IMES DISCUSSION PAPER SERIES

CVAにおける誤方向リスク･モデル：実装と比較

あだち てつや すえしげ たくみ よしば としなお
安達 哲也･末重 拓己･吉羽 要直

Discussion Paper No. 2016-J-7

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 東京都中央区日本橋本石町 2-1-1

備考： 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

IMES Discussion Paper Series 2016-J-7
2016 年 **5** 月
（**2017** 年 **5** 月改訂）

CVAにおける誤方向リスク・モデル：実装と比較

安達（あだち） 哲也（てつや）*・末重（すえしげ） 拓己（たくみ）**・吉羽（よしば） 要直（としなお）***

要　　旨

本稿では、信用評価調整（Credit Valuation Adjustment：CVA）における誤方向リスクのモデル化手法を概観した安達・末重・吉羽 [2016]の 3 節および 4 節に即して、クロス・カレンシー・スワップとクレジット・デフォルト・スワップを金融商品例として誤方向リスク・モデルを実装し数値計算を行う。具体的なモデル化手法として、カウンターパーティの信用リスク・モデルとしての（1）構造モデルおよび（2）デフォルト強度モデルに基づいた手法、そして、デリバティブ・エクスポージャーと信用リスクの間の相互依存関係を表現するための（3）コピュラ・アプローチという 3 つの手法を取り上げる。これらのモデルを実装して CVA を数値例で評価することにより、モデル化手法の差異を考察する。また、金融危機後の金融実務において担保契約の重要性が高まっていることに鑑み、変動証拠金を考慮した場合の CVA 評価についても論じる。

キーワード：CVA 、誤方向リスク、デフォルト強度、構造モデル、ジャンプ拡散過程、コピュラ
JEL classification: G13

* 日本銀行金融研究所（現 金融庁、E-mail: tetsuya.adachi@fsa.go.jp）
** 東京工業大学大学院総合理工学研究科（E-mail: sueshige.t.aa@m.titech.ac.jp）
*** 日本銀行金融研究所企画役（E-mail: toshinao.yoshiba@boj.or.jp）

本稿の作成に当たっては、金澤輝代士助教（東京工業大学）に実装の一部について協力頂いたほか、中川秀敏准教授（一橋大学）から有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

（目 次）

１．はじめに

2007～08 年の金融危機では、カウンターパーティ（Counterparty、以下 Cpty）の信用水準の低下により、デリバティブを保有していた金融機関は、信用評価調整（Credit Valuation Adjustment：CVA）の増大による時価評価損を積み上げ、市場全体で巨額な損失を計上した。こうしたことから、CVA 管理の重要性が高まり、特にその評価において誤方向リスク（Wrong-Way Risk：WWR）のモデル化と実装がリスク管理実務上の大きな課題となっている。WWR は、デリバティブ取引のエクスポージャーと Cpty の信用水準が負の相互依存関係を持つ場合に生じる。このとき、エクスポージャーの上昇と Cpty の信用水準の低下が同時に起こるため、CVA 評価値が加速度的に膨らんで巨額の時価損失に繋がる可能性がある。

こうした背景から、安達・末重・吉羽 [2016]では、Cpty の信用リスクを記述するための構造モデルやデフォルト強度モデルをベースとしたアプローチや Cpty の信用水準とエクスポージャーの相互依存関係を表現するためのコピュラ・アプローチなど様々な（片方向 CVA の）WWR モデル化手法を紹介した。本稿では、デリバティブ商品としてクロス・カレンシー・スワップ（Cross Currency Swap : CCS）とクレジット・デフォルト・スワップ（Credit Default Swap : CDS）を取り上げ、安達・末重・吉羽 [2016]で整理した手法のうち、特に、(1)構造モデル、(2)デフォルト強度モデル、(3)コピュラ・アプローチをベースとする WWR モデル化の実装方法を詳述した上で、CVA を数値例で評価することにより、モデル化手法の差異を考察する。また、金融危機後のデリバティブ取引で担保契約の重要性が高まっていることに即し、変動証拠金を考慮した場合の CVA 評価についても論じる[1]。

安達・末重・吉羽 [2016]で整理したとおり、上記の 3 つの手法のいずれに関しても、評価時点をt_0とし、デリバティブ商品の満期までの期間 T に対し、時間間隔 Δ の時間グリッド $t_0, t_1, \ldots, t_N$（ただし、$N = T/\Delta$）を設け、Cpty のデフォルト時刻 τ_C が各 $i = 1, \ldots, N$ の時間間隔 $(t_{i-1}, t_i]$ 内に入っているかどうかをシミュレートすることにより、CVA を評価する。本稿では、時間間隔 Δ は月次（$\Delta = 1/12$）として評価時点で 5、7、10、20 年といった満期のデリバティブ商品に対する CVA 評価を行う。

---

[1] 自己資本比率規制の国際合意におけるカウンターパーティ信用リスク（CCR : Counterparty Credit Risk）の資本賦課額を計算するに当たり、（当局の承認を受けた）内部モデル方式（IMM : Internal Model Method）を使用する金融機関は、デリバティブ取引の将来エクスポージャーの算定に当たり、担保契約（変動・当初証拠金等）の効果を考慮することができる。また、会計上（国際、米国基準等）の CVA 算定においても、将来エクスポージャーの計算に当たり、担保契約の効果を考慮することができる。

本稿の構成は、以下のとおりである。まず２節では、CCS の商品性と WWR の関係について述べた上で、3 つの手法による WWR モデル化を実装し、モデル化手法の差異を考察する。３節では、CDS の商品性と WWR の関係について述べた上で、3 つの手法による WWR モデル化を実装し、モデル化手法の差異を考察する。４節では、担保取引を考慮した場合の WWR モデル化手法と CVA 評価について論じる。５節では２～４節で用いたモデルのパラメータのキャリブレーションについて整理する。６節で本稿をまとめる。また、本文で示す評価式の導出等については、補論１～補論３で詳述するほか、２～４節で用いたモデルの実装アルゴリズムについては、補論４でまとめる。

２．CCS に対する WWR のモデル化

本節では、構造モデル、デフォルト強度モデルおよびコピュラ・アプローチをベースとする WWR モデル化手法を CCS に適用し、CVA や条件付期待エクスポージャーを評価し、これらのモデル化手法による差異を考察する。

（１） CCS の商品性と CVA

CCS は、異なる通貨の元本と金利を交換するスワップ取引であるが、ここでは、本邦銀行の米国ドル調達を想定して、約定日の想定元本を対象とした日米の銀行間変動金利の交換と満期日の想定元本の交換を考察する。こうした CCS は一般に、契約期間が長期に及ぶことに加えて想定元本の受け渡しがあるため、Cpty の信用リスクの影響を受けやすい商品である。さらに、Cpty が CCS の対象通貨国に本拠地がある場合、当該国通貨の下落時には、CCS 価値の上昇とともに Cpty（銀行）の信用水準の低下する可能性が高まるので、CCS は WWR に晒されている商品であると一般的には考えられる。

具体的に評価対象は、A 銀行（本邦銀行）と C1 銀行（米国銀行）の間の元本 100 百万円の日本円と米国ドルを交換する CCS とし、満期は t_N、利払日は t_i（$i = 1, \dots, N$）とする。なお、簡便化のため、A 銀行はデフォルトせず、金利の平価式が成立（日米金利差のみにより為替フォワード・レートが決定）し、クロス・カレンシー・ベーシス・スプレッドはないものとする。

時点t_iにおけるドル円為替スポット・レート（以下、為替レート）を $FX(t_i)$（円/ドル）、CCS 契約時点（$t_{con}[\leq t_0]$）の為替レートを$FX(t_{con})$、評価時点 t_0 からみた時点 t_i までの確定的な割引ファクターを$DF(t_0, t_i) = \exp\left(-r_d(t_i - t_0)\right)$、ただし$r_d$は国内安全資産利子率、Cpty（C1 銀行）のデフォルト時刻を τ_C、デフォルト時損失率をLGD、$\mathbb{Q}$ をリスク中立測度、$\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[\cdot]$ を$\mathbb{Q}$ の下での評価時点 t_0 での

期待演算子、Cpty（C1 銀行）が時間間隔 $(t_{i-1}, t_i]$ 内にデフォルトする確率を $PD_C(t_{i-1}, t_i) = \mathbb{Q}(\tau_C \in (t_{i-1}, t_i])$と表記する。時点$t_i$における CVA を考慮しない CCS の円貨価値を$V_{CCS}^{No\,CVA}(t_i)$、時点 t_0 における CCS の A 銀行側からみた CVA を$CVA(t_0)$、時点 t_0 におけるCVAを考慮した場合のCCSの円貨価値を$V_{CCS}^{CVA}(t_0)$とすると、これらは以下のように表現される（導出は補論 1 を参照）。

$$V_{CCS}^{No\,CVA}(t_i) = \left(1 - \frac{FX(t_i)}{FX(t_{con})}\right) \times 100, \tag{1}$$

$$CVA(t_0) = \mathrm{LGD} \sum_{i=1}^{N} DF(t_0, t_i) \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[E(t_i) | \tau_C \in (t_{i-1}, t_i]] PD_C(t_{i-1}, t_i), \tag{2}$$

$$E(t_i) = V_{CCS}^{No\,CVA}(t_i)^{+} := \max\{V_{CCS}^{No\,CVA}(t_i), 0\} \ (\forall i \in \{1, \cdots, N\}), \tag{3}$$

$$V_{CCS}^{CVA}(t_0) = V_{CCS}^{No\,CVA}(t_0) - CVA(t_0). \tag{4}$$

Cpty のデフォルト事象とエクスポージャーの変動が独立であり、WWR を考慮しない場合、(2)式で表現される CVA 評価式は(5)式のように書き換えられる。

$$CVA^{No\,WWR}(t_0) = \mathrm{LGD} \sum_{i=1}^{N} DF(t_0, t_i) \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[E(t_i)] \, PD_C(t_{i-1}, t_i). \tag{5}$$

CVA における WWR のモデル化で鍵となるのは、(2)式中の（Cpty の割引前デフォルト）条件付期待エクスポージャー $\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[E(t_i) | \tau_C \in (t_{i-1}, t_i]]$ の計算である。WWR を反映する場合、条件付期待エクスポージャーは、(5)式中の無条件期待エクスポージャー$\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[E(t_i)]$ よりも平均的に大きくなると考えられる。WWR は、エクスポージャーと Cpty の信用水準が負の相互依存関係を持つ場合に生じるため、(2)式において期間デフォルト確率の上昇時に為替レートが円高（ドル安）になるようモデル化することで WWR を表現できる。

条件付期待エクスポージャーの計算方法として、以下の 2 通りの方法が考えられる。1 つは、デフォルト判定したシミュレーション・パスを集計することで、デフォルト時エクスポージャーを計算する愚直な方法（brute force、以下、BF 法）である。具体的には、デフォルト時刻が同一となったパスについて、デフォルト時エクスポージャーを平均化することで評価日から満期日までの条件付期待エクスポージャーを計算する。

もう 1 つは、シミュレーション・パスに応じたシナリオに重み付けすることで条件付期待エクスポージャーを計算する近似計算法（シナリオ・ウェイト法、以下 SW 法）であり（安達・末重・吉羽 [2016]の２節（４）の(7)式を参照）、具体的には、重み付け関数を$w^{(m)}(t_i)$として、以下のように計算する。

$$\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[E(t_i)|\tau_C \in (t_{i-1}, t_i]\right] = \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[\frac{E(t_i)\,\mathbf{1}_{\tau_C \in (t_{i-1}, t_i]}}{PD_C(t_{i-1}, t_i)}\right] \cong \sum_{m=1}^{M} w^{(m)}(t_i) E^{(m)}(t_i), \tag{6}$$

$$w^{(m)}(t_i) = \frac{PD_C^{(m)}(t_{i-1}, t_i)}{\sum_{m=1}^{M} PD_C^{(m)}(t_{i-1}, t_i)}. \tag{7}$$

この方法では、総数Mのシナリオ（シミュレーション・パス）について、各時間グリッド上で Cpty の期間デフォルト確率のパス$PD_C^{(m)}(t_{i-1}, t_i)$ $(m \in \{1, \cdots, M\})$およびエクスポージャーのパス$E^{(m)}(t_i)$を算定し、評価日から満期日までの条件付期待エクスポージャーを(6)式に基づき計算する。

BF 法は、Cpty がデフォルトしたシミュレーション・パスのみを利用して条件付期待エクスポージャーを評価するため、評価対象商品の性質やモデル化手法によらず計算できる点が実務上の長所となる。ただし、デフォルトしたシミュレーション・パスのみしか条件付期待エクスポージャーの計算に利用できないため、十分滑らかな条件付期待エクスポージャーを得るには、膨大なパス数が必要になる点が短所である。

SW 法は、1 つのシミュレーション・パスにおいて、評価日から満期日までの各グリッドで期間デフォルト確率およびエクスポージャーを計算するため、少ないシミュレーションのパス数で十分滑らかな条件付期待エクスポージャーが得られる点が長所である。しかし、３．（３）で示すように SW 法で計算した条件付期待エクスポージャーが BF 法で計算した条件付期待エクスポージャーから乖離する場合もあり、SW 法の適用においては注意を要する。

CCS の条件付期待エクスポージャーの計算では、SW 法での値が BF 法によるものと乖離しないため、計算負荷を少なくする観点から、SW 法を採用する。以上の設定を前提として、本節（２）以下では WWR を考慮した CVA の計算方法を示す。

（２） 構造モデルに基づく CCS の WWR モデル化

米国安全資産利子率をr_f、Cpty（C1 銀行）の配当率を$q_C = q_{C1}$（定数）とする。為替レートはボラティリティσ_{FX}の幾何ブラウン運動、Cpty の資産価値過程$A(t)$は時間に関して確定的なボラティリティ$\sigma_A(t)$の幾何ブラウン運動に従

うものとする。すなわち、リスク中立測度 $\mathbb{Q}$ の下で、$FX(t)$ および $A(t)$ の確率過程を(8)、(9)式のように仮定するとともに、バリア水準 $H(t)$ を(10)式のように仮定する。

$$\frac{dFX(t)}{FX(t)} = (r_d - r_f)dt + \sigma_{FX} dW_{FX}(t), \tag{8}$$

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = (r_f - q_C)dt + \sigma_A(t) dW_A(t), \tag{9}$$

$$H(t) = H_0 \exp\left(\int_0^t \left\{r_f - q_C - B\sigma_A^2(t_0 + s)\right\} ds\right). \tag{10}$$

ただし、$W_{FX}(t)$ と$W_A(t)$は独立とは限らない標準ブラウン運動である。Cpty のデフォルト時刻τ_Cは

$$\tau_C = \inf\{t | t > t_0, A(t) \le H(t)\}, \tag{11}$$

で表現される。バリア水準を構成するパラメータ H_0、Bについては後述する。

時点 t_{i-1} において(9)式の資産価値 $A(t_{i-1})$ が下落して(10)式のバリア $H(t_{i-1})$ に接近すると、時点 t_{i-1} から時点 t_i における期間デフォルト確率は上昇する。これに加えて、円高方向に為替レートが下落すれば、(1), (3)式よりエクスポージャーも増大する。したがって、為替レートと資産価値に正の相互依存関係を導入することで条件付期待エクスポージャーが増加することが期待できるモデルとなる。

以下では、イ. 為替レートの確率過程と資産価値過程のブラウン運動に WWR が生じる方向への相関を与える方法と、ロ. Brigo and Morini [2006]の SBTV（Scenario Barrier Time-Varying Volatility AT1P）モデルに基づいて、Cpty のバリアの不確実性[2]と為替レートの確率過程のジャンプにより WWR を表現する方法の 2 通りの WWR モデル化手法を実装する。

イ.　ブラウン運動の線形相関による方法

(8)、(9)式のブラウン運動間の線形相関を(12)式のように設定する。資産価値の下落時に円高になるよう$\rho_{FX,A} > 0$とした。

[2] ここでいう不確実性とは、潜在的な経済状態（シナリオ）（例 : 平静状態、ストレス状態）について確実にはわからないという意味での不確実性であり、経済状態が顕現化すれば、駆動するモデルやパラメータ値（ここでは、「バリア水準」）も確定する。

$$d\langle W_{FX}, W_A\rangle(t) = \rho_{FX,A}dt. \tag{12}$$

ロ．で考察する、ストレス・シナリオでの為替レートのジャンプも扱えるようにζを為替レートに関するジャンプのポアソン強度、γを指数分布に従うジャンプ率の期待値として、補論４.（１）の Algorithm 1–1 のようにアルゴリズムを記述する。ブラウン運動の線形相関のみを考慮する場合には、$\zeta = \gamma = 0$とし、ベンチマークとして、為替レートと資産価値に相互依存関係を考慮しない場合には、$\zeta = \gamma = \rho_{FX,A} = 0$とする。バリア水準を構成するパラメータ$H_0$, Bと(9)式のボラティリティの水準$\sigma_A(t)$は、５.（３）節のように決められる。具体的には、ボラティリティ水準$\sigma_A(t)$は対象企業に応じて表 7 で与えられ、$H_0 = 0.4$、$B = 0$とする。

ロ．　バリアの不確実性と為替レートのジャンプによる方法

Brigo and Morini [2006]で提案され、Brigo, Morini, and Pallavicini [2013]でも記述されている SBTV モデルでは、バリア水準について複数のシナリオを一定のウェイトで設定し、現実がいずれのシナリオに基づいているのかはわからないという不確実性（uncertainty）を導入している。本稿では、小さなウェイトpで想定する、高バリア水準H_0^{stress}を持つシナリオ（ストレス・シナリオ）とそれ以外の大きなウェイト$1-p$で想定する低バリア水準H_0^{normal}を持つシナリオ（通常シナリオ）の 2 つのシナリオを考える。本稿では、バリア水準の不確実性に加えて、為替レートの確率過程についても不確実性を導入し、通常シナリオの下では拡散過程に従い、ストレス・シナリオの下ではジャンプ付きの拡散過程に従うものとする。このような構造の不確実性を導入することで、ストレス・シナリオの高バリア水準の下で Cpty のデフォルト確率が高まることに加えて、為替レートのジャンプによりエクスポージャーも増大することから、より大きな WWR の効果を表現できると考えられる。

通常シナリオの下では、為替レート過程と資産価値過程には(8)、(9)式のモデルとブラウン運動間の相関に(12)式の相関を仮定するとともに、バリア水準として(10)式のモデルで$H_0 = H_0^{normal}$としたものを仮定する。一方、ストレス・シナリオの下では、ジャンプの計数過程を$N^\zeta \sim \mathrm{Poisson}(\zeta)$、ジャンプ・サイズを$z_{FX}$として、為替レート過程に(13)式のモデルを仮定する[3]。

[3] $\sigma_{FX}^2 - \frac{(\gamma+3)\gamma\zeta}{(\gamma+1)(\gamma+2)} > 0$を満たすようにパラメータを設定する。

$$d\ln FX(t) = \left(r_d - r_f - \frac{\sigma_{FX}^{jump^2}}{2} + \frac{\gamma\zeta}{\gamma+1}\right)dt + \sigma_{FX}^{jump} dW_{FX}(t) - dJ(t),$$

$$J(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^+} z_{FX}\, dN^{\zeta}(z_{FX}, s), \qquad z_{FX} \sim \mathrm{Exp}(\gamma), \tag{13}$$

$$\sigma_{FX}^{jump} = \sqrt{\sigma_{FX}^2 - \frac{(\gamma+3)\gamma\zeta}{(\gamma+1)(\gamma+2)}}.$$

資産価値過程には(9)式のモデルを仮定し、(9)式と(13)式のブラウン運動間の相関には(12)式の相関を仮定する。また、バリア水準には、(10)式のモデルで$H_0 = H_0^{stress}$としたもの、すなわち、(14)式を仮定する[4]。

$$H^{stress}(t) = H_0^{stress} \exp\left(\int_0^t \left\{r_f - q_C - B\sigma_A^2(t_0+s)\right\} ds\right). \tag{14}$$

(13)式では、為替レートの確率過程における期待値および分散をイ．の場合と一致させるように、ジャンプの期待値と分散への影響をドリフトおよびボラティリティで調整している（計算の詳細は補論２.（１）を参照)。このような設定の下、CCS に関する CVA 評価値は、ストレス・シナリオと通常シナリオそれぞれの下で算定した CVA 評価値について、それぞれのシナリオのウェイトpと $1-p$ に関する加重和を求めることにより算定できる。導入したパラメータp, H_0^{normal}, H_0^{stress}, B とボラティリティの水準 $\sigma_A(t)$ は、５.（３）節のように決められる。具体的には、ボラティリティ水準 $\sigma_A(t)$と H_0^{stress} は対象企業に応じて表 8 で与えられ、$H_0^{normal} = 0.4$、$B = 0$、$p = 0.05$ とする。具体的な計算アルゴリズムは補論４.（１）の Algorithm 1–2 で与えられる。

ハ.　構造モデルによる CVA の数値計算結果

WWR を考慮して時点t_0で評価した CCS の満期別 CVA 評価値を図 1 に、満期を 20 年とする CCS の条件付期待エクスポージャーを図 2 に示す。CVA を計算するためのシミュレーション・パスの総数Mは 5 万回である。ただし、SW 法に基づく条件付期待エクスポージャーについて詳細に計算する際にはパスの総数を 5 百万回に増やして計算している。以下、すべてのシミュレーションでの評価も同じパスの数で評価する。時点t_0の為替レートFX_0には、簡便的に CCS 契約時における為替レートを用いた。なお、図で示した計算結果は、$\rho_{FX,A} = 0.30$, $\zeta =$

[4] ストレス・シナリオでは通常シナリオよりもデフォルトしやすい状況を想定するため、$H_0^{stress} > H_0^{normal}$となる。

$0.05,\ \gamma = 0.075$のパラメータ設定値に基づいている。ジャンプ・サイズおよび相関係数の決定方法については本節（５）を、為替レートおよび資産価値のパラメータの決定方法については5節を参照されたい。図中のNo WWRは(5)式に基づいたWWRを考慮しない場合のCVA評価値を意味しており、本稿において共通の表記とする。

まず、図1をみると、CVA評価値は満期が長期化するに従い増大している。また、図2より、条件付期待エクスポージャーも概ね期先になるに従い大きくなる傾向がみられる。これは、本邦の安全資産の利子率より米国の安全資産の利子率が大きく、リスク中立測度での為替レート過程のドリフト$(r_d - r_f)$が表1のとおり負であることに起因している。

次に、ブラウン運動の線形相関によりWWRを表現した場合、図1より、CVA評価値は、No WWRの場合と比較して最長満期（20年）で30%超の増加が認められる。ブラウン運動の線形相関を考慮すると、為替レートがブラウン運動に駆動されて円高方向に向かうとき、資産価値も同時にバリア方向に駆動される。そのため、資産価値がバリアに触れるデフォルト時刻において平均的に大きなエクスポージャーを表現できるものと考えられる。ただし、ブラウン運動の線形相関のみの場合では、WWR顕現化の1つの特徴である、短期的に予測不可能な相互依存関係の急激な変化を表現できないことに注意すべきである。

一方、為替レートのジャンプとバリアの不確実性によりWWRをモデル化した場合、ブラウン運動の線形相関のみを考慮した場合と比べて、CVA評価値の増加率は最長満期でわずか0.7%に止まっている。これは、為替レートが内外金利差（$r_d - r_f = -1.4\%$、表1を参照）により円高になりやすく、このときCptyがデフォルトすれば、ジャンプが生じていなくても、デフォルト時の大きなエクスポージャーを表現できるためである。すなわち、高バリア水準のストレス・シナリオの下では、為替レートのジャンプが起こる前にCptyがデフォルトするケースも多くなることから、ジャンプの効果がWWRの主要因として表現されていないと考えられる。

（３） デフォルト強度モデルに基づくCCSのWWRモデル化

C1銀行のデフォルト強度$\lambda(t)$が安達・末重・吉羽 [2016]の(13)式で与えたジャンプCIR（JCIR）モデルの確率過程に従うものとする。すなわち、

$$d\lambda(t) = \kappa\big(\theta - \lambda(t)\big)dt + \sigma_\lambda\sqrt{\lambda(t)}dW_\lambda(t) + \nu dJ(t), \tag{15}$$

$$J(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^+} z\, dN^\eta(z,s)\,, \qquad z \sim \mathrm{Exp}(1). \tag{16}$$

ただし、中心回帰速度をκ、中心回帰水準をθ、拡散係数をσ_λ、ジャンプ・サイズをν、定数強度ηを持つマーク（$z \in \mathbb{R}^+$）付きポアソン点過程を$N^\eta(z,t)$とする。(15)式の確率的デフォルト強度$\lambda(t)$を用いて、期間$(t_{i-1}, t_i]$のデフォルト確率を(17)式のように表現する。

$$PD_C(t_{i-1}, t_i) \coloneqq \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} -\big(\lambda(s) + \psi(s,\boldsymbol{\beta})\big)\, ds\right)\right]. \tag{17}$$

ただし、$\boldsymbol{\beta}$ は(15)式のデフォルト強度過程のパラメータ・ベクトル $\boldsymbol{\beta} = [\kappa, \theta, \sigma_\lambda, \eta, \nu]$ であり、$\psi(s,\boldsymbol{\beta})$は JCIR 過程に基づき表現される生存確率と CDS プレミアムの市場気配値から導出される生存確率とを一致させるような確定的なシフト項である（詳細は５．（２）節を参照）[5]。

(17)式から、時点 t_{i-1} におけるデフォルト強度の上昇は、時点 t_{i-1} から時点 t_i までのデフォルト確率を上昇させることがわかる。したがって、条件付期待エクスポージャーの増大は、デフォルト強度と為替レートに負の相互依存関係を導入することで表現できると考えられる。以下では、イ．ブラウン運動の線形相関による方法と、ロ．デフォルト強度と為替レートにおいて同時に生じるジャンプを考慮する方法（同時ジャンプによる方法）の 2 通りの WWR モデル化手法を実装する。

