IMES DISCUSSION PAPER SERIES

オプションの非線形リスク計測における留意点 ～いわゆる“スピード”について～

家田　明

Discussion Paper No. 97-J-4

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒100-91 東京中央郵便局私書箱 203 号

IMES Discussion Paper Series 97-J-4
1997年2月

オプションの非線形リスク計測における留意点 ～いわゆる“スピード”について～

家田　明*

要　旨

オプションの非線形リスク量を計測する場合には、いわゆるグリーク・レター法が用いられることがある。このグリーク・レター法は、オプションの価格関数を原資産価格等リスク・ファクターのテーラー展開で表わす手法であるが、実務では、原資産価格の3次以上の高次の効果を捨象できる、すなわち3次以上の微分係数（センシティビティ）が僅少であるとの仮定を前提とした原資産価格の2次項までの近似（デルタ＋ガンマ法）が用いられることが多い。しかし、こうした仮定が成立しない場合、すなわち3次以上の微分係数が無視できない場合には、この近似に基づくリスク量の計算は機能しないことが多いため注意が必要である。

以下では、具体的な想定オプション・ポートフォリオ（円・ドル通貨オプションの集合）を用いて、シナリオ分析法とグリーク・レター法による非線形リスク量の一つであるガンマリスク量の計算例を示す。計算の結果、リスク管理上の保有期間を長めに設定した場合、グリーク・レター法ではリスク量を過小評価してしまう惧れがあること、またその惧れは、オプションの満期までの期間が短くなっている際に、原資産価格の3次の微分係数である“スピード”の絶対値が大きくなる（すなわちガンマの変化が大きい）ことを通じて起こること、が導かれる。

キーワード：グリーク・レター法、デルタ＋ガンマ法、シナリオ分析法、スピード

* 日本銀行金融研究所研究第1課(E-mail: ieda@imes. boj.go.jp)

（目　次）

1．はじめに

○　オプションの非線形リスク量[1]を計測する場合には、シミュレーション法やシナリオ分析法のほか、いわゆるグリーク・レター法が用いられることがある。このグリーク・レター法は、オプションの価格関数を原資産価格等リスク・ファクターのテーラー展開で表わす手法であるが、実務では、原資産価格の３次以上の高次の効果を捨象できる、すなわち３次以上の微分係数（センシティビティ）が僅少であるとの仮定を前提とした原資産価格の２次項までの近似（デルタ＋ガンマ法）[2]が用いられることが多い。しかし、こうした仮定が成立しない場合、すなわち３次以上の微分係数が無視できない場合には、この近似に基づくリスク量の計算は機能しないことが多いため注意が必要である。

———原資産価格による３次の微分係数は、**“スピード”**と呼ばれることがある（因みに、１次の微分係数が“デルタ”、２次の微分係数が“ガンマ”である）。

○　以下では、具体的な想定オプション・ポートフォリオ（ここでは円・ドル通貨オプションの集合）を用いて、シナリオ分析法とグリーク・レター法による非線形リスク量の一つであるガンマリスク量の計算例を示す[3]。

○　計算の結果、リスク管理上の保有期間を長めに設定した場合、グリーク・レター法ではリスク量を過小評価してしまう惧れがあること、またその惧れは、オプションの満期までの期間が短くなっている際に、“スピード”の絶対値が大きくなる（すなわちガンマの変化が大きい）ことを通じて起こること、が導かれる。

---

[1] 非線形リスクの定量化に関する詳細については以下を参照。
日本銀行金融研究所 Discussion Paper 96-J-19、「非線形なフィナンシャル・リスクの定量化について」、８年 12 月

[2] 以下で議論するグリーク・レター法は、特に断らない限り、デルタ＋ガンマ法を差す。

[3] ここでは原資産価格（スポット・レート）以外のリスク・ファクターは一定と仮定。従って、ベガリスク（ボラティリティ変化）、セータリスク（満期までの期間変化）等は捨象している。

2．具体的なリスク量計算

（1）想定ポートフォリオの内容

○ 想定ポートは、以下の4本の円・ドル通貨オプション（全てヨーロピアン・オプション）の集合体である（図表1。なお、評価日<96/11/29日>のスポット・レートは113.85円）。

（図表1）ポートを組成する円・ドル通貨オプションの概要

ｵﾌﾟｼｮﾝ	call/put	残高	行使レート	満期日	ﾎﾞﾗﾃｨﾘﾃｨ[4]
#1	call	-4500	112.50	96/12/11	6.20%
#2	call	5500	113.45	96/12/12	6.20%
#3	put	-1000	110.95	96/12/12	6.20%
#4	call	-2000	111.05	96/12/20	6.20%

