

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

CVAにおける誤方向リスク・モデルの潮流

あだち てつや すえしげ たくみ よしほ としなお
安達 哲也・末重 拓己・吉羽 要直

Discussion Paper No. 2016-J-5

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 東京都中央区日本橋本石町 2-1-1

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい。

備考：日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

CVAにおける誤方向リスク・モデルの潮流

あだち てつや すえしげ たくみ よしば としなお
安達 哲也*・末重 拓己**・吉羽 要直***

要 旨

デリバティブ取引のエクスポージャーの増大と取引のカウンターパーティの信用低下が同時に生じ、評価損が拡大するリスクを誤方向リスクと呼ぶ。2007～08 年の金融危機においては、デリバティブ取引の信用評価調整で誤方向リスクが顕在化し、市場全体で巨額の評価損が発生しており、誤方向リスク管理は金融機関のリスク管理で重要課題となっている。特に、誤方向リスクをモデル化し、その保有ポートフォリオへの影響やコストを定量的に認識・把握することで、緊急時の対応性や経営効率を高めることが金融機関のリスク・経営管理で求められている。一方、誤方向リスクの顕在化は基本的に低頻度事象（レア・イベント）で、そのデータの入手が困難であり、モデルの妥当性を評価しにくいこともあって、まだ標準的なモデルは存在しない。こうした背景から本稿では、OTC デリバティブ取引のプライシングやリスク管理において学術研究や実務家から提案されている誤方向リスクのモデリング手法を概観して体系的に整理し、各手法の特徴を分析する。

キーワード：CVA、誤方向リスク、デフォルト強度、構造モデル、ジャンプ拡散過程、コピュラ

JEL classification: G13

* 日本銀行金融研究所（現 金融庁、E-mail: tetsuya.adachi@fsa.go.jp）

** 東京工業大学大学院総合理工学研究科（E-mail: sueshige.t.aa@m.titech.ac.jp）

*** 日本銀行金融研究所企画役（E-mail: toshinao.yoshiba@boj.or.jp）

本稿の作成に当たり、中川秀敏准教授（一橋大学）から有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

(目 次)

1. はじめに.....	1
2. CVA および WWR のモデル化の基本.....	3
(1) CVA の構成	3
(2) 対象とする WWR.....	4
(3) WWR を考慮した CVA 評価	4
(4) 条件付期待エクスポージャーの計算方法	8
3. WWR のモデル化 I : 構造モデルと誘導型モデル	8
(1) Cpty のデフォルト事象のモデル化	9
(2) エクスポージャーのモデル化	14
(3) エクスポージャーとデフォルト事象の相互依存関係のモデル化 ...	16
4. WWR のモデル化 II : コピュラ・アプローチ	21
(1) WWR のための一般コピュラ・モデル	21
(2) パス整合的エクスポージャー・ウェイト	24
(3) クレジット・デリバティブにおけるコピュラ・アプローチ	24
5. WWR のモデル化 III : 実務への応用を考慮したアプローチ	27
(1) デフォルト強度／確率に関するパラメトリック・アプローチ	27
(2) デフォルト時ジャンプ・モデル	30
(3) ストレス・シナリオを反映した条件付期待エクスポージャー	33
(4) システミック・エクスポージャー	35
6. まとめ.....	39
参考文献.....	39
補論 1 構造モデルのもとでの WWR モデリング	44
補論 2 コピュラ密度を用いたウェイト関数の解析的表現.....	45
補論 3 強度モデルにコピュラを適用した場合の参照体の条件付生存確率...	46
補論 4 担保取引と MPoR を考慮した場合のエクスポージャー計算	48
補論 5 Pykhtin and Sokol [2013] の β 、 γ および q の推計方法	49

1. はじめに

誤方向リスク（wrong-way risk：WWR）は、デリバティブ取引のエクスポージャーと取引のカウンターパーティ（counterparty：Cpty）の信用水準が負の相互依存関係を持つ場合に、両者の相乗作用により損失が拡大するリスクとして認識されている。このとき、エクスポージャーの増大と Cpty の信用水準の下落が同時に起こるため、デリバティブ取引の公正価値を構成する信用評価調整（credit valuation adjustment：CVA）が加速度的に膨らんで巨額の時価損失に繋がる可能性がある。最近の事例としては、2007～08 年の金融危機時にモノラインや AIG といった CDS（credit default swap）の売り手が信用不安に陥り、これら金融機関から CDS を購入した金融機関（CDS の買い手）にとっては、Cpty であるモノラインや AIG の信用リスクとその取引のエクスポージャーが同時にしかも急激に高まることによって CVA が増大し、市場全体で巨額の公正価値損失が生じた¹。WWR は、それが実現すれば巨額の損失となる可能性が高いため、金融機関における WWR 管理の重要性は高まってきている²。

WWR 管理のためには CVA における WWR のプライシング・モデルを構築しなければならない。WWR の最大の問題は、ストレス・イベント発生時に Cpty の信用水準とエクスポージャーの相互依存関係が平時に比べて大きくしかも急激に変わることによって、銀行のポートフォリオに甚大な損失をもたらすことにある。この観点から、WWR のモデル化の要諦は、クレジット変数と市場リスク・ファクター間の同時分布における裾部分のモデル化に集約できる。一方、同時分布の裾部分の事象（イベント）は、テール・イベントと呼ばれ、稀にしか発生しない事象（低頻度事象、レア・イベント）の集合となっている。このため、WWR 発生に関する十分なデータの確保が困難であり、WWR モデルの妥当性や市場整合性を確認する手段がなく、市場のコンセンサスが得られるようなモデルが得られていない。このようなことから、WWR のモデル化には大きな「モデルの不確実性³」が伴うことが知られている。例えば、平静時のデータを

¹ バーゼル銀行監督委員会（BCBS）の報告によると、2007 年夏以降の金融危機におけるカウンターパーティ信用リスクにかかる損失のうち、Cpty のデフォルトによる直接的損失は全体の損失の 3 分の 1 に止まり、残りは Cpty の信用力の変化に伴う時価変動（CVA 増大）による評価損の拡大に起因した。

² OTC デリバティブ取引のカウンターパーティ・リスク（CCR: Counterparty Credit Risk）に関する問題の認識は金融危機前からあったが（Sorensen and Bollier [1994] を参照）、実務上 CVA の認識が浸透したのは 1998 年の LTCM 危機後と考えられている。

³ Cont [2006] は、「モデルの不確実性（model uncertainty）」をモデル選択における不確実性（どのモデルが正しいか自明でない場合）と関連付けている。確率分布が既知の場合の結果に対する不確実性を記述する「リスク」と異なり、「モデルの不確実性」は、そのような確率分布に関して（どれが正しいか自明ではない）複数の候補が存在する場合に認識され

用いた WWR モデルのキャリブレーションの結果得られたパラメータ値を用いても、大きな損失が発生する結果を再現できないため、特に景気の上昇期で市場が平穏な状況のもとでは WWR は重視されない傾向がある。一方、市場のストレス時には、モデルのパラメータ値や変数間の相互依存関係が急激に変化する結果、想定外の大損失を被る原因となる可能性があるが、ストレス時の変化をモデルにより合理的に推測することは、過去データの制約もあり、非常に困難である。このように、WWR はパラメータやモデルの「不確実性」に晒されているが、それゆえ、WWR のプライシングに関するモデル化手法について理解を深め、各手法の利点・欠点を踏まえて適切なモデルを選択することは、WWR 管理上重要である⁴。

現状では、WWR のプライシングについて市場関係者の間でコンセンサスのあるモデル化手法は確立されていない。これまでの学術および実務系の公表論文等では、資産クラス（金利、為替レート、株式等）によって様々なモデル化が提案されているが、それらを整理している文献は少なく⁵、各アプローチの相対的な特徴や利点・欠点などが十分整理されているとは必ずしもいえない。そこで本稿では、OTC デリバティブ取引のプライシングやリスク管理において学術研究や実務家から提案されている WWR モデルを概観し、整理する。なお、本稿では、CVA を計算する主体（銀行）はデフォルトしないと仮定し、不完全な担保付の OTC デリバティブ取引にかかる片方向（unilateral）CVA を考察対象とする。

本稿の構成は、以下のとおりである。まず2節では、CVA の考え方の基本を示すとともに、WWR を表現するために重要となる（Cpty のデフォルト）条件付期待エクスポージャーを導出する。続く3節から5節では、CVA における WWR モデル化手法について整理する。3節では、信用リスク・モデルの種類（構造モデル、強度モデル）に依存した分類を行う。4節では、コピュラ関数を応

る。WWR のようなモデルの不確実性を含む要因については、市場で取引可能な金融商品でのヘッジが困難なため、（規制・経済）資本により保全することが一般的である。

⁴ 資本規制においても、WWR を明示的に考慮した資本賦課制度の導入や各金融機関に WWR に対する監視体制の強化が求められている。バーゼル III（BCBS [2010]）では、銀行が CCR 資本賦課計算について期待エクスポージャー方式（IMM）を使用する場合、与信相当額算定への WWR の保守的考慮、および、ストレス・テスト等を通じて将来エクスポージャーにかかる WWR 管理を要求している。また、2015 年 7 月 1 日に公表された CVA の枠組みの改訂に関する市中協議文書（BCBS [2015]）では、規制上の CVA 資本賦課額を内部モデル・アプローチ（IMA-CVA）または標準的アプローチ（SA-CVA）のいずれかで計算する場合には、その基礎となる CVA モデルにおいて WWR を考慮することが求められている。

⁵ 桜井 [2011] は、CVA のプライシング・モデルに関して包括的にサーベイしており、その一部で WWR に関する研究も示している。

用した WWR モデルの最近の研究結果について紹介する。5 節では、実務（ブラッシング、リスク管理）への実装を意識した相対的にシンプルないくつかのアプローチについて解説する。最後に、6 節で本稿をまとめる。