イ.　ブラウン運動の線形相関による方法

(15)式のジャンプ強度を$\eta = 0$、(8)、(15)式のブラウン運動の線形相関を以下のように設定する。なお、信用水準の低下（デフォルト強度の上昇）時に円高となるよう、$\rho_{FX,\lambda} < 0$とした。

$$d\langle W_{FX}, W_\lambda\rangle(t) = \rho_{FX,\lambda}dt. \tag{18}$$

アルゴリズムとしては、ロ．で考察する為替レート過程とデフォルト強度過程の同時ジャンプも扱えるように、定数強度 η で与えられる(15)式のデフォルト強

[5] (17)式の期間デフォルト確率を所与とすれば、$\lambda(t) + \psi(t,\boldsymbol{\beta})$全体でデフォルト強度と解釈することも可能であるが、$\psi(t,\boldsymbol{\beta})$はキャリブレーションの結果、CDS プレミアムの市場気配値から導かれる期間デフォルト確率と完全に一致させるための調整項であり、JCIR 過程などのデフォルト強度$\lambda(t)$のパラメータで完全に合せられれば生じない項である。したがって、本稿では、$\lambda(t)$をデフォルト強度と呼び、期間デフォルト確率を評価する場合には、(17)式のように調整する。

度のジャンプが発生した場合に、デフォルト強度には平均νのジャンプ、為替レートには平均γのジャンプが生じると考える。したがって、ブラウン運動の線形相関のみを考慮する場合には、$\eta = \gamma = \nu = 0$となる。ベンチマークとして、相互依存関係を考慮しない場合には、$\eta = \gamma = \nu = \rho_{FX,\lambda} = 0$となる。この過程でデフォルト強度と為替レートのパスの発生アルゴリズムは、補論４.（１）のAlgorithm 1–3 のように与えられ、それに基づく CCS の CVA 計算アルゴリズムは Algorithm 1–4 のように与えられる。

ロ.　　同時ジャンプによる方法

(8)、(15)式を基礎として、為替レートとデフォルト強度の同時ジャンプを考慮したモデルを示す。同時ジャンプのマーク付きポアソン点過程N^{η}を(15)式と同様に(16)式で与えられるとし、デフォルト強度過程は(15)式、為替レートの確率過程と相関は以下のように表現する。

$$d\ln FX(t) = \left(r_d - r_f - \frac{{\sigma_{FX}^{jump}}^2}{2} + \frac{\gamma\eta}{\gamma+1} \right) dt + \sigma_{FX}^{jump} dW_{FX}(t) - \gamma dJ(t), \tag{19}$$

$$\sigma_{FX}^{jump} = \sqrt{\sigma_{FX}^2 - \frac{(\gamma+3)\gamma\eta}{(\gamma+1)(\gamma+2)}}, \tag{20}$$

$$d\langle W_{FX}, W_{\lambda}\rangle(t) = \rho_{FX,\lambda}^{jump} dt. \tag{21}$$

構造モデルの場合と同様、為替レート変動率の期待値および分散を（２）イ. の場合と一致させるように、ジャンプによる期待値と分散への影響をドリフトおよびボラティリティで調整している。ここでは、デフォルト強度と為替レートに負の相互依存関係を与えるため、為替レートにおいて円高方向（負の方向）へのジャンプが生じるとデフォルト強度に正方向のジャンプが生じるように設定している（同時ジャンプ）。以上の設定に基づいたアルゴリズムはイ. で示したとおりである。

ハ.　　デフォルト強度モデルによる CVA の数値計算結果

WWR を考慮した時点t_0での CCS の満期別 CVA 評価値を図 3 に、満期を 20 年とする CCS の条件付期待エクスポージャーを図 4 に示す[6]。時点t_0の為替レー

[6] 図 4 で示した条件付期待エクスポージャーの凹凸はデフォルト強度に対する(17)式の確定的なシフト項 $\psi(t_i, \boldsymbol{\beta})$ による影響である。

トFX_0には、簡便的に CCS 契約時における為替レートを用いた。なお、図で示した計算結果は $\rho_{FX,\lambda} = -0.3, \eta = 0.05, \nu = 0.075$ のパラメータ設定値に基づいている。ジャンプを考慮する場合のブラウン運動の相関係数は、満期 20Y の場合には$\rho_{FX,\lambda}^{jump} = 0.428$、満期 10Y の場合には $\rho_{FX,\lambda}^{jump} = 0.525$、満期 5Y の場合には $\rho_{FX,\lambda}^{jump} = 0.986$ とした。以下では、相互依存関係のモデル化の相違が CVA 評価に与える影響について、図 3 および図 4 で示した数値計算結果に基づき考察する。

まず、満期と CVA 評価値および条件付期待エクスポージャーの関係については、構造モデルの場合と同じ傾向を示している。

次に、ブラウン運動の線形相関により WWR を考慮した場合、最長満期の CVA 評価値は No WWR の場合と比べて 12%程度増加している。この増分は、構造モデルにおける同様の増分が 30%超であったことを考慮すれば、CVA における WWR の影響をあまり大きく捉えていないことを示している。デフォルト強度過程がブラウン運動のみで駆動されている場合、デフォルト強度の変動がデフォルト確率を決定する累積強度に与える影響は軽微であり、デフォルト時刻との関係は希薄であることが Morini [2011]などにより指摘されている。すなわち、デフォルト強度と為替レートがブラウン運動の線形相関を通じた相互依存関係を持っているとしても、それが Cpty のデフォルト時刻と為替レートの相互依存関係を高めるとは限らない。こうしたことから、デフォルト強度モデルにおいてブラウン運動の線形相関のみで WWR を表現した場合の CVA 評価値が、構造モデルにおける同様のモデル化の結果に比べて小さくなったと考えられる。

デフォルト強度と累積強度（または、デフォルト時刻）の関係は前述したとおりであるが、Morini [2011]は、デフォルト強度過程にジャンプを導入することで、両者の関連性を高めることができることを示唆している。ただし、本稿の分析では、為替レートとデフォルト強度に同時ジャンプを導入して WWR を表現した場合でも、ブラウン運動の線形相関の場合からの CVA 評価値の増分は 2.5%程度に止まっている。この理由は以下のように考えられる。本稿の分析では、同時ジャンプを導入する際に為替レート変動とデフォルト強度変動の相関係数を一致させるように、ブラウン運動間の相関係数を調整している。この結果、同時ジャンプを導入したモデルで、ブラウン運動間の相関係数が為替レート変動とデフォルト強度変動の相関係数と逆符号になっていることに加え、同時ジャンプの補正項が為替レート変動のドリフト項を正方向に調整している。これら 2 つの調整は、WWR 効果を低減させる。デフォルト強度モデルに同時ジャ

ンプを導入した場合、これら WWR 低減効果が同時ジャンプ導入による WWR 増大効果をほぼ相殺したものと考えられる。この結果は、デフォルト強度モデルのみではエクスポージャー変動と Cpty のデフォルト時刻の相互依存関係を捉えることが困難であることを示唆している。

（４） コピュラ・アプローチによる CCS の WWR モデル化

Böcker and Brunnbauer [2014]によるコピュラを用いた WWR のモデル化について、本節（３）で用いたデフォルト強度の定義を用いて概観する。

C1 銀行の時点t の累積デフォルト確率を $F(t)=1-\mathbb{Q}(\tau_C>t)$、時点 t の割引デリバティブ価値を

$$\tilde{V}(t)=DF(t_0,t)V(t), \tag{22}$$

とし、その分布関数を$G_t(\tilde{v})=\mathbb{Q}\big(\tilde{V}(t)\le\tilde{v}\big)$, $\tilde{v}\in\mathbb{R}$ で表す。このとき、$\tilde{V}(t)$ と τ_C の同時分布関数は(23)式のように表現される。

$$C_t\big(G_t(\tilde{v}),F(t)\big):=\mathbb{Q}\big(\tilde{V}(t)\le\tilde{v}\,,\tau_C\le t\big). \tag{23}$$

ここで、$C_t(u_1,u_2)$ は 2 階連続微分可能な 2 変量コピュラを示しており、そのコピュラ密度 $\phi_t(u_1,u_2)$ は(24)式で導かれる。

$$\phi_t(u_1,u_2)=\frac{\partial^2 C_t(u_1,u_2)}{\partial u_1\partial u_2},\qquad (u_1,u_2)\in[0,1]\times[0,1]. \tag{24}$$

以上の表記を用いて、コピュラ密度を用いた条件付期待エクスポージャーは、$\tilde{v}^+:=\max(\tilde{v},0)$として、(25)式のように表現できる。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[DF(t_0,t)E(t)\,|\tau_C=t]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{v}^+\phi_t\big(G_t(\tilde{v}),F(t)\big)\ dG_t(\tilde{v})\\&=\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[\phi_t\left(G_t\left(\tilde{V}(t)\right),F(t)\right)\tilde{V}(t)^+\right].\end{aligned} \tag{25}$$

Böcker and Brunnbauer [2014]では、$G_t(\cdot)$を経験分布の一種で与えている。すなわち、シミュレーションでのパスの総数をMとし、各離散グリッド$s\in\{t_1,\dots,t_N\}$において、$\{\tilde{v}_{s,1},\dots,\tilde{v}_{s,m},\dots,\tilde{v}_{s,M}\}$をシミュレートされた割引デリバティブ価値集合としたとき、$G_s\big(\tilde{v}_{s,m}\big)$を$\mathrm{rank}(\tilde{v}_{s,m})/(M+1)$で与える。ただし、$\mathrm{rank}(\tilde{v}_{s,m})$は、$\{\tilde{v}_{s,1},\dots,\tilde{v}_{s,M}\}$における$\tilde{v}_{s,m}$の昇順での順位である。

(25)式より、条件付期待エクスポージャーへの WWR の反映は、シミュレーションの各パスにおける無条件エクスポージャーについてコピュラ密度$\phi_t(\cdot,\cdot)$でウェイト付けすることにより行われる。このとき、無条件エクスポージャー$\tilde{V}(t)^+$が大きい（小さい）ときに大きな（小さな）ウェイト$\phi_t(\cdot,\cdot)$を付与するよ

うモデル化すれば、(25)式よりエクスポージャーが平均的に大きくなるのでWWR を表現できる。

以上より、離散グリッド時点$\{t_1,\ldots,t_N\}$でのコピュラ密度を用いた WWR を考慮した時点t_0の CVA は、(26)式のように表現できる。

$$CVA(t_0)=\mathrm{LGD}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[\phi_{t_i}\left(G_{t_i}\left(\tilde{V}(t_i)\right),F(t_i)\right)\tilde{V}(t_i)^{+}\right]PD_C(t_{i-1},t_i). \tag{26}$$

(26)式中の条件付期待エクスポージャーの表現より、コピュラ関数の選択に依存してエクスポージャーとデフォルト時刻の間の相互依存関係を考慮できる。本稿では負の相関パラメータをもつ正規コピュラを選択した場合の WWR について分析する[7]。正規コピュラに負の相関パラメータ[8]を与えた場合、無条件エクスポージャーの大きさと累積デフォルト確率の大きさは負の相関を持つことになる。すなわち、デフォルトが短期間で生じた場合にはウェイト（コピュラ密度）$\phi_t(\cdot,\cdot)$が平均的に大きな値をとり、デフォルトの生起が長期化するに従いウェイトが平均的に小さくなるようにモデル化することになる。

イ. 正規コピュラによる方法

正規コピュラの相関パラメータを$\rho_{FX,\Lambda}^{copula}$とした上で CVA 評価を行う。(26)式中の累積デフォルト確率$F(t_i)$には、(15)式の JCIR 型のデフォルト強度過程から導かれるデフォルト確率を用いる[9]。同時ジャンプを考慮しない場合は、為替レートは(8)式、デフォルト強度は(15)式の$\eta=0$とした確率過程に従うものとする。同時ジャンプを考慮する場合は、為替レートは(19)、(20)式、デフォルト強度は(15)式の$\eta\neq0$とした確率過程に従うものとする。デフォルト強度と為替レートの相互依存関係は、同時ジャンプを除くと正規コピュラの相関のみで表現されるものとし、(18)式や(21)式のブラウン運動間の相関は考慮しない。ベンチマー

[7] コピュラ関数がエクスポージャーとデフォルト時刻の相互依存関係をうまく表現できるかどうかについては、選択したコピュラ関数（グンベル、正規、フランク、クレイトン等）および期間（テナー）に依存する（Böcker and Brunnbauer [2014]および安達・末重・吉羽 [2016]を参照）。本稿では、デリバティブの期間に応じたコピュラ関数の選択は行わず、プライシングやリスク管理実務で最も頻繁に用いられていると考えられる正規コピュラを一貫して用いることで、コピュラ関数の選択問題を分析・考察の対象外としている。

[8] 短期的にはエクスポージャーと Cpty の信用水準が負の相互依存関係を持ち、WWR となるが、長期的にはエクスポージャーと Cpty の信用水準が正の相互依存関係を持ち、正方向リスクになりやすい。

[9] Böcker and Brunnbauer [2014]では、確定的なデフォルト率を用いているが、本稿は確率的なデフォルト率を用いている。

クとして、相互依存関係を全く考慮しない場合には、$\eta = \rho_{FX,\Lambda}^{copula} = 0$ となる。具体的なアルゴリズムは、補論４.（１）の Algorithm 1–5 のように与えられる。

ロ.　コピュラ・アプローチによる CVA の数値計算結果

コピュラ･アプローチに基づき正規コピュラを用いて WWR を考慮した時点t_0での CCS の満期別 CVA 評価値を図 5 に示す。時点t_0の為替レートFX_0には、簡便的に CCS 契約時における為替レートを用いた。なお、図で示した計算結果は、$\rho_{FX,\Lambda}^{copula} = -0.30,\ \eta = 0.05,\ \gamma = 0.25,\ \nu = 0.075$のパラメータ設定値に基づいている。相関係数およびジャンプ・サイズの決定方法については本節（５）を、為替レートおよびデフォルト強度のパラメータの決定方法については 5 節のキャリブレーションを参照されたい。以下では、相互依存関係のモデル化手法の相違が CVA 評価に与える影響について、図 5 で示した数値計算結果に基づき考察する。

まず、満期と CVA 評価値および条件付期待エクスポージャーの関係については構造モデルとデフォルト強度モデルの場合と同じ傾向を示している。

次に、正規コピュラのみによる場合、CVA 評価値は、最長満期で No WWR の結果と比較して 20%程度増加している。これは、各時点の各シミュレーション・パスにおいて、大きな（小さな）無条件エクスポージャーに大きな（小さな）ウェイト（コピュラ密度）が割り振られるようモデル化していることに起因している。

正規コピュラおよび同時ジャンプを用いてモデル化した場合には、為替レートとデフォルト強度の同時ジャンプにより、Cpty の期間デフォルト確率の上昇と同時にエクスポージャーが大きくなりやすいため、最長満期で正規コピュラのみの結果と比較して CVA 評価値が 15%程度増加している。さらに、デフォルト強度モデルでの同時ジャンプの結果と比較すると、最長満期で比較して CVA 評価値が 21%程度増加している。この結果は、デフォルト強度モデルに同時ジャンプのみを導入した場合（本節（３）ロ.）と同時ジャンプと共に正規コピュラを導入した場合（本節（４）イ.）では、正規コピュラに関する部分を除いて同じパラメータ値（デフォルト強度過程、為替レート過程、相関係数等）を用いていることに鑑みれば、正規コピュラを用いることにより、同時ジャンプを導入することによる WWR 増加効果がその WWR 減少効果（本節（３）ハ. を参照）を十分に上回ることが可能であることを示している。

図 6 は、短期の場合を 1Y、長期の場合を 19Y として、各時点の無条件エクスポージャーとウェイト関数の関係を散布図にしたものである（シミュレーションでのパスのうち、短期、長期それぞれでランダムに選んだ 500 個のデータを横軸の範囲でプロットしている）。短期においては大きな無条件エクスポージャーに対して大きなウェイト関数が対応付けられている。一方で、長期では、無条件エクスポージャーに付与されるウェイト関数の大きさは、短期の場合と比較すると小さい値となっている。これは WWR を定義するときに短期のデフォルト時に大きなエクスポージャーが観測されるようモデル化したことと整合している。

（５）　ジャンプと相関のパラメータ設定

ここでは、本稿で採用したジャンプと相関のパラメータ設定方法を示す。Pykhtin and Sokol [2013]では、ソブリン・デフォルト時には当該ソブリンのローカル通貨が平均して 50%程減価することが示されている。このことから、本稿では、システミック・リスクを持つような大規模金融機関との取引を想定し、そのデフォルトの為替レートへの影響はソブリン・デフォルトの場合の半分との簡便な仮定を置く。すなわち、為替レートのジャンプ・サイズの期待値については$\gamma = 0.25$ とした。

デフォルト強度については、理念的には、JCIR 過程に従うデフォルト強度による生存確率の解析解を基に、CDS プレミアムの市場気配値から求めた生存確率にキャリブレートすることでパラメータを得ることができる（詳細は５.（２）節を参照）。しかしながら、ジャンプのパラメータをそのようにキャリブレートすると推定値が不安定になることが知られており、Brigo, Morini, and Pallavicini [2013]では、ジャンプの頻度、平均サイズの双方を外生的に与えている。本稿でも Brigo, Morini, and Pallavicini [2013]に倣い、為替レートとデフォルト強度の同時ジャンプ強度ηは 0.05、すなわち、平均して 20 年に 1 回のジャンプ生起を外生的に仮定する。また、Cpty のデフォルト強度のジャンプ・サイズの期待値については$\nu = 0.075$と外生的に仮定する。次に、キャリブレーションにより得られたジャンプのパラメータを所与として同時ジャンプを考慮した場合に、為替レートとデフォルト強度の相関係数が、ブラウン運動の線形相関のみを考慮した場合の相関係数と一致するような$\rho_{FX,\lambda}^{jump}$を算定する（計算結果は表 2、計算の詳細は補論２.（２）を参照）。なお、各満期でのσ_{FX}は為替オプションのインプライド・ボラティリティで設定している。

一方、構造モデルでは、バリア水準の不確実性を導入しているが、この影響

を為替レートと資産価値の両変数間の相関係数$\rho_{FX,A}$の計算に反映させることは難しい。そこで、本稿ではバリア水準の不確実性を考慮した場合のブラウン運動の線形相関$\rho_{FX,A}dt$を、(12)式の不確実性を考慮しない場合（ブラウン運動の線形相関による場合）と等しいとの簡便な仮定を置いた。

３．CDS に対する WWR のモデル化

２節で考察した CCS の WWR モデル化と同様、本節では、構造モデル、デフォルト強度モデルおよびコピュラ･アプローチに基づく WWR のモデル化を CDS に適用し、WWR を考慮した CVA 評価値および条件付期待エクスポージャーの値からモデル化手法の差異について考察する。

（１） CDS の商品性と CVA

CDS の買い取引（プロテクション）は、一定額のプレミアムを Cpty に支払う代わりに、参照体にクレジット・イベントが生じたときには、Cpty が契約上定められた金額を支払う取引である。金融危機時には多くの金融機関において WWR の顕現化により CDS ポジションから巨額の時価損失を計上したことから、CDS は WWR に晒されている代表的商品の一つとして認識されている。本稿では、具体的な評価対象として、A 銀行（プロテクションの買い手）と C2 銀行（Cpty：本邦銀行、プロテクションの売り手）の間の元本 100 百万円の CDS 契約を想定し、R 事業会社（本邦事業会社）を参照体とする。なお、A 銀行はデフォルトしないと仮定する。取引の満期はt_N、利払日はt_i （$i=1,\dots,n$）とし、参照体のデフォルトは利払日間(t_{i-1},t_i)に生じたとしても、直後の利払日t_iに生起したものとみなし、利払日t_iにもプレミアムが Cpty に支払われると仮定する。

以下では、評価時点 t_0 における CDS 価値を考える（契約時点$t_{con}[\leq t_0]$）。CDS のプレミアムをsp_R、Cpty（C2 銀行）のデフォルト時刻をτ_C、参照体（R 事業会社）のデフォルト時刻をτ_R、時点 t_{i-1} から時点 t_i までに Cpty がデフォルトする確率を$PD_C(t_{i-1},t_i)$、時間のグリッドを$\Delta=t_i-t_{i-1}$ $(\forall i)$、Cpty のデフォルト時損失率を$\mathrm{LGD_C}$、参照体のデフォルト時損失率を$\mathrm{LGD_R}$としたとき、A 銀行からみた時点 t_0 における CVA を考慮しない CDS の価値 $V_{CDS}^{No\,CVA}(t_0)$ は、以下のように導出できる。ただし、$DF(t_0,t_i)$は、評価時点 t_0 からみた時点 t_i までの確定的な割引ファクター$\exp\bigl(-r_d(t_i-t_0)\bigr)$である。

$$V_{CDS}^{No\,CVA}(t_0)=\bigl(\mathrm{ProtectionLeg}(t_0,\mathrm{LGD_R})-\mathrm{PremiumLeg}(t_0,sp_R)\bigr)\times 100, \quad (27)$$

$$\mathrm{PremiumLeg}(t_0, sp_R) = sp_R \Delta \sum_{i=1}^{N} DF(t_0, t_i) \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[1_{\{\tau_R > t_{i-1}\}}\right], \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ProtectionLeg}(t_0, \mathrm{LGD_R}) &= \mathrm{LGD_R}\ \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[DF(t_0, \tau_R) 1_{\{\tau_R \in (t_0, t_N]\}}\right] \\ &\cong \mathrm{LGD_R} \sum_{i=1}^{N} DF(t_0, t_i)\ \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[1_{\{\tau_R \in (t_{i-1}, t_i]\}}\right] \\ &= \mathrm{LGD_R} \sum_{i=1}^{N} DF(t_0, t_i) PD_R(t_{i-1}, t_i). \end{aligned} \tag{29}$$

A 銀行側からみた時点 t_0 における CVA と、その CVA を考慮した場合の CDS 価値$V_{CDS}^{CVA}(t_0)$ は、以下のように表現される。

$$CVA_A(t_0) = \mathrm{LGD_C} \sum_{i=1}^{N} DF(t_0, t_i)\ \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[E(t_i) | \tau_C \in (t_{i-1}, t_i]] PD_C(t_{i-1}, t_i), \tag{30}$$

$$E(t_i) = V_{CDS}^{No\ CVA}(t_i)^+ \ (\forall i \in \{1, \cdots, N\}), \tag{31}$$

$$V_{CDS}^{CVA}(t_0) = V_{CDS}^{No\ CVA}(t_0) - CVA_A(t_0). \tag{32}$$

Cpty のデフォルト事象の生起とエクスポージャーの変動が独立であるとき、(30)式中の（Cpty デフォルト）条件付期待エクスポージャー $\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[E(t_i) | \tau_C \in (t_{i-1}, t_i]]$ は、無条件エクスポージャー $\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[E(t_i)]$ に置き換えられる。WWR を反映していれば(30)式中の条件付期待エクスポージャーは無条件エクスポージャーよりも平均的に大きくなると考えられる。WWR は、エクスポージャーと Cpty の信用水準が負の相互依存関係を持つ場合に生じるため、(30)式の計算において Cpty のデフォルト確率の上昇時に参照体のデフォルト確率も上昇するようモデル化することで WWR を表現できる。

２.（１）節で示したように、CDS の条件付期待エクスポージャーは SW 法では厳密に計算できない場合が存在するため（本節（３）ハ. を参照)、本節の計算では BF 法を用いる。その上で、CDS の条件付期待エクスポージャーの計算に SW 法を採用した場合に差異が生じるかの分析も併せて行う。

（２） 構造モデルに基づく CDS の WWR モデル化

Cpty（C2 銀行）と参照体（R 事業会社）の配当率をそれぞれ$q_C = q_{C2}$、q_Rで固定する。Cpty と参照体の各主体$k = C, R$の資産価値過程$A_k(t)$がボラティリティ$\sigma_k(t)$ の幾何ブラウン運動に従うものとする。このとき、$A_k(t)$およびバリ

ア水準$H_k(t)$を、リスク中立測度$\mathbb{Q}$の下で以下のように表現する。

$$\frac{dA_k(t)}{A_k(t)} = (r_d - q_k)dt + \sigma_{A,k}(t)dW_{A,k}(t), \tag{33}$$

$$H_k(t) = H_{k,0}\exp\left(\int_0^t \left\{(r_d - q_k) - B\left(\sigma_R^A(t_0 + s)\right)^2\right\} ds\right). \tag{34}$$

Cpty および参照体のデフォルト時刻τ_C, τ_Rは

$$\tau_k = \inf\{t | t > t_0, A_k(t) \le H_k(t)\}, \tag{35}$$

で表現される。バリア水準について導入したパラメータ$H_{k,0}$、Bについては後述する。

(33)～(34)式から、時点t_iにおいて各主体kの資産価値がバリアに接近すると、時点t_{i-1}から時点t_iにおける期間デフォルト確率を上昇させることになる。したがって、条件付期待エクスポージャーの増大は、Cpty の資産価値と参照体の資産価値に正の相互依存関係を導入することで表現できる。

以下では、イ．資産価値過程のブラウン運動の線形相関により WWR を表現する方法と、ロ．Brigo, Morini, and Pallavicini [2013] 第 3 章の SBTV モデルを応用して、Cpty と参照体のバリア水準が同一のシナリオとシナリオ確率を持つ仕組みを導入することにより WWR を表現する方法の 2 通りの WWR モデル化手法について実装する。

イ.　ブラウン運動の線形相関による方法

各主体$k = C, R$の資産過程(33)式のブラウン運動の線形相関を以下のように設定する。参照体の資産価値下落時に Cpty の資産価値も下落するよう、$\rho_{C,R} > 0$とした。

$$d\langle W_{A,C}, W_{A,R}\rangle(t) = \rho_{C,R}dt. \tag{36}$$

ベンチマークとなる相互依存関係を考慮しない場合には$\rho_{C,R} = 0$とする。バリア水準は、$H_{C,0} = H_{R,0} = 0.35$、その他のパラメータは、２.（２）節のイ．と同様である。Cpty のデフォルト時の参照 CDS のエクスポージャー計算アルゴリズムは補論４.（２）の Algorithm 2–1、生存確率の計算アルゴリズムは補論４.（３）の Algorithm 3–1 で与えられ、これらに基づく CDS の CVA 計算アルゴリズムは Algorithm 2–2 のように与えられる。

ロ.　バリアの不確実性による方法

CCS に対する WWR としてバリア水準の不確実性を考慮した２.（２）節のロ.