（2）シナリオ分析法による計算

○ **シナリオ分析法**によるガンマリスクの計算は以下の通りである。

① オプションの価値(PV)、1次の微分係数であるデルタの算出には、Black-Scholes方程式から導出した以下の解析解(closed-form)を使用する。

———ここで、Sはスポット・レート、Kは行使レート、Tは満期までの期間、σはボラティリティ、r_f、rは各々ドル、円のリスク・フリー・レートを示す。

$$PV_{call} = S \cdot e^{-r_f T} \cdot N(d) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d - \sigma\sqrt{T}) \tag{1}$$

$$PV_{put} = K \cdot e^{-rT} \cdot N(-d + \sigma\sqrt{T}) - S \cdot e^{-r_f T} \cdot N(-d) \tag{2}$$

$$Delta_{call} = \frac{\partial PV_{call}}{\partial S} = e^{-r_f T} \cdot N(d) \tag{3}$$

$$Delta_{put} = \frac{\partial PV_{put}}{\partial S} = e^{-r_f T} \cdot (N(d) - 1) \tag{4}$$

[4] Bloombergの画面情報から入手した1か月のボラティリティを使用。

但し、

$$d = \frac{\ln(S/K) + (r - r_f + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}、\qquad N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-x^2/2}dx$$

② ここでは非線形リスクを計測することとなるため、$S = S_0$（S_0は評価日のスポット・レート）におけるデルタ（図表2）を用いて、ポートのデルタ・ヘッジを行う。

$$\text{ﾃﾞﾙﾀﾍｯｼﾞ後の}PV = PV - \left.\frac{\partial PV}{\partial S}\right|_{S=S_0} \cdot (S - S_0) = PV - Delta_{S=S_0} \cdot (S - S_0) \quad (5)$$

（図表2）$S = S_0$における想定ポートのPV、デルタ

ｵﾌﾟｼｮﾝ	PV	ﾃﾞﾙﾀ
#1	-50.70	-32.36
#2	30.50	26.98
#3	-0.09	0.17
#4	-44.18	-16.30
合計	-64.47	-21.50

③ 次に、一定のシナリオに基づいてスポット・レートを変化させて、デルタ・ヘッジ後のポートの価値の変化を測定する。具体的には、スポット・レートについて「$S_0 \pm 2.33\sigma\sqrt{t}$」[5]の計測区間を定め、この区間内で均等に設定したリスク計測レート毎[6]にBlack-Scholes式を用いてポートの価値を再計算する。