2. CVA および WWR のモデル化の基本

（1）CVA の構成

CVA とは、OTC デリバティブ取引において、デリバティブ価値が正であるとき（デリバティブ資産）に取引相手（Cpty）がデフォルトした場合において、得られるはずであった正の価値を取り損ねることによる損失を市場価値ベースで評価した評価調整額であり、伝統的な貸出金に対する会計上の引当金に類似している。会計上（国際基準<IFRS>、米国基準、日本基準）、CVA はデリバティブ取引の公正価値を構成する要素として原則としてその計上が求められている。CVA は、貸出金に対する引当金と同様に、基本的には、以下のように計算できる⁶。

$$V^{CVA} = V^{No\ CVA} - CVA,$$

$$CVA = (\text{デフォルト時})\text{与信額} \times \text{期待損失率},$$

$$\text{期待損失率} = \text{デフォルト時損失率(LGD)} \times \text{デフォルト確率(PD)},$$

ただし、 V^{CVA} は、CVA 考慮後のデリバティブ価値、 $V^{No\ CVA}$ は CVA 考慮前のデリバティブ価値を示している。

CVA が引当金と大きく異なるのは、貸出金の与信額に相当するデリバティブ価値は会計上公正価値測定されており、原資産の市場価格に応じて変動するため、引当金計算のようにその与信額を固定できないことである。また、満期までの期間のどの時点で Cpty がデフォルトするかによって、デリバティブ価値が異なる上に、（金利、通貨等）スワップなどの場合、その価値の符号も変わる可能性がある。デリバティブ価値が正（負）である場合には与信（被与信）となり、与信である時に Cpty がデフォルトすれば損失を被ることになる。この損失を時価評価したものが CVA である。さらに、会計や自己資本規制ではデフォルト確率の計算も市場で観察可能な変数（CDS や社債のスプレッド等）を用いて計算することが求められており、これらスプレッド変動によって CVA も変動する。すなわち、CVA ではデリバティブ価値変動と Cpty の信用リスクが相互に関係しており、その変動は非常に複雑なものとなる。

⁶ ここで、デフォルト確率（PD）や期待損失率は、リスク中立確率の下での評価である。

(2) 対象とする WWR

WWR は、「個別 WWR」と「一般 WWR」に分類できる。個別 WWR とは、個々の取引に固有なものであり、取引のエクスポートジャーと Cpty の信用水準の間に尤もらしい負の相互依存関係が存在する場合に生じる。例えば、CDS 契約において、参照体がプロテクションの売り手の関係会社である場合などが挙げられる。一方、一般 WWR は、取引のエクスポートジャーと Cpty の信用水準が、金利、株式、為替等の一般的な市場ファクターの影響を受けて負の相互依存関係を形成する場合に生じる。例えば、米国の銀行が、エマージング・マーケットの銀行を Cpty として米ドルを買い、ローカル通貨を売るという先渡契約を行ったとする。このとき、ローカル通貨が減価すれば、エクスポートジャーは増加するが、Cpty の信用水準は一般的に低下すると考えられる（負の相互依存関係）。

デリバティブのエクスポートジャーと Cpty の信用水準の間に正の相互依存関係がある場合には、正方向リスク（right-way risk : RWR）が生じる。このとき、Cpty の信用水準が下落した場合には、デリバティブのエクスポートジャーが縮小するため、Cpty のデフォルト時のエクスポートジャーは小さくなる。したがって、RWR がある場合の CVA はそれがない場合の CVA よりも小さくなるため、時価損失は縮小する。本稿では、リスク管理上の保守性⁷を考慮し、一般 WWR に分析の焦点を当て、RWR は分析の対象外とする。

(3) WWR を考慮した CVA 評価

本稿では、全ての（確率）変数は、フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G}, \mathbb{Q})$ ($\mathcal{G} := \mathcal{G}_T, T < +\infty, \mathbb{G} := \{\mathcal{G}_t: 0 \leq t \leq T, \mathcal{G}_t \subset \mathcal{G}\}$) の上で定義されると仮定する。ここで、デフォルト事象以外の市場で観察可能な変数により生成される完備で右連続な σ -加法族 \mathcal{F}_t で構成されるフィルトレーションを $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t: 0 \leq t \leq T\}$ とし、デフォルト時刻を τ としたときデフォルト事象から生成される右連続な σ -加法族 $\mathcal{H}_t (= \sigma(\{\tau \leq u\}: u \leq t))$ で構成されるフィルトレーションを $\mathbb{H} := \{\mathcal{H}_t: 0 \leq t \leq T\}$ とする。 \mathbb{G} は \mathbb{F} と \mathbb{H} の和で構成されるフィルトレーションとする（すなわち、 $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$ ）⁸。 \mathbb{Q} はリスク中立確率測度を示しており、 $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[\cdot]$ は \mathbb{Q} のもとでの

⁷ プライシング・モデルと (VaR [Value-at-Risk] 等のリスク指標を計算するための) リスク計測モデルは必ずしも同一ではない。プライシング・モデルの特徴は現在の市場価値に基づいた評価であり、一般的に、リスク中立測度の下で個別取引単位の評価および正確性（特にヘッジ計算）が重視される。一方、リスク計測モデルの特徴は（過去の）実現データに基づいた評価であり、一般的に、実物測度の下でポートフォリオ単位の評価および保守性（テール・イベント、ストレス・シナリオ [データ] など）が重視される。

⁸ デフォルト事象が市場で観測される変数のみによって特徴付けられるとき（後述の「構造

条件付期待値 ($\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\cdot | \mathcal{G}_t]$) を示している ($\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[\cdot]$ は、評価日時点 $t_0 [= 0]$ における期待値)。以下では、 $\{W_x(t)\}_{t \geq 0}$ を確率過程 $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ を駆動する標準ブラウン運動、 σ_x をその拡散係数 (時間依存する場合は $\sigma_x(t)$)、そして、確率過程 $x(t)$ と $y(t)$ の (瞬間的) 相関係数を $\rho_{x,y}$ (時間依存する場合は $\rho_{x,y}(t)$) と記述する。

今、銀行と Cpty が OTC デリバティブ取引を行っているものとする。各時間グリッド t_i ($i \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ 、取引の満期 $t_N [= T]$) で、銀行から見た Cpty の信用リスクを考慮しない個別取引価値 $v(t_i)$ を(1)式で表す。

$$v(t_i) = \mathbb{E}_{t_i}^{\mathbb{Q}}[\Pi(t_i, T)], \quad (1)$$

ただし、 $\Pi(t_i, T)$ は時点 t_i から満期 $t_N (= T)$ までの残余キャッシュ・フローの現在価値の和を示している。一般的に、CVA は Cpty に対する法的に有効なネットティング・セット (NS) 単位で計測することから、NS 単位の正味デリバティブ価値 $V(t_i)$ を(2)式のように表現する。

$$V(t_i) = \sum_{n \in \text{NS}} v_n(t_i), \quad (2)$$

ただし、 $v_n(t_i)$ は特定の NS に含まれる、 n というラベルで識別される個別取引価値を示している。

$C(t_i)$ は時点 t_i の担保価値であり、 $C(t_i) > 0 (< 0)$ であれば、銀行から見て「受取担保」(「差入担保」) となる。担保は NS 単位で授受される。Cpty のデフォルト時刻を τ_c と表記する。無担保取引の場合、実際の τ_c 直後の時間グリッドでデフォルトすると同時に取引が清算されたものと仮定して CVA の計算を行う。一方、担保契約がある場合には、 τ_c 直後の時間グリッドをクローズ・アウト日⁹と仮定する。クローズ・アウト日から遡って、デフォルト直前の最終担保授受日までの期間 (リスクのマージン期間 : Margin Period of Risk [MPoR]¹⁰) を 2 週間 (10 営業日) とする¹¹。Cpty のデフォルト時に損失リスクに晒される部分を

モデル」の場合など) には、 $\mathbb{G} = \mathbb{F}$ として確率空間を定義する。

⁹ Cpty のデフォルトにかかる清算手続きやポジションの再構築等が完了する日。

¹⁰ MPoR は、デフォルトした Cpty との取引のネットティング・セットをカバーする担保の最後の取引時点から当該 Cpty との取引がクローズ・アウトし、当該取引にかかる市場リスクが再ヘッジされる (re-hedged) までの期間のことを指す (BCBS [2006])。バーゼル III (BCBS [2010]) では、担保取引にかかる非流動性、マージン・コールのディスピュート (係争) 期間および取引の再構築の処理にかかるコスト等を捕捉し、取引のエクスపోージャーの過小評価を防ぐために MPoR を保守的 (長め) に設定している。

¹¹ Cpty の各時点 t_i におけるエクスపోージャーの計算に担保授受を考慮する場合には、Cpty のデフォルト時刻 (τ_c) 周りのイベント・スケジュール (クローズ・アウト日 $[t_{co}]$ 、MPoR $[\delta]$ 、最終担保授受日 $[t_{co} - \delta]$ 、 $t_{co} - \delta \leq \tau_c \leq t_{co}$) を考慮した上で、担保契約事項 (変動証拠金 [VM : Variational Margin]、当初証拠金または独立担保額 [IM : Initial Margin]、信

「エクスポージャー (exposure)」と呼び、 $\tau_c \in (t_{i-1}, t_i]$ として、 $\max\{V(t_i) - C(t_i), 0\}$ で表現する。Cpty のデフォルト時損失率 (定数) を LGD_c 、Cpty が時間間隔 $(t_{i-1}, t_i]$ 内でデフォルトする確率を $\mathbb{Q}(\tau_c \in (t_{i-1}, t_i])$ ($= \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{\tau_c \in (t_{i-1}, t_i]}]$) で表す。

以上の条件のもとで、WWR を考慮した CVA^{WWR} は、(3)式で表現できる。

$$\begin{aligned}
CVA^{WWR} &= \mathbb{E}_0[LGD_c \mathbf{1}_{\{t_0 < \tau_c \leq T\}} DF(t_0, \tau_c) \max\{V(\tau_c) - C(\tau_c), 0\}] \\
&= LGD_c \mathbb{E}_0 \left[\int_{t_0}^T DF(t_0, t) \max\{V(t) - C(t), 0\} dN_t^c \right] \\
&\cong LGD_c \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=1}^N DF(t_0, t_i) \max\{V(t_i) - C(t_i), 0\} \mathbf{1}_{\{\tau_c \in (t_{i-1}, t_i]\}} \right] \\
&= LGD_c \sum_{i=1}^N \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}} \left[\frac{DF(t_0, t_i) \max\{V(t_i) - C(t_i), 0\} \mathbf{1}_{\{\tau_c \in (t_{i-1}, t_i]\}}}{PD_c(t_{i-1}, t_i)} \right] \mathbb{Q}(\tau_c \in (t_{i-1}, t_i]) \\
&= LGD_c \sum_{i=1}^N \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[DF(t_0, t_i) \max\{V(t_i) - C(t_i), 0\} | \tau_c \in (t_{i-1}, t_i)] \mathbb{Q}(\tau_c \in (t_{i-1}, t_i]),
\end{aligned} \tag{3}$$

ただし、 $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ は指標 (indicator) 関数、 $N_t^c = \mathbf{1}_{\{\tau_c \leq t\}}$ 、および $DF(t_0, t_i) \left(= \exp\left(-\int_{t_0}^{t_i} r(s) ds\right) \right)$ は無リスク金利のスポット・レート $r(t)$ に基づく割引ファクターである。(3)式最終式中の条件付期待値部分を、時点 t_i の「Cpty のデフォルト条件付 (割引後) 期待エクスポージャー」として、(4)式で表現する。

$$EPE^{WWR}(t_i) := \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[DF(t_0, t_i) \max\{V(t_i) - C(t_i), 0\} | \tau_c \in (t_{i-1}, t_i)]. \tag{4}$$

