全な対数正規過程を仮定した分布型においては、常に左側の裾野が相対的に短く、右側が長いといった性質が現れている（これは、対数正規分布の定義に起因する性質であり、データの内容をもって変えることはできないもの）。従って、対数正規分布をみるだけでは、上記で考察したような情報を得ることは原理的に不可能である。

分析期間前後における日経平均株価の推移



一方、ノンパラメトリックに形成した分布型の問題点としては、時として導出される確率分布型が不安定であることを指摘できる。例えば、７月２１日・２８日、８月４日時点の分布型をみると、僅かではあるが負の確率が現れている。理論的には、こうした現象は起こり得ないものである。原因として考えられるのは、市場における価格形成が合理的に行われていなかった可能性や価格データの観測誤差が大きかった可能性である。また、７月７日・２１日・２８日時点の分布型をみると、２つの山型に分裂した分布が現れている。これが実際に市場の相場観が分裂していたことを反映したものである

のか、単に分布中央部の形状に影響を与えた価格データが大きな誤差を含んでいただけであるのかは、これだけの情報からでは判断できない。仮に前者が正しいとすれば、本方法は非常に有力な分析手段であると評価できる。しかし、現在利用可能な価格が各取引日毎に３～５個と限られていることや、商品の流動性が十分に高いとは言えないことを考えると、後者の可能性も強く残る。この真相を見極めるには、日中の市場価格の動きや各取引の流動性・成約状況に注意を払いつつ、採用した全てのデータ（今回は、終値[36]）がほぼ同一時点（今回は、市場終了時）において値がついたものであるかどうかを判断する必要がある。また、市場ヒアリングなどの結果と整合的であるかどうかをみるのも不可欠である。こうしたより精緻な分析を行い、本方法の有効性を高めていくことは、今後の課題である。また、将来的にオプション市場が一段と成熟し、行使価格の多様性や取引の流動性が十分に向上した場合には、ここで述べた弱点が克服され、本方法が大変有効な分析ツールになると考えられる。

４－２．対数正規分布からのずれを歪度・尖度の算出により評価する方法

本方法は、３－１－２の前段で解説した方法である。すなわち、４次以下のキュムラントを勘案したオプションの理論価格式（Jarrow and Rudd [1982]、吉羽 [1996]）に対して市場価格データ（４－１節で利用したデータと同一）を当てはめ、非線形最小自乗法によって理論価格式のパラメータを推定する[37]。

---

[36] この終値とは、当該営業日の最終取引値であるから、取引量が少ない場合には、市場終了時間よりかなり前に取引された価格となっている可能性もある。この場合、各行使価格毎の価格データに時間差が発生してしまうため、それをセットにして確率分布を導出しても大きな誤差を含む可能性が残る。

[37] 具体的には、コール・オプションの理論価格式 C(F)は、次のように表される。

$$C(F) = C(A) + e^{-r(T)T}\frac{\kappa_2(F)-\kappa_2(A)}{2!}\cdot\left[a(S_T)\right]_{S_T=K} - e^{-r(T)T}\frac{\kappa_3(F)-\kappa_3(A)}{3!}\cdot\left[\frac{da(S_T)}{dS_T}\right]_{S_T=K}$$

$$+e^{-r(T)T}\frac{\{\kappa_4(F)-\kappa_4(A)\}+3\{\kappa_2(F)-\kappa_2(A)\}^2}{4!}\cdot\left[\frac{da^2(S_T)}{dS_T{}^2}\right]_{S_T=K}$$

ただし、C(A)はブラックーショールズ・モデルによるコール・オプション価格式、
a(S)はブラックーショールズ・モデルに対応した対数正規分布の確率密度関数（S は原資産価格、K は行使価格）、

パラメータは３つあり、予想原資産価格の確率分布の２次・３次・４次キュミュラントに対応している。これを決定すれば、３－１－２節で注記した関係式から、確率分布の分散（以下の推定結果では、これをボラティリティに変換して表示）、歪度および尖度を導出することができる。