その中で最低価値であり、かつそれが現在値を下回る場合にのみ、その下回った幅をリスク量とする（ここでは、このリスク量をガンマリスクと定義[7]）。

④ 保有期間tは、1日間、5日間、7日間の3つの場合を設定する[8]。各々の保有期間について、対象計測区間とガンマリスクは次の通りとなる（図表3、4）。

---

[5] σはインプライド・ボラティリティのヒストリカル・ボラティリティ（1日）、tは保有期間、2.33は片側99パーセンタイルの信頼区間を示す。

[6] ここでは計測区間を33のリスク計測レートに分割した。

[7] テーラー展開における2次の項の効果に加え、3次以上の高次項の効果も含まれる。

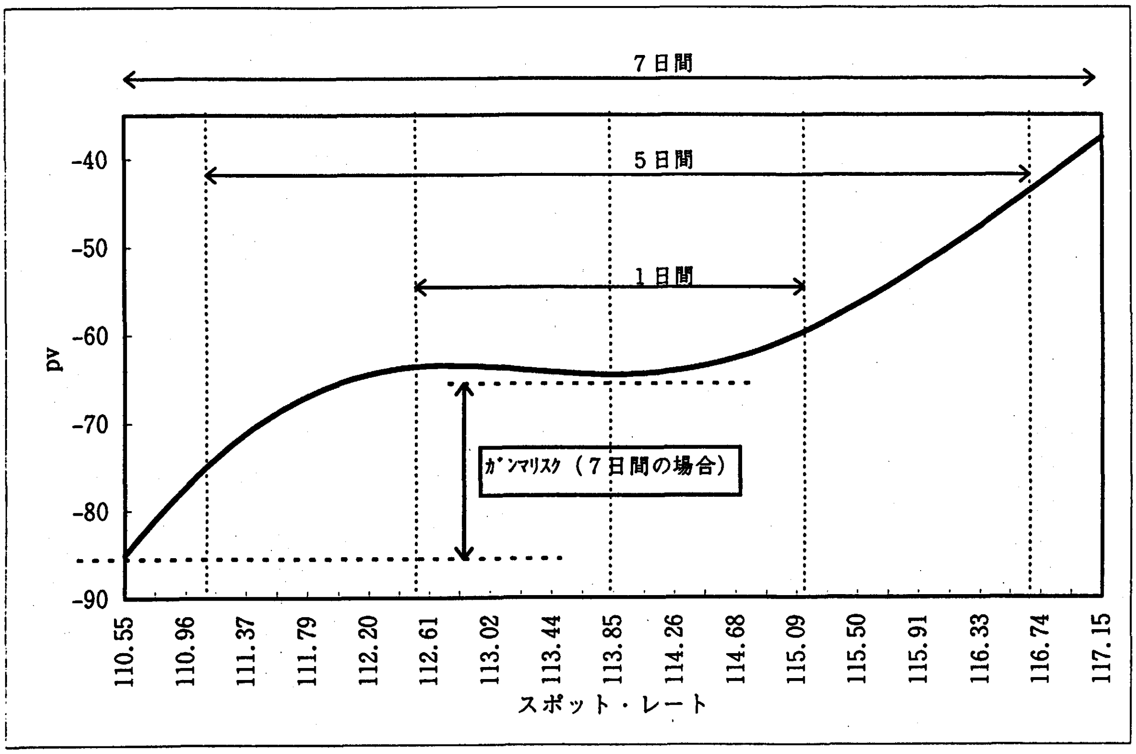
[8] 想定ポートのうちオプション#1～#3の残存期間が8～9日（営業日）であるため、ここでは保有期間を最高7日間に設定した。

（図表３）保有期間毎の計測区間とガンマリスク

保有期間	計測区間	ｶﾞﾝﾏﾘｽｸ
１日間	112.60～115.10円	0.00
５日間	111.06～116.64円	11.17
７日間	110.55～117.15円	20.58

――――保有期間が１日間の場合には、③における定義によりガンマリスクはゼロとなる（図表４）。

（図表４）デルタ・ヘッジ後ポートの価値（*PV*）の変化とガンマリスク



（３）グリーク・レター法による計算

○　**グリーク・レター法**によるガンマリスクの計算は以下の通りである。

①　オプションの価値(*PV*)の変化を次のように$S=S_0$の回りでのテーラー近似（２次の項まで）で表わす。

$$\Delta PV=\left.\frac{\partial PV}{\partial S}\right|_{S=S_0}\cdot(S-S_0)+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 PV}{\partial S^2}\right|_{S=S_0}\cdot(S-S_0)^2 \qquad (6)$$

②　(6)式の右辺第２項が（グリーク・レター法における）ガンマリスクを

示している（但し、右辺第２項の係数が非負の値<ポジティブ・ガンマ>である場合にはガンマリスクはゼロ）。

③　$S=S_0$におけるガンマ（２次の微分係数）を(7)式から計算し、それが負の値である場合には、保有期間tに対応した計測区間幅（$S-S_0=2.33\sigma\sqrt{t}$）を代入して、ガンマリスクを算出する。本稿の想定ポートの場合には、ガンマは合計でポジティブ・ガンマ（4.50）となるため（図表５）、ガンマリスクはゼロと計算される（数式上は保有期間tに依らずガンマリスクはゼロとなる）。

$$Gamma_{call}=Gamma_{put}=\frac{\partial^2 PV}{\partial S^2}=\frac{\partial Delta}{\partial S}=\frac{e^{-(r_f T+d^2/2)}}{S\sigma\sqrt{2\pi T}} \quad (7)$$

$$但し、d=\frac{\ln(S/K)+(r-r_f+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

（図表５）$S=S_0$における想定ポートのガンマ

ｵﾌﾟｼｮﾝ	ｶﾞﾝﾏ
#1	-8.08
#2	14.28
#3	-0.32
#4	-1.37
合計	4.50

（４）線形リスクとの比較

○　シナリオ分析法で算出した想定ポートのガンマリスクを線形リスク（ＶａＲ）と比較すると、特に保有期間が７日間の場合、ガンマリスクは線形リスクの３０％程度に達しており、決して看過することはできない水準であることがわかる。