と同様に、小さなウェイトpの高バリア水準H_0^{stress}を持つストレス・シナリオと、それ以外の大きなウェイト$1-p$の低バリア水準H_0^{normal}を持つ通常シナリオの 2 つのシナリオを考える。Cpty と参照体について適用されるシナリオは同一とする。このような設定の下、CDS に関する CVA 評価値は、通常シナリオとストレス･シナリオそれぞれの下で算定した CVA 評価値に関するシナリオ･ウェイトの加重和により算定できる。(34)式で表現される Cpty、参照体の各主体$k=C,R$のバリア水準に不確実性を織り込んだモデルは、各主体kの資産価値過程を(33)式のように仮定し、それらのブラウン運動の線形相関を(36)式のように設定した上で、通常シナリオとストレス・シナリオでのバリア水準$H_k^{normal}(t)$、$H_k^{stress}(t)$を以下のように設定したモデルとして表現できる。

$$H_k^{normal}(t) = H_{k,0}^{normal} \exp\left(\int_0^t \left\{(r_d - q_k) - B\left(\sigma_k^A(t_0+s)\right)^2\right\} ds\right), \tag{37}$$

$$H_k^{stress}(t) = H_{k,0}^{stress} \exp\left(\int_0^t \left\{(r_d - q_k) - B\left(\sigma_k^A(t_0+s)\right)^2\right\} ds\right). \tag{38}$$

ここで、$H_{k,0}^{normal}$は各主体kの通常シナリオでの評価時点t_0でのバリア水準、$H_{k,0}^{stress}$は各主体kのストレス・シナリオでのバリア水準である（各シナリオのバリア水準のキャリブレーションについては５.（３）節を参照)。CCS の場合と同様の理由から、ブラウン運動の線形相関の大きさ$\rho_{C,R}$はイ. ブラウン運動の線形相関による方法と同一とする。基本的なアルゴリズムは２.（２）ロと同様であり、ストレス・シナリオと通常シナリオのそれぞれで算定した CVA 評価値をイ. で示したアルゴリズムを用いて求め、各シナリオのウェイトpと$1-p$を用いて加重和を求めることにより算定する。パラメータの設定は$H_{C,0}^{normal} = H_{R,0}^{normal} = 0.35$、その他のパラメータは２.（２）ロ. と同様である。具体的な計算アルゴリズムは補論４.（２）の Algorithm 2–3 のように与えられる。

ハ.　構造モデルによる CVA の数値計算結果

構造モデルに基づく WWR を考慮した CDS の満期別 CVA 評価値を図 7 に、満期を 10 年とする CDS の条件付期待エクスポージャーを図 8 に示した。CVA を計算するためのシミュレーション・パスの総数Mは 10 万回である。ただし、BF 法に基づく条件付期待エクスポージャーについて詳細に計算する際にはパスの総数を 5 千万回に増やして計算している。条件付期待エクスポージャーについては、SW 法でも計算したが、大きな乖離はなかったため、SW 法との比較は行わず BF 法の結果のみを図 8 に示している。なお、図で示した計算結果は、$\rho_{C,R} = 0.30$ のパラメータ設定値に基づいている。ジャンプ・サイズおよび相関係数の決定方法については本節（５）を、構造モデルのパラメータの決定方法

の詳細については、５．（３）節を参照されたい。以下では、相互依存関係のモデル化手法の相違が CVA 評価に与える影響について、図 7 および図 8 の数値計算結果に基づき考察する。

Cpty と参照体の資産価値を駆動するブラウン運動の間に正の線形相関を考慮すると、Cpty の資産価値がブラウン運動に駆動されてバリア方向に向かうとき、参照体の資産価値も同じくバリア方向に駆動される。そのため、Cpty がバリアに触れデフォルトしたときは、参照体の期間デフォルト確率も高い水準にある可能性が高まり、CDS に関するエクスポージャーが平均的に大きくなるために最長満期において No WWR の結果と比較して、CVA 評価値が 81%大きくなっている。

バリアの不確実性を導入した場合、ブラウン運動に関する線形相関のみの最長満期の結果と比較して CVA 評価値は 8%程度増加している。これは、ストレス・シナリオにおいては、Cpty と参照体のバリアは両方とも高水準であるため、Cpty のデフォルト時には参照体のデフォルト確率も高くなっていることから、エクスポージャーが大きく算出されるためである。ただし、ストレス・シナリオのウェイトを小さく見積もっているため、CVA 評価値への影響は大きくない。

（３）　デフォルト強度モデルに基づく CDS の WWR モデル化

Cpty（C2 銀行）と参照体（R 事業会社）の各主体$k=C,R$のデフォルト強度過程が中心回帰速度κ_k,、中心回帰水準θ_kおよび拡散係数σ_k,の CIR 過程にそれぞれ従うものとすると、その確率過程は以下で表現できる。

$$d\lambda_k(t)=\kappa_k\big(\theta_k-\lambda_k(t)\big)dt+\sigma_k\sqrt{\lambda_k(t)}dW_k(t). \tag{39}$$

ただし、$W_k(t)$は標準ブラウン運動である。(39)式の確率的デフォルト強度を用いて、各主体$k=C,R$の評価時点t_0における期間$(t_{i-1},t_i]$のデフォルト確率は、以下のように求めることができる。

$$PD_k(t_{i-1},t_i)\coloneqq\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}-\big(\lambda_k(s)+\psi_k(s,\boldsymbol{\beta}_k)\big)\,ds\right)\right]. \tag{40}$$

ただし、$\psi_k(t,\boldsymbol{\beta}_k)$は各主体$k=C,R$の CDS にキャリブレートする際に誤差として生じるデフォルト強度のシフト項である。

(40)式から、時点 t_{i-1} における確率的デフォルト強度の上昇は、時点 t_{i-1} から時点 t_i における期間デフォルト確率を上昇させることがわかる。したがって、期待エクスポージャーの増大は、Cpty の確率的デフォルト強度と参照体の確率的デフォルト強度に正の相互依存関係を導入することで表現可能である。

以下では、イ. Cpty と参照体のデフォルト強度過程のブラウン運動に線形相関を与える方法と、ロ. Cpty と参照体のデフォルト強度過程において同時ジャンプを与える方法（同時ジャンプによる方法）の 2 通りの WWR モデル化手法を考察する。

イ.　ブラウン運動の線形相関による方法

(39)式のブラウン運動の線形相関を

$$d\langle W_C, W_R\rangle(t) = \rho_{C,R}dt, \tag{41}$$

として CVA を評価する。参照体の信用水準の低下時に Cpty の信用水準も低下するよう、$\rho_{C,R} > 0$とした。アルゴリズムは以下のとおりであり、ブラウン運動の線形相関を考慮する場合には、$\nu_C = \nu_R = \eta = 0$となる。ベンチマークとして、相互依存関係を考慮しない場合には、$\nu_C = \nu_R = \eta = \rho_{C,R} = 0$となる。

アルゴリズムとしては、ロ.で考察する同時ジャンプも扱えるように、定数強度ηで与えられるデフォルト強度のジャンプが発生した場合に、Cpty および参照体のデフォルト強度にはそれぞれ、平均ν_C, ν_Rの指数分布に従うジャンプが生じると考える。したがって、ブラウン運動の線形相関のみを考慮する場合には、$\eta = \nu_C = \nu_R = 0$となる。ベンチマークとして、相互依存関係を考慮しない場合には、$\eta = \nu_C = \nu_R = \rho_{C,R} = 0$ となる。Cpty（C2 銀行）と参照体（R 事業会社）のデフォルト強度のパス発生アルゴリズムは補論４.（２）の Algorithm 2–4、Cpty デフォルト時の参照 CDS のエクスポージャー計算アルゴリズムは Algorithm 2–5、生存確率の計算アルゴリズムは補論４.（３）の Algorithm 3–2 で与えられ、それらに基づく CDS の CVA 計算アルゴリズムは Algorithm 2–6 のように与えられる。

ロ.　同時ジャンプによる方法

Cpty（C2 銀行）のジャンプ・サイズをν_C、参照体（R 事業会社）のジャンプ・サイズをν_R、両者共通の同時ジャンプ強度をηとする。(39)式に追加的要素として同時ジャンプを織り込んだモデルは、ポアソン強度ηを持つマーク（$z \in \mathbb{R}^+$）付きポアソン点過程を$N^\eta(z,t)$として、以下のように表現できる。ただし、(44)式の$\rho_{C,R}^{jump}$の設定方法については、本節（５）を参照されたい。

$$d\lambda_k(t) = \kappa_k\big(\theta_k - \lambda_k(t)\big)dt + \sigma_k\sqrt{\lambda_k(t)}dW_k(t) + \nu_k dJ(t), \qquad k = C, R, \tag{42}$$

$$J(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} \int_{\mathbb{R}^+} z dN^{\eta}(z,s), \qquad z \sim \mathrm{Exp}(1), \tag{43}$$

$$d\langle W_C, W_R \rangle(t) = \rho_{C,R}^{jump} dt. \tag{44}$$

ハ.　　デフォルト強度モデルによる CVA の数値計算結果

デフォルト強度モデルに基づく WWR を考慮し評価した CDS の満期別 CVA 評価値を図 9 に、満期を 10 年とする CDS の条件付期待エクスポージャーを図 10 に示した。条件付期待エクスポージャーについては、SW 法でも計算したところ、同時ジャンプの場合に大きく乖離していたため、BF 法とともに SW 法で計算した結果も図 10 に示している。なお、図で示した計算結果は、$\rho_{C,R} = 0.30$, $\rho_{C,R}^{jump} = -0.44$, $\eta = 0.05, \nu_C = 0.05$, $\nu_R = 0.05$ のパラメータ設定値に基づいている。相関係数およびジャンプ・サイズの決定方法については本節（５）を、デフォルト強度のパラメータの決定方法については５節を参照されたい。以下では、相互依存関係のモデル化の相違が CVA 評価に与える影響について、図 9 および図 10 の数値計算結果に基づき考察する。

まず、図 9 より No WWR の場合とブラウン運動の線形相関を考慮した場合を最長満期で比較すると、CVA 評価値の増分が 21%となっており、構造モデルの同様のケースの増分（81%）の約 1/4 となっている。これは、CCS のケースで説明したように、Cpty と参照体のデフォルトについて、各デフォルト強度のブラウン運動の線形相関のみで表現しただけでは、Cpty と参照体のデフォルト時刻の相互依存関係の高まりを表現することが難しいことに起因している。

一方、同時ジャンプを考慮した場合には、ブラウン運動の線形相関のみを考慮した最長満期の結果と比べて CVA 評価値が 72%増加している。これは、同時ジャンプの導入によりデフォルト強度と累積強度の関連性が強まったこと、および、Cpty と参照体のデフォルト強度が同時にジャンプすることから両者のデフォルト時刻の相互依存関係が高まり、Cpty のデフォルト時刻において参照体のデフォルト確率も上昇するために条件付期待エクスポージャーが大きくなることに起因している。

ただし、構造モデルの結果（図 7）と比較した場合、CVA 評価値の大きさは、すべてのケースを通じて概ね 1/3 以下になっている。この理由は、Cpty のデフォルト条件付エクスポージャーの違いによるものである。各評価時点t_iでのエクスポージャー$E(t_i)$は、時点t_0では(27)～(29)式のように評価される$V_{CDS}^{No\,CVA}(t_0)$を時

点t_iで再評価した CDS の残余価値$V_{CDS}^{No\,CVA}(t_i)$を用いて評価することになる。ここで、$V_{CDS}^{No\,CVA}(t_i)$は、(28), (29)式のとおり、参照体の期間デフォルト確率（あるいは生存確率）で評価され、これらについては、５節で示すように CDS プレミアムにインプライされる生存確率を用いて各モデルのパラメータをキャリブレートしているため、WWR を考慮しなければ構造モデルでもデフォルト強度モデルでも差はほとんど生じない。しかしながら、$E(t_i) = \max\{V_{CDS}^{No\,CVA}(t_i), 0\}$という非線形な関数で$V_{CDS}^{No\,CVA}(t_i)$を評価すると、$E(t_i)$の期待値は$V_{CDS}^{No\,CVA}(t_i)$の期待値だけでなく分散やより高次のモーメントの影響も受けることになる。(33)式の資産過程と(34)式のバリア（$k = R$）に基づく構造モデルの場合は、$V_{CDS}^{No\,CVA}(t_i)$はある程度の分散を持ち、図 8 のとおり、条件付期待エクスポージャーは最大で 830 万円程度となる。一方、(39), (40)式（$k = R$）のデフォルト強度モデルの場合は、２.（３）ハ. でも示したようにジャンプを含まないことで、デフォルト時刻や累積強度との関係が希薄になり、$V_{CDS}^{No\,CVA}(t_i)$の分散は非常に小さなものとなる。その結果、図 10 のとおり、条件付期待エクスポージャーは最大で 270 万円程度にしかならない。

図 10 より、BF 法と SW 法のそれぞれで計算した条件付期待エクスポージャーは、No WWR の場合やブラウン運動の線形相関を用いたモデルの場合には概ね等しいものの、同時ジャンプの場合には、SW 法によるエクスポージャーが最大 60%程度大きくなっている。これは、SW 法の場合、無条件エクスポージャーを Cpty のデフォルト条件付きエクスポージャーとして利用しているためと考えられる。すなわち、同時ジャンプが生じ、大きくなった参照体のデフォルト強度に基づいて計算した CDS の残余価値（エクスポージャー）を持つようなシミュレーション・パスのうち、Cpty がデフォルトしなかったパスについても条件付期待エクスポージャーの算出に取り込まれるため、条件付期待エクスポージャーは大きく計算されることになるためと考えられる。

（４）　コピュラ・アプローチによる CDS の WWR モデル化

Brigo and Capponi[2010]によるコピュラ関数を用いた WWR モデル化を、本節（３）で用いたデフォルト強度の定義を用いて概観する。なお、Brigo and Capponi [2010]ではプロテクションの買い手のデフォルトも考慮した CDS の評価調整手法を示しているが、本稿ではプロテクションの買い手である自行はデフォルトしないと仮定している。

クレジット・デリバティブにコピュラ・アプローチを用いる場合、Cpty のデフォルトがコピュラ関数を通じて、参照体のデフォルト確率に影響を与えるため、条件付期待エクスポージャーの計算は、一般的に複雑になる。以下では、

Cpty のデフォルトを条件とした参照体のデフォルト確率の計算方法を示す。

コピュラ・アプローチでは、参照体（R 事業体）と Cpty（C2 銀行）の累積デフォルト確率U_R, U_Cを、

$$C_{C,R}(u_C, u_R) \coloneqq \mathbb{Q}(U_C \le u_C, U_R \le u_R), \tag{45}$$

というコピュラ関数により接合し、両者のデフォルト時刻に相互依存関係を持たせることで WWR を表現する。(39)式（ジャンプを含まない場合、$k = C$）あるいは(42)式（ジャンプを含む場合、$k = C$）で表される Cpty のデフォルト強度$\lambda_C(t)$ に対する累積デフォルト強度 $\Lambda_C(t)$と(39)式（ジャンプを含まない場合、$k = R$）あるいは(42)式（ジャンプを含む場合、$k = R$）で表される参照体のデフォルト強度 $\lambda_R(t)$ に対する累積デフォルト強度 $\Lambda_R(t)$ を(46)式のように定義すると、Cpty と参照体のそれぞれのデフォルト時刻までの累積デフォルト確率U_R, U_Cは(47)式のように表せる。

$$\Lambda_C(t) \coloneqq \int_{t_0}^{t} \lambda_C(s) ds\,, \quad \Lambda_R(t) \coloneqq \int_{t_0}^{t} \lambda_R(s) ds\,, \tag{46}$$

$$U_C = 1 - \exp\{-\Lambda_C(\tau_C)\},\ U_R = 1 - \exp\{-\Lambda_R(\tau_R)\}. \tag{47}$$

Cpty が時点$\tau_C \in (t_{i-1}, t_i]$でデフォルトするという条件で参照体が$t \ge t_i$より生存する確率$\mathbb{Q}(\tau_R > t | \tau_C \in (t_{i-1}, t_i])$ は、以下のように展開できる。

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{\{\tau_R > \tau_C\}} \mathbb{Q}(\tau_R > t | \tau_C \in (t_{i-1}, t_i]) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau_R > \tau_C\}} \mathbb{Q}\left(1 - e^{-\Lambda_R(\tau_R)} > 1 - e^{-\Lambda_R(t)} \middle| \tau_C \in (t_{i-1}, t_i], \tau_R > \tau_C\right) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau_R > \tau_C\}} \mathbb{Q}(\Lambda_R(t) - \Lambda_R(\tau_C) < -\log(1 - U_R) - \Lambda_R(\tau_C) | \tau_C \in (t_{i-1}, t_i], \tau_R > \tau_C) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau_R > \tau_C\}} \int_{U_{R|C}}^{1} F_{\Lambda_R(t) - \Lambda_R(\tau_C)}(-\log(1 - u_R) - \Lambda_R(\tau_C)) \\
&\qquad\qquad d\mathbb{Q}(U_R \in du_R | \tau_C \in (t_{i-1}, t_i], \tau_R > \tau_C).
\end{aligned} \tag{48}$$

ここで、$\Lambda_R(t) - \Lambda_R(\tau_C)$の累積分布関数（Cpty がデフォルトした後の参照体の累積デフォルト強度についての累積分布関数）を$F_{\Lambda_R(t) - \Lambda_R(\tau_C)}(\cdot)$ で表し、

$$U_{R|C} = 1 - \exp\{-\Lambda_R(\tau_C)\}, \tag{49}$$

とした。さらに

$$U_{C,i} = 1 - \exp\{-\Lambda_C(t_i)\},$$

と置くと、

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Q}(U_R \in du_R | \tau_C \in (t_{i-1}, t_i], \tau_R > \tau_C) \\
&= \frac{\mathbb{Q}\left(U_R \in \left(U_{R|C}, U_{R|C} + du_R\right], U_R > U_{R|C}, U_C \in \left(U_{C,i-1}, U_{C,i}\right]\right)}{\mathbb{Q}\left(U_R > U_{R|C}, U_C \in \left(U_{C,i-1}, U_{C,i}\right]\right)} \\
&= \frac{\mathbb{Q}\left(U_R \le U_{R|C} + du_R, U_C \in \left(U_{C,i-1}, U_{C,i}\right]\right) - \mathbb{Q}\left(U_R \le U_{R|C}, U_C \in \left(U_{C,i-1}, U_{C,i}\right]\right)}{1 - \mathbb{Q}\left(U_R \le U_{R|C}, U_C \in \left(U_{C,i-1}, U_{C,i}\right]\right)},
\end{aligned}
\tag{50}
$$

となり、(45)式で定義されるコピュラ関数$C_{C,R}(u_C, u_R)$を用いて、

$$
C_{R|C}(u_R; U_C) \coloneqq \frac{\left.\dfrac{\partial C_{C,R}(u_C, u_R)}{\partial u_C}\right|_{u_C = U_C} - \left.\dfrac{\partial C_{C,R}\left(u_C, U_{R|C}\right)}{\partial u_C}\right|_{u_C = U_C}}{1 - \left.\dfrac{\partial C_{C,R}\left(u_C, U_{R|C}\right)}{\partial u_C}\right|_{u_C = U_C}}, \tag{51}
$$

を導入すると(52)式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{\{\tau_R > \tau_C\}} \mathbb{Q}(\tau_R > t | \tau_C \in (t_{i-1}, t_i]) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau_R > \tau_C\}} \int_{U_{R|C}}^{1} F_{\Lambda_R(t) - \Lambda_R(\tau_C)}\left(-\log(1 - u_R) - \Lambda_R(\tau_C)\right) dC_{R|C}(u_R; U_C).
\end{aligned}
\tag{52}
$$

ここで、$F_{\Lambda_R(t)-\Lambda_R(\tau_C)}(\cdot)$ は特性関数を求めてからフーリエ変換によって密度関数を求め、それを数値積分することによって得られる（詳細は補論３を参照）。

イ.　正規コピュラによる方法

(52)式で表される参照体の生存確率を計算するには、(51)式のコピュラ関数の偏微分を計算する必要がある。コピュラ関数に正規コピュラを採用すると[10]、その偏微分は以下のように解析的に評価できる。

2 変量の正規コピュラは、相関パラメータをρとして、

$$
C^G(u_1, u_2; \rho) \coloneqq \Phi_2(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \rho), \tag{53}
$$

と表現される。なお、$\Phi_2(\cdot,\cdot;\rho)$は相関 ρ の 2 変量標準正規分布の同時分布関数、$\Phi(\cdot)$は 1 変量の標準正規分布の累積分布関数であり、(54)、(55)式のように表せる。

[10] コピュラ関数が CVA における WWR をうまく表現できるかどうかについては、選択したコピュラ関数（グンベル、正規、フランク、クレイトン等）および期間（テナー）に依存することが、Böcker and Brunnbauer [2014]および安達・末重・吉羽 [2016]により示されている。本稿では、デリバティブの期間に応じたコピュラ関数の選択は行わず、プライシングやリスク管理実務で最も頻繁に用いられていると考えられる正規コピュラを一貫して用いることで、コピュラ関数の選択問題を考察の対象外としている。

$$\Phi_2(h,k;\rho) \coloneqq \int_{-\infty}^{h}\int_{-\infty}^{k}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}\right\}dxdy$$
$$= \int_{-\infty}^{h}\Phi\left(\frac{k-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx, \tag{54}$$

$$\Phi(k) \coloneqq \int_{-\infty}^{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy. \tag{55}$$

ここで、$X_1 = \Phi^{-1}(u_1)$, $X_2 = \Phi^{-1}(u_2)$と変数変換し、u_1について偏微分すると、正規コピュラの偏微分は、(56)式で表せる。

$$\frac{\partial C^G(u_1,u_2;\rho)}{\partial u_1} = \frac{\partial \Phi_2(X_1,X_2;\rho)}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial u_1} = \frac{\Phi\left(\frac{X_2-\rho X_1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{X_1^2}{2}\right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{X_1^2}{2}\right\}}$$
$$= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2)-\rho\Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right). \tag{56}$$

正規コピュラを用いる場合、Cpty と参照体のデフォルト時刻が正の相互依存関係を持つためには、両者の累積デフォルト確率が正の相関関係を持つようにコピュラ関数のパラメータを設定する必要がある。したがって、正規コピュラの相関パラメータは、２.（４）節と同様に正の値とする。

正規コピュラに相関パラメータ$\rho_{C,R}^{copula}$を与えた上で CVA を評価する。アルゴリズムとしては、同時ジャンプも扱えるように、定数強度ηで与えられるデフォルト強度のジャンプが発生した場合に、Cpty および参照体のデフォルト強度には、それぞれ平均ν_C, ν_Rの指数分布に従うジャンプが生じると考える。ただし、Cpty と参照体のデフォルト強度のブラウン運動を駆動する相関はゼロ（$\rho_{C,R} = 0$）とする。正規コピュラによる相互依存関係を考慮しない場合には、$\rho_{C,R}^{copula} = 0$となり、ベンチマークとしてジャンプに伴う相互依存関係も全く考慮しない場合には$\nu_C = \nu_R = \eta = \rho_{C,R}^{copula} = 0$となる。基本的なアルゴリズムは、本節（３）イ.と同じであるが、生存確率の計算アルゴリズムを補論４.（３）の Algorithm 3–3 により与えられ、Algorithm 3–4 の累積 JCIR 過程の特性関数計算と Algorithm 3–5 の特性関数に基づく累積分布関数計算で実装される。デフォルト強度のパス発生アルゴリズムは補論４.（２）の Algorithm 2–4、Cpty デフォルト時の参照 CDS のエクスポージャー計算アルゴリズムは Algorithm 2–7、それらに基づく CDS の CVA 計算アルゴリズムは Algorithm 2–8 のように与えられる。

ロ.　コピュラ・アプローチによる CVA の数値計算結果

コピュラ・アプローチに基づく WWR を考慮した、CDS の満期別 CVA 評価値を図 11 に、満期を 10 年とする CDS の条件付期待エクスポージャーを図 12 に示した。デフォルト強度アプローチと同様に、CDS のデフォルト条件付期待エクスポージャーは、BF 法で算出した場合と SW 法で算出した場合とで、同時ジャンプを考慮した場合に差異が生じる。つまり、その差異の原因は本節（３）ハ. と同様であるため、ここでは考察は省略し、図 12 には BF 法で算出した場合の条件付期待エクスポージャーを示す。なお、図で示した計算結果は、$\rho_{C,R}^{copula} = 0.30$ の設定値に基づいている。以下では、相互依存関係のモデル化の相違が CVA に与える影響について、図 11 および図 12 の数値計算結果に基づき考察する。

図 11、図 12 より No WWR の場合と正規コピュラのみによる場合で、最長満期で比較すると CVA 評価値が約 4.5 倍に増加していることがわかる。コピュラ・アプローチでは Cpty と参照体のデフォルト時刻の相互依存関係を直接考慮しているため、デフォルト強度とデフォルト時刻の関連性が低いというデフォルト強度モデルの欠点が改善されている。

正規コピュラに加えて、デフォルト強度の同時ジャンプを考慮した場合には、コピュラ関数を通じたデフォルト時刻の相互依存関係に加えて、同時点のジャンプによる Cpty と参照体のデフォルト確率の急激な高まりを表現できることから、正規コピュラのみの場合に比べて、最長満期の比較で、CVA 評価値が 11% 増加している。また、デフォルト強度モデルでの同時ジャンプの場合と比較すると、最長満期で比較して、CVA 評価値が約 3 倍に増加している。さらに、CVA 評価値の水準も構造モデルの場合と同水準の大きさとなっている。

図 13 は、コピュラ関数を通して、Cpty のデフォルトがどのように参照体のデフォルト確率に影響を与えるのかを表現したものであり、Cpty のデフォルトがコピュラ関数を通じて参照体の累積デフォルト確率に与える影響を示している。ここでは、コピュラ関数による相互依存関係を考慮しないとき（$\rho_{C,R}^{copula} = 0$ のとき）の参照体の累積デフォルト確率を 0.1 に固定している。図より、コピュラ関数の相関パラメータ（$\rho_{C,R}^{copula}$）を大きくするほど、Cpty デフォルト条件付の参照体デフォルト確率は増加することがわかる。これは正規コピュラの相関パラメータに正の値を与えたことと整合する。

（５） ジャンプ・サイズと相関係数の決定

Cpty と参照体のデフォルト強度のジャンプ・サイズは、理念的にはそれぞれの CDS プレミアムの市場気配値から求めた生存確率にキャリブレートすることで得られるが、２．（５）節での考察と同様、そうしたキャリブレーションは不安定になることから、Brigo, Morini and Pallavicini [2013]に倣い、本稿では$\nu_C = \nu_R = 0.05$と外生的に仮定する。また、Cpty と参照体のデフォルト強度に関する同時ジャンプ強度についても、20 年に 1 回の生起を想定して、$\eta = 0.05$に外生的に固定した。これらを所与として、同時ジャンプを与えた場合の Cpty と参照体のデフォルト強度間の相関係数が、ブラウン運動の線形相関のみを与えた場合の相関係数と一致するように $\rho_{C,R}^{jump}$ を算定する（計算の詳細については補論２．（３）を参照）。$\eta = 0.05$ と仮定したときに計算された$\rho_{C,R}^{jump}$を表 3 に示す。