仮に、割引後エクスポージャー ($DF(t_0, t_i) \max\{V(t_i) - C(t_i), 0\}$) と Cpty のデフォルト時刻 τ_c が確率的に独立である場合 (WWR を考慮しない場合)、(3)式は(5)式のように書き換えることができる。

$$CVA^{No WWR} = LGD_c \sum_{i=1}^N \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[DF(t_0, t_i) \max\{V(t_i) - C(t_i), 0\}] \mathbb{Q}(\tau_c \in (t_{i-1}, t_i]). \tag{5}$$

(5)式の期待値部分を、時点 t_i の「無条件 (割引後) 期待エクスポージャー」として、(6)式で表現する。

用極度額 [Threshold]、最低引渡額 [MTA : Minimum Transfer Amount]) をモデル上で考慮しなければならない。クローズ・アウト日 (t_{co}) の担保額は、時点 $t_{co} - \delta$ (最終担保授受日) に決定される。担保契約がある場合の CVA 計算上の MPoR の取扱いの詳細は補論 4 を参照。

$$EPE^{No\ WWR}(t_i) := \mathbb{E}_0^Q[DF(t_0, t_i) \max\{V(t_i) - C(t_i), 0\}]. \quad (6)$$

(3)式と(5)式の差は、WWR の効果の有無にあり、 $EPE^{WWR}(t_i)$ と $EPE^{No\ WWR}(t_i)$ の差に帰着できる。各時点 t_i において、 $EPE^{WWR}(t_i) \geq EPE^{No\ WWR}(t_i)$ が成立するとき、Cpty のデフォルト時に平均的に大きなエクスポージャーが実現する¹²。このとき、(3)式から(6)式により、 $CVA^{WWR} \geq CVA^{No\ WWR}$ となり、WWR を考慮した CVA は考慮しない場合に比べて平均的に大きくなる。

図 1 デフォルト時刻(τ_c)周りのデリバティブ価値変動と WWR 顕現化のイメージ

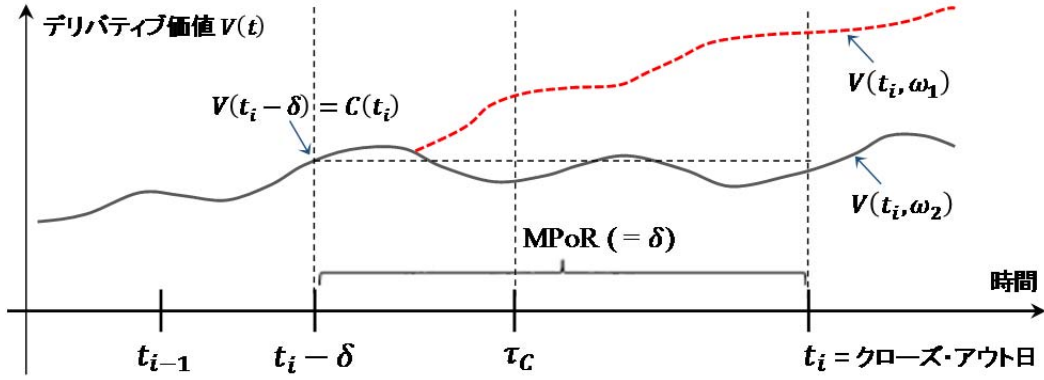


図 1 は、Cpty のデフォルト時刻 (τ_c) 付近のデリバティブ価値について、WWR の顕現化を表現するパス ($\omega_1 \in \Omega$) と WWR の顕現化を表現しないパス ($\omega_2 \in \Omega$) のイメージを示している。WWR のモデル化においては、 $V(t, \omega_1)$ のようなデフォルト時刻からクローズ・アウト日にかけてデリバティブ価値 V が大きくなるようなパスを多く発生させる仕組みを構築する必要がある。

$EPE^{WWR}(t_i)$ は、取引のエクスポージャーと Cpty のデフォルト事象の相互依存関係をどのようにモデル化するかに依存することから、CVA プライシングにおける WWR のモデル化の要点は、次の 3 点に集約できる。

- ① Cpty のデフォルト事象 (時刻) のモデル化、
- ② デリバティブ・エクスポージャーのモデル化、
- ③ Cpty のデフォルト事象とエクスポージャーの相互依存関係のモデル化 (相互依存関係の急激な変化を含む)。

¹² 各パス ($\omega \in \Omega$) レベルでは、Cpty のデフォルト時に大きなエクスポージャーが実現するとは限らない (図 1 を参照)。また、コピュラ関数により WWR をモデル化した場合には、すべての $t_i, i \in \{1, \dots, N\}$ について $EPE^{WWR}(t_i) \geq EPE^{No\ WWR}(t_i)$ が成立するとは限らない。詳しくは 4 節 (1) を参照。

以下、本稿では、デフォルト条件付期待エクスポージャー EPE^{WWR} の計算方法に焦点を当てて、WWR のモデル化のアプローチについて概観する。

(4) 条件付期待エクスポージャーの計算方法

ここでは、 $EPE^{WWR}(t)$ を計算するためにシナリオにウェイト付けするシミュレーション手法 (scenario-weighting approach) について紹介する (Finger [2000] および Ruiz, Pachon, and del Boca [2015] を参照)。

まず、共通の評価日 t_0 から評価対象デリバティブ取引の満期日 T までの期間を、 N 個の (月次程度の) 時間グリッド $\{t_i\}_{i=1}^N$ ($t_N := T$) に分割する。次に、Cpty の信用水準との相互依存関係 (次節以降で説明) を考慮しながら、 M 個の (割引後) エクスポージャーのパス ($DF^{(m)}(t_0, t_i) \max\{V^{(m)}(t_i) - C^{(m)}(t_i), 0\}$, $m \in \{1, \dots, M\}$) を各時間グリッド上で生成する。これと同時に、Cpty のデフォルト事象を記述する信用リスク・モデルに基づいて、Cpty の条件付デフォルト確率のパス ($PD_C^{(m)}(t_{i-1}, t_i)$) を各時間グリッド上で計算する。このとき、各時間グリッド t_i ($i \in \{1, \dots, N\}$) の条件付 (割引後) 期待エクスポージャーは、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} EPE^{WWR}(t_i) &= \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}} \left[\frac{DF(t_0, t_i) \max\{V(t_i) - C(t_i), 0\} \mathbf{1}_{\{\tau_C \in (t_{i-1}, t_i]\}}}{PD_C(t_{i-1}, t_i)} \right] \\ &\cong \sum_{m=1}^M w^{(m)}(t_i) DF^{(m)}(t_0, t_i) \max\{V^{(m)}(t_i) - C^{(m)}(t_i), 0\}, \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、 $w^{(m)}(t_i) = PD_C^{(m)}(t_{i-1}, t_i) / \sum_{m=1}^M PD_C^{(m)}(t_{i-1}, t_i)$ はウェイト関数である。

(7)式において、 $PD_C^{(m)}(t_{i-1}, t_i)$ と $DF^{(m)}(t_0, t_i) \max\{V^{(m)}(t_i) - C^{(m)}(t_i), 0\}$ の間に正の相互依存関係が存在すれば、相対的に大きいエクスポージャーに対して大きいウェイトを割り当てることになるため、WWR を表現できる。

3. WWR のモデル化 I : 構造モデルと誘導型モデル

本節では、デフォルト事象 (時刻)、デリバティブ・エクスポージャー、そしてこれら二者間の相互依存関係という 3 つの観点から WWR のモデル化について整理する。計算対象とするデリバティブ取引は、クレジット・デリバティブ (CDS) とそれ以外のデリバティブ (金利、株式、為替レート等を原資産としたデリバティブ全般) に分けて整理する。

(1) Cpty のデフォルト事象のモデル化

デフォルト事象のモデル化には、大きく分けて2つのアプローチがある。1つは、デフォルト事象を企業のバランス・シートの観点から内生的にモデル化する「構造 (structural) モデル・アプローチ」であり、もう1つは、デフォルト事象を外生的なポアソン事象 (Poisson events) として取り扱う「誘導型 (reduced-form) モデル・アプローチ」である。いずれのアプローチを使うにしても、WWR 管理における Cpty のデフォルト事象のモデル化では、以下の3つの条件を満たしつつ、実装上の実行可能性 (feasibility) を有していることが重要となる。

- ① クレジット市場で観察される信用スプレッド (CDS スプレッド、社債イールド・スプレッド等) の期間構造にフィッティングできること、
- ② 信用スプレッドの変動 (ボラティリティ) を表現できること、
- ③ デフォルト事象と市場リスク・ファクター (金利、株式、為替レート、コモディティ等) との相互依存関係、または異なる主体のデフォルト事象間の相互依存関係を表現できる仕組みを持っていること。

イ. 構造モデル・アプローチ

構造モデルでは、企業の財務構造を明示的にモデル化して、企業の資産価値がその負債価値 (バリア水準) を下回った時にデフォルトが生じるとみなす。最もシンプルな構造モデルであるマートン・モデル (Merton [1974]) では、企業の資産価値過程 $\{A(t)\}_{t \geq 0}$ の (企業の) 満期時点 $T > 0$ における価値 $A(T)$ が特定のバリア (負債価値) 水準 L を下回った時にデフォルト事象 (Cpty のデフォルト時刻 τ_c) が発生すると仮定する。

$$dA(t) = (r - q)A(t)dt + \sigma_A A(t)dW_A(t), \quad \tau_c = \begin{cases} T & \text{if } A(T) \leq L \\ \infty & \text{if } A(T) > L \end{cases}$$

このとき、満期時点 $T > 0$ における株主へのペイオフ $S(T)$ は、 $S(T) = \max\{A(T) - L, 0\}$ と表現できるので、現時点 0 の株主価値 (株価) を $S(0)$ とすれば、ブラック＝ショールズ・モデルにより信用スプレッドの解析解を得ることができる。また、企業価値が対数正規分布に従うことから、デフォルト確率 $\mathbb{Q}(A(T) \leq L)$ についても容易に解析解を得られる。

マートン・モデルは、信用スプレッドやデフォルト確率について解析解を導出できるなど扱いやすさの点で利点があるものの、デフォルトが満期時点 T でしか生じないとする仮定については、コベナント条項の存在や満期の異なる債権の存在などを考えると現実的な仮定とはいえない問題がある。また、資産価値過程のボラティリティ σ_A およびバリア L がともに定数である場合には信用