各取引日のオプション価格データから計算した確率分布のボラティリティ・歪度・尖度の推定結果を下表に示す。参考のために、ブラック－ショールズ・モデルに対応した完全な対数正規分布（ボラティリティとしては、４－１節で算出した取引日毎のインプライド・ボラティリティ平均値を使用）を仮定した場合の各指標も同時に示す。

オプション満期時点（1995. 8.11）の予想日経平均株価に関する
確率分布のボラティリティ、歪度および尖度

時点	日経平均（円）	推定結果			（参考）　対数正規 分布		
		ﾎﾞﾗﾃｨﾘﾃｨ	歪度	尖度	ﾎﾞﾗﾃｨﾘﾃｨ	歪度	尖度
6月9日	15,044	0.209	0.313	3.122	0.209	0.262	3.122
6月16日	14,703	0.269	0.073	3.180	0.269	0.318	3.180
6月23日	15,265	0.239	0.219	3.122	0.238	0.263	3.123
6月30日	14,517	0.300	0.289	3.168	0.300	0.307	3.168
7月7日	16,213	0.322	0.277	3.161	0.322	0.301	3.161
7月14日	16,518	0.302	-0.549	3.115	0.303	0.253	3.114
7月21日	16,589	0.344	-0.042	3.106	0.342	0.247	3.109
7月28日	16,649	0.305	-0.210	3.057	0.305	0.180	3.057
8月4日	16,741	0.291	-0.445	3.024	0.289	0.120	3.026

$\kappa_i(F)$、$\kappa_i(A)$（i=2, 3, 4）はそれぞれ真の分布のｉ次キュミュラントおよびブラック－ショールズ・モデルに対応した対数正規分布のｉ次キュミュラント、を表す。ここで、出発点とする対数正規分布の決定に当たっては、各取引日毎に（１）で利用したインプライド・ボラティリティの平均値（σ）を利用した。σが与えられると、上式における関数 C(A)および a(S)が決定するとともに、対数正規性の定義から、$\kappa_2(A)$、$\kappa_3(A)$、$\kappa_4(A)$の値も自動的に決まる。従って、市場で観察した価格情報（行使価格 K に対する時価 C(F)）を上式に当てはめて最適化を行う際に推定すべきパラメータは、$\kappa_2(F)$、$\kappa_3(F)$、$\kappa_4(F)$の３つである。

推定された分布型が完全な対数正規分布からどのようにずれているか評価するには、推定された歪度・尖度と完全な対数正規分布の歪度・尖度を比較すればよい[38]。上の結果から看取されるのは、次の２点である。

① ほとんどの時点において、推定された歪度は、完全な対数正規分布がもつ歪度より小さい。従って、確率分布型は、対数正規分布型よりも右側（株高側）の裾野が短く、左側（株安側）の裾野が長い形状であると推定される。

この結果は、無リスク資産の収益率を基準として満期までの予想株価変動率を評価したとき、大幅な超過収益率が実現する可能性より同率の損失を被る可能性の方が相対的に大きいと予想されていることに対応する。この点は４－１節で得た方向と定性的に一致している。ただ、ここでは、４－１節で観察されたような株価下落局面および回復・上昇局面の間の一定の傾向をみることはできない。

② 全時点について、推定された尖度は、完全な対数正規分布が持つ尖度とほぼ同じである。従って、今回のデータからは、ブラック－ショールズ・モデルの前提を超えた fat tail は観測されない。

---

[38] なお、この他のアプローチとして、対数正規分布からのずれに着目する代わりに、推定された分布の形状を直観的にイメージし易い正規分布からのずれをみるのも一案。完全な正規分布の歪度・尖度はそれぞれ０および３であることが知られているから、推定結果が０および３からどの程度乖離しているかをみることにより、推定された分布型の非対称性および fat tail を評価可能。