構造モデルの場合、CCS のケースと同様の理由から、バリア水準の不確実性を考慮した場合のブラウン運動の線形相関は、不確実性を考慮しない場合（ブラウン運動の線形相関のみによる場合）と等しいとの簡便な仮定を置いた。

４．担保を考慮した場合の WWR

本節では２、３節の WWR を考慮した CVA 計算に、担保受け取りの効果を反映した場合を検討する。Cpty からの受入担保として、現金による変動証拠金のみを対象とし、独立担保額（または当初証拠金）は考慮しない。また、信用極度額および最低引渡額はともにゼロとする。リスクのマージン期間δ（margin period of risk：MPoR）[11]は 10 営業日とする。

上記の前提条件より、担保を考慮した場合の CCS あるいは CDS の CVA は、Cpty のデフォルト時刻をτと表記して、(2)式あるいは(30)式に代わり、以下のように書き改めることができる。

$$CVA^{col} = \mathrm{LGD} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[DF(t_0, t_i)\, E(t_i)\, | \tau \in (t_{i-1}, t_i]]\, PD_C(t_{i-1}, t_i), \tag{57}$$

$$E(t_i) = (V^{No\ CVA}(t_i)^+ - C(t_i))^+, \tag{58}$$

---

[11] MPoR は、デフォルトした Cpty との取引のネッティング・セットをカバーする担保の最後の取引時点から当該 Cpty との取引がクローズ・アウトし、当該取引に係る市場リスクが再ヘッジされる（re-hedge）までの期間のことを指す（BCBS [2006]）。

$$C(t_i) = V^{No\ CVA}(t_i - \delta)^+. \tag{59}$$

ただし、$C(t_i)$ は時点 t_i で利用可能な担保勘定（$C(t_i) > 0$なら受入担保、$C(t_i) < 0$なら差出担保）、$t_i - \delta$ は Cpty のデフォルト直前の最終担保授受日とする。

前節までは Cpty が時点 t_i でデフォルトと同時にクローズ・アウトすると仮定していた。担保効果を考慮する本節では、Cpty との取引は時点 t_i でクローズ・アウトされ、Cpty のデフォルトは最終担保取引時点 $t_i - \delta$ の直後（ただし、時点t_iより前）に生起するものと仮定する。そして、時点 t_i の条件付期待エクスポージャーを算定する。時点t_iで利用可能な担保勘定$C(t_i)$の計算は以下の手続きに従う。

① 担保を考慮しない場合のシミュレーションを行う。
② 時点 t_i のリスク・ファクター値を前提に、1 時点前（t_{i-1}）のリスク・ファクター値および t_{i-1} から t_i までのリスク・ファクターを駆動したブラウン運動の値を取得する。
③ 時点 t_{i-1} のリスク・ファクター値にドリフト項とブラウン運動による増分の 1/2 を加えることにより、時点 $t_i - \delta$ のリスク・ファクター値を得る[12]。
④ ③で計算したリスク・ファクター値に基づいて時点 $t_i - \delta$ の取引価格 $V^{No\ CVA}(t_i - \delta)$ を計算する。
⑤ (58)、(59)式より担保を考慮した場合のデフォルト条件付エクスポージャーを計算する。
⑥ ①～⑤までの手順をシミュレーション回数 M回分繰り返し、(57)式より CVA を計算する。

構造モデル、デフォルト強度モデルおよびコピュラ・アプローチの WWR モデル化手法により計算した CCS および CDS の満期別 CVA 評価値を図 14～図 19 に示した。なお、パラメータの設定は担保を考慮しない場合と同一である。これらの図から、商品別（CCS あるいは CDS）、モデル別（構造、デフォルト強度、コピュラ）で、担保を考慮しない場合と同様の大小関係をほぼ保ったまま全体的に CVA 評価値が小さくなっており、担保（変動証拠金のみ）の受け取りが Cpty の条件付エクスポージャーを削減する効果を確認できる。

モデル別、商品別に最長満期で無担保の場合と比較してみると、構造モデル（ブラウン運動の相関、バリアの不確実性）での有担保の CVA 評価値は、モデル化の方法に依らず、CCS の場合で無担保の 1.9%～4.1%、CDS の場合で無担保の 5.9%～12.1%の水準となっている。デフォルト強度モデルにおいても担保の受

[12] 本稿の分析では、サンプリング間隔を 1 ヵ月としていることから、10 営業日の MPoR のファクター変動を再現するために、簡便的に、時点間の実現変動率の 1/2 を用いている。より長いサンプリング間隔および異なる MPoR を考慮する場合には、例えばブラウン橋（Andersen, Pykhtin, and Sokol [2016], Pykhtin [2009]）を用いることなども考えられる。

け取りにより大幅に CVA を削減できるものの（CCS の場合で無担保の 1.7%～6.1%、CDS の場合で無担保の 11.6%～20.4%の水準）、同時ジャンプを用いてモデル化した場合には、MPoR の間に担保額を上回るエクスポージャーの急激な増加が生じるため、CVA 減少効果が大きく削減されている。最長満期で単純な相関モデルと同時ジャンプのモデルを比較すると、CCS の場合で無担保 No WWR の CVA 評価値の 1.9%が 4.0%になり、CDS の場合で無担保 No WWR の CVA 評価値の 15.4%が 24.2%になっている。コピュラ・アプローチでも担保を考慮した場合には、CVA が大きく減少していることがわかる（CCS の場合で無担保の 1.6%～7.3%、CDS の場合で無担保の 8.7%～26.8%の水準）。ただし、同時ジャンプでモデル化した場合には、デフォルト強度モデルの場合と同様に、MPoR の間にエクスポージャーがジャンプして担保額を大きく上回ることがあるため、CVA 減少効果が大きく削減されていることがわかる（最長満期で正規コピュラのみの場合とコピュラに同時ジャンプを考慮した場合を比較すると、CCS の場合で無担保 No WWR の CVA 評価値の 1.9%が 3.8%になり、CDS の場合で無担保 No WWR の CVA 評価値の 38.9%が 69.4%になっている）。この結果は、WWR の本質が同時ジャンプで表現されるような同時分布のテール事象であること考えれば、変動証拠金のみでは CVA における WWR を担保しきれない可能性を示唆している[13]。この点に鑑みれば、2016 年 9 月から段階的に導入される非清算デリバティブ取引に係る証拠金規制[14]における当初証拠金の授受は、CVA における WWR を担保するための有効な手段となり得ると考えられる[15]。

５．キャリブレーション

本節では４節までに用いた生存確率の計算方法とパラメータのキャリブレーション方法を示す[16]。LGD（＝1－回収率）については、C1 銀行の生存確率計算においては$\mathrm{LGD} = 0.6$、C2 銀行および R 事業会社においては$\mathrm{LGD} = 0.65$と設定している。

---

[13] 変動証拠金の授受頻度を高く設定したとしても MPoR が長期化すれば、エクスポージャーは受取担保額を大きく上回る可能性がある。

[14] 2011 年の G20 カンヌ・サミットの合意を受けて 2013 年 9 月に BCBS/IOSCO から「中央清算されない店頭デリバティブ取引に係る証拠金規制に関する最終報告書」が公表された（2015 年 3 月改訂）。2016 年 9 月から段階適用される予定。

[15] 非清算デリバティブ取引に係る証拠金規制においては、ソブリンや事業会社等との取引が規制対象外となっているほか、為替フォワードや通貨スワップ等一部のデリバティブ取引については元本交換部分に対する当初証拠金の授受が免除されている等、無視し得ない無担保取引部分が残ることになる。このため、CVA およびそれに付随する WWR はプライシングやリスク管理上で依然として重要であり続けると考えられる。

[16] 本節で示すキャリブレーション手法は想定される手法の 1 つであり、この方法が実務で用いられている唯一のキャリブレーション方法ではない。

（１） CDS プレミアムにインプライされる生存確率の計算方法

満期をt_b、CDS プレミアムをR^{Mkt}とする CDS の評価式$V_{\mathrm{CDS}}^{t_b}$は、以下のように表現できる。

$$
\begin{aligned}
&V_{\mathrm{CDS}}^{t_b}(R^{Mkt}, \mathrm{LGD}) \\
&= \sum_{i=1}^{b} DF(t_0, t_i)\Big(R^{Mkt}\,(t_i - t_{i-1}) \cdot \mathbb{Q}^{Mkt}(\tau > t_i) - \mathrm{LGD} \cdot \mathbb{Q}^{Mkt}(\tau \in (t_{i-1}, t_i])\Big),
\end{aligned}
\tag{60}
$$

$$
\mathbb{Q}^{Mkt}(\tau \in (t_{i-1}, t_i]) = \mathbb{Q}^{Mkt}(\tau > t_{i-1}) - \mathbb{Q}^{Mkt}(\tau > t_i). \tag{61}
$$

ただし、$\mathbb{Q}^{Mkt}(\cdot)$は CDS プレミアムの市場価格にインプライされる確率を示している。CDS プレミアムの市場気配値が入手可能な年限 6M, 1Y, … のそれぞれについて、時間のグリッド間隔を 3 ヵ月と設定した上で、デフォルト強度を以下のようにキャリブレートする。

最初に、6M の CDS プレミアムの市場気配値を用いてデフォルト確率$\mathbb{Q}^{Mkt}(\tau \in (t_0, t_1])$および$\mathbb{Q}^{Mkt}(\tau \in (t_1, t_2])$を計算する。まず、満期$t_1$(3M)と満期$t_2(6M)$の CDS プレミアムは等しい（$R_{3M}^{Mkt} = R_{6M}^{Mkt}$）と仮定する。次に、(60)式については次式を満たすように$\mathbb{Q}^{Mkt}(\tau \in (t_0, t_1])$を計算する。

$$
V_{\mathrm{CDS}}^{t_1}\big(R_{3M}^{Mkt}, LGD\big) = 0. \tag{62}
$$

$\mathbb{Q}^{Mkt}(\tau \in (t_1, t_2])$は、先に計算した$\mathbb{Q}^{Mkt}(\tau \in (t_0, t_1])$と$\mathbb{Q}^{Mkt}(\tau > t_0) = 1$を所与として、次式を満たすように計算する。

$$
V_{\mathrm{CDS}}^{t_2}\big(R_{3M}^{Mkt}, R_{6M}^{Mkt}, LGD\big) = 0. \tag{63}
$$

次に、満期 9M の CDS プレミアムの市場気配値は入手できないことから、入手可能な 6M と 1Y の市場気配値（R_{6M}^{Mkt}およびR_{1Y}^{Mkt}）を用いて、次のような線形的な内挿法により 9M の市場気配値の代替値R_{9M}^{Mkt}を得る。

$$
R_{9M}^{Mkt} = \frac{(t_4 - t_3)R_{6M}^{Mkt} + (t_3 - t_2)R_{1Y}^{Mkt}}{t_4 - t_2}. \tag{64}
$$

この代替的気配値R_{9M}^{Mkt}と、先に計算したデフォルト確率を所与として、以下の式を満たすように$\mathbb{Q}^{Mkt}(\tau \in (t_2, t_3])$を計算する。

$$
\mathrm{V}_{\mathrm{CDS}}^{t_3}\big(R_{3M}^{Mkt}, R_{6M}^{Mkt}, R_{9M}^{Mkt}, LGD\big) = 0. \tag{65}
$$

以下、同様の手順で CDS プレミアムの市場気配値が入手可能な年限までのデフォルト強度を求める。

本稿では 2015 年 2 月 18 日の市場気配値を参考に CDS プレミアムを表 4 のように設定した。

（２）　JCIR 過程におけるパラメータ

デフォルト強度$\lambda(t)$のモデルとして(15)あるいは(42)式で定義したJCIR過程の各パラメータのキャリブレーション方法を説明する。JCIR 過程に基づく生存確率は、評価時点t_0でのデフォルト強度をλ_0とし、対象企業のデフォルト時刻をτとして、以下のように解析的に解くことができる（導出は補論３.（１）を参照)。

$$\mathbb{Q}(\tau > t_i) = A(t_0, t_i)C(t_0, t_i)\exp\{-B(t_0, t_i)\lambda_0\}, \tag{66}$$

$$A(t_0, t_i) = \left[\frac{2h\exp\left\{\dfrac{(\kappa + h + 2\nu)(t_i - t_0)}{2}\right\}}{2h + (\kappa + h + 2\nu)(\exp\{h(t_i - t_0)\} - 1)}\right]^{2\eta\nu/(\sigma_\lambda^2 - 2\kappa\nu - 2\nu^2)}, \tag{67}$$

$$B(t_0, t_i) = \frac{2(\exp\{h(t_i - t_0)\} - 1)}{2h + (\kappa + h)(\exp\{h(t_i - t_0)\} - 1)}, \tag{68}$$

$$C(t_0, t_i) = \left[\frac{2h\exp\left\{\dfrac{(\kappa + h)(t_i - t_0)}{2}\right\}}{2h + (\kappa + h)(\exp\{h(t_i - t_0)\} - 1)}\right]^{2\kappa\theta/\sigma_\lambda^2}, \tag{69}$$

$$h = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma_\lambda^2}. \tag{70}$$

(66)式の左辺が本節（１）で求めた生存確率と一致するよう以下のようにパラメータのキャリブレーションを行う。

① $i = 1, \ldots, N$について、JCIR 過程のパラメータの初期値、(66)式および CDS プレミアムから導出した生存確率$\mathbb{Q}^{Mkt}(\tau > t_i)$を用いて、

$$\psi(t_1, \boldsymbol{\beta}) = \ln\left(\mathbb{Q}^{Mkt}(\tau > t_i)\right) - \ln\left(\mathbb{Q}(\tau > t_i)\right),$$

を計算する。

② 全ての$i = 1, \ldots, N$に対して、$\psi(t_i, \beta)$が正であり、かつ$\Psi(t_N, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{N}\psi(t_i, \boldsymbol{\beta})^2$が最小となるよう、$2\kappa\theta > \sigma_\lambda^2$を制約条件として JCIR 過程のパラメータをキャリブレートする。

上記手順に基づきジャンプを含まない場合（$\eta = 0$）でのキャリブレーション結果を表 5 に示す。CIR シフト項が正の値であるという制約から、CDS プレミアムの市場気配値が小さいときには初期値が 0 に近い値になっている場合が多い。

ジャンプの強度を$\eta = 0.05$と固定して、ジャンプを考慮した場合のキャリブレーション結果を表 6 に示す。

なお、CDS の CVA 算出の際には、Cpty のデフォルト時におけるエクスポージャーの計算においても参照体の生存確率を求めるのに(66)式を用いるが、このときはt_0をτ_Cと読み替えて計算する。

（３）　構造モデルで用いるパラメータ

(10)式で導入したパラメータB、H_0の設定方法と時間に依存したボラティリティ$\sigma_A(t)$のキャリブレーションと(14)式で導入したストレス・シナリオにおけるバリア水準 H_0^{stress} のキャリブレーション方法は、以下のとおりである。

イ.　　バリアに不確実性がない場合

まず、バリアに不確実性が存在しない場合、つまりバリア $H(t)$が(10)式のみで表現されるとき、(9)式の資産価値過程の下で時点t_iまでに資産価値がバリアに触れていない生存確率$\mathbb{Q}(\tau > t_i, H_0)$は、時点$t_0$での資産価値とバリア水準をそれぞれ$A_0$, H_0として、(71)式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q}(\tau > t_i, H_0) = \Bigg[& \Phi\left(\frac{\ln\dfrac{A_0}{H_0} + \dfrac{2B-1}{2}\int_{t_0}^{t_i}\sigma_A^2(u)du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_i}\sigma_A^2(u)du}} \right) \\
& - \left(\frac{H_0}{A_0}\right)^{2B-1} \Phi\left(\frac{\ln\dfrac{H_0}{A_0} + \dfrac{2B-1}{2}\int_{t_0}^{t_i}\sigma_A^2(u)du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_i}\sigma_A^2(u)du}} \right) \Bigg].
\end{aligned} \tag{71}
$$

(71)式の生存確率において、H_0は常に資産価値A_0との比の形で出てきており、Brigo, Morini, and Pallavicini [2013]では、この比 H_0/A_0 を回収率に等しいと仮定している。本稿でも、この仮定に従い、時点t_0における企業価値はすべての企業において$A_0 = 1$、米国銀行である C1 銀行に対しては$H_0 = 0.4$、本邦銀行である C2 銀行および R 事業会社に対しては$H_0 = 0.35$とする。また、BについてはBrigo, Morini, and Pallavicini [2013]に従い、$B = 0$に設定した。その上で、(71)式を本節（１）で求めた生存確率に一致させるように$\sigma_A(t)$を求める。

上記手順に基づき行ったキャリブレーション結果を表 7 に示す。なお、CDS プレミアムの市場気配値が入手可能な年限は 10Y までであったため、20Y における生存確率の計算では10年において計算されたデフォルト強度を20Yまで一定として補外し計算を行った。また、Cpty のデフォルト時におけるエクスポー

ジャーの計算においても(71)式を用いるが、このときはt_0をτ_Cと読み替え計算する。

ロ.　　バリアに不確実性がある場合

次に、上記キャリブレーション手順を基に、バリア水準が通常シナリオの場合とストレス・シナリオの場合で異なる水準をとる 2 つのシナリオについての不確実性が存在する場合のキャリブレーション手順を示す。

通常シナリオでのバリア水準は、バリアに不確実性がない場合と同一である（$H_0^{normal} = H_0$）と仮定すると、時点t_iまでの生存確率は(71)式を用いて$\mathbb{Q}^{\mathrm{normal}}\left(\tau > t_i, H_0^{normal}\right)$で与えられる。一方、ストレス・シナリオでの時点$t_i$までの(14)式の生存確率は(71)式を用いて$\mathbb{Q}^{\mathrm{stress}}(\tau > t_i, H_0^{stress})$で与えられる。このとき、バリア水準に関する不確実性が存在する場合の時点t_iまでの生存確率は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(\tau > t_i) = (1-p) \times \mathbb{Q}^{\mathrm{normal}}\left(\tau > t_i, H_0^{normal}\right) \\ + p \times \mathbb{Q}^{\mathrm{stress}}(\tau > t_i, H_0^{stress}).\end{aligned} \tag{72}$$

$H_0^{normal} = H_0$と仮定するため、キャリブレーション対象となるパラメータは、$p, H_0^{stress}, \sigma_A(t)$となる。シナリオのウェイト$p$に関しては、デフォルト強度モデルにおけるジャンプ頻度と一致させるように、$p = 0.05$ で外生的に固定し、H_0^{stress} と $\sigma_A(t)$ を以下のようにキャリブレートする。

① まず、$\sigma_A(t) = \sigma_A$ と仮定して、ストレス・シナリオでのバリア水準H_0^{stress} をキャリブレートする。

② $\sigma_A(t) = \sigma_A$の仮定を外し、満期が短い CDS プレミアムの年限から$\mathbb{Q}^{\mathrm{Mkt}}(\tau > t_i)$ との 2 乗誤差が最小となるように $\sigma_A(t)$ を逐次的にキャリブレートする。

上記手順に基づき行ったキャリブレーション結果を表 8 に示す。

６．まとめ

本稿では、安達・末重・吉羽 [2016]の 3 節および 4 節で示された CVA に関する WWR モデル化手法のうち、Cpty の信用リスクを記述する、(1)構造モデル、(2)デフォルト強度モデル、そして、デリバティブ・エクスポージャーと信用リスクの相互依存関係を表現するための(3)コピュラ・アプローチの 3 つの手法について、商品例として CCS と CDS を取り上げて実装し、CVA 評価値および条件付エクスポージャーの数値計算を行い、各モデルの特徴を比較した。各モデ

ルの長所・短所を表でまとめると、表 9 のように整理される。

構造モデルでは、Cpty の資産価値と対象商品価値を駆動するリスク・ファクター（CCS : 為替レート、CDS : 参照体の資産価値）の（線形）相関のみを考慮したモデル（相関モデル）とバリア水準の不確実性を考慮したモデル（不確実性モデル）の 2 つの WWR モデルを実装し、各商品の CVA を算定した。WWR を考慮しない場合に比べて、相関モデルで相応の CVA の増加が観察された。相関モデルと不確実性モデルの CVA には CCS では大きな差を認めることができなかったが CDS では不確実性モデルの CVA の方が大きく評価された。こうした点、急激な相互依存関係の変化や、予測できないデフォルト事象の表現および短期テナーの CDS へのフィッティングには、バリア水準の不確実性の導入は一定の有効性が認められた[17]。担保（変動証拠金のみ）を考慮した場合の計算結果からは、モデル間の CVA の大小関係は無担保の場合と変わらないが、CVA の水準は大きく減少しており、変動証拠金のみ（MPoR は 10 日間）でも CVA を大幅に削減できることがわかった。

デフォルト強度モデルでは、Cpty のデフォルト強度とリスク・ファクター（CCS : 為替レート、CDS : 参照体のデフォルト強度）の線形相関のみを考慮したモデル（相関モデル）と両者の同時ジャンプを考慮したモデルの 2 つの WWR モデルを実装し、各商品の CVA を算定した。デフォルト強度モデルにおいて強度過程がブラウン運動のみによって駆動される場合には、デフォルト強度の変動とデフォルト時刻の関連性が弱く、Cpty のデフォルト時に必ずしも為替レートの減価幅（CCS）や参照体のデフォルト確率（CDS）が大きくなっているとは限らない。このため、数値計算結果においても、CCS と CDS の両商品において、WWR を考慮しない場合と相関モデルの CVA の間に顕著な差を見出すことはできなかった。同時ジャンプを導入した場合には、CCS については同時ジャンプ導入による WWR 増加効果が、為替レートのモーメントなどを調整することにより生じる WWR 低減効果によりほぼ相殺されており、CVA 評価値の大きな増加はみられなかったが、CDS については相関モデルの 1.7 倍程度の CVA 評価値となっている。ただし、CDS の場合でも、構造モデルの算出する CVA と比較すると、概ね 1/3 程度に止まっている。これは、CDS のようにクレジットを参照する主体が複数存在する場合、それらの間のデフォルト時刻の相互依存関係をデフォルト強度過程の相互依存関係のみで関連付けることが難しいことを示唆している。担保を考慮した場合の計算結果からは、構造モデルの場合と同様に CVA の値は大きく減少している。ただし、同時ジャンプを導入した場合には、

[17] 参照体と Cpty に適用されるシナリオが共通するという設定は、現実的には財務内容の悪化が潜在的かつ同時に生じる可能性のある親子会社、関連会社等の場合に限定される。そのため、バリアの不確実性を現実に即して適用できるケースは限られたものになる。

MPoR の間にエクスポージャーがジャンプして担保額を大きく上回ることがあるため、変動証拠金による CVA 減少効果は大きく削減されており、当初証拠金等による担保の補完が重要であることが示された。

コピュラ・アプローチでは、デフォルト強度モデルを基に求めた Cpty の累積デフォルト確率とリスク･ファクターの累積分布（CCS:為替レートの累積変化、CDS：参照体の累積デフォルト確率）を正規コピュラによって接合することにより WWR を表現している。本稿では、デフォルト強度モデルをベースに同時ジャンプ無し/有りの 2 種類のモデルについて実装・計算を行った。数値計算の結果、WWR を考慮しない場合に比べて、最長満期でみて、同時ジャンプ無しモデルでも CVA が、CCS で約 1.2 倍、CDS で約 4.5 倍に増加している。これは、コピュラの導入により、Cpty のデフォルト時刻と為替レートの変動（CCS）または参照体のデフォルト時刻（CDS）の相互依存関係を直接結び付けたため、デフォルト強度モデルのみの場合に比べて WWR 増加効果が高まったためと考えられる。CDS では、デフォルト強度が 2 つ存在することから（CCS の場合は 1 つ）、デフォルト時刻とリスク・ファクターの相互依存関係の強化の効果が大きいと考えられる。さらに、同時ジャンプ・モデルの CVA については、デフォルト強度モデルにおける同時ジャンプ・モデルに比べて、CCS では約 1.2 倍、CDS では約 3 倍に増加している。これは、コピュラによる相互依存関係の強化に加え、ジャンプにより原資産価格の変動とデフォルト確率の関連性が強まったためである。担保を考慮した場合の計算結果からは、デフォルト強度モデルの場合と同様な特徴、問題点が浮き彫りになった。

本稿では、先行研究に即して実務で利用可能なモデルを実装・数値評価し、モデルの特徴を論じた。特に、WWR の表現には、取引デリバティブ価値の急激な変化と Cpty のデフォルト強度のジャンプあるいはバリアの不確実性などのデフォルト可能性の急激な変化が重要な要素となる。さらに、本稿では、Cpty のデフォルト強度のジャンプの取り扱いについては、先行研究で不足していた累積強度の分布を求める手法を確立した。本稿で示したモデルを基に CVA の WWR に関する実務上のモデル化について議論が深まることを期待したい。

参考文献

安達 哲也・末重 拓己・吉羽 要直、「CVA における誤方向リスク・モデルの潮流」、金融研究所ディスカッション・ペーパーNo.2016-J-5、日本銀行金融研究所、2016 年

神保 道夫、『複素関数入門』、岩波書店、2003 年

山下 智志・吉羽 要直、「デフォルト率と回収率の負の相関を考慮した担保付貸出の損失評価：CIR 型ハザード率過程での解析的評価」、金融研究所ディスカッション・ペーパー No.2010-J-10、日本銀行金融研究所、2010 年

Andersen, Leif B. G., Michael Pykhtin, and Alexander Sokol, "Rethinking Margin Period of Risk," available at SSRN : http://ssrn.com/abstract=2719964, 2016.

Bailey, David H., and Paul N. Swarztrauber, "The fractional Fourier transform and applications," *SIAM Review*, **33**(3), 1991, pp.389–404.

Basel Committee on Banking Supervision (BCBS), "Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework Comprehensive Version – Annex IV (Treatment of Counterparty Credit Risk and Cross Product Netting)," Bank for International Settlements, 2006.

————, "Consultative Document: Review of the Credit Valuation Adjustment Risk Framework," Bank for International Settlements, 2015.

Böcker, Klaus, and Michael Brunnbauer, "Path-consistent wrong-way risk," *Risk*, **27**(11), 2014, pp.48–53.