スプレッドの期間構造に柔軟にフィッティングできないという欠点がある。

Black and Cox [1976] は、企業の資産価値 $A(t)$ が特定のバリア $H(t)$ 以下となった時点でデフォルト事象が生起したものとみなすことによって、満期以前にもデフォルト事象が生起しうる構造モデルを構築している。ブラック＝コックス・モデルにおいて、デフォルト時刻 τ_c は、(8)式のように表現される。

$$\tau_c = \inf\{t \in (0, T) \mid A(t) \leq H(t)\}. \quad (8)$$

ブラック＝コックス・モデルは 4 つの定数パラメータで表現されるモデルであり、複数の CDS 気配値 (4～10) に柔軟にフィッティングさせるには不十分であることが知られている。Brigo, Morini, and Tarenghi [2011] および Brigo and Tarenghi [2004] は、モデルの市場気配値への柔軟なフィッティングを行うため、資産価値のボラティリティを時間依存型 $\sigma_A(t)$ に修正しており、バリアについても時間依存型 $H(t)$ に修正した。このとき、一般的には、ある時点 \bar{T} まで生存している確率 $\mathbb{Q}(\tau_c > \bar{T})$ の解析的表現を得ることは困難であるが、彼らは、Lo, Lee, and Hui [2003] の結果¹³を利用し、 $\sigma_A(t)$ に依存する特定のバリア関数 $H(t)$ のもとで、(9)式のように生存確率 $\mathbb{Q}(\tau_c > \bar{T})$ の解析的表現を得ている (AT1P : Analytically-Tractable First Passage Model)。

$$\begin{aligned} dA(t) &= (r(t) - q(t))A(t)dt + \sigma_A(t)A(t)dW_A(t), \\ H(t) &= H \exp\left\{\int_0^t (r(s) - q(s) - B\sigma_A(s)^2)ds\right\}, \quad A(0) > H, \\ \mathbb{Q}(\tau_c > \bar{T}) &= \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{A(0)}{H}\right) + \frac{2B-1}{2}\int_0^{\bar{T}} \sigma_A(s)^2 ds}{\sqrt{\int_0^{\bar{T}} \sigma_A(s)^2 ds}}\right) \\ &\quad - \left(\frac{H}{A(0)}\right)^{2B-1} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{H}{A(0)}\right) + \frac{2B-1}{2}\int_0^{\bar{T}} \sigma_A(s)^2 ds}{\sqrt{\int_0^{\bar{T}} \sigma_A(s)^2 ds}}\right), \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の累積分布関数である。

資産価格過程 $A(t)$ と債務水準で決まるバリア水準 $H(t)$ が市場で観察可能であるとする、 $A(t)$ が拡散項により駆動される連続過程で、 $H(t)$ が時間に関して確定的な関数であれば、(8)式から明らかのように、デフォルト時刻 τ_c は可予測 (predictable)¹⁴となる。デフォルト時刻が可予測である場合、当初のデフ

¹³ Lo, Lee, and Hui [2003] は、バリア $H(t)$ について $\sigma_A(t)$ に依存する特定の関数形をとることでバリア・オプションの解析解を導出している。

¹⁴ デフォルト時刻の可予測性は以下で定義される (Schönbucher [2003])。いま、停止時刻

オルト距離 ($A(0)/H$) が大きい場合には、目先の短期間のデフォルト確率はゼロに近くなり、現実の市場で観察できる非ゼロ (正) の短期スプレッドを説明することができない¹⁵。これは、構造モデルの欠点となる。実際のデフォルト事象は、市場で観察可能な変数からの予兆なしに突然顕現化する場合 (エンロン [米、2001 年 12 月]、ワールドコム [米、2002 年 7 月] やパルマラット [伊、2003 年 12 月] のケース等会計上の粉飾が突然明るみになった場合等) も多いが、マートン/ブラック=コックス・モデルでは、このような可予測ではない (unpredictable、非可予測な) デフォルト時刻を表現することができない。一つの解決策として、資産価格過程 $A(t)$ に下方ジャンプを導入することで、非可予測なデフォルト時刻を表現できる (Zhou [1997, 2001]、Hilberink and Rogers [2002]) が、この場合、CDS の市場気配値から導かれるクレジット・カーブへの柔軟なフィッティングに必要となる時間依存型ボラティリティやバリア関数下での生存確率の解析的公式の導出は困難となる。他の解決策としては、企業の資産価値過程またはバリア (負債価値) 水準に関する完備情報 (complete information) の仮定を緩めて、これらに関する不完備情報 (incomplete information) を仮定することにより非可予測なデフォルト時刻を表現するアプローチが存在する (Duffie and Lando [2001]、Cetin *et al.* [2004]、Giesecke [2004, 2005]、Giesecke and Goldberg [2004a,b]、Guo, Jarrow, and Zeng [2009]、Brigo and Morini [2006]、Brigo, Morini, and Pallavicini [2013] など)。このうち、Brigo and Morini [2006] および Brigo, Morini, and Pallavicini [2013] では、比較的簡明な不完備情報のモデルを提示している。具体的には、(9)式で表現される AT1P モデルをベースとして、離散的な確率シナリオごとに異なるバリア水準を持たせることでバリア水準に不確実性を導入し、非可予測なデフォルト事象を表現している。これは、SBTV (Scenario Barrier Time-Varying Volatility AT1P) モデルと呼ばれ、時間依存型ボラティリティのもとで短期テナーを含めた信用スプレッドの期間構造に柔軟にフィットさせつつ、生存確率についての解析的な表現を得ている。シナリオ数を S 個とすれば、シナリオごとのバリア水準は(10)式で表現できる。

$$H_s(t) = H_s \exp \left\{ \int_0^t (r(u) - q(u) - B\sigma_A(u)^2) du \right\} \text{ with prob. } p_s > 0, s \in \{1, \dots, S\}, \quad (10)$$

ただし、シナリオ確率は、 $\sum_{s=1}^S p_s = 1$ を満たす。

(stopping time) の非減少列 $\{\tau_h\}_{h=1}^\infty$ が存在して、 $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots < \tau_C, \lim_{h \rightarrow \infty} \tau_h = \tau_C$ を満たすとする。このとき、停止 (デフォルト) 時刻 τ_C を可予測であるという。ここで、 $\{\tau_h\}_{h=1}^\infty$ を (τ_C に対する情報を提供するという意味で) アナウンスング列 (announcing sequence) と呼ぶ。

¹⁵ 信用スプレッドの期間構造にフィッティングするには、短期テナーのボラティリティ $\sigma_A(t)$ を不自然に大きく設定することになる。

SBTV モデルのもとでのポートフォリオ価値 $V(t)$ は、ATIP モデルのもとでの各シナリオ $s \in \{1, \dots, S\}$ に基づくポートフォリオ価値 $V_s(t)$ のシナリオ確率加重平均値 $V(t) = \sum_{s=1}^S p_s V_s(t)$ として導出できる。

ロ. 誘導型モデル・アプローチ

デフォルト事象を企業の資産価値と負債価値の関係から内生的に取り扱う構造モデルと異なり、誘導型モデルでは、デフォルト事象をデフォルト強度 (intensity $\lambda_c(t) : \lambda_c(t)dt = \mathbb{Q}(\tau_c \in (t, t+dt] | \tau_c > t, \mathcal{F}_t)$) と紐付いたポアソン事象として外生的に取り扱う。これより、誘導型モデルではデフォルト時刻は非可予測となり、構造モデルの欠点であったデフォルト時刻の可予測性の問題を改善できる。なお、一般的に、誘導型モデルと (デフォルト) 強度モデルは必ずしも同義ではないが、本稿ではこれらを等しいものとして取り扱う¹⁶。また、WWR 管理におけるデフォルト事象のモデル化のために確率的強度モデルを選択する。

Cpty のデフォルト時刻 τ_c を定義するために、まず停止時刻の増加列 $\{s_h\}_{h \geq 1}$ ($s_h < s_{h+1}$) を考える。このとき、計数過程 $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ ($N(t) := \sum_{h=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{s_h \leq t\}}$) は、確率強度 (stochastic intensity) $\lambda_c(t) (\geq 0)$ を持つ二重確率的ポアソン過程 (doubly stochastic Poisson process、または、コックス過程 [Cox process]) であり、 $\{\lambda_c(t)\}_{t \geq 0}$ は、 \mathbb{F} -適合かつ右連続なデフォルト強度過程であり、その累積強度 (cumulated intensity) を $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda_c(s)ds$ で表現する。このとき、デフォルト時刻 τ_c は、ポアソン過程 $N(t)$ の最初のジャンプ時点となり、(11)式のように表現される。

$$\tau_c := s_1 = \inf\{t \in (0, T] \mid N(t) > 0\}. \quad (11)$$

(11)式において、Cpty のデフォルト時刻 τ_c について累積強度 $\Lambda(\tau_c)$ を通じて $\xi_c := \Lambda(\tau_c)$ と変換すると、 ξ_c は標準指数分布に従う確率変数となる¹⁷。この

¹⁶ 誘導型モデルでは、デフォルト強度の存在を前提としているわけではない。誘導型モデルでは、条件付生存確率を以下で示すような $\Lambda(t)$ によって特徴付ける (Giesecke [2005]、Giesecke and Goldberg [2004a,b]、Elizalde [2005])。

$$\mathbb{Q}(\tau_c > T \mid \mathcal{G}_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\exp(\Lambda(t) - \Lambda(T)) \mid \mathcal{G}_t],$$

ここで、 $\Lambda(t)$ が t に関して微分可能である場合のみ、強度 $\lambda_c(t)$ が存在して、 $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda_c(s)ds$ と表現できる。本稿では、 $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda_c(s)ds$ を前提とし、誘導型モデルを (デフォルト) 強度モデルと同義として議論を進める。

¹⁷ 確率強度 $\lambda_c(t)$ をもつポアソン過程 ($\text{Po}(\lambda_c(t))$) を強度 1 (定数) の標準ポアソン過程 ($\text{Po}(1)$) に変換した場合、 $\text{Po}(\lambda_c(t))$ における最初のジャンプ時刻 τ_c は、 $\text{Po}(1)$ における最初のジャンプ時刻 $\int_0^{\tau_c} \lambda_c(s)ds$ に置き換えられる。

とき、時刻 t までの生存確率 $\mathbb{Q}(N(t) = 0) = \mathbb{Q}(\tau_c > t)$ は、(12)式のように導出できる。

$$\mathbb{Q}(\tau_c > t) = \mathbb{Q}(\xi_c > \Lambda(t)) = \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\mathbf{1}_{\{\xi_c > \Lambda(t)\}} | \mathcal{F}_t] \right] = \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}} [\exp(-\Lambda(t))] . \quad (12)$$