（図表６）ガンマリスクと線形リスク

保有期間	ｶﾞﾝﾏﾘｽｸ(a)	線形ﾘｽｸ(b)	(a/b)
１日間	0.00	26.83	0.00%
５日間	11.17	60.00	18.62%
７日間	20.58	70.99	28.99%

３．若干の考察

○　上記の結果を纏めると、想定ポートのガンマリスクは、シナリオ分析法と

グリーク・レター法によって以下のような相違が生じる。

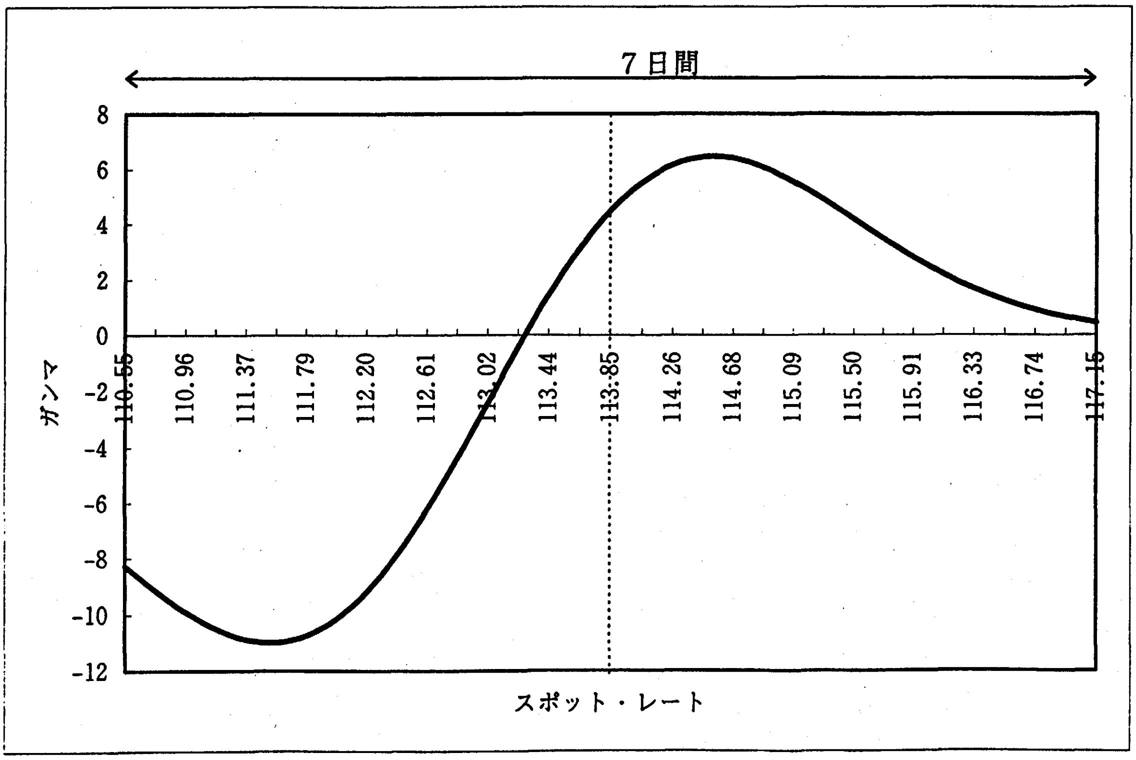
▽シナリオ分析法・・・保有期間が1日ではリスク量はゼロ、5、7日ではリスク量が観測される。

▽グリーク・レター法・・・保有期間に依らずリスク量はゼロ。

○　この相違の要因は、グリーク・レター法ではスポット・レートに対するガンマの変化を無視している（(6)式右辺第2項の係数<ガンマ/2>を概ね一定と置いている）ことにある。すなわち、デルタヘッジ後の想定ポートの価値(*PV*)曲線は、図表4で示した通り、大きく蛇行する形状をとっており、保有期間を長めに設定した場合には、価値曲線をスポット・レートの2次式で近似するのは不可能である。

○　実際、スポット・レートによるガンマの変化をみる（図表7）と、評価日のスポット・レート（113.85円）近傍ではガンマは正の値となるが、スポット・レートが113.20円付近を下回る水準では負の値に転じており、保有期間を長めに設定した場合には、3次以上の高次項を無視できる（ガンマが概ね一定）というグリーク・レター法の前提は成立しないことになる。