Brigo, Damiano, and Agostino Capponi, "Bilateral counterparty risk with application to CDSs," *Risk*, **23**(3), 2010, pp.85–90.

————, and Naoufel El-Bachir, "An Exact Formula for Default Swaptions' Pricing in the SSRJD Stochastic Intensity Model," *Mathematical Finance*, **20**(3), 2010, pp.365–382.

————, and Massimo Morini, "Structural credit calibration," *Risk*, **19**(4), 2006, pp.78–83.

————, ————, and Andrea Pallavicini, *Counterparty Credit Risk, Collateral and Funding with Pricing Cases for All Asset Classes*, Wiley, 2013.

————, and Marco Tarenghi, "Credit Default Swap Calibration and Equity Swap Valuation under Counterparty Risk with a Tractable Structural Model," Working Paper, 2004.

Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll and Stephen Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, **53**(2), 1985, pp.385–407.

Duffie, Darrell, Jun Pan, and Kenneth J. Singleton, "Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-diffusions," *Econometrica*, **68**(6), 2000, pp.1343–1376.

Morini, Massimo, *Understanding and Managing Model Risk: A Practical Guide for Quants, Traders and Validators*, Wiley, 2011.

Pykhtin, Michael, “Modeling credit exposure for collateralized counterparties,” *Journal of Credit Risk*, **5**(4), 2009, pp.3–27.

————, and Alexander Sokol, “Exposure under systemic impact,” *Risk*, **26**(9), 2013, pp.100–105.

表 1　パラメータの値

Δ (年)	r_d	r_f	q_{C1}	q_{C2}	q_R	$FX(t_{con})$ (円/ドル)
$1/12$	0.136%	1.52%	0.4%	0.3%	1.5%	¥120

表 2　為替レートとデフォルト強度の同時ジャンプに伴う相関係数の調整

満期	σ_{FX}	$\rho_{FX,\lambda}$	$\rho_{FX,\lambda}^{jump}$	γ	ν	η
20Y	0.16	–0.3	0.428	0.25	0.075	0.05
		–0.4	0.145			
		–0.5	–0.138			
10Y	0.15	–0.3	0.525			
		–0.4	0.236			
		–0.5	–0.054			
5Y	0.12	–0.3	0.986			
		–0.4	0.659			
		–0.5	0.333			

表 3　Cpty と参照体のデフォルト強度の同時ジャンプに伴う相関係数の調整

$\rho_{C,R}$	$\rho_{C,R}^{jump}$	ν_C	ν_R	η
0.2	–0.787	0.05	0.05	0.05
0.3	–0.440			
0.4	–0.093			
0.5	0.254			

表 4　CDS プレミアム（bp 表示）

	6M	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	7Y	10Y
C1 銀行	25.3	31.0	41.8	54.6	70.0	85.4	108.7	128.0
C2 銀行	9.1	13.1	24.1	33.5	49.0	63.7	80.9	91.4
R 事業会社	47.6	76.9	101.5	131.4	155.1	181.1	201.0	210.2

表 5　CIR 過程に従うデフォルト強度パラメータのキャリブレーション

	κ	θ	σ_λ	λ_0
C1 銀行	0.193	0.035	0.106	1.0×10^{-6}
C2 銀行	0.128	0.029	0.082	1.0×10^{-6}
R 事業会社	0.481	0.039	0.184	1.0×10^{-6}

表 6　JCIR 過程に従うデフォルト強度パラメータのキャリブレーション

	κ	θ	σ_λ	λ_0	ν	η
C1 銀行	0.173	0.019	0.077	1.0×10^{-6}	0.075	0.05
C2 銀行	0.094	0.013	0.047	1.0×10^{-6}	0.05	
R 事業会社	0.467	0.034	0.169	1.0×10^{-6}	0.05	

表 7　バリアの不確実性がない構造モデルのボラティリティ$\sigma_A(t_i)$に関するキャリブレーション

	6M	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	7Y	10Y	20Y
C1 銀行	0.404	0.176	0.159	0.160	0.170	0.177	0.177	0.175	0.169
C2 銀行	0.421	0.182	0.176	0.163	0.185	0.186	0.171	0.155	—
R 事業会社	0.485	0.263	0.217	0.226	0.226	0.244	0.223	0.213	—

表 8　バリアの不確実性がある構造モデルのボラティリティ$\sigma_A(t_i)$とストレス時のバリア水準H_0^{stress}に関するキャリブレーション

	6M	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	7Y	10Y	20Y	H_0^{stress}
C1	0.188	0.135	0.170	0.209	0.196	0.188	0.181	0.174	0.167	0.757
C2	0.279	0.176	0.198	0.184	0.198	0.192	0.173	0.155	—	0.605
R	0.361	0.304	0.236	0.233	0.228	0.234	0.221	0.211	—	0.615

表 9　相互依存関係のモデル化とその長所・短所

	構造モデル		デフォルト強度モデル		コピュラ・アプローチ	
相互依存関係	ブラウン運動の線形相関	ジャンプ	ブラウン運動の線形相関	バリアの不確実性	正規コピュラ	正規コピュラ＋ジャンプ
WWR の把握	○	○	×	△	○	○
CDS カーブへのキャリブレーション	○	○	○	○	○	○
計算コスト	○	○	○	○	△	△
適用範囲	○	△	○	○	○	○
担保の効果	○	○	○	△	○	△

図 1　構造モデルにおける満期別 CVA 評価値（CCS、無担保）

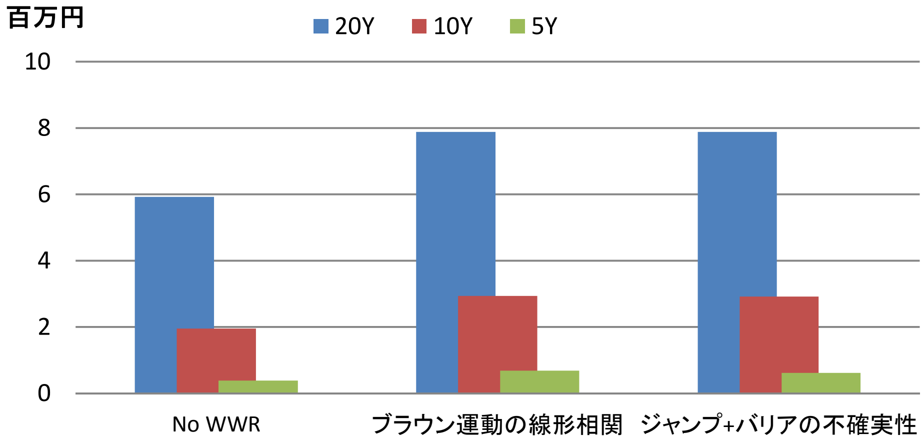


図 2　構造モデルにおける満期 20Y のデフォルト条件付期待エクスポージャー（CCS、無担保）

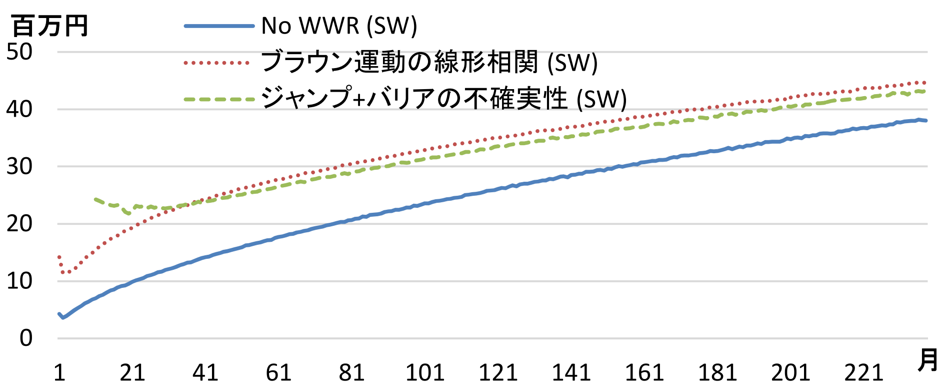


図 3　デフォルト強度モデルにおける満期別 CVA 評価値（CCS、無担保）

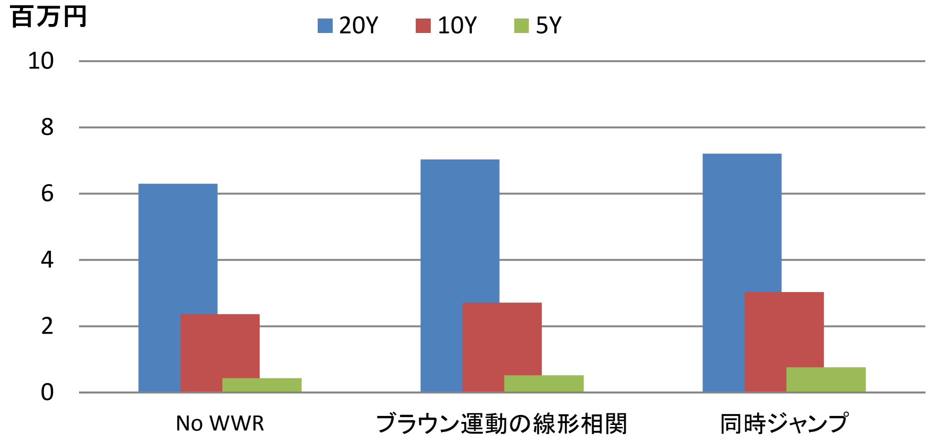


図 4　デフォルト強度モデルにおける満期 20Y のデフォルト条件付期待エクスポージャー（CCS、無担保）

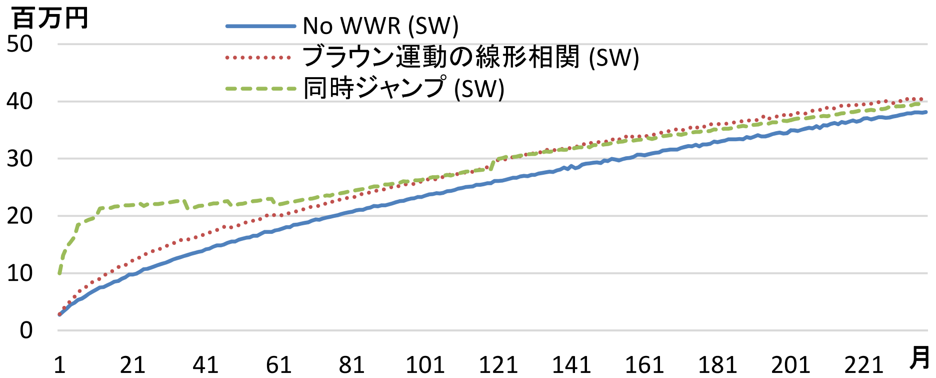


図 5　コピュラ・アプローチにおける満期別 CVA 評価値（CCS、無担保）

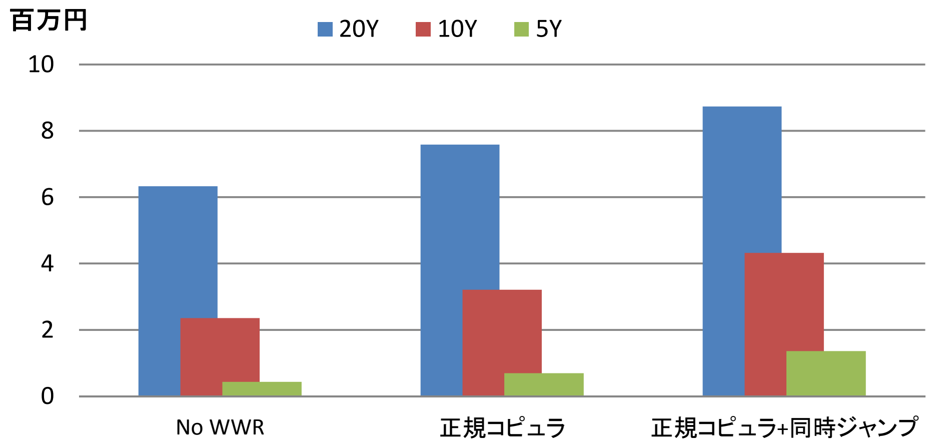


図 6　1Y と 19Y における無条件エクスポージャーとウェイト関数の関係

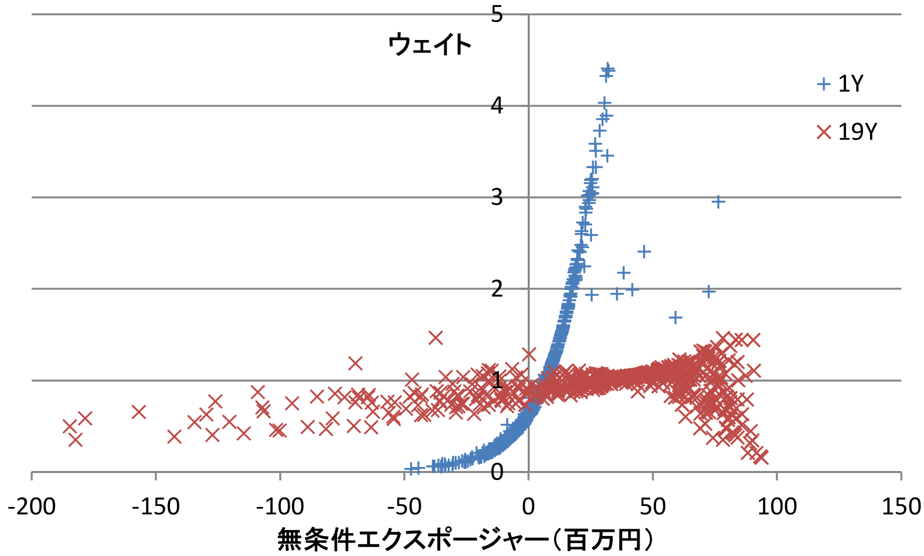


図 7　構造モデルにおける満期別 CVA 評価値（CDS、無担保）

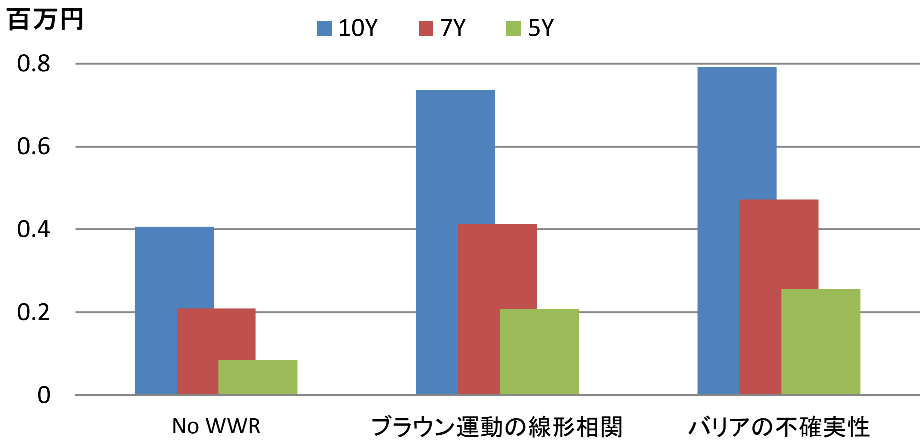


図 8　構造モデルにおける満期 10Y のデフォルト条件付期待エクスポージャー（CDS、無担保）

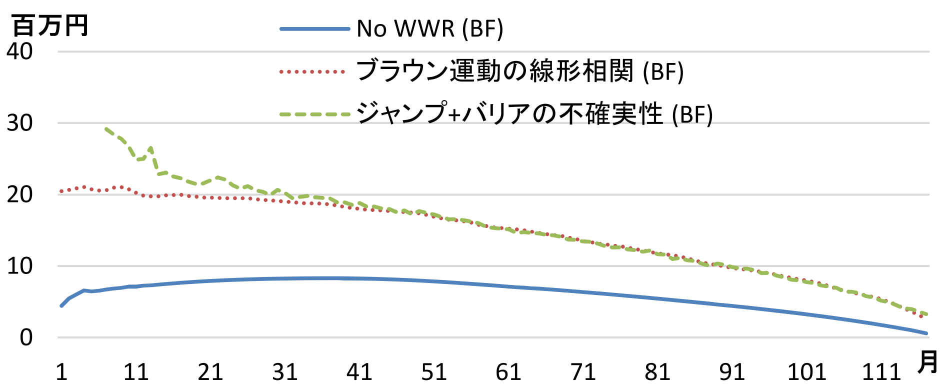


図 9　デフォルト強度モデルにおける満期別 CVA 評価値（CDS、無担保）

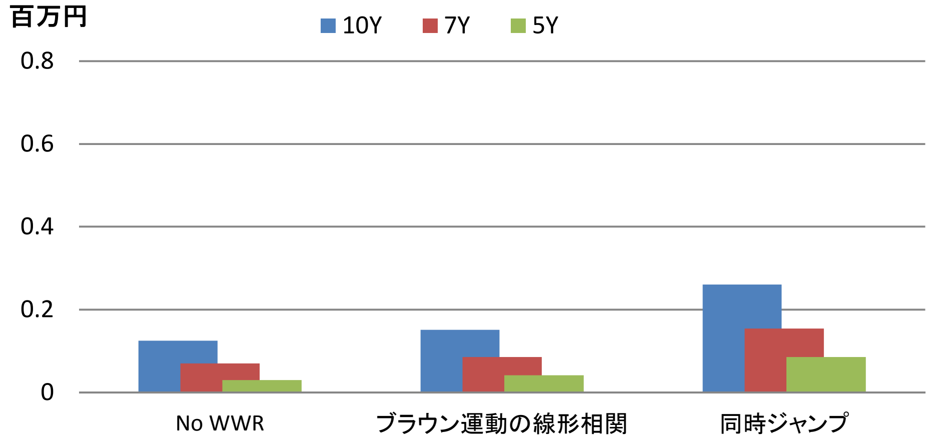


図 10　デフォルト強度モデルにおける満期 10Y の BF 法・SW 法によるデフォルト条件付期待エクスポージャー比較（CDS、無担保）

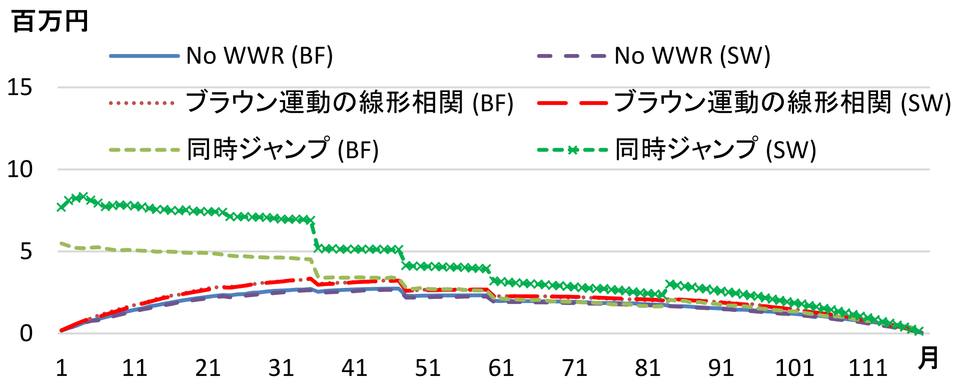


図 11　コピュラ・アプローチにおける満期別 CVA 評価値（CDS、無担保）

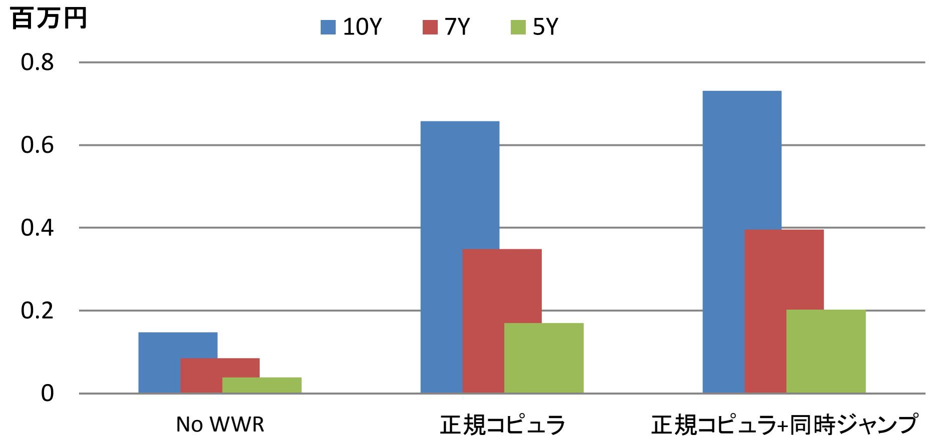


図 12　コピュラ・アプローチにおける満期 10Y のデフォルト条件付期待エクスポージャー（CDS、無担保）

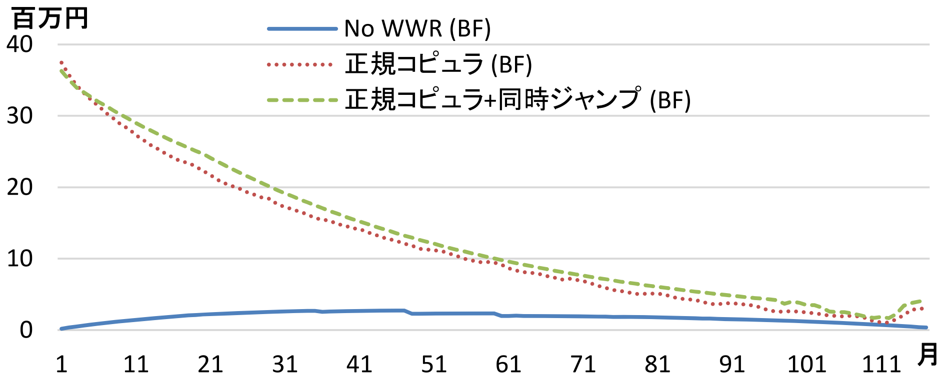


図 13　コピュラ関数による相関を考慮しないときの参照体の累積デフォルト確率を 0.1 に固定した場合に、Cpty の累積デフォルト確率がコピュラ関数を通して参照体の累積デフォルト確率に与える影響（CDS、無担保）