(12)式より、デフォルト事象の生起は、(デフォルト強度 $\lambda_c(t)$ よりも) 累積強度 $\Lambda(t)$ により決定されることが分かる。(12)式の最終項の期待値 (生存確率) は、金利モデルにおける割引債の導出と類似していることから、ショートレート・モデルの幾つかのバージョンを援用することによりその解析的表現を導出できる。Brigo, Morini, and Pallavicini [2013] は、CIR (Cox, Ingersoll, and Ross [1985]) モデルに平均 ν の指数分布 $\text{Exp}(\nu)$ に従うジャンプ項 $J(t)$ を加えた(13)式のジャンプ CIR (JCIR) モデルを用いている^{18,19}。JCIR モデルは、(12)式の生存確率に対して解析解を持つ。

$$\begin{aligned} d\lambda_c(t) &= \kappa(\theta - \lambda_c(t))dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda_c(t)} dW_\lambda(t) + dJ(t), \\ J(t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^+} z dN^\eta(z, s), \quad z \sim \text{Exp}(\nu), \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、 $N^\eta(z, t)$ は定数強度 η を持つマーク ($z \in \mathbb{R}^+$) 付きポアソン点過程である。 $J(t)$ をマルチンゲールとするための補正項 (compensator) は $-\eta \nu t$ となるが、この効果は中心回帰水準 θ に反映させている²⁰。

現実の目先のデフォルト事象は、市場で観察可能な変数から予測できる (可予測な) 場合とデフォルトが何の予兆もなく突然顕現化 (leap to default) するような (非可予測な) 場合の中間にあると考えられる²¹。ところが、強度モデルでは、デフォルト事象が外生的に与えられるため、市場スプレッドを表現するデフォルト強度 ($\lambda_c(t)$) ²² の変動とデフォルト事象の発生 (τ_c) の間の関連性を

¹⁸ 正確には、JCIR モデルに確定的シフト項を加えた JCIR++モデル (Brigo and Mercurio [2006] を参照) を用いている。シフト項を加えることで、信用スプレッドの期間構造に対してより柔軟にモデルをフィットできる。

¹⁹ 強度モデルにおいても、構造モデルの場合と同様に、短期の (大きい) CDS スプレッドにうまくフィッティングできないという欠点がある。この欠点を改善するために、Brigo, Morini, and Pallavicini [2013] では、強度過程に「ジャンプ」を導入している。

²⁰ すなわち、ジャンプ項を含まない場合の元の中心回帰水準 θ^{NJ} とするとき、 $\theta = \theta^{NJ} - \eta \nu / \kappa$ とする。

²¹ 実際の市場では、目先短期間のデフォルト時刻は可予測とは言わないまでも、市場で観察可能な変数 (CDS スプレッド、株価、およびそのボラティリティ等) の動向からある程度の予測は可能である (リーマン・ブラザーズのデフォルト等)。リーマン・ブラザーズのデフォルトは、CDS スプレッドや株価の動向から市場ではある程度予想されていたものの、そのデフォルトは流動性不足を直接の原因として突然顕現化した。

²² Cpty のデフォルト強度 λ_c と Cpty の CDS スプレッド (シニア) X_c の関係は、Cpty のデフォルト時損失率を LGD_c として、近似的に $X_c \cong LGD_c \times \lambda_c$ で表現できる。この近似的関

うまく表現できないという欠点がある。(12)式でみたように、強度モデルでは、特定の時刻 t までのデフォルト事象の発生を特徴付けるのは累積強度 $\Lambda(t)$ であるが、デフォルト強度 $\lambda_C(t)$ の確率過程が連続過程である拡散項のみで駆動されている場合、デフォルト強度のサンプル・パス $\{\lambda_C(t)\}_{t \geq 0}$ は大きく変動しているように見えても、累積強度のサンプル・パス $\{\Lambda(t)\}_{t \geq 0}$ は安定的に増加していくため、デフォルト強度の変動とデフォルト事象の発生がほぼ無関係になることが Morini [2011] によって示されている。Morini [2011] は、デフォルト事象の生起とデフォルト強度の変動を関係付けるためには、デフォルト強度の変動が累積強度のサンプル・パスに大きな影響を与えるようなモデル化が必要であり、そのためには、(13)式で示されるような、デフォルト強度過程への「ジャンプ」の導入が不可欠と指摘している。例えば、2008 年 9 月のリーマン・ショックでは、デフォルトの直前期において、株価の大幅下落および CDS スプレッドの急拡大が観察されており、スプレッドの大幅変動とその後のデフォルトが関連していた。

デフォルト強度モデルのその他の欠点として、デフォルト相関 (default correlation) の再現性の低さが挙げられる²³。この問題を改善する方法として、Elizalde [2005] や 桜井 [2011] では、①デフォルト強度への相関ジャンプ (correlated jumps) の導入 (Duffie and Singleton [1999])、②特定の参照体のデフォルトが他の参照体のデフォルト強度を引き上げるようなデフォルト伝播モデル (Jarrow and Yu [2001], Leung and Kwok [2005])、③3 節 (2) で後述するコピュラ関数の導入 (Brigo and Chourdakis [2009], Brigo and Capponi [2009])、④Cpty と参照体の非デフォルト／デフォルト状態をマルコフ連鎖で表現し、両者がともにデフォルト状態に移行する確率をモデル化したマルコフ・コピュラ・モデル (Crepey, Jeanblanc, and Zargari [2009])、といったアプローチが提案されている。

(2) エクスポージャーのモデル化

イ. クレジット・デリバティブ

クレジット・デリバティブの原資産である参照体のデフォルト事象 (時刻) は、

係式は、Cpty の生存確率を $Q(\tau_C > t) := \exp(-\lambda_C t)$ と定義し、CDS の Premium Leg の価値と Default Leg の価値に関する以下の (連続時間の) 近似式で Premium Leg = Default Leg とすれば得られる。

$$\text{Premium Leg} \cong X_C \int_0^T DF(0, t) Q(\tau_C > t) dt,$$

$$\text{Default Leg} \cong LGD_C \int_0^T DF(0, t) Q(\tau_C \in (t, t + dt)) = \lambda_C LGD_C \int_0^T DF(0, t) Q(\tau_C > t) dt.$$

²³ デフォルト強度が拡散項のみで駆動されている場合、モデルが予測するデフォルト相関は、過去データから推計されるデフォルト相関と比較してかなり低い値となる。

本節（１）で説明したように、① 構造モデル・アプローチ、または、② 誘導型モデル・アプローチ のいずれかによりモデル化される。一般的には、Cpty のデフォルト事象と原資産（参照体）のデフォルト事象は同じアプローチでモデル化される。

ロ. クレジット・デリバティブ以外

CVA の計算は、Cpty のネットティング・セット単位で行われ、その中には様々な資産クラス（金利、株式、為替レート、商品等）の取引が含まれており、担保契約や MPoR の効果も考慮することが求められるため、個別取引ごとの計算に比べて実装の難しさや計算負荷は飛躍的に大きくなる²⁴。このようなことから、CVA の計算では、時間グリッド上のデリバティブ価値について解析解を導出できるか、あるいは、シミュレーション負荷の小さい比較的簡易なプライシング手法を選択することが現実的であろう。例えば、金利モデルについては、異なる期間（テナー）のフォワードレートは相互依存関係を持って無裁定関係を維持していると考えられるので、Heath, Jarrow, and Morton [1992]や Brace, Gatarek, and Musiela [1997]等のフォワードレート・モデルを用いることが伝統的なファイナンス理論との整合性が高い。しかしながら、金融危機後のマルチ・カーブ化に伴う異なるテナー間および異通貨金利間のベースス・リスクの考慮や CVA/DVA、FVA (funding valuation adjustment)、KVA (capital valuation adjustment) 等の XVAs がリスク管理で考慮されるようになってきたことにより²⁵、デリバティブのモデル化および実装はより複雑になってきている。このような状況のもと、フォワードレート・モデルではなく、比較の実装が容易で計算負担も小さい（複数ファクターを持つ）ショートレート・モデル (Black and Karasinski [1991]、Peterson, Stapleton, and Subrahmanyam [1999]、Hull and White [1994]や Brigo and Mercurio [2006]で示された G2++ [Two-Additive-Factor Gaussian Model] の 2 ファクター・モデルなど) を用いることも考えられる²⁶。

いずれにしても、複雑化するデリバティブ取引についてその評価上の解析的表現を得ることは困難になりつつあるため、多くの場合はシミュレーションで計算を行うことになる。特に、ポートフォリオに対する CVA/DVA の評価を行う

²⁴ ポートフォリオ単位での評価が中心となるため、資産クラス間のシナリオの整合性も確保しなければならない。

²⁵ CVA/DVA、FVA、KVA 等の XVAs の最近の議論については、安達 [2015] を参照。

²⁶ モデルの選択に際しては、現実の市場価格およびリスクの再現性、簡便化することによるリスクの見落とし、モデル・リスク、パラメータ推定リスク、実装の複雑性、計算負荷、客観的なインプットの入手可能性、ヘッジの効率性 などの間のトレード・オフを考慮する必要がある。

場合には、金利、為替、エクイティ、クレジットおよびそれらのボラティリティの間の相互依存関係やオプションリティを全て含むような大規模なハイブリッド・モデルが必要になる。現状では、将来エクスポージャーを計算する際に、アメリカン・モンテカルロ法に頼らざるを得ない状況にある²⁷。

(3) エクスポージャーとデフォルト事象の相互依存関係のモデル化

イ. 構造モデルの場合

(イ). クレジット・デリバティブ

本稿では、クレジット・デリバティブとして CDS のように参照体が 1 つの場合に焦点を当てる²⁸。

構造アプローチにおいて、Cpty と参照体のデフォルト事象（時刻）の相互依存関係を構成するシンプルなアプローチとして、ブラック＝コックス・モデルを前提として、以下の(14)式で示されるように、Cpty と参照体の資産価値過程 $A(t)$ の拡散項に線型相関を導入する方法がある。

$$\begin{aligned} dA_j(t) &= (r - q)A_j(t)dt + \sigma_{A,j}A_j(t)dW_{A,j}(t), \quad j \in \{C, R\} \\ dW_{A,C}(t)dW_{A,R}(t) &= \rho_{C,R}dt, \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、 C と R はそれぞれ Cpty と参照体を意味している。このような線型相関によるアプローチは、実装が比較的容易である一方、WWR を記述するアプローチとしては以下の 2 つの欠点がある²⁹。

- ① 既に述べたように、完備情報に基づく構造モデルでは、非可予測なデフォルト時刻を表現できない。

²⁷ アメリカン・モンテカルロ法とは、早期償還条項を持つデリバティブ取引のプライシングを行うための効率的なシミュレーション手法の総称である。桜井 [2011] では、アメリカン・モンテカルロ法に分類される手法として Longstaff and Schwartz [2011] の最小二乗モンテカルロ法と Tilley [1993] のバンドリング法を取り上げて概観している。その他、アメリカン・モンテカルロ法についての解説は、Cesari *et al.* [2009] および Glasserman [2004] などを参照。