こうした観点から上記（前頁）の表に示された計算結果を眺めると、

①分析期間の前半（６月９日～７月７日）については歪度が正であり、確率分布型は右側（株高側）の裾野が長く左側（株安側）の裾野が短いという非対称性を有していたこと、

②分析期間の後半（７月１４日～８月４日）では逆に歪度が負であり、確率分布型は右側（株高側）の裾野が短く左側（株安側）の裾野が長いという非対称性を有していたこと、

などを推測できる。

４－３．現実的な分析方法の選択と今後の課題

最後に、現時点におけるわが国オプション市場の価格データの質と量を前提とした場合、将来の予想原資産価格の確率分布を導出するための多彩な手法の中からどれを選択すべきかという問題を簡単に検討する。

４－１節および４－２節における計算結果をみると、いずれも対数正規分布を仮定しただけでは得られない情報を供するという点で評価できる一方、前述のような計算結果の不安定性という問題が残るのも事実である。後者の問題は、市場参加者の期待が変化しない程度の短いタイム・ホライズンにおいて、幾つのオプション商品（満期が同一で行使価格が異なるもの）の時価を観測でき、かつ十分に信頼度が高い価格が形成されているか（流動性が高いか）という問題に帰着する。現在、わが国の各オプション市場を原資産の種類や上場・店頭の別を問わず横断的にみると、いずれの市場においても、せいぜい本章で取り上げた日経平均株価オプション市場の価格情報と同等程度の限定的な情報を得られるだけである。このため、特に４－１節における分析のように多くの出力情報（分布の形状に関するノンパラメトリックな情報）を求める場合には、推定結果が不安定になるのも当然である。従って、現状わが国では、パラメータの個数を少数に限定した確率分布モデルによる分析（３－１－２節、３－１－３節における手法に対応）を志向するのが妥当であると考えられる。ただ、より精緻に確率分布型を調べる必要がある場合には、より柔軟な手法を用いざるを得ない。その計算を如何にして安定的に行うか検討することは、今後の課題として重要である。

５．終わりに

本稿では、各種デリバティブ商品の市場情報を抽出し、それをマーケット分析に活用する方法論を整理した。具体的には、第２章で基本的な考え方等を整理し、第３章で技術的側面を解説し、第４章ではわが国の市場データへの応用可能性を考察した。

本稿で明らかにした内容を集約すれば、①デリバティブ取引の中でも特にオプション商品の市場価格を利用することにより、少なくとも理論的には、将来の原資産価格の確率分布という新しいタイプの情報を抽出可能であること、②実際に確率分布を導出するには各種の方法が利用可能であるから、分析対象とする市場の環境（取引の多様性や流動性など）に応じて最適な方法を選択する必要があること、の２点となる。特に②の問題と関連してわが国のデリバティブ市場の現状を眺めると、これらの分析手法を効果的に活用できる条件が十分に整っているとは言えないものの、少なくとも限界的には新しい情報を抽出できると考えられるほか、今後デリバティブ市場が一段と成熟していくこととなれば本稿で示した理論を実用化する価値が益々高くなることも予想される。このように市場情報が質・量両面で豊かになっていくとことは、デリバティブ取引の拡大がもたらすメリットの１つであるから、市場参加者がそれを享受できるように、技術的方法論について研究を続ける意義は大きいと考えられる。

以　上

参考文献

浅野幸弘、「オプションの機能と価格形成、日経平均オプションによる実証（先物研究会＜第６回＞における研究報告より）」、『インベストメント』、pp.71-98 (1993 年 8 月).

飯田貴史、小守林克哉、吉田敏弘、「日本国債市場における金利リスクプレミアムの推定とその応用」、Mimeo、筑波大学大学院 (1995 年).

酒谷貢郎、五十嵐雅紀、「Implied Binomial Tree による長期オプションの分析」、『証券アナリストジャーナル』、pp.24-36 (1994 年 11 月).

桜井明、『スプライン関数入門』、東京電機大学出版局(1981 年).

――、吉村和美、高山文雄、『パソコンによるスプライン関数、データ解析／ＣＧ／微分方程式』、東京電機大学出版局(1988 年).