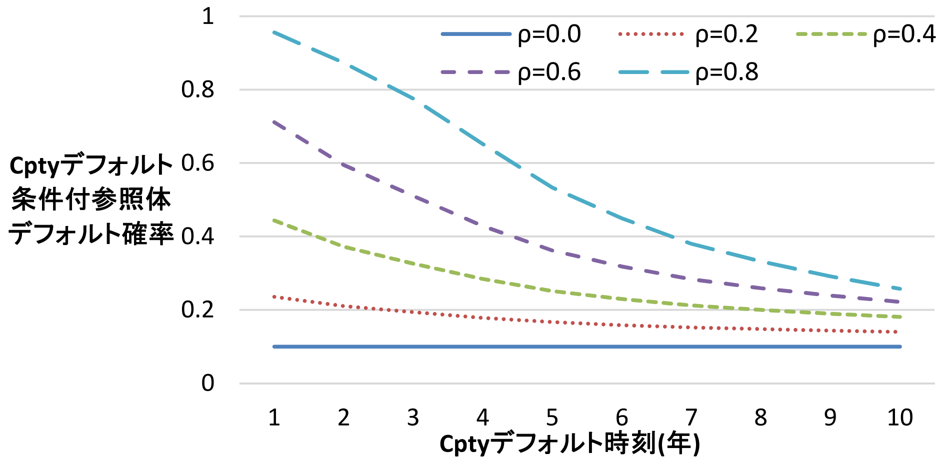


図 14　構造モデルにおける満期別 CVA 評価値（CCS、有担保）

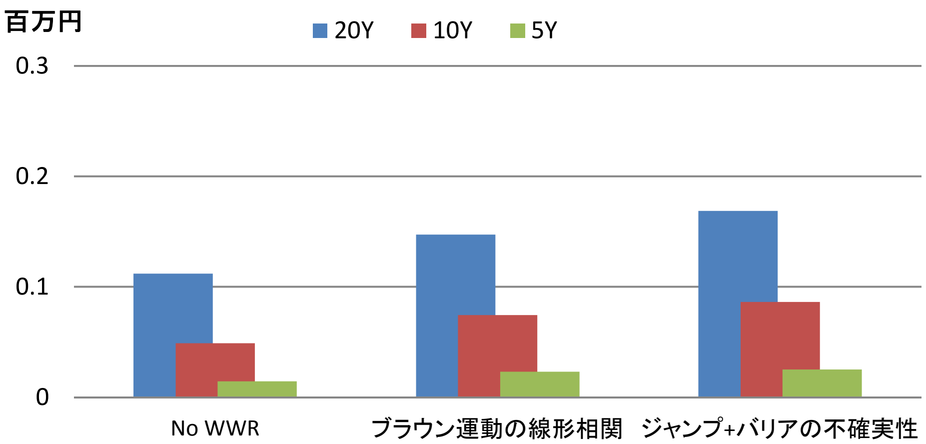


図 15　デフォルト強度モデルにおける満期別 CVA 評価値（CCS、有担保）

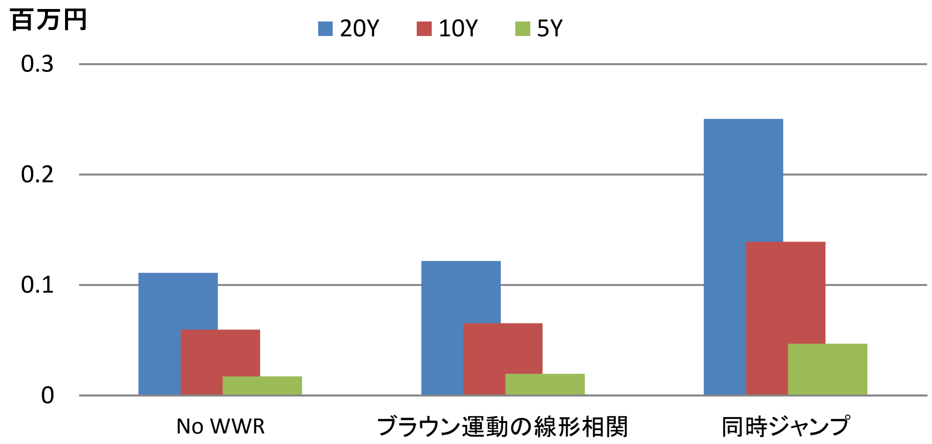


図 16　コピュラ・アプローチにおける満期別 CVA 評価値（CCS、有担保）

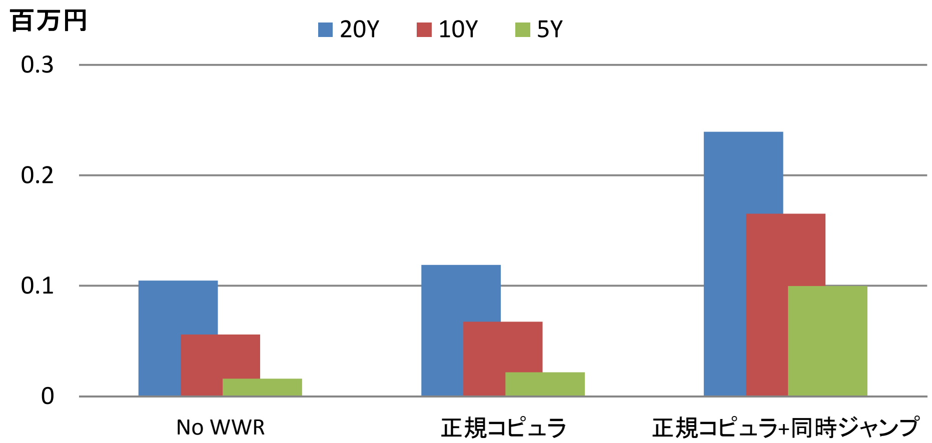


図 17　構造モデルにおける満期別 CVA 評価値（CDS、有担保）

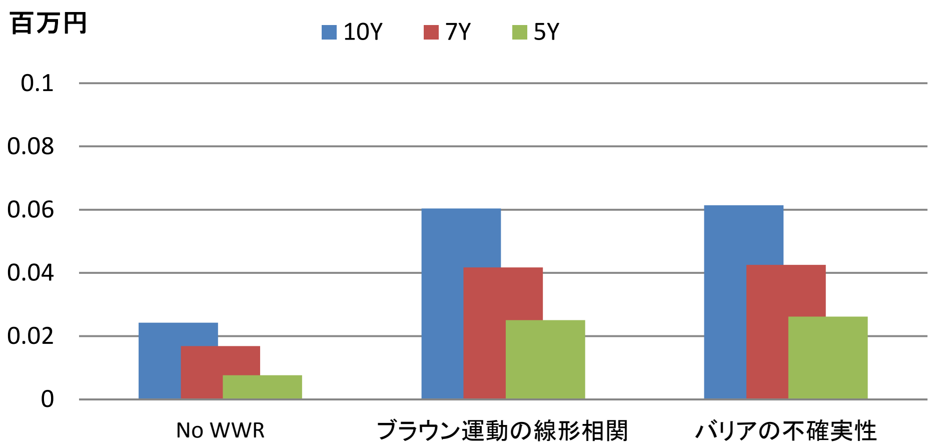


図 18　デフォルト強度モデルにおける満期別 CVA 評価値（CDS、有担保）

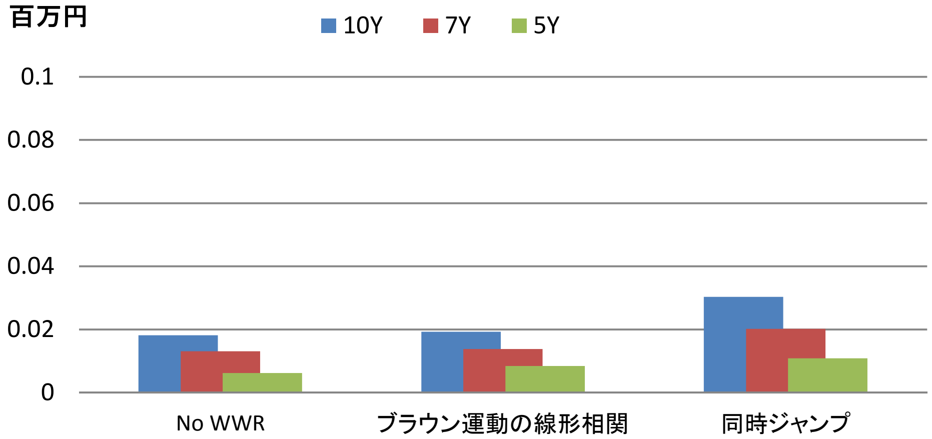
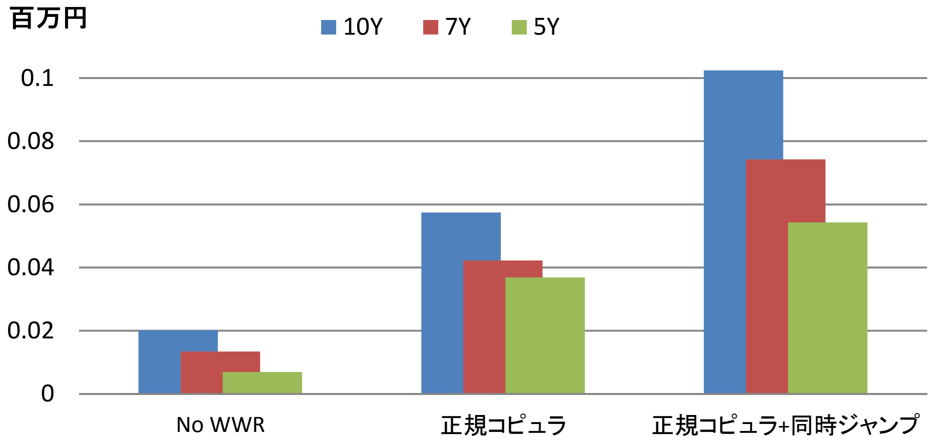


図 19　コピュラ・アプローチにおける満期別 CVA 評価値（CDS、有担保）



補論１. 本邦銀行側からみた CVA を考慮しない CCS の価値評価

時点t_iにおけるドル円為替スポットレート（以下、為替レートと呼ぶ）を$FX(t_i)$（JPY/USD）、CCS 契約時点（$t_{con}[\leq t_0]$）の為替レートを$FX(t_{con})$、$\mathbb{E}_t^{J(U)t_i}[\cdot]$をJPY（USD）建ての$t_i$ - 先渡測度の下での条件付期待演算子、$P^{J(U)}(t_i,t_j)$ $(t_i < t_j)$を期間 $(t_i,t_j]$をカバーする割引債の時点t_iの JPY（USD）建て割引債価値、$L^{J(U)}(t_{j-1},t_j)$を JPY（USD）建ての期間$(t_{j-1},t_j]$に適用される金利とする。簡便化のため、A 銀行はデフォルトせず日米金利差のみにより為替フォワード・レートが決まり、クロス・カレンシー・ベーシス・スプレッドはないものとする。このとき、時点t_iにおける本邦銀行側からみた CVA を考慮しない CCS の価値は、(A-1)式のように表現できる。

$$
\begin{aligned}
V_{CCS}^{No\,CVA}(t_i) &= \left[\sum_{j=i+1}^{N} P^J(t_i,t_j)\mathbb{E}_{t_i}^{Jt_j}\left[L^J(t_{j-1},t_j)\right]\Delta_j + P^J(t_i,t_N)\right] \\
&- \left[\sum_{j=i+1}^{N} P^J(t_i,t_j)\mathbb{E}_{t_i}^{Jt_j}\left[L^U(t_{j-1},t_j)FX(t_j)\right]\Delta_j + P^J(t_i,t_N)\mathbb{E}_{t_i}^{Jt_N}[FX(t_N)]\right]\frac{1}{FX(t_{con})},
\end{aligned}
\tag{A-1}
$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
P^J(t_i,t_j)\mathbb{E}_{t_i}^{Jt_j}\left[L^U(t_{j-1},t_j)FX(t_j)\right] &= P^J(t_i,t_j)\mathbb{E}_{t_i}^{Ut_j}\left[\frac{L^U(t_{j-1},t_j)}{FX(t_j)^{-1}}\frac{P^J(t_j,t_j)FX(t_j)^{-1}P^U(t_i,t_j)}{P^J(t_i,t_j)FX(t_i)^{-1}P^U(t_j,t_j)}\right] \\
&= P^U(t_i,t_j)\mathbb{E}_{t_i}^{Ut_j}\left[L^U(t_{j-1},t_j)\right]FX(t_i), \\
P^J(t_i,t_N)\mathbb{E}_{t_i}^{Jt_N}[FX(t_N)] &= P^J(t_i,t_N)\mathbb{E}^{Ut_N}\left[FX(t_N)\frac{P^J(t_N,t_N)FX(t_N)^{-1}P^U(t_i,t_N)}{P^J(t_i,t_N)FX(t_i)^{-1}P^U(t_N,t_N)}\right] \\
&= P^U(t_i,t_N)\,FX(t_i)\,.
\end{aligned}
\tag{A-2}
$$

ここで、市場で金利の平価式が成立しているとき、Jt_N（JPY t_N - 先渡測度）からUt_N（USD t_N - 先渡測度）への測度変換において、以下の関係を利用して(A-2)式の展開を行っている。

$$
\mathbb{E}_t^{Ut_N}\left[\frac{P^J(t_N,t_N)FX(t_N)^{-1}P^U(t,t_N)}{P^J(t,t_N)FX(t)^{-1}P^U(t_N,t_N)}\right] = 1 \;\Rightarrow\; \frac{P^J(t,t_N)}{P^U(t,t_N)} = \mathbb{E}_t^{Ut_N}\left[\frac{FX(t)}{FX(t_N)}\right].
$$

したがって、(A-1)式に(A-2)式を代入して(A-3)式を得る。

$$
\begin{aligned}
V_{CCS}^{No\,CVA}(t_i) &= \left\{1 - \left[\sum_{j=i+1}^{N} P^J(t_i,t_j)\mathbb{E}_{t_i}^{Jt_j}\left[L^U(t_{j-1},t_j)FX(t_j)\right]\Delta_j + P^J(t_i,t_N)\mathbb{E}_{t_i}^{Jt_N}[FX(t_N)]\right]\frac{1}{FX(t_{con})}\right\} \\
&= \left\{1 - \left[\sum_{j=i+1}^{N} P^U(t_i,t_j)\mathbb{E}_{t_i}^{Ut_j}\left[L^U(t_{j-1},t_j)\right]\Delta_j + P^U(t_i,t_N)\right]\frac{FX(t_i)}{FX(t_{con})}\right\} = 1 - \frac{FX(t_i)}{FX(t_{con})}.
\end{aligned}
\tag{A-3}
$$

補論２. 為替レートとデフォルト強度のボラティリティと相関

（１）　為替レートのドリフトとボラティリティ調整

(8)式のジャンプのない為替レート変化率と(13)式あるいは(19)式のジャンプのある為替レート変化率の期待値と分散が一致していることを示す。(19)式のジャンプについて、生起確率ηdtで 1、それ以外で 0 の値をとるベルヌーイ確率変数Iを用いて考える。

$$c = r_d - r_f - \frac{{\sigma_{FX}^{jump}}^2}{2} + \frac{\gamma\eta}{1+\gamma}, \tag{A-4}$$

と置き、εを標準正規分布に従う確率変数とし、時点tでの期待値と分散をそれぞれ$\mathbb{E}_t[\cdot]$、$\mathrm{var}_t[\cdot]$とすると、為替レート変化率の期待値は、

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t\left[\frac{dFX(t)}{FX(t)}\right] &= \mathbb{E}_t\left[\exp\left(cdt + \sigma_{FX}^{jump} dW_{FX}(t) - dJ(t)\right)\right] - 1 \\
&= e^{cdt}\mathbb{E}_t\left[e^{\sigma_{FX}^{jump}\varepsilon\sqrt{dt}}\right]\mathbb{E}_t[e^{-\gamma z}I] - 1 \\
&= \exp\left(\left(c + \frac{{\sigma_{FX}^{jump}}^2}{2}\right)dt\right)\left(\mathbb{E}_t[e^{-\gamma z}]\eta dt + (1-\eta dt)\right) - 1 \\
&\cong \left(\left(c + \frac{{\sigma_{FX}^{jump}}^2}{2}\right)dt + 1\right)\left(1 - \frac{\gamma\eta dt}{1+\gamma}\right) - 1 \\
&\cong \left(c + \frac{{\sigma_{FX}^{jump}}^2}{2} - \frac{\gamma\eta}{1+\gamma}\right)dt = \left(r_d - r_f\right)dt,
\end{aligned} \tag{A-5}$$

となり、為替レート変化率の期待値の一致性を確認できる。為替レート変化率の分散は、

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_t\left[\frac{dFX(t)}{FX(t)}\right] &= \mathbb{E}_t\left[\left(\frac{dFX(t)}{FX(t)}\right)^2\right] = \mathbb{E}_t[(\exp(d\ln FX(t)) - 1)^2] \\
&= \mathbb{E}_t[\exp(2d\ln FX(t))] - 2\left(c + \frac{{\sigma_{FX}^{jump}}^2}{2} - \frac{\gamma\eta}{1+\gamma}\right)dt - 1,
\end{aligned} \tag{A-6}$$

となる。ここで、

$$\mathbb{E}_t[\exp(2d\ln FX(t))] = 1 + \left(2\left(c + {\sigma_{FX}^{jump}}^2\right) - \frac{\gamma\eta}{2+\gamma}\right)dt,$$

より、

$$\mathrm{var}_t\left[\frac{dFX(t)}{FX(t)}\right] = \left(\sigma_{FX}^{jump^2} - \frac{\gamma\eta}{2+\gamma} + \frac{2\gamma\eta}{1+\gamma}\right)dt$$
$$= \left(\sigma_{FX}^{jump^2} + \frac{(\gamma+3)\gamma\eta}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\right)dt = \sigma_{FX}^2 dt, \quad \text{(A-7)}$$

となって、為替レート変化率の分散の一致性を確認できる。

（２） 同時ジャンプを持つ為替レートとデフォルト強度の相関

(15)式のデフォルト強度の微小時間変化の分散は、標準指数分布Exp(1)に従う確率変数z、標準正規分布に従う確率変数ε、生起確率ηdtのベルヌーイ確率変数Iを用いて考えると、

$$\mathrm{var}_t[d\lambda(t)] = \mathrm{var}_t\left[\sigma_\lambda\sqrt{\lambda(t)}\sqrt{dt}\varepsilon + \nu z I\right]$$
$$= \sigma_\lambda^2\lambda(t)dt\mathbb{E}_t[\varepsilon^2] + \nu^2\mathbb{E}_t[z^2]\mathbb{E}_t[I^2] = \sigma_\lambda^2\lambda(t)dt + 2\eta\nu^2 dt, \quad \text{(A-8)}$$

で与えられる。

同時ジャンプを持つ(19)式の為替レート変化率と(15)式のデフォルト強度変化の時点tでの共分散は、確率変数z、I、εと独立に標準正規分布に従う確率変数$\tilde{\varepsilon}$を用いて

$$\mathrm{cov}_t\big(d\ln FX(t), d\lambda(t)\big)$$
$$= \mathrm{cov}_t\left(\sigma_{FX}^{jump}\sqrt{dt}\left\{\rho_{FX,\lambda}^{jump}\varepsilon + \sqrt{1-\left(\rho_{FX,\lambda}^{jump}\right)^2}\tilde{\varepsilon}\right\} - \gamma z I, \sigma_\lambda\sqrt{\lambda(t)}\sqrt{dt}\varepsilon + \nu z I\right)$$
$$= \rho_{FX,\lambda}^{jump}\sigma_{FX}^{jump}\sigma_\lambda\sqrt{\lambda(t)}dt\mathbb{E}_t[\varepsilon^2] - \gamma\nu\mathbb{E}_t[z^2 I^2] \quad \text{(A-9)}$$
$$= \left\{\rho_{FX,\lambda}^{jump}\sigma_{FX}^{jump}\sigma_\lambda\sqrt{\lambda(t)} - 2\eta\gamma\nu\right\}dt,$$

となるため、時点tでの相関は、

$$\mathrm{cor}_t\big(d\ln FX(t), d\lambda(t)\big) = \frac{\rho_{FX,\lambda}^{jump}\sigma_{FX}^{jump}\sigma_\lambda\sqrt{\lambda(t)} - 2\eta\gamma\nu}{\sqrt{\sigma_{FX}^{jump^2} + 2\eta\gamma^2}\sqrt{\sigma_\lambda^2\lambda(t) + 2\eta\nu^2}}dt, \quad \text{(A-10)}$$

と評価できる。一方、ブラウン運動の線形相関のみの為替レートとデフォルト強度の時点tでの相関係数は、

$$\mathrm{cor}_t\big(d\ln FX(t), d\lambda(t)\big) = \rho_{FX,\lambda}dt, \quad \text{(A-11)}$$

で与えられるため、(A-10)の$\lambda(t)$をθに置き換えて、変数間の相関係数を等しくするように(A-12)式を満たす$\rho_{FX,\lambda}^{jump}$を計算する。この近似は Brigo, Morini, Pallavicini [2013]で示されている手法である。

$$\rho_{FX,\lambda} = \frac{\rho_{FX,\lambda}^{jump}\sigma_{FX}^{jump}\sigma_\lambda\sqrt{\theta} - 2\eta\gamma\nu}{\sqrt{{\sigma_{FX}^{jump}}^2 + 2\eta\gamma^2}\sqrt{\sigma_\lambda^2\theta + 2\eta\nu^2}}. \quad \text{(A-12)}$$

（３）　同時ジャンプを持つデフォルト強度間の相関

Cpty（C2 銀行）と参照体（R 事業会社）のデフォルト強度として(42)式のように同時ジャンプを考慮した確率過程を考える。本補論（２）と同様に、

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cov}_t(d\lambda_C(t), d\lambda_R(t)) \\
&= \mathrm{cov}_t\left(\sigma_C\sqrt{\lambda_C(t)}\sqrt{dt}\left\{\rho_{C,R}^{jump}\varepsilon + \sqrt{1-\left(\rho_{C,R}^{jump}\right)^2}\tilde{\varepsilon}\right\} + \nu_C zI, \sigma_R\sqrt{\lambda_R(t)}\sqrt{dt}\varepsilon + \nu_R zI\right) \\
&= \rho_{C,R}^{jump}\sigma_C\sigma_R\sqrt{\lambda_C(t)\lambda_R(t)}dt\mathbb{E}_t[\varepsilon^2] + \nu_C\nu_R\mathbb{E}_t[z^2I^2] \\
&= \left\{\rho_{C,R}^{jump}\sigma_C\sigma_R\sqrt{\lambda_C(t)\lambda_R(t)} + 2\eta\nu_C\nu_R\right\}dt
\end{aligned} \quad \text{(A-13)}$$

となるため、時点tでのデフォルト強度間の相関は(A-14)式で評価される。

$$\mathrm{cor}(d\lambda_C(t), d\lambda_R(t)) = \frac{\rho_{C,R}^{jump}\sigma_C\sigma_R\sqrt{\lambda_C(t)\lambda_R(t)} + 2\eta\nu_C\nu_R}{\sqrt{\sigma_C^2\lambda_C(t) + 2\eta\nu_C^2}\sqrt{\sigma_R^2\lambda_R(t) + 2\eta\nu_R^2}}dt, \quad \text{(A-14)}$$

一方、ブラウン運動の線形相関のみのデフォルト強度間の相関係数は、

$$\mathrm{cor}_t(d\lambda_C, d\lambda_R) = \rho_{C,R}dt, \quad \text{(A-15)}$$

で与えられるため、(A-14)式の$\lambda_C(t)$, $\lambda_R(t)$をそれぞれθ_C, θ_Rに置き換えて、変数間の相関係数を等しくするように(A-16)式を満たす$\rho_{C,R}^{jump}$を計算する。

$$\rho_{C,R} = \frac{\rho_{C,R}^{jump}\sigma_C\sigma_R\sqrt{\theta_C\theta_R} + 2\eta\nu_C\nu_R}{\sqrt{\sigma_C^2\theta_C + 2\eta\nu_C^2}\sqrt{\sigma_R^2\theta_R + 2\eta\nu_R^2}}. \quad \text{(A-16)}$$

補論３. 累積 JCIR 過程の特性関数と非整数次フーリエ変換による分布関数

（１）　JCIR 過程での生存確率と累積 JCIR 過程の特性関数

デフォルト強度のモデルとして(15)あるいは(42)式で定義した JCIR 過程に従うデフォルト強度$\lambda(t)$は、Duffie, Pan, and Singleton [2000]の(2.1)式で示されているアフィン・ジャンプ拡散（Affine Jump Diffusion : AJD）過程の 1 次元の場合に相当する。時点sから時点tまで積分した累積 JCIR 過程を

$$\Lambda(s,t)=\int_s^t \lambda(y)dy, \tag{A-17}$$

で表し、評価時点sでのリスク中立測度の下での期待値を$\mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}[\cdot]$で表現すると、Duffie, Pan, and Singleton [2000]の 2.2 節の結果から、対象企業のデフォルト時刻をτとしたときの当該企業の生存確率$\mathbb{Q}(\tau>t|\tau>s)\equiv\mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\Lambda(s,t)\right)\right]$も$\Lambda(s,t)$の特性関数$\phi(u)\equiv\mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\mathrm{i}u\Lambda(s,t)\right)\right]$，$u\in\mathbb{R}$も、指数アフィン形式$\exp\left(\alpha_J(s,t)+\alpha_D(s,t)+\beta(s,t)\lambda(s)\right)$で評価でき、係数$\alpha_J(s,t)$、$\alpha_D(s,t)$、$\beta(s,t)$は

$$\frac{d\alpha_J(s,t)}{ds}=-\frac{\eta\nu\beta(s,t)}{1-\nu\beta(s,t)}, \tag{A-18}$$

$$\frac{d\alpha_D(s,t)}{ds}=-\kappa\theta\beta(s,t), \tag{A-19}$$

$$\frac{d\beta(s,t)}{ds}=\xi+\kappa\beta(s,t)-\frac{\sigma_\lambda^2}{2}\beta^2(s,t), \tag{A-20}$$

という常微分方程式に従う。ただし、ξは、生存確率$\mathbb{Q}(\tau>t|\tau>s)$の場合は$\xi=1$、累積 JCIR 過程$\Lambda(s,t)$の特性関数の場合は$\xi=-\mathrm{i}u$で与えられる。ただし、$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$である。

(A-20)式はリッカチ型常微分方程式であり、その解は山下・吉羽 [2010]の補論３などに従って解くと、

$$h=\sqrt{\kappa^2+2\xi\sigma_\lambda^2}, \tag{A-21}$$

として、$\beta(t_0,t)$は(68)式を用いて$-\xi B(t_0,t)$で表せる。ξが複素数の場合、(A-21)式は 2 価関数となるので、まずは、$\xi=1$で表現される生存確率に注目する。このとき、(A-21)式のhは(70)式のように表せる。$\beta(s,t)=-\xi B(s,t)$を(A-19)式に代入して、sについてt_0からtまで積分すると、

$$\alpha_D(t_0,t)=\frac{2\kappa\theta}{\sigma_\lambda^2}\log\frac{2h\exp\left\{\frac{(\kappa+h)(t-t_0)}{2}\right\}}{2h+(\kappa+h)(\exp\{h(t-t_0)\}-1)}, \tag{A-22}$$

を得て、$\exp(\alpha_D(t_0,t))$は(69)式を用いて$C(t_0,t)$で表せる。さらに、$\beta(s,t)=-\xi B(s,t)$を(A-18)式に代入して、sについてt_0からtまで積分すると、

$$\alpha_J(t_0,t)=\frac{2\eta\nu}{\sigma_\lambda^2-2\kappa\nu-2\xi\nu^2}\log\frac{2h\exp\left\{\frac{(\kappa+h+2\xi\nu)(t-t_0)}{2}\right\}}{2h+(\kappa+h+2\xi\nu)(\exp\{h(t-t_0)\}-1)}, \tag{A-23}$$

を得て、$\xi=1$での$\exp(\alpha_J(t_0,t))$は(67)式を用いて$A(t_0,t)$で表せる。最終的に、生存確率$\mathbb{Q}(\tau>t)\equiv\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\Lambda(t)\right)\right]$は(66)式のように表現される。これは、Brigo and El-Bachir [2010]で得られた結果と同じである。

累積 JCIR 過程$\Lambda(t_0,t_0+t)$の特性関数$\phi(u)$は、

$$h=\sqrt{\kappa^2-2\mathrm{i}u\sigma_\lambda^2}, \tag{A-24}$$

と定義した上で、(68)式の$B(t_0,t_0+t)$を$\tilde{B}(u,t)$、(69)式の$C(t_0,t_0+t)$あるいは(A-22)式を用いた$\exp(\alpha_D(t_0,t_0+t))$を$\tilde{C}(u,t)$と定義し直して、(A-25)式で表現される。

$$\phi(u)=\tilde{A}(u,t)\tilde{C}(u,t)\exp\{\mathrm{i}u\tilde{B}(u,t)\lambda_0\}, \tag{A-25}$$

ただし、

$$\tilde{A}(u,t)=\exp(\tilde{\alpha}_J(u,t)), \tag{A-26}$$

であり、$\tilde{\alpha}_J(u,t)$は(A-23)式の$\alpha_J(t_0,t_0+t)$に$\xi=-\mathrm{i}u$を代入したもの、すなわち、

$$\tilde{\alpha}_J(u,t)=\frac{2\eta\nu}{\sigma_\lambda^2-2\kappa\nu+2\mathrm{i}u\nu^2}\log\frac{2h\exp\left\{\frac{(\kappa+h-2\mathrm{i}u\nu)t}{2}\right\}}{2h+(\kappa+h-2\mathrm{i}u\nu)(\exp\{ht\}-1)}, \tag{A-27}$$

である。図 A-1 は、特性関数の絶対値、実部および虚部の形状をパラメータを$(\kappa,\theta,\sigma_\lambda,\nu,\eta,\lambda_0)=(0.467,0.034,0.169,0.05,0.05,0.00)$と設定して表したものである。

（２） 複素関数の扱い

複素空間では、対数関数は無限多価関数であるため、リーマン面を定義することにより正則関数として定義し直す（複素関数については、例えば、神保[2003]などを参照）。zをuを引数とする複素関数とし、$n(u)$を$z=|z|$となる点を何回通過したかを示す整数関数、対数関数の主値をLog、主値の偏角をArgとする。このとき、本補論（１）で定義した(A-22)、(A-23)、(A-27)式等の対数関数logは、以下のリーマン面で定義する。

$$\begin{aligned}\log(z(u))&\coloneqq\mathrm{Log}\big(z(u)\big)+2\pi\mathrm{i}n(u)\\&=\mathrm{Log}(|z(u)|)+\mathrm{i}(\mathrm{Arg}\big(z(u)\big)+2\pi n(u)).\end{aligned} \tag{A-28}$$