²⁸ 一般的には、CDO (collateralized debt obligation) や "N-th to default" のように参照体が複数のクレジット・デリバティブもある。

²⁹ 桜井 [2011] では、構造モデルによるデフォルト確率の期間構造の表現能力の低さに注目して、これを改善したモデルとして、バリア水準を区分された期間ごとに信用スプレッドの期間構造にフィットするように設定した Hull and White [2001] と、資産価値のジャンプ強度を区分された期間ごとに信用スプレッドの期間構造にフィットするように設定した Lipton and Sepp [2009]、を示している。本稿では、信用スプレッドの期間構造にフィット可能であることを前提として、WWR を考慮する上での構造モデルの欠点を補完するようなモデル化を概観する。

- ② 拡散項の線型相関のみでは、金融危機時に見られた資産価格の急激な相互依存関係の高まり（または、相互依存関係の急激な変化）を表現できない。

これら構造モデルの欠点を改善する方法として、以下の 2 つのアプローチが考えられる。

- A) Cpty と参照体の資産価値の確率過程に「同時ジャンプ (joint jump)」を導入して、非可予測なデフォルト時刻および急激な相互依存関係の高まりを表現しようとするアプローチ (Lipton and Sepp [2009]³⁰)
- B) デフォルト事象発生 の判定基準となる Cpty と参照体のバリア水準 (負債水準) に不確実性と共変動性を導入するアプローチ (Giesecke [2004])。

アプローチ A) において、Lipton and Sepp [2009] では、各企業の資産価値過程に独立ジャンプと同時ジャンプ (ポートフォリオ中の参照体のすべての組合せを表現³¹) を導入している。彼らのモデルでは、解析的表現を導出するために資産価値 $A(t)$ の確率過程について (時間に依らず) 定数のボラティリティを仮定しており、信用スプレッドの期間構造へのフィッティングは、資産価値過程のジャンプ強度 (intensity) の推定を通じて行っている。

一方、アプローチ B) としては、WWR モデルではないものの、Giesecke [2004] は、複数の参照体のバリア水準がそれぞれ確率的に変動するモデルを考案し、これらバリア水準の同時分布をコピュラ関数により表現することによって複数の参照体のデフォルト相関 (default correlation) および非可予測なデフォルト時刻を表現している³²。Cpty と参照体のデフォルト事象の相互依存関係の急激な高まりは、バリア水準の同時分布の裾部分 (Cpty と参照体のバリア水準が同時に高まる) を厚くするコピュラ関数で表現できる。

³⁰ Adachi and Uchida [2015] においても、リスク資産価値過程に独立ジャンプと同時ジャンプを導入することにより、資産価値間の急激な相互依存関係の高まりを同時ジャンプの顕現化を通じて表現している。

³¹ ポートフォリオ中の参照体の数が N 個である場合、独立ジャンプを含めた同時ジャンプの組合せ数は、 $2^N - 1$ となる。例えば、 $N = 3$ である場合、同時ジャンプの組合せは、 $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ で記述され、合計 $2^3 - 1 = 7$ 個となる。要素が 1 つの場合は独立ジャンプ、2 つの場合は 2 参照体の同時ジャンプ、3 つの場合は 3 参照体の同時ジャンプを示している。このとき、参照体 $i \in \{1,2,3\}$ のジャンプ強度 λ_i は、 $\lambda_i = \lambda_{\{i\}} + \lambda_{\{i,j\}} + \lambda_{\{i,k\}} + \lambda_{\{i,j,k\}}$, $\lambda_{\{i,j\}} = \lambda_{\{j,i\}}$, $i, j, k \in \{1,2,3\}$, ただし、 i, j, k は全て異なるものとして表現される。

³² 彼らのモデルでは、資産価値については市場で観察可能であるものの、投資家は企業のバリア水準およびそれらの同時分布に関して不完全な情報 (事前分布) しか持たない。投資家は、ある企業のデフォルトにより生存企業のバリア水準に関する事前分布を更新する。予期せぬデフォルトは、バリア水準の事前分布を大幅に更新することになり、その結果、生存参照体のデフォルト確率を大幅に上昇させることになる (デフォルト伝播 [default contagion])。

安達・末重・吉羽 [2016] では、バリア水準の不確実性を WWR モデルに適用している。彼らは、Brigo, Morini, and Pallavicini [2013] の SBTV モデルを応用し、Cpty と参照体の間で整合するバリア水準を持つ複数シナリオ（通常時 [低水準バリア] とストレス時 [高水準バリア]）を導入することで、非可予測なデフォルト時刻および急激な相互依存関係の高まりを考慮している。この方法は、解析的な取り扱いが比較的容易で、信用スプレッドの期間構造にも柔軟にフィッティングできるが、整合するバリア水準のシナリオ（およびシナリオ確率）の経済的な解釈が困難であるという欠点がある³³。

（ロ）. クレジット・デリバティブ以外

最もシンプルなアプローチとして、ブラック＝コックス・モデルを前提として、(14)式の定式化と同様に、Cpty の資産価値とデリバティブの原資産価格の確率過程の拡散項部分に線型相関を持たせる方法（Levy [1999]、Redon [2006]、Cesari *et al.* [2009]、Buckley, Wilkens, and Chorniy [2011]など）がある（モデルの詳細は補論 1 を参照）。このアプローチは、モデルが比較的シンプルであることから実装および計算の負荷も小さいという利点がある一方で、（イ）で述べたように、非可予測なデフォルト時刻や市場リスク・ファクターとの急激な相互依存関係の変化を表現できないという欠点もある。

安達・末重・吉羽 [2016]では、Cpty の信用リスク・モデルとして SBTV モデルを採用し、バリア水準および市場リスク・ファクターの双方に不確実性を導入することで WWR を考慮している。彼らは、通常時シナリオ [低バリア水準（デフォルト距離大）＋ジャンプ無しリスク・ファクター（連続拡散過程）] と、ストレス時シナリオ [高バリア水準（デフォルト距離小）＋ジャンプ付きリスク・ファクター（ジャンプ拡散過程）] という 2 つのシナリオを導入することにより、Cpty の非可予測なデフォルト時刻および市場リスク・ファクターの相互依存関係の急激な高まりを表現している。

ロ. 誘導型モデルの場合

（イ）. クレジット・デリバティブ

デフォルト強度モデルを適用する場合、デフォルト事象（時刻）の生起（累積強度過程に依存）とデフォルト強度の変動との間に連関性を構築するために、

³³ 経済的な解釈が可能なケースとしては、例えば、Cpty と参照体が緊密な関係を持った企業同士（親子会社、関連会社等）であり、財務内容の悪化が潜在的かつ同時に生起する可能性がある場合などが挙げられる。

Morini [2011] が主張するように、デフォルト強度過程にジャンプを導入することが考えられる (Brigo and Chourdakis [2009]³⁴)。Brigo, Morini, and Pallavicini [2013] は、①デフォルト強度 ($\lambda_j, j \in \{C, R\}$) の相互依存関係、および ②デフォルト事象 (または累積強度 $\Lambda_j(\tau_j) = \int_0^{\tau_j} \lambda_j(s) ds, j \in \{C, R\}$) の相互依存関係、という 2 つの観点から、Cpty と参照体のデフォルト事象 (時刻) の相互依存関係のモデル化のアプローチを、以下の 3 つのバージョンに分類している。

- a) デフォルト強度変動に相互依存関係があるが、デフォルト事象 (時刻) は独立
- b) デフォルト強度変動は独立であるが、デフォルト事象には相互依存関係がある
- c) デフォルト強度変動およびデフォルト事象ともに相互依存関係がある

デフォルト強度 ($\lambda_j, j \in \{C, R\}$) の確率過程が拡散項のみによって駆動される連続過程であれば、デフォルト強度変動はデフォルト時刻にはほとんど影響を与えない。このとき、バージョン a) において、Cpty と参照体のデフォルト強度変動の拡散項の間に線型相関が存在したとしても、両者の累積デフォルト過程には影響を与えないので、デフォルト時刻の相互依存関係も生じない (Morini [2011]、Ghamami and Goldberg [2014])。

バージョン b) および c) では、コピュラ関数を用いることにより、Cpty と参照体のデフォルト事象の (正の) 相互依存関係を構築できる (Brigo and Chourdakis [2009])。このとき、Cpty のデフォルトは、コピュラ関数を通じて参照体のデフォルト強度に影響を与えるので、参照体の (Cpty のデフォルト) 条件付デフォルト確率の計算が複雑化する (4 節 (3) を参照)。また、過去データの制約により、コピュラ関数 (正規、フランク、グンベル、クレイトン等) の妥当性検証が困難なため、コピュラ関数の選択には分析者の恣意性が入る。

バージョン c) では、デフォルト強度 (=信用スプレッド) 間の相互依存関係も表現できるが、デフォルト強度変動とデフォルト事象の間に連関性を持たせながらデフォルト事象の相互依存性を考慮するためには、デフォルト強度過程にジャンプを導入する等 ((13)式 [JCIR モデル] を参照) の工夫が必要となる (Morini [2011])。さらに、金融危機時のデフォルト強度の同時的高まりとデフォルト事象の相互依存性の急激な高まりが顕現化するような状況を表現するためには、Cpty と参照体のデフォルト強度過程に「同時ジャンプ」を導入することも考えられる (Duffie and Singleton [1999]、安達・末重・吉羽 [2016])³⁵。

³⁴ Brigo and Chourdakis [2009] の強度過程におけるジャンプは、同時ジャンプではなく、それぞれの過程が独立にジャンプする「独立ジャンプ」となっている。

³⁵ デフォルト強度の同時ジャンプのみでは、デフォルト事象の相互依存関係の高まりを表現するのには不十分であり、コピュラ関数の導入によるデフォルト事象の相互依存関係の

(ロ). クレジット・デリバティブ以外

連続時間モデルにおいて、信用リスクと他の市場リスク・ファクターとの間の相互依存関係は、確率強度過程 $\{\lambda_c(t)\}_{t \geq 0}$ と市場リスク・ファクターの確率過程の間の線型相関 $\rho \in [-1, 1]$ で表現する場合がある。例えば、Brigo, Morini, and Pallavicini [2013]では、金利（スポット・レート）過程 $\{r(t)\}_{t \geq 0}$ として G2++モデル（本節（2）ロを参照）、原油のスポット価格過程 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ としてシフト付対数正規（shifted-log normal）モデル、そして、確率強度過程 $\{\lambda_c(t)\}_{t \geq 0}$ として CIR++モデル（Brigo and Mercurio [2006] を参照）を用いており、確率強度とそれぞれの市場リスク・ファクターとの相互依存関係は、拡散項にかかる相関係数により表現している。