（図表7）ガンマの推移



——— 3次の微分係数（**"スピード"** と呼ばれることがある）は、(8)式で表わされる。これをみると、"スピード"の絶対値は、満期までの期間Tが短いほど大きくなることがわかる[9]。この点、本稿の想定ポートには、比較的満期が短いオプション（#1～#3）が含まれているため、"スピード"の絶対値（ガンマの変化）が大きくなったと考えられる。

$$Speed \equiv \frac{\partial Gamma}{\partial S} = \frac{\partial^3 PV}{\partial S^3} = -\frac{e^{-(r_f T + d^2/2)}}{S^2 \sigma \sqrt{2\pi T}} \cdot (1 + \frac{d}{\sigma \sqrt{T}}) \qquad (8)$$

$$但し、d = \frac{\ln(S/K) + (r - r_f + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

———因みに、"スピード"を使って、本稿でのグリーク・レター法（2次項までのデルタ＋ガンマ法）を3次項の効果も勘案する形に拡張して、リスク量の計算を試みる。

すなわち、ここでは、スポット・レート変化によるPVの変化（$\Delta PV'$）をグリーク・レター法の3次項までで表わし（(9)式）、$\Delta PV'$がマイナスの値となった場合に、当該値をガンマリスクと定義する。

計算の結果（図表8）、保有期間1日ではガンマリスクはゼロとなることがわかる。一方、保有期間5、7日では、ガンマリスクが計測されるが、その水準は、シナリオ分析法の結果に比べ半分程度にとどまるとの結果が得られる[10]。

$$\Delta PV' = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 PV}{\partial S^2}\bigg|_{S=S_0} \cdot (S - S_0)^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 PV}{\partial S^3}\bigg|_{S=S_0} \cdot (S - S_0)^3 \qquad (9)$$

（図表8）保有期間毎の$\Delta PV'$とガンマリスク

保有期間	計測区間	$\Delta PV'$	ｶﾞﾝﾏﾘｽｸ		ｼﾅﾘｵ分析のｶﾞﾝﾏﾘｽｸ
1日間	112.60～115.10円	+1.55	0.00		0.00
5日間	111.06～116.64円	-4.36	4.36		11.17
7日間	110.55～117.15円	-11.70	11.70		20.58

9 (7)式から、Tが小さい場合には、ガンマの絶対値も大きな値をとることがわかる。

10 本稿の想定ポートにグリーク・レター法を適用して非線形リスクを計測する場合には、少なくともテーラー展開の4次以上の高次項の効果を勘案する必要があることになる。

4．結論

○　オプションの非線形リスク計測において、簡便法としてグリーク・レター法（デルタ＋ガンマ法）を使用する場合、ガンマを原資産価格で微分した微分係数、いわゆる“スピード”の水準に対する注意が最低限必要である。特にリスク管理上の保有期間を長めに設定しているときに、“スピード”の水準をチェックせずに機械的に同手法を適用するとガンマリスクを看過してしまう惧れがある[11、12]。

○　したがって、オプションのポジションが大きい場合やリスク計測日から満期までの期間が短くなっている等の場合には、リスク計測に単純にグリーク・レター法（デルタ＋ガンマ法）を適用するのは危険であり、シナリオ分析法やシミュレーション法など他の計測手法を使用することが望ましい。

――――このことは、エキゾチックオプション等比較的複雑な商品性を持つオプションを扱っている場合に限らず、本稿のようにヨーロピアン・オプションのみを扱っている場合にも成立することがあるので、リスク管理上は重要なポイントであると考えられる。

以　上

[11] 保有期間が1日程度であれば、こうした問題が発生する可能性は小さくなる。しかし、ポートによっては、保有期間1日に対応する原資産価格の計測区間内でPVが大きく変化する可能性もあるだけに、グリーク・レター法を使用する場合には同手法のそうした限界も理解しておくことが肝要である。

[12] 本稿では原資産価格以外のリスク・ファクターを一定と置いているが、満期までの期間Tが十分に小さいとき（$T \ll 1$）には、Tの変化によるガンマの変化は“スピード”（原資産価格の変化によるガンマの変化）以上に大きくなる（次式参照＜$O(\cdot)$はオーダーを示す＞）ため、リスク管理上は注意が必要である。

$$\frac{\partial Gamma}{\partial T} = Gamma \cdot (2d \cdot \frac{\partial d}{\partial T} - \frac{1}{2T} + r_f) \quad \sim Gamma \cdot O(T^{-2})$$

$$Speed = \frac{\partial Gamma}{\partial S} = -\frac{Gamma}{S} \cdot (1 + \frac{d}{\sigma\sqrt{T}}) \sim Gamma \cdot O(T^{-1})$$