袖山則宏、「日本の株式市場におけるボラティリティの予測能力に関する実証分析とオプション市場に関する統計的推測」、住友信託銀行投資研究部 Working Paper No.17 (1992 年 5 月).

日本銀行調査統計局、「インプライド・ボラティリティの指標性に関する実証分析」、『日本銀行月報』1995 年 1 月号、pp.1-25.

星岳雄、「資本市場の不完全性と金融政策の波及経路 ――最近の研究成果の展望――」、『金融研究』第１６巻第１号、日本銀行金融研究所 (1997 年 3 月).

吉羽要直、「リスク・リバーサル取引の理論的含意について」、『金融研究』第１５巻第２号、日本銀行金融研究所 (1996 年 4 月).

Bank for International Settlements (Euro-currency Standing Committee), *Macroeconomic and Monetary Policy Issues Raised by the Growth of Derivatives Markets*, (1994).

Barone-Adesi, Giovanni and Robert Whaley, “Efficient Analytic Approximation of American Option Values.” *Journal of Finance* 42(2), pp.301-320 (1987).

Bates, David S., “The Crash of ’87: Was it Expected? The Evidence from Options Markets.”

Journal of Finance 46, pp.1009-1044 (1991).

Breeden, D.T. and R.H. Litzenberger, "Prices of State-contingent Claims Implicit in Option Prices." *Journal of Business* 51(4), (1978).

Derman, Emanuel and Iraj Kani, "Riding on the Smile." *RISK* 7, pp.32-39 (February 1994).

Duffie, Darrell, *Futures Markets*, Prentice Hall (1989).

Dupire, Bruno, "Pricing with a Smile." *RISK* 7, pp.18-20 (January 1994).

Hull, John C., *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, Third Edition, Prentice Hall (1997).

Hull, John C. and Allan White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities." *Journal of Finance* 42, pp.281-300 (June 1987).

Jarrow, Robert and Andrew Rudd, "Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes." *Journal of Financial Economics* 10, pp.347-369 (1982).

Kuwahara, Hiroto and Terry A. Marsh, "Why Doesn't the Black-Scholes Model Fit Japanese Warrants and Covertible Bonds?" *Japanese Journal of Financial Economics* 1, pp.33-65 (December 1994).

Malz, Allan M., "Using Option Prices to Estimate Realignment Probabilities in the European Monetary System." Discussion Paper, Federal Reserve Bank of New York (1995).

Melick, William R. and Charles P. Thomas, "Using Options Prices to Infer PDF's for Asset Prices: an Application to Oil Prices during the Gulf Crisis." International Finance Discussion Papers, Number 541, Federal Reserve Board (February 1996).

Nelken, Israel (ed), *The Handbook of Exotic Options -- Instruments, Analysis, and Applications*, Irwin (1997).

Neuhaus, Holger, "The Information Content of Derivatives for Monetary Policy: Implied Volatilitis and Probabilities." Discussion Paper 3/95, Economic Research Group of the Deutsche Bundesbank (July 1995).

Oda, Nobuyuki, "A Note on the Estimation of Japanese Government Bond Yield Curves." IMES Discussion Paper Series No. 96-E-27, Bank of Japan (1996).

Rubinstein, Mark, "Implied Binomial Trees." *Journal of Finance* 49, pp.771-818 (July 1994).

Serita, Toshio, "An Empirical Investigation of Implied Volatility: A Case of the Japanese Stock Index Options." Mimeo, Department of Economics, Konan University (November 1991).

Shimko, David C., "Beyond Implied Volatility: Probability Distributions and Hedge Ratios Implied by Option Prices." Mimeo, Department of Finance and Business Economics, University of Southern California, (November 1991).

——————, "Bounds of Probability." *RISK* 6, pp.33-37 (1993).

Watanabe, Toshiaki, "The Time Series Properties of Returns, Volatility, and Trading Volume in Financial Markets." A Dissertation Paper, Graduate School of Yale University (December 1993).