ただし、既述のように、デフォルト強度モデルでは、強度過程と市場リスク・ファクターの間に相互依存関係があったとしても、それが直ちにデフォルト時刻と市場リスク・ファクターの相互依存関係に繋がるわけではない。したがって、強度過程と市場リスク・ファクターの相互依存関係とともに、強度過程とデフォルト事象の間に連関性を持たせるための手法が必要となる。この要請を満たす手法として、強度と市場リスク・ファクターの同時ジャンプを考慮した方法（同時ジャンプ・アプローチ）と、これら 2 変数の間の相互依存関係をコピュラ関数で表現する方法（コピュラ・アプローチ）が考えられる。

同時ジャンプ・アプローチでは、Cpty のデフォルト強度過程と市場リスク・ファクターの確率過程に「同時ジャンプ」（Duffie and Singleton [1999]、Lipton and Sepp [2009]、Adachi and Uchida [2015]）を導入して、デフォルト強度変動とデフォルト事象の連関性を高めるとともに、デフォルト事象とエクスポージャーの間の急激な相互依存関係の高まりを表現する（安達・末重・吉羽 [2016] を参照）。

コピュラ・アプローチでは、Cpty のデフォルト確率 $Q(\tau_c \leq T)$ と市場リスク・ファクター X の確率 $Q(X \leq x)$ をコピュラ関数で接合することにより、両者のデフォルト事象の相互依存関係を構築する。コピュラ関数を用いた場合でも、デフォルト強度と市場リスク・ファクターの急激な相互依存関係の高まりと、強度過程とデフォルト時刻の連関性を高めるために「同時ジャンプ」を導入することも可能である。デフォルト時刻と市場リスク・ファクターをコピュラ関数で接合する場合の注意事項として、デフォルト時刻によっては、必ずしも

明示的なモデル化が必要となる。例えば、Cpty と参照体のデフォルト確率がそれぞれ 1% から 10% にジャンプしたとしても、デフォルト事象が相互に独立との仮定のもとでは、同時デフォルト確率は高々 $10\% \times 10\% = 1\%$ にしかならない。

WWR とはならず RWR となる可能性があることが指摘されている (Böcker and Brunnbauer [2014])。この論点を含めたコピュラ・アプローチは4節で整理する。

以上、Cpty の信用リスク・モデルとデリバティブ商品別 (クレジット/クレジット以外) の関係から WWR モデルについてまとめると表 1 のようになる。

表 1 Cpty の信用リスク・モデルに依拠した WWR モデルの分類

		デリバティブの原資産	
		クレジット(参照体)	クレジット以外(金利、株式、為替レート、コモディティ等)
信用 リスク・ モデル (Cpty)	構造 モデル	① 資産価値変動の線型相関 ② 資産価値の同時ジャンプ ③ バリアの不確実性(Cpty と参照体の間で整合する複数シナリオ)	① Cpty の資産価値変動と原資産価格変動の線型相関 ② Cpty のバリアと原資産価格過程の不確実性 (複数シナリオ)
	強度 モデル	① デフォルト強度変動の線型相関(+コピュラ) ② デフォルト強度の(同時)ジャンプ(+コピュラ)	① Cpty のデフォルト強度変動と原資産価格変動の線型相関(+コピュラ) ② Cpty のデフォルト強度と原資産価格の同時ジャンプ(+コピュラ)

4. WWR のモデル化 II : コピュラ・アプローチ

コピュラ・アプローチ³⁶では、デリバティブ取引 (または、そのポートフォリオ) の将来価値を駆動する市場リスク・ファクター (または、クレジット・デリバティブの参照体のデフォルト時刻) と Cpty のデフォルト時刻の相互依存関係をコピュラ関数により関係付けることにより WWR をモデル化する (Gregory [2012] 15 章、Garcia-Cespedes *et al.* [2010]、Pykhtin and Rosen [2010]、Sokol [2010]、Cherubini [2013]、Böcker and Brunnbauer [2014]、Lee and Capriotti [2015]など)。これまでと同様に、WWR のモデル化においては、以下の(15)式で示されるデフォルト条件付期待エクスポージャー (EPE^{WWR}) のモデル化に焦点を置く³⁷。

$$EPE^{WWR}(t) = \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[\max\{V(t), 0\} | \tau_c = t], \quad t > t_0. \quad (15)$$

(1) WWR のための一般コピュラ・モデル

以下では、Böcker and Brunnbauer [2014] に基づいて、 $EPE(t)$ を2変量のコピュラ $C_s(u_1, u_2)$ を用いて表現する。

³⁶ コピュラ・アプローチの金融実務への応用については、戸坂・吉羽 [2005] を参照。

³⁷ ここでは、説明の便宜上、連続時点上でのデフォルトで EPE^{WWR} を定義する。

Cpty のデフォルト時刻 τ_c の分布関数を $F(t) = \mathbb{Q}(\tau_c \leq t)$ (生存確率は $\tilde{F}(t) = 1 - F(t)$ 、密度関数は $f(t)$)、時点 $s \in [t_0, \infty)$ の割引デリバティブ価値 $\tilde{V}(s) = DF(t_0, s)V(s)$ ($\tilde{V}^+(s) = DF(t_0, s) \max\{V(s), 0\}$) の累積分布関数を $G_s(\tilde{v})$ として、 $\tilde{V}(s)$ および τ_c の同時分布関数 $H_s(\tilde{v}, t)$ を以下で表現する。

$$\mathbb{Q}(\tilde{V}(s) \leq \tilde{v}, \tau_c \leq t) \equiv H_s(\tilde{v}, t) = C_s(G_s(\tilde{v}), F(t)) \quad (\tilde{v} \in \mathbb{R}, t > 0),$$

ただし、 $C_s(u_1, u_2)$ は 2 回連続微分可能な 2 変量コピュラであり、そのコピュラ密度 $\phi_s(u_1, u_2)$ は(16)式で導かれる。

$$\phi_s(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C_s(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}, \quad (u_1, u_2) \in [0, 1] \times [0, 1], s \in [0, \infty). \quad (16)$$

これより同時密度 $h(\tilde{v}, t)$ は、 $u_1 = G_s(\tilde{v})$, $u_2 = F(t)$ として、以下のように表現できる。

$$h(\tilde{v}, t) = \frac{\partial^2 C_s(G_s(\tilde{v}), F(t))}{\partial u_1 \partial u_2} \frac{\partial G_s(\tilde{v})}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial F(t)}{\partial t} = \phi_s(G_s(\tilde{v}), F(t)) g_{\tilde{v}} f_t.$$

以上を用いれば、 $EPE^{WWR}(t)$ は(17)式のように表現できる³⁸。

$$EPE^{WWR}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^+ \phi_t(G_t(\tilde{v}), F(t)) dG_t(\tilde{v}) = \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}} [\phi_t(G_t(\tilde{V}(t)), F(t)) \tilde{V}^+(t)], \quad (17)$$

ただし、 $\tilde{v}^+ = \max(\tilde{v}, 0)$ である。(17)式より、 $EPE^{WWR}(t)$ は、コピュラ密度 $\phi_t(G_t(\tilde{V}(t)), F(t))$ をウェイト関数とした正の割引デリバティブ価値の無条件期待値として表現できることが示された³⁹。Böcker and Brunnbauer [2014] は、(16)式のようなコピュラ密度を持つコピュラ関数により割引デリバティブ価値と Cpty のデフォルト時刻の相互依存関係を表現するモデルを (WWR モデリングのための) 一般コピュラ・モデル (general copula model) と呼んでいる⁴⁰。

³⁸ 割引ポートフォリオ価値 \tilde{V} のデフォルト条件付密度を $h_t(\tilde{v}|t) = h(\tilde{v}, t)/f(t)$ とすると、 $EPE(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^+ h_t(\tilde{v}|t) d\tilde{v}$ を得られる。同時密度 $h(v, t)$ とコピュラ密度 ϕ_t の関係より(17)式を得る。

³⁹ 各離散時間グリッド $s \in [0, \infty)$ において、 $\{\tilde{v}_{s,1}, \dots, \tilde{v}_{s,M}\}$ をシミュレートされた無条件割引ポートフォリオ価値を昇順に並べ替えたものとする。このとき、 $M \rightarrow \infty$ のもとで大数の強法則により、 $(1/M) \sum_{m=1}^M \phi_s(G_s(\tilde{v}_{s,m}), F(s)) \tilde{v}_{s,m}^+ \rightarrow \mathbb{E}[\phi_s(G_s(\tilde{v}), F(s)) \tilde{V}^+(s)]$ a.s. を得る。ここで、 $G_s(\tilde{v}_{s,m})$ は $m/(M+1)$ という経験分布関数で与える。

⁴⁰ $\phi_t := \frac{dQ_2}{dQ_1}|_{G_t}$ とすれば、

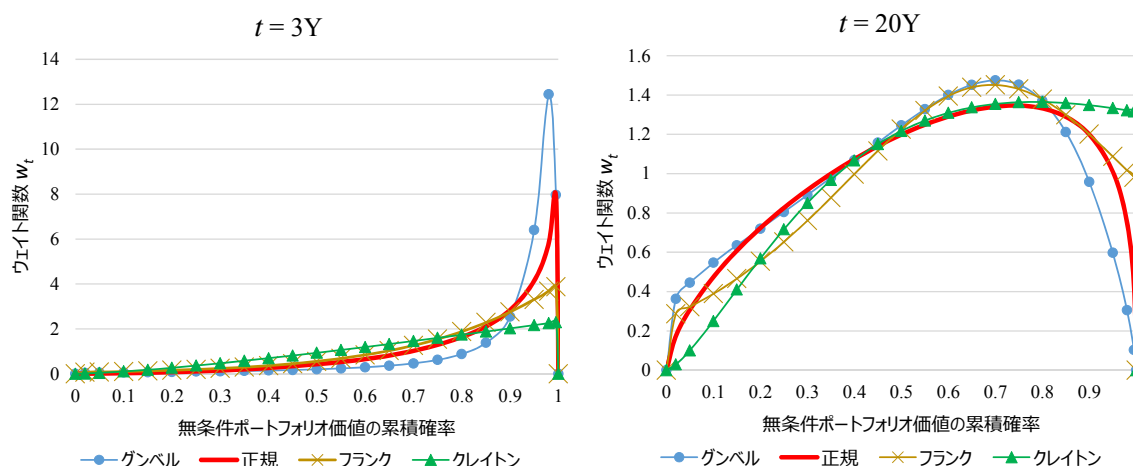
$$EPE^{WWR}(t) = \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}_1} [\phi_t(G_t(\tilde{V}(t)), F(t)) \tilde{V}^+(t)] = \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}_1} [\tilde{V}^+(t) \frac{dQ_2}{dQ_1}|_{G_t}]$$