実装上は$n(u)$の計算が問題となるが、Matlab もしくは Octave では、uを昇順に与えた際の$z(u)$を並べた上で、unwrap 関数および angle 関数を適用することにより、(A-29)式のように回転数および主値の偏角を含めた値を求めることができ

る。

$$\mathrm{unwrap}\big(\mathrm{angle}(z)\big) = \mathrm{Arg}\big(z(u)\big) + 2\pi n(u). \tag{A-29}$$

なお、本補論（１）で前述したとおり、(A-24)式の平方根で表現されるhも 2 価関数となっている。(A-28)式で定義した複素平面上の対数関数 Log を用いて、(A-24)式の平方根で表現されるhをリーマン面を考慮して書き直すと、(A-30)式のように表現される。

$$\begin{aligned} h_n &= \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}\left(\kappa^2 - 2\mathrm{i}u\sigma_\lambda^2\right) + 2\pi\mathrm{i}n\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}\left(\kappa^2 - 2\mathrm{i}u\sigma_\lambda^2\right)\right)\right\}\exp(\pi\mathrm{i}n), n = 0,1. \end{aligned} \tag{A-30}$$

このとき、$\exp(\pi\mathrm{i}) = -1$より$h_1 = -h_0$である。hのリーマン面選択が(A-27)式の対数関数の引数に与える影響は、(A-31)式で示されるとおり、いずれのリーマン面を用いても等しくなる。(A-22)式の対数関数の引数に与える影響も同様に等しくなる。

$$\begin{aligned} &\frac{2h_1\exp\left\{\frac{(\kappa + h_1 - 2\mathrm{i}u\nu)(t-t_0)}{2}\right\}}{2h_1 + (\kappa + h_1 - 2\mathrm{i}u\nu)(\exp\{h_1(t-t_0)\} - 1)} \\ &= \frac{-2h_0\exp\left\{\frac{(\kappa - h_0 - 2\mathrm{i}u\nu)(t-t_0)}{2}\right\}}{-2h_0 + (\kappa - h_0 - 2\mathrm{i}u\nu)(\exp\{-h_0(t-t_0)\} - 1)}\frac{e^{h_0(t-t_0)}}{e^{h_0(t-t_0)}} \\ &= \frac{2h_0\exp\left\{\frac{(\kappa + h_0 - 2\mathrm{i}u\nu)(t-t_0)}{2}\right\}}{2h_0 + (\kappa + h_0 - 2\mathrm{i}u\nu)(\exp\{h_0(t-t_0)\} - 1)}. \end{aligned} \tag{A-31}$$

（３）　非整数次フーリエ変換を用いた累積確率の導出

(A-25)式で与えた特性関数$\phi(u)$を所与として、累積 JCIR 過程の確率密度関数$f(x)$と累積分布関数$F(x)$は(A-32)、(A-33)式により記述できる。ここで、特性関数$\phi(u)$の複素共役関数$\phi(u)^*$とすると、確率密度関数$f(x)$が実数関数であることより、$\phi(u)^* = \phi(-u)$であることに注意する。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}ux}\phi(u)du$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\infty}\cos(ux)\,[\phi(u)+\phi(-u)]du - \mathrm{i}\int_0^{\infty}\sin(ux)\,[\phi(u)-\phi(-u)]du\right\}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\infty}\cos(ux)\,[\phi(u)+\phi(u)^*]du - \mathrm{i}\int_0^{\infty}\sin(ux)\,[\phi(u)-\phi(u)^*]du\right\} \quad \text{(A-32)}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\infty}\left[\cos(ux)\,\mathrm{Re}[\phi(u)] + \sin(ux)\,\mathrm{Im}[\phi(u)]\right]du\right\}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\left[e^{-\mathrm{i}ux}\phi(u)\right]du\right\} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\int_0^{\infty} e^{-\mathrm{i}ux}\phi(u)du\right],$$
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy. \quad \text{(A-33)}$$

Bailey and Swarztrauber [1991]は、フーリエ変換の計算コストを軽減するための手法として、非整数次フーリエ変換（fractional fast Fourier transform：FRFT）を提案している。ベクトル$\boldsymbol{\phi} = \left(\phi_j\right)_{j=0}^{L-1}$に対する離散フーリエ変換を(A-34)式のように定義する。

$$\int_0^{\infty} e^{-\mathrm{i}xu}\phi(u)du \approx \mathrm{FFT}_k[\boldsymbol{\phi}] \coloneqq \sum_{j=0}^{L-1} e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{L}kj}\phi_j. \quad \text{(A-34)}$$

波数領域の周波数刻み幅をω、空間領域の刻み幅をχとすると、

$$\omega\chi = \frac{2\pi}{L}, \quad \text{(A-35)}$$

という条件を満たさなければならない。(A-35)式の右辺は、(A-34)式の離散フーリエ変換の指数の肩の係数部分に対応している。ここで、$u_{\max} = L\omega$で定義される波数領域を打ち切る波数は、打切り誤差を小さくするために特性関数の値が十分小さくなる値に設定する。すなわち、L, ωは特性関数の形状により決定されてしまうことから、χの大きさを決定する自由度は残されていない。(A-35)式の制約条件を課さない方法が FRFT であり、(A-36)式のように定義される。

$$\int_0^{\infty} e^{-\mathrm{i}xu}\phi(u)du \approx G(\boldsymbol{\phi}, \alpha) \coloneqq \sum_{j=0}^{L-1} e^{-\mathrm{i}2\pi\alpha kj}\phi_j. \quad \text{(A-36)}$$

$\alpha = 1/L$のときは(A-34)式の離散フーリエ変換であるが、これを任意の有理数$\alpha = r/L$（$r < L$、rとLは互いに素）に拡張している。αが任意の有理数である場合、ωとχを独立に決定した上で$\alpha = \omega\chi/2\pi$を満たすようにαの値を設定できるため、(A-35)式の制約条件を回避できる。任意の有理数への拡張は、(A-37)式で示

されるとおり、原データを一定間隔でサンプリングし直した離散フーリエ変換に対応する。

$$\sum_{j=0}^{L-1} e^{-\mathrm{i}2\pi\alpha kj}\phi_j = \sum_{j=0}^{L-1} e^{-\frac{\mathrm{i}2\pi k(pj)r}{L}}\phi_{pj} = \sum_{j=0}^{L-1} e^{-\frac{\mathrm{i}2\pi kj}{L}}\phi_{pj} = \mathrm{FFT}_k[\bar{\boldsymbol{\phi}}]. \tag{A-37}$$

ここで、pはprをLで除したときの余りが 1 になるように定めた値とし（例えば$r = 41,\ L = 1024,\ p = 25$）、$\bar{\boldsymbol{\phi}}$は原データを$p$の倍数ごとにサンプリングし直し、データの長さが$L$に一致するよう残りの要素を 0 で埋めたベクトルである。

この方法では、ωとχを独立に決定できるため、フーリエ変換により計算される分布のうち、ほとんど確率を持たない点の計算コストを省き、計算コストの軽減化が実現される。Bailey and Swarztrauber [1991]では、計算の高速化手法として更に以下の方法を示している。

(A-36)式の右辺は、$2jk = j^2 + k^2 - (k-j)^2$の関係式より、

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{L-1} e^{-\mathrm{i}2\pi\alpha kj}\phi_j &= \sum_{j=0}^{L-1} \phi_j e^{-\pi\mathrm{i}\{j^2+k^2-(k-j)^2\}\alpha} \\ &= e^{-\pi\mathrm{i}k^2\alpha}\sum_{j=0}^{L-1} \phi_j e^{-j^2\pi\mathrm{i}\alpha}\, e^{(k-j)^2\pi\mathrm{i}\alpha} = e^{-\pi\mathrm{i}k^2\alpha}\sum_{j=0}^{L-1} y_j z_{k-j}.\end{aligned} \tag{A-38}$$

ただし、$y_j = \phi_j e^{-j^2\pi\mathrm{i}\alpha},\ \ z_{k-j} = e^{(k-j)^2\pi\mathrm{i}\alpha}$である。最後の式は畳み込みであり、$z_{k-j}$が周期的である場合にはフーリエ変換を施すと、$\boldsymbol{y} = (y_j)_{j=0}^{L-1}, \boldsymbol{z} = (z_j)_{j=0}^{L-1}$として、(A-39)式のようにフーリエ変換の積として計算できる。

$$\mathrm{FFT}_k\left[\left(\sum_{l=0}^{L-1} y_l z_{j-l}\right)_{j=0}^{L-1}\right] = \mathrm{FFT}_k[\boldsymbol{y}]\mathrm{FFT}_k[\boldsymbol{z}]. \tag{A-39}$$

(A-38)式は、(A-39)式で計算されるフーリエ変換の積にフーリエ逆変換を施すことで計算される。ところが、(A-39)式は$z_{j-k} = z_{j-k+L}$を前提とした計算であるが、$z_{j-k} = e^{(j-k)^2\pi\mathrm{i}\alpha} \neq e^{(j-k+L)^2\pi\mathrm{i}\alpha} = z_{j-k+L}$よりその前提条件が満たされていないため、何らかの工夫が必要となる。Bailey and Swarztrauber [1991]では、(A-40)式のように$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{z}$にそれぞれL個の新しい要素を追加したベクトル$\bar{\boldsymbol{y}} = (\bar{y}_j)_{j=0}^{2L-1}$, $\bar{\boldsymbol{z}} = (\bar{z}_j)_{j=0}^{2L-1}$を用いることで、上記の問題を解決している。

$$
\begin{aligned}
&\bar{y}_j = y_j, && j = 0, \dots, L-1,\\
&\bar{y}_j = 0, && j = L, \dots 2L-1,\\
&\bar{z}_j = e^{j^2 \pi \mathrm{i} \alpha}, && j = 0, \dots, L-1,\\
&\bar{z}_j = e^{(2L-j)^2 \pi \mathrm{i} \alpha}, && j = L, \dots, 2L-1.
\end{aligned}
\tag{A-40}
$$

これより$\bar{z}_{j-k+2L} = e^{(2L-(j-k+2L))^2 \pi \mathrm{i} \alpha} = e^{(j-k)^2 \pi \mathrm{i} \alpha} = \bar{z}_{j-k}$となり、周期性を満たす。これらのベクトル$\bar{\boldsymbol{y}}$、$\bar{\boldsymbol{z}}$を用いると非整数次の離散時間フーリエ変換は、(A-41)式のように定義される離散フーリエ逆変換を用いて、(A-42)式のように表現され、具体的なアルゴリズムは補論４.（３）の Algorithm 3–5 のように与えられる。

$$
\mathrm{IFFT}_k[\bar{\boldsymbol{w}}] \coloneqq \frac{1}{2L} \sum_{j=0}^{2L-1} \bar{w}_j e^{\mathrm{i} 2\pi k j / 2L},
\tag{A-41}
$$

$$
\begin{gathered}
e^{-\pi \mathrm{i} k^2 \alpha} \sum_{j=0}^{L-1} \phi_j e^{-j^2 \pi \mathrm{i} \alpha} e^{(k-j)^2 \pi \mathrm{i} \alpha} = e^{-\pi \mathrm{i} k^2 \alpha}\, \mathrm{IFFT}_k[\bar{\boldsymbol{w}}],\\
\bar{\boldsymbol{w}} = \left(\mathrm{FFT}_j[\bar{\boldsymbol{y}}] \mathrm{FFT}_j[\bar{\boldsymbol{z}}]\right)_{j=0}^{2L-1}, \quad 0 \le k < L.
\end{gathered}
\tag{A-42}
$$

（４） FRFT のパラメータ

FRFT のパラメータについて、満期までの期間（月次表示）をt、許容可能な打切り誤差を10^{-4}として設定方法を検討する。

(A-32)式で計算される確率密度関数の最大値$x_{\max}$は、$\exp(-9) \cong 10^{-4}$より$x_{\max} = 9$とする。特性関数を打ち切る点$u_{\max}$は、満期までの期間tに応じて$u_{\max} = 10^6 t^{-1.45}$という近似上界関数で設定する。（この近似関数の精度については後述）。データ数Lは、2 のべき乗になるように、$L = 2^{l_{\sup}}$、ただし、$l_{\sup} = \min\{l \in \mathbb{Z}^+ : 2^l > 2u_{\max}\}$で設定する。これらのパラメータ設定により累積 JCIR 過程の空間方向の グリッド$\chi = x_{\max}/L$、波数領域のグリッド$\omega = u_{\max}/L$が設定される。図 A-2 に上記設定の下、満期 10 年の場合の FRFT に基づく生存確率と JCIR 過程の解析解に基づく生存確率およびこれらの差異について示した。図より十分な精度が保たれていることがわかる[18]。

特性関数の打ち切りは、誤差を小さくするために特性関数の値が十分小さくなる値で打ち切る必要がある。図 A-3 に、打ち切り誤差を10^{-4}、パラメータを

[18] FRFT において、累積分布関数を計算する関数は、Cpty デフォルト時のエクスポージャーを計算する際に繰り返し呼ばれる。そのため、Lの値を大きくすると計算負荷が急激に高まることに注意されたい。

$(\kappa,\theta,\sigma_\lambda,\nu,\eta,\lambda_0)=(0.467,0.034,0.169,0.05,0.05,0.00)$と設定したときの、打切り誤差を満足する波数$u_{\max}$およびその近似上界関数$u_{\max}=10^6t^{-1.45}$を示した。この近似上界関数に従い打ち切ることで、打切り誤差を満足する波数を計算できることがわかる。また、この近似関数に基づいて打ち切ることで、計算コストを削減できる。具体的には、満期が短い場合には$u_{\max}$は10^6程度、満期が長くなると$u_{\max}$は10^2程度となるため、満期の長短を考慮した計算は最大で10^4程度の計算コスト削減につながる。

近似上界関数に基づく打ち切りは、打切り誤差を満足する波数の指定および計算コスト削減を達成できる方法である。しかし、満期までの期間が 5 ヵ月以下の特性関数については、打切り誤差を満足する波数が非常に大きくなっており、特性関数の打ち切りを用いて精緻に FRFT を計算しようとすると計算コストが大きくなってしまう。一方で、満期までの期間が短い場合の満期における累積デフォルト強度は、デフォルト強度の初期値にきわめて近似した値をとると考えられる。そこで、本稿では、満期までの期間が 5 ヵ月以下の特性関数は用いず、デフォルト強度の初期値までは 0、初期値からは 1 をとる階段関数の累積分布関数を与える。満期までの期間が 6 ヵ月以上については、上記の近似上界関数を用いて特性関数を計算し、累積分布関数を与える。

図 A-1　特性関数の形状

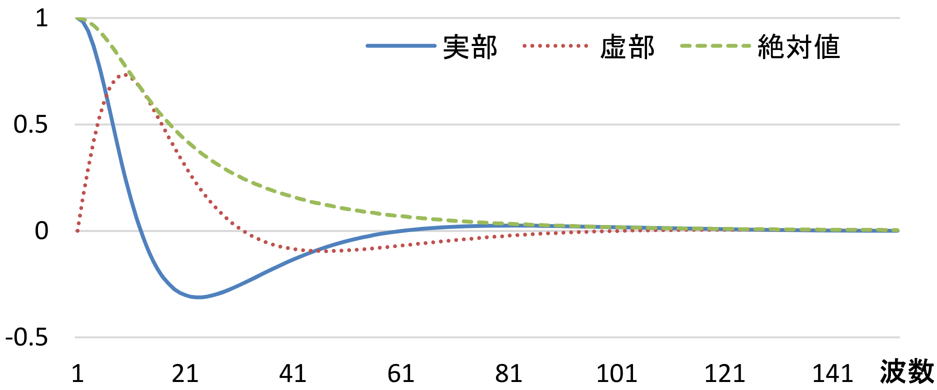


図 A-2　JCIR 過程に従うデフォルト強度から解析的に求めた生存確率と累積 JCIR 過程の特性関数から求めた生存確率の比較

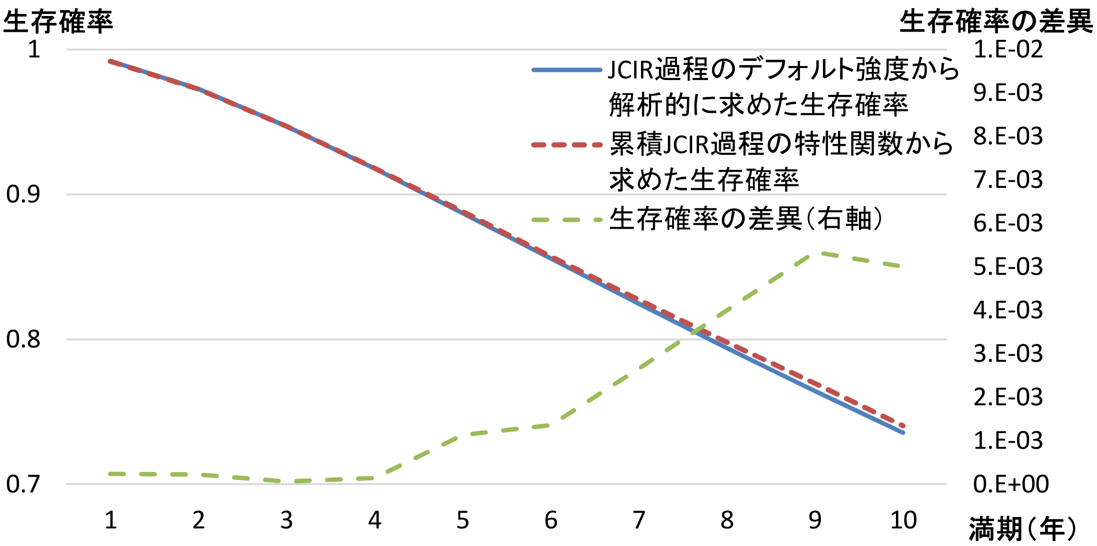
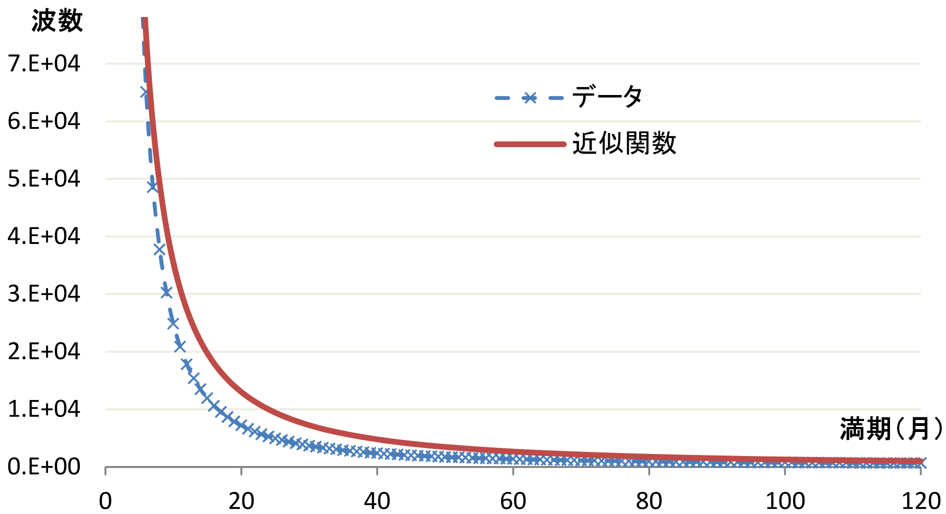


図 A-3　打ち切り誤差を満たす波数とその近似上界関数



補論４. CCS と CDS の CVA 算出アルゴリズム

以下のアルゴリズムにおいて用いる用語を定義する。Uniform(0,1)は区間(0,1)の間の一様分布、Normal(0,1)は標準正規分布、Exp(⋅)は指数分布、Poisson(⋅)はポアソン分布であり、これらの分布からのサンプリングは記号～により表現する。Δは時間のグリッド、Mはシミュレーション回数、Nは評価対象商品の満期までのグリッド数（月次表示）、$c^G(\cdot,\cdot;\rho)$は相関パラメータρの正規コピュラの密度、$\Phi(\cdot)$は標準正規分布の累積分布関数、$\odot$はベクトルの要素ごとの掛け算、$\oslash$はベクトルの要素ごとの割り算、$\Psi(t_i,\boldsymbol{\beta}_E)$は時点$t_i$までにおける対象企業$k=C,R$（Cpty あるいは CDS の参照体）のデフォルト強度過程のシフト項の和

$$\Psi(t_i,\boldsymbol{\beta}_k)=\sum_{j=1}^{i}\psi\left(t_j,\boldsymbol{\beta}_k\right)\Delta,$$

である。rank(⋅)は引数となるデリバティブ価値がシミュレーションにより得られたデリバティブ価値全体の中での昇順での順位とする。FFT および IFFT はそれぞれフーリエ変換、フーリエ逆変換、ones($[x,y]$)は要素がすべて 1 である x 行 y 列の行列、zeros($[x,y]$)は要素がすべて 0 である x 行 y 列の行列を意味しており、これらの関数は Matlab もしくは Octave の標準関数として実装されている。その他の表記は既に記述した数式と同一のものとし、シミュレーション回数や金利等、モデルに亘り共通のパラメータはアルゴリズムの引数からは省略した。表 1 に示したパラメータの値はすべてのシミュレーションにおいて共通とする。また、$DF(j)$は、$t_j=j\Delta$での割引率であり、表 1 の国内安全資産利子率r_dを用いて$DF(j)=\exp(-r_d j\Delta)$で表される。

（１） CCS の CVA 算出アルゴリズム

構造モデル、デフォルト強度モデル、コピュラ・アプローチによる CCS の CVA 算出アルゴリズムは Algorithm 1–1～Algorithm 1–5 のように与えられる。計算に必要なパラメータLGDは 0.60 とする。

Algorithm 1–1: 構造モデルにおける CVA 計算アルゴリズム

$[CVA]=$ CVACalculator_CCS_Str$(\sigma_A,H_0,\sigma_{FX},\sigma_{FX}^{jump},\zeta,\gamma,FX_0,\rho_{FX,A})$

$Cum\_CVA=0$
for $i=1{:}M$
 for $j=1{:}N$
  $\epsilon_A\sim$Normal(0,1)
  $\epsilon_0\sim$Normal(0,1)
  $\epsilon_{FX}=\rho_{FX,A}\epsilon_A+\sqrt{1-\rho_{FX,A}{}^2}\epsilon_0$

$\xi \sim \text{Poisson}(\zeta \Delta)$
if $\xi > 0$
$z_{FX} \sim \text{Exp}(\gamma)$
else $z_{FX} = 0$
end
$Z(i,j) = (r_d - q_{C1} - \sigma_A^2(j)/2)\Delta + \sigma_A(j)\sqrt{\Delta}\epsilon_A$

$X(i,j) = (r_d - r_f - \left(\sigma_{FX}^{jump}\right)^2/2 + \zeta\gamma/(1+\gamma))\Delta + \sigma_{FX}^{jump}\sqrt{\Delta}\epsilon_{FX} - z_{FX}$

if $j == 1$
$H(1) = H_0 \times \exp\{(r_f - q_{C1} - B\sigma_A^2(1))\Delta\}$
$A(i,1) = \exp\{Z(i,1)\}$
$FX(i,1) = FX_0 \times \exp\{X(i,1)\}$
else
$H(j) = H(j-1) \times \exp\{(r_f - q_{C1} - B\sigma_A^2(j))\Delta\}$
$A(i,j) = A(i,j-1) \times \exp\{Z(i,j)\}$
$FX(i,j) = FX(i,j-1) \times \exp\{X(i,j)\}$
end
if $(A(i,j) < H(j))$
$V = (1 - FX(j)/FX(t_{con}))$
$Cum\_CVA = Cum\_CVA + DF(j) \times \max(V,0) \times notional \times \text{LGD}$
break
end
end
end
$CVA = Cum\_CVA/M$

Algorithm 1–2: 構造モデルにおけるバリアの不確実性を考慮した場合の CVA 計算アルゴリズム

$[CVA] = \text{CVAAggregator\_CCS\_Str}(H_0^{normal}, H_0^{stress}, \sigma_A)$

$[CVA] = (1-p) \times \text{CVACalculator\_CCS\_Str}(\sigma_A, H_0^{normal}, \sigma_{FX}, \sigma_{FX}^{jump}, \zeta, \gamma, FX_{con}, FX_0, \rho_{FX,A})$
$+ p \times \text{CVACalculator\_CCS\_Str}(\sigma_A, H_0^{stress}, \sigma_{FX}, \sigma_{FX}^{jump}, \zeta, \gamma, FX_{con}, FX_0, \rho_{FX,A})$

Algorithm 1–3: デフォルト強度モデルとコピュラ・アプローチにおけるデフォルト強度および為替レートのパス発生アルゴリズム

$[FX, F] = \text{PathGenerator\_CCS}(\kappa, \theta, \sigma_\lambda, \lambda_0, \Psi, \sigma_{FX}, \sigma_{FX}^{jump}, FX_0, \rho_{FX,\lambda}, \eta, \gamma, \nu)$

for $i = 1{:}M$
$\epsilon_\lambda \sim \text{Normal}(0,1)$
$\epsilon_0 \sim \text{Normal}(0,1)$
$\epsilon_{FX} = \rho_{FX,\lambda}\epsilon_\lambda + \sqrt{1 - \rho_{FX,\lambda}{}^2}\epsilon_0$
$\xi \sim \text{Poisson}(\eta\Delta)$
if $\xi > 0$
$z \sim \text{Exp}(1)$

$z_\lambda = \nu z$
$z_{FX} = \gamma z$
else $z_\lambda = z_{FX} = 0$
end
$\lambda(i,1) = \lambda_0 + \kappa(\theta - \lambda_0)\Delta + \sigma_\lambda\sqrt{\lambda_0\Delta}\epsilon_\lambda + z_\lambda$
$\Lambda(i,1) = \lambda(i,1) \times \Delta$

$X(i,1) = (r_d - r_f - \left(\sigma_{FX}^{jump}\right)^2/2 + \eta\gamma/(1+\gamma))\Delta + \sigma_{FX}^{jump}\sqrt{\Delta}\epsilon_{FX} - z_{FX}$