と表現できる。これより、 $EPE^{WWR}(t)$ は、確率測度 \mathbb{Q}_2 のもとでのエクスポージャー $\tilde{V}^+(t)$ の無条件期待値として表現できる ($t > 0$ は固定)。

WWR のモデル化にコピュラ・アプローチを用いる際に注意しなければならないのは、コピュラ関数によって表現される「裾依存性 (tail dependence)」が WWR モデリング上では大きな意味を持たないことである。これは、Cpty のデフォルト時刻 τ_c について、 $\tau_c \rightarrow \infty$ または $\tau_c \rightarrow 0$ のもとで、ポートフォリオ価値 V に大きな影響を与える場合に（コピュラにかかる）裾依存性が問題となるが、実際のデリバティブ取引の満期は有限であり、取引開始から取引満期までの中間時点での WWR の顕現化が、WWR のモデル化およびリスク管理上でより重要となるからである。WWR をうまくモデル化するためには、平均的により大きなポートフォリオ価値 V に対してより大きなエクスポージャー・ウェイト $w_t := \phi_t(G_t(\cdot), F(t))$ が与えられるようにしなければならない。しかし、多くのコピュラは、 V に対して厳密に増加するウェイト関数を構築するわけではない。

Böcker and Brunnbauer [2014] は、リスク管理で典型的に用いられている標準的な多くのコピュラ関数（正規、 t 、グンベル、クレイトン、フランク等）において、大きな V （分布の裾部分）に割り当てるウェイトは、中間的な大きさの V に対するウェイトよりも小さく、ゼロですらあり得ることを示している。図 2 は、Böcker and Brunnbauer [2014] の図 2 を再現したものであるが（各コピュラ密度を用いたウェイト関数の解析的表現は補論 2 を参照）、短期テナー ($t = 3Y$) においては、すべてのコピュラ関数で累積確率 1 付近の高い分位点においてウェイト関数の頂点を示しているが（特に、グンベルが顕著）、長期テナー ($t = 20Y$) においては、より中間的な分位点で頂点に達した後、ウェイト関数はより高い分位点に向かって減少傾向となっている。

図 2 4つのコピュラ関数に基づくウェイト関数 w_t



備考 : $F(3) = 0.025$, $F(20) = 0.35$, スピアマンのロー $\rho_s = -0.6$ に固定 (Böcker and Brunnbauer [2014] 図 2 を再現)

(2) パス整合的エクスポージャー・ウェイト

これまでの、各時点の $\tilde{V}(t)$ の分布に応じて各時点のウェイト関数 w_t を定義していた。しかし、一般的に、デリバティブ価値とデフォルト時刻はパス ($\omega \in \Omega$) に依存するため、 w_t もパスに整合的に定義するのが自然であろう。Böcker and Brunnbauer [2014] は、取引満期までの各パス $\tilde{V}(t, \omega)$ の特徴に応じて「パス整合的エクスポージャー・ウェイト関数 (path-consistent exposure weight function) $w_t(\omega)$ 」を次のように定義した。

$$\begin{aligned} EPE^{WWR}(t) &= \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[w_t(\omega)\tilde{V}^+(t, \omega)], \\ w_t(\omega) &:= \phi_t\left(G(g(\omega)), F(t)\right) \quad (\forall \omega \in \Omega). \end{aligned} \tag{18}$$

(18)式において、 $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は順位付け関数 (ordering function) と呼ばれる確率変数を示しており、 G は、 g の累積分布関数を示している⁴¹。(18)式は、(7)式において各パスへのウェイト関数をコピュラ密度に置き換えた式となる。

WWR を表現するためには、デリバティブ価値が相対的に大きくなるパス $\omega \in \Omega$ に対して大きなウェイトを与えるような $g(\omega)$ を定義することが肝要となる。Böcker and Brunnbauer [2014] では、 $g(\omega)$ として次の3つの関数例を提示している。

$g_1(\omega) = V(s, \omega)$: 時点 $s \in (0, T]$ の値に固定、

$g_2(\omega) = \left(\frac{1}{T}\right) \int_0^T V(t, \omega) dt$: 全期間 $(0, T]$ に亘る平均価値、

$g_3(\omega) = \sup_{t \in (0, T]} V(t, \omega)$: 全期間 $(0, T]$ に亘る上限値。

この中でも g_2 (取引満期 T までのデリバティブ価値の平均値) のケースで、 $T = 5$ 年程度の比較的長期の場合は、相対的に大きいエクスポージャーを示すパスに大きいウェイトが与えられており、比較的良好的に WWR を表現できる。

(3) クレジット・デリバティブにおけるコピュラ・アプローチ

デフォルト強度モデルにコピュラ・アプローチを適用してクレジット・デリバティブの WWR をモデル化する場合、Cpty のデフォルトがコピュラ関数を通じて参照体のデフォルト強度に影響を与えることにより、参照体の生存確率にも影響を及ぼすことから、一般的に、CDS 価値の計算はかなり複雑になる。

⁴¹ $w: [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は、 $\mathbb{E}[w_t] = 1$ ($\forall t \geq 0$) and $\int_0^T w_t(\omega) dF(t) = 1$ ($\forall \omega \in \Omega$) を満たす。

CDS 取引（満期 $T(=t_N > t_0)$ のプロテクションの売り）の時点 t_0 における CVA は次式で表現できる（ τ_c は参照体のデフォルト時刻）。

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}} \left[LGD_C \mathbf{1}_{\{t_0 < \tau_c \leq T\}} DF(t_0, \tau_c) (V(\tau_c))^+ \right] \\ & \cong LGD_C \sum_{i=1}^N \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\{t_{i-1} < \tau_c \leq t_i\}} DF(t_0, t_i) (\mathbb{E}[\Pi(t_i, T) | \mathcal{G}_{t_i}])^+ \right], \end{aligned}$$

ただし、Cpty のデフォルト（ $\tau_c \in (t_{i-1}, t_i]$ ）を条件とした時点 t_i の CDS 価値を $V(t_i) = \mathbb{E}[\Pi(t_i, T) | \mathcal{G}_{t_i}]$ とする。 $\mathbb{E}[\Pi(t_i, T) | \mathcal{G}_{t_i}]$ は、時点 t_i までの情報（パス）を前提とした CDS の残余現在価値の和の条件付期待値であり、次式で表現できる（ S はプレミアム、 LGD_R は参照体のデフォルト時損失率）。

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Pi(t_i, T) | \mathcal{G}_{t_i}] \\ & = \mathbf{1}_{\{\tau_R > t_i\}} \left\{ S \left[- \int_{t_i}^T DF(t_i, u) (u - \varphi(u)) d\mathbb{Q}(\tau_R > u | \mathcal{G}_{t_i}) + \sum_{j=i+1}^N DF(t_i, t_j) \Delta_i \mathbb{Q}(\tau_R > t_j | \mathcal{G}_{t_i}) \right] \right. \\ & \quad \left. + LGD_R \int_{t_i}^T DF(t_i, u) d\mathbb{Q}(\tau_R > u | \mathcal{G}_{t_i}) \right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\varphi(t) := \max \{t_j | t_j < t, j \in \{1, \dots, N\}\}.$$

(19)式からも明らかなように、 $\mathbb{E}[\Pi(t_i, T) | \mathcal{G}_{t_i}]$ の計算には参照体の時点 t_i における（Cpty の）デフォルト条件付生存確率 $\mathbb{Q}(\tau_R > u | \mathcal{G}_{t_i})$ （ $\tau_c \leq t_i < u \leq T$ ）が必要となる。

Schönbucher and Schubert [2001] は、クレジット・デリバティブの参照体が複数存在する場合の取引⁴² において、参照体プールの一部がデフォルトした場合に、生存している参照体の生存確率について、多変量コピュラ関数を用いて算定するアプローチを提示した。Lee and Capriotti [2015] は、Schönbucher and Schubert [2001] のアプローチを参照体が複数であるデリバティブ取引の WWR モデリングに応用しており、Cpty を含めて参照体数が $N(\geq 2)$ である場合に、時点 $t(>0)$ 以前に Cpty を含む $k(>0)$ 体のデフォルトが生じており、残りの $N - k(>0)$ 体は生存しているという条件付きで、生存参照体のうちの 1 主体 $R \in \{1, \dots, N\}$ が $u(t < u \leq T)$ 期より後まで生き残る生存確率を算定する方法を提示している。一般性を失うことなく、最初の $1 \sim k$ の参照体（参照体 R は含まず）が t 時点以前にデフォルトしていると仮定すれば、参照体 R の（ $1 \sim k$ のデフォルト）条件付生存確率は、その条件がない生存確率 $\gamma_R(u)$ を用いて (20) 式の

⁴² 銀行（CVA 計測主体）、Cpty およびデリバティブの参照体 $N > 1$ の合計 $N + 2$ の主体が関与する。

ように表現される。

$$\mathbf{1}_{\{\cdot\}}\mathbf{1}_{\{\cdot\}}\mathbb{Q}(\tau_R > u | \mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\cdot\}}\mathbf{1}_{\{\cdot\}} \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\partial^k C(\gamma_1(t_1), \dots, \gamma_k(t_k), \gamma_{k+1}(t), \dots, \gamma_{R-1}(t), \boldsymbol{\gamma}_R(\mathbf{u}), \gamma_{R+1}(t), \dots, \gamma_{N+2}(t))}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_k} \middle| \mathcal{F}_t \right]}{\frac{\partial^k C(\gamma_1(t_1), \dots, \gamma_k(t_k), \gamma_{k+1}(t), \dots, \gamma_{N+2}(t))}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_k}}, \quad (20)$$

ただし、 $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}\mathbf{1}_{\{\cdot\}} := \mathbf{1}_{\{\tau_i = t_i \leq t \text{ for } i \in \{1, \dots, k\}\}} \mathbf{1}_{\{\tau_i > t \text{ for } i \in \{k+1, \dots, N+2\}\}}$ である。なお、右辺の $\boldsymbol{\gamma}_R(\mathbf{u})$ は強調した表記であり、ベクトル等の表記ではない。

ここで、 $C(u_1, \dots, u_{N+2})$ はすべての変数に関して微分可能で十分滑らかな $(N+2)$ 変量コピュラ関数を示しており、 $\gamma_i(t) := \exp(-\Lambda_i(t))$ ($\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(s) ds$) とする。ただし、(20)式に含まれる偏微分について選択したコピュラが解析的表現を持たなければ、比較的少数のデフォルト (k) に対しても、その数値計算負荷は大きくなることに加えて、たとえ選択したコピュラ関数が偏微分に対する解析的表現を持っていたとしても、(20)式の分子の期待値の計算は、Cpty のデフォルト時刻 (τ_c) 以降