$FX(i,1) = FX_0 \times \exp\{X(i,1)\}$
$\boldsymbol{\beta} = [\kappa, \theta, \sigma_\lambda, \eta, \nu]$
$F(i,1) = 1 - \exp\{-(\Lambda(i,1) + \Psi(1, \boldsymbol{\beta}))\}$
for $j = 2{:}N$
$\xi \sim \text{Poisson}(\eta\Delta)$
if $\xi > 0$
$z \sim \text{Exp}(1)$
$z_\lambda = \nu z$
$z_{FX} = \gamma z$
else $z_\lambda = z_{FX} = 0$
end
$\lambda(i,j) = \lambda(i,j-1) + \kappa\big(\theta - \lambda(i,j-1)\big)\Delta + \sigma_\lambda\sqrt{\lambda(i,j-1)\Delta}\epsilon_\lambda + z_\lambda$
$\Lambda(i,j) = \Lambda(i,j-1) + \lambda(i,j) \times \Delta$
$X(i,j) = (r_d - r_f - \sigma_{FX}^2/2 + \eta\gamma)\Delta + \sigma_{FX}^{jump}\sqrt{\Delta}\epsilon_{FX} - z_{FX}$
$FX(i,j) = FX(i,j-1) \times \exp\{X(i,j)\}$
$F(i,j) = 1 - \exp\{-(\Lambda(i,j) + \Psi(j, \boldsymbol{\beta}))\}$
end
end

Algorithm 1–4: デフォルト強度モデルにおける CVA 計算アルゴリズム

$[CVA] = \text{CVACalculator\_CCS\_Int}(\kappa, \theta, \sigma_\lambda, \lambda_0, \Psi, \sigma_{FX}, \sigma_{FX}^{jump}, FX_0, \rho_{FX,\lambda}, \eta, \gamma, \nu)$

$Cum\_CVA = 0$
$[FX, F] = \text{PathGenerator\_CCS}(\kappa, \theta, \sigma_\lambda, \lambda_0, \Psi, \sigma_{FX}, \sigma_{FX}^{jump}, FX_0, \rho_{FX,\lambda}, \eta, \gamma, \nu)$
for $i = 1{:}M$
$\epsilon \sim \text{Uniform}(0,1)$
for $j = 1{:}N$
if $\epsilon < F(i,j)$
$V = (1 - FX(j)/FX(t_{con}))$
$Cum\_CVA = Cum\_CVA + DF(j) \times \max(V, 0) \times notional \times \text{LGD}$
break
end
end
end
$CVA = Cum\_CVA/M$

Algorithm 1–5: コピュラ・アプローチにおける CVA 計算アルゴリズム

$[CVA] = \text{CVACalculator\_CCS\_Cop}(\kappa, \theta, \sigma_\lambda, \lambda_0, \Psi, \sigma_{FX}, \sigma_{FX}^{jump}, FX_0, \eta, \gamma, \nu, \rho_{FX,\Lambda}^{copula})$

$Cum\_CVA = 0$
$[FX, F] = \text{PathGenerator\_CCS}(\kappa, \theta, \sigma_\lambda, \lambda_0, \Psi, \sigma_{FX}, \sigma_{FX}^{jump}, FX_0, 0, \eta, \gamma, \nu)$
for $i = 1{:}M$
　　$D(i,1) = F(i,1)$
　　$V(i,1) = 1 - FX(i,1)/FX(t_{con})$
　　for $j = 2{:}N$
　　　　$D(i,j) = F(i,j) - F(i,j-1)$
　　　　$V(i,j) = 1 - FX(i,j)/FX(t_{con})$
　　end
end
for $i = 1{:}M$
　　for $j = 2{:}N$
　　　　$w(i,j) = c^G(\text{rank}[V(i,j)]/(M+1), F(i,j); \rho_{FX,\Lambda}^{copula})$
　　　　$\bar{V}(i,j) = \max(V(i,j), 0) \times w(i,j)$
　　　　$Cum\_CVA = Cum\_CVA + DF(j) \times \bar{V}(i,j) \times D(i,j) \times \text{LGD} \times notional$
　　end
end
$CVA = Cum\_CVA/M$

（２）　CDS の CVA 算出アルゴリズム

構造モデル、デフォルト強度モデル、コピュラ・アプローチによる CDS の CVA 算出アルゴリズムは Algorithm 2–1～Algorithm 2–8 のように与えられる。ただし、CVA 算出の際に必要な生存確率の計算アルゴリズムについては、本補論（３）に記述する。計算に必要なパラメータとして、sp_Rは対象の CDS の年限に応じて表 4 より 181.1bp（5 年）、201.0bp（7 年）、210.2bp（10 年）とし、$\text{LGD}_\text{R} = \text{LGD}_\text{C} = 0.65$とする。

Algorithm 2–1: 構造モデルにおける Cpty デフォルト時の CDS のエクスポージャー計算アルゴリズム

$[V] = \text{ConditionalValue\_CDS\_Str}(\tau_C, A_\tau, \sigma_R, H_{R,0})$

$V = 0$
$Residual\_time = N - \tau_C$
$S\_pre = \text{SurvivalProb\_Str}(A_\tau, \tau_C, Residual\_time, \sigma_R, H_{R,0})$
for $j = (Residual\_time - 1){:} -1{:} 1$
　　$S\_curr = \text{SurvivalProb\_CDS\_Str}(A_\tau, \tau_C, j, \sigma_R, H_{R,0})$
　　$PD_R = S\_curr - S\_pre$
　　$V = V + DF(j) \times (\text{LGD}_\text{R} \times PD_R - sp_R \times \Delta \times S\_curr)$
　　$S\_pre = S\_curr$
end

Algorithm 2–2: 構造モデルにおける CVA 計算アルゴリズム

$[CVA, EFE] = \text{CVACalculator\_CDS\_Str}(\sigma_C, \sigma_R, H_{C,0}, H_{R,0}, \rho_{C,R})$

$Cum\_CVA = 0$
$FE = count = \mathbf{0}$
$H_C(1) = H_{C,0} \exp\{(r_d - q_{C2} - B\sigma_C(1))\Delta\}$
$H_R(1) = H_{R,0} \exp\{(r_d - q_R - B\sigma_R(1))\Delta\}$
for $j = 2: N$
    $H_C(j) = H_C(j-1) \exp\{(r_d - q_{C2} - B\sigma_C(j))\Delta\}$
    $H_R(j) = H_R(j-1) \exp\{(r_d - q_R - B\sigma_R(j))\Delta\}$
end
for $i = 1: M$
    $\epsilon_C \sim \text{Normal}(0,1)$
    $\epsilon_0 \sim \text{Normal}(0,1)$
    $\epsilon_R = \rho_{C,R}\epsilon_C + \sqrt{1 - {\rho_{C,R}}^2}\epsilon_0$
    for $j = 1: N$
        $\epsilon_C \sim \text{Normal}(0,1)$
        $\epsilon_0 \sim \text{Normal}(0,1)$
        $\epsilon_R = \rho_{C,R}\epsilon_C + \sqrt{1 - {\rho_{C,R}}^2}\epsilon_0$
        $Z_C(i,j) = (r_d - q_{C2} - \sigma_C^2(j)/2)\Delta + \sigma_C(j)\sqrt{\Delta}\epsilon_C$
        $Z_R(i,j) = (r_d - q_R - \sigma_R^2(j)/2)\Delta + \sigma_R(j)\sqrt{\Delta}\epsilon_R$
        if $j == 1$
            $A_C(i,1) = \exp\{Z_C(i,1)\}$
            $A_R(i,1) = \exp\{Z_R(i,1)\}$
        else
            $A_C(i,j) = A_C(i,j-1) \times \exp\{Z_C(i,j)\}$
            $A_R(i,j) = A_R(i,j-1) \times \exp\{Z_R(i,j)\}$
        end
        if $A_R(i,j) > H_R(j)$ & $A_C(i,j) < H_C(j)$
            $V = \text{ConditionalValue\_CDS\_Str}(j, A_R(i,j), \sigma_R(j), H_{R,0})$
            $FE(j) = FE(j) + \max(V, 0) \times notional$
            $count(j) = count(j) + 1$
            $Cum\_CVA = Cum\_CVA + DF(j) \times \max(V,0) \times notional \times \text{LGD}_\text{C}$
            break
        else if $A_R(i,j) < H_R(j)$ & $A_C(i,j) < H_C(j)$
            $FE(j) = FE(j) + \text{LGD}_\text{R} \times notional$
            $count(j) = count(j) + 1$
            $Cum\_CVA = Cum\_CVA + DF(j) \times \text{LGD}_\text{R} \times notional \times \text{LGD}_\text{C}$
            break
        else if $A_R(i,j) < H_R(j)$
            break
        end
    end
end
$CVA = Cum\_CVA/M$

$EFE = FE \oslash count$

Algorithm 2–3: 構造モデルにおけるバリアの不確実性を考慮した場合の CVA 計算アルゴリズム

$[CVA, EFE] = \text{CVAAggregator\_CDS\_Str}(H_{C,0}^{normal}, H_{R,0}^{normal}, H_{C,0}^{stress}, H_{R,0}^{stress}, \sigma_C, \sigma_R)$

$$[CVA, EFE] = (1-p) \times \text{CVACalculator\_CDS\_Str}\left(\sigma_C, \sigma_R, H_{C,0}^{normal}, H_{R,0}^{normal}, \rho_{C,R}\right) + p \times \text{CVACalculator\_CDS\_Str}(\sigma_C, \sigma_R, H_{C,0}^{stress}, H_{R,0}^{stress}, \rho_{C,R})$$

Algorithm 2–4: デフォルト強度モデルとコピュラ・アプローチにおけるデフォルト強度のパス発生アルゴリズム

$[\lambda_R, F_C, F_R] = \text{PathGenerator\_CDS}(\kappa_C, \theta_C, \sigma_C, \lambda_{C,0}, \Psi_C, \kappa_R, \theta_R, \sigma_R, \lambda_{R,0}, \Psi_R, \rho_{C,R}, \nu_C, \nu_R, \eta)$

for $i = 1: M$
- $\epsilon_C \sim \text{Normal}(0,1)$
- $\epsilon_0 \sim \text{Normal}(0,1)$
- $\epsilon_R = \rho_{C,R}\epsilon_C + \sqrt{1-\rho_{C,R}{}^2}\epsilon_0$
- $\xi \sim \text{Poisson}(\eta\Delta)$
- if $\xi > 0$
  - $z \sim \text{Exp}(1)$
  - $z_C = \nu_C z$
  - $z_R = \nu_R z$
- else $z_C = z_R = 0$
- end
- $\lambda_C(i,1) = \lambda_{C,0} + \kappa_C(\theta_C - \lambda_{C,0})\Delta + \sigma_C\sqrt{\lambda_0\Delta}\epsilon_C + z_C$
- $\Lambda_C(i,1) = \lambda_C(i,1) \times \Delta$
- $\lambda_R(i,1) = \lambda_{R,0} + \kappa_R(\theta_R - \lambda_{R,0})\Delta + \sigma_R\sqrt{\lambda_0\Delta}\epsilon_R + z_R$
- $\Lambda_R(i,1) = \lambda_R(i,1) \times \Delta$
- $\boldsymbol{\beta}_C = [\kappa_C, \theta_C, \sigma_C, \nu_C, \eta]$
- $F_C(i,1) = 1 - \exp\{-(\Lambda_C(i,1) + \Psi_C(1, \boldsymbol{\beta}_C))\}$
- $\boldsymbol{\beta}_R = [\kappa_R, \theta_R, \sigma_R, \nu_R, \eta]$
- $F_R(i,1) = 1 - \exp\{-(\Lambda_R(i,1) + \Psi_R(1, \boldsymbol{\beta}_R))\}$
- for $j = 2: N$
  - $\epsilon_C \sim \text{Normal}(0,1)$
  - $\epsilon_0 \sim \text{Normal}(0,1)$
  - $\epsilon_R = \rho_{C,R}\epsilon_C + \sqrt{1-\rho_{C,R}{}^2}\epsilon_0$
  - $\xi \sim \text{Poisson}(\eta\Delta)$
  - if $\xi > 0$
    - $z \sim \text{Exp}(1)$
    - $z_C = \nu_C z$
    - $z_R = \nu_R z$
  - else $z_C = z_R = 0$
  - end
  - $\lambda_C(i,j) = \lambda_C(i,j-1) + \kappa_C(\theta_C - \lambda_C(i,j-1))\Delta + \sigma_C\sqrt{\lambda_C(i,j-1)\Delta}\epsilon_C + z_C$
  - $\Lambda_C(i,j) = \Lambda_C(i,j-1) + \lambda_C(i,j) \times \Delta$

$\lambda_R(i,j) = \lambda_R(i,j-1) + \kappa_R(\theta_R - \lambda_R(i,j-1))\Delta + \sigma_R\sqrt{\lambda_R(i,j-1)\Delta}\epsilon_R + z_R$
$\Lambda_R(i,j) = \Lambda_R(i,j-1) + \lambda_R(i,j) \times \Delta$
$F_C(i,j) = 1 - \exp\{-(\Lambda_C(i,j) + \Psi_C(j,\boldsymbol{\beta}_C))\}$
$F_R(i,j) = 1 - \exp\{-(\Lambda_R(i,j) + \Psi_R(j,\boldsymbol{\beta}_R))\}$
end
end

Algorithm 2–5: デフォルト強度モデルにおける Cpty デフォルト時の CDS のエクスポージャー計算アルゴリズム

$[V]$ = ConditionalValue_CDS_Int$(\kappa, \theta, \sigma, \nu, \eta, \Psi_R, \lambda_\tau, \tau_C)$

$V = 0$
$Residual\_time = N - \tau_C$
$S\_pre = 1$
for $j = 1: Residual\_time$
S_curr = SurvivalProb_CDS_Int$(\kappa, \theta, \sigma, \nu, \eta, \Psi_R, j, \tau_C)$
$PD_R = S\_pre - S\_curr$
$V = V + DF(j) \times (\mathrm{LGD_R} \times PD_R - sp_R \times \Delta \times S\_curr)$
$S\_pre = S\_curr$
end

Algorithm 2–6: デフォルト強度モデルにおける CVA 計算アルゴリズム

$[CVA, EFE]$ = CVACalculator_CDS_Int$(\kappa_C, \theta_C, \sigma_C, \lambda_{C,0}, \Psi_C, \kappa_R, \theta_R, \sigma_R, \lambda_{R,0}, \Psi_R, \rho_{C,R}, \nu_C, \nu_R, \eta)$

$Cum\_CVA = 0$
$flag_C = flag_R = 0$
$FE = count = \mathbf{0}$
$[\lambda_R, F_C, F_R]$ = PathGenerator_CDS$(\kappa_C, \theta_C, \sigma_C, \lambda_{C,0}, \Psi_C, \kappa_R, \theta_R, \sigma_R, \lambda_{R,0}, \Psi_R, \rho_{C,R}, \nu_C, \nu_R, \eta)$
for $i = 1: M$
$u_C \sim$Uniform(0,1)
$u_R \sim$Uniform(0,1)
for $j = 1: N$
if $u_C < F_C(i,j)$ & $flag_C == 0$
$\tau_C = j$
$flag_C = 1$
end
if $u_R < F_R(i,j)$ & $flag_R == 0$
$\tau_R = j$
$flag_R = 1$
end
if $flag_C == 1$ & $flag_R == 1$
break
end
end
if $\tau_C < \tau_R$
$\lambda_\tau = \lambda_R(i, \tau_C)$
V = ConditionalValue_CDS_Int$(\kappa_R, \theta_R, \sigma_R, \nu_R, \eta, \Psi_R, \lambda_\tau, \tau_C)$

$FE(\tau_C) = FE(\tau_C) + \max(V, 0) \times notional$
$count(\tau_C) = count(\tau_C) + 1$
$Cum\_CVA = Cum\_CVA + DF(\tau_C) \times \max(V, 0) \times \mathrm{LGD_C} \times notional$
break
else if $\tau_C == \tau_R$
$FE(\tau_C) = FE(\tau_C) + \mathrm{LGD_R} \times notional$
$count(\tau_C) = count(\tau_C) + 1$
$Cum\_CVA = Cum\_CVA + DF(\tau_C) \times \mathrm{LGD_R} \times \mathrm{LGD_C} \times notional$
break
end
end
$CVA = Cum\_CVA/M$
$EFE = FE \oslash count$

Algorithm 2–7:コピュラ・アプローチにおける Cpty デフォルト時の CDS のエクスポージャー計算アルゴリズム

$[V] = \mathrm{ConditionalValue\_CDS\_Cop}(\kappa, \theta, \sigma, \nu, \eta, \lambda_\tau, \Psi_R, \tau_C, U_C, U_{R|C}, \rho)$

$V = 0$
$Residual\_time = N - \tau_C$
$S\_pre = 1$
for $j = 1: Residual\_time$
$S\_curr = \mathrm{SurvivalProb\_Cop}(\kappa, \theta, \sigma, \nu, \eta, \lambda_\tau, \Psi_R, j, \tau_C, U_C, U_{R|C}, \rho)$
$PD_R = S\_pre - S\_curr$
$V = V + DF(j) \times (\mathrm{LGD_R} \times PD_R - sp_R \times \Delta \times S\_curr)$
$S\_pre = S\_curr$
end

Algorithm 2–8: コピュラ・アプローチにおける CVA 計算アルゴリズム

$[CVA, EFE]$
$= \mathrm{CVACalculator\_CDS\_Cop}(\kappa_C, \theta_C, \sigma_C, \lambda_{C,0}, \Psi_C, \kappa_R, \theta_R, \sigma_R, \lambda_{R,0}, \Psi_R, \nu_C, \nu_R, \eta, \rho_{C,R}^{copula})$

$Cum\_CVA = 0$
$flag_C = flag_R = 0$
$FE = count = \mathbf{0}$
$[\lambda_R, F_C, F_R] = \mathrm{PathGenerator\_CDS}(\kappa_C, \theta_C, \sigma_C, \lambda_{C,0}, \Psi_C, \kappa_R, \theta_R, \sigma_R, \lambda_{R,0}, \Psi_R, 0, \nu_C, \nu_R, \eta)$
for $i = 1: M$
$u_C \sim \mathrm{Uniform}(0,1)$
$u_R \sim \mathrm{Uniform}(0,1)$
for $j = 1: N$
if $u_C < F_C(i, j)$ & $flag_C == 0$
$\tau_C = j$
$flag_C = 1$
end
if $u_R < F_R(i, j)$ & $flag_R == 0$

```
            τ_R = j
            flag_R = 1
        end
        if flag_C == 1 & flag_R == 1
            break
        end
    end
    if τ_C < τ_R
        λ_τ = λ_R(i, τ_C)
        U_C = F_C(τ_C)
        U_R|C = F_R(τ_C)

        V = ConditionalValue_CDS_Cop(κ_R, θ_R, σ_R, ν_R, η, λ_τ, Ψ_R, τ_C, U_C, U_R|C, ρ^copula_C,R)

        FE(τ_C) = FE(τ_C) + max(V, 0) × notional
        count(τ_C) = count(τ_C) + 1
        Cum_CVA = Cum_CVA + DF(τ_C) × max(V, 0) × LGD_C × notional
        break
    else if  τ_C == τ_R
        FE(τ_C) = FE(τ_C) + LGD_R × notional
        count(τ_C) = count(τ_C) + 1
        Cum_CVA = Cum_CVA + DF(τ_C) × LGD_R × LGD_C × notional
        break
    end
end
CVA = Cum_CVA/M
EFE = FE ⊘ count
```

（３）　生存確率と累積デフォルト強度の分布関数の計算アルゴリズム

本補論（２）の計算で必要な構造モデル、デフォルト強度モデルおよびコピュラ・アプローチでの参照体の生存確率の計算アルゴリズムと、JCIR 過程に従うデフォルト強度の累積値に関する特性関数の計算アルゴリズム、その特性関数から累積分布関数を非整数次フーリエ変換で求めるアルゴリズムは、Algorithm 3–1～Algorithm 3–5 のように与えられる。計算に必要なパラメータとして、Algorithm 3–1 中のBは、５.（３）節に記述したとおり、$B=0$とする。

Algorithm 3–1: 構造モデルにおける生存確率計算アルゴリズム

```
[S] = SurvivalProb_Str(A_τ, τ_C, Residual_time, σ_R, H_R)
--------------------------------------------------------
for i = 1: Residual_time
    Σ = σ_R(i + τ_C)^2 × Δ
end
x1 = {log(A_τ/H_R) + (2B − 1) × Σ/2}/√Σ
x2 = {log(H_R/A_τ) + (2B − 1) × Σ/2}/√Σ
```

$S = \Phi(x1) - \Phi(x2) \times (H_R/A_\tau)\hat{}(2B-1)$

Algorithm 3–2: デフォルト強度モデルにおける生存確率計算アルゴリズム

$[S] = \mathrm{SurvivalProb\_Int}(\kappa, \theta, \sigma, \nu, \eta, \Psi_R, \lambda_\tau, Residual\_time, \tau_C)$

$t = Residual\_time \times \Delta$
$h = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}$
$C = [2h\exp\{(\kappa+h)t/2\}/\{2h+(\kappa+h)(\exp(ht)-1)\}]\hat{}\{2\kappa\theta/\sigma^2\}$
$B = 2\{\exp(ht)-1\}/\{2h+(\kappa+h)(\exp(ht)-1)\}$
$a = h + \kappa + 2\nu$
$A = \{2h\exp(at/2)/(2h + a(\exp(ht)-1))\}\hat{}\{2\nu\eta/(\sigma^2 - 2\kappa\nu - 2\nu^2)\}$
$\boldsymbol{\beta} = [\kappa, \theta, \sigma, \nu, \eta]$
$\overline{\Psi_R} = \Psi_R(\tau_C + Residual\_time, \boldsymbol{\beta}) - \Psi_R(\tau_C, \boldsymbol{\beta})$
$S = AC\exp(-B\lambda_\tau)\exp(-\overline{\Psi_R})$

Algorithm 3–3: コピュラ・アプローチ（正規コピュラ）における生存確率計算アルゴリズム

$[S] = \mathrm{SurvivalProb\_Cop}(\kappa, \theta, \sigma, \nu, \eta, \lambda_\tau, \Psi_R, Residual\_time, \tau_C, U_C, U_{R|C}, \rho)$

$t = Residual\_time \times \Delta$
$S = 0$
$L = 1$
$x_{max} = 9$
$u_{max} = 10^6 Residual\_time^{-1.45}$
$\mathrm{while}(L < 2u_{max})\ L = L \times 2$
$x_{grid} = x_{max}/L$
$u_{grid} = u_{max}/L$
$\boldsymbol{\beta}_R = [\kappa, \theta, \sigma, \nu, \eta]$
$p = \mathrm{CDFCalculator}(x_{grid}, x_{max}, u_{grid}, u_{max}, L, \kappa, \theta, \sigma, \nu, \eta, \lambda_\tau, t)$
$x_{R|C} = \{\Phi^{-1}(U_{R|C}) - \rho\Phi^{-1}(U_C)\}/\sqrt{1-\rho^2}$
for $x = x_{grid}: x_{grid}: x_{max}$
    $u_R = 1 - (1 - U_{R|C})\exp(-x)$
    $x_R = \{\Phi^{-1}(u_R) - \rho\Phi^{-1}(U_C)\}/\sqrt{1-\rho^2}$
    $f(x) = (\Phi(x_R) - \Phi(x_{R|C}))/(1 - \Phi(x_{R|C}))$
    $S = S + p(x)(f(x) - f(x - x_{grid}))$
end
$\overline{\Psi_R} = \Psi_R(\tau_C + Residual\_time, \boldsymbol{\beta}_R) - \Psi_R(\tau_C, \boldsymbol{\beta}_R)$
$S = S\exp(-\overline{\Psi_R})$

Algorithm 3–4: 累積 JCIR 過程の特性関数計算アルゴリズム

$[\phi] = \mathrm{CharacteristicFunction}(u, \kappa, \theta, \sigma, \nu, \eta, \lambda_\tau, t, h)$

$a = \kappa + h - 2i\nu u$
$A_J = 2h\exp(at/2)/(2h + a(\exp(ht)-1))$

$\alpha_J = 2\eta\nu/(\sigma^2 - 2\kappa\nu + 2\mathrm{i}\nu^2 u) \times \left\{\mathrm{Log}\left[\mathrm{abs}\left(A_J\right)\right] + \mathrm{i} \times \mathrm{unwrap}(\mathrm{angle}(A_J))\right\}$
$A = \exp(\alpha_J)$
$B = 2(\exp(ht) - 1)/(2h + (\kappa + h)(\exp(ht) - 1))$
$C_D = 2h \exp((\kappa + h)t/2) / (2h + (\kappa + h)(\exp(ht) - 1))$
$\alpha_D = 2\kappa\theta/(\sigma^2) \times \{\mathrm{Log}[\mathrm{abs}(C_D)] + \mathrm{i} \times \mathrm{unwrap}(\mathrm{angle}(C_D))\}$
$C = \exp(\alpha_D)$
$\phi = A \times C \exp(\mathrm{i}uB\lambda_\tau)$

Algorithm 3–5: 特性関数に基づく累積分布関数計算アルゴリズム

$[CDF] = \mathrm{CDFCalculator}(x_{grid}, x_{max}, u_{grid}, u_{max}, L, \kappa, \theta, \sigma, \nu, \eta, \lambda_\tau, t)$

$u = (0{:}\, u_{grid}{:}\, u_{max})$
$h = \sqrt{\kappa^2 - 2\mathrm{i}u\sigma^2}$
$\phi = \mathrm{CharacteristicFunction}(u, \kappa, \theta, \sigma, \nu, \eta, \lambda_\tau, t, h)$
$g = \left(\phi(u_j) \times u_{grid}\right)_{j=0}^{L-1}$
$\alpha = x_{grid} \times u_{grid}/(2\pi)$
$a = (\exp\{\mathrm{i}\alpha\pi j^2\})_{j=0}^{L-1}$
$\bar{a} = (\exp\{\mathrm{i}\alpha\pi(L - j)^2\})_{j=0}^{L-1}$
$w = (0.5, \mathrm{ones}[1, L - 2], 0.5)$
$y1 = (g \oslash a \odot w, \mathrm{zeros}[1, L])$
$\overline{y1} = \mathrm{FFT}(y1)$
$y2 = (a, \bar{a})$
$\overline{y2} = \mathrm{FFT}(y2)$
$y3 = \overline{y1} \odot \overline{y2}$
$\overline{y3} = \mathrm{IFFT}(y3)$
$y = \overline{y3}(1{:}\, L) \oslash a$
$CDF(0) = \mathrm{Re}[y(0)] \times x_{grid}/\pi$
for $x = x_{grid}{:}\, x_{grid}{:}\, x_{max}$
    $CDF(x) = CDF(x - x_{grid}) + \mathrm{Re}[y(x)] \times x_{grid}/\pi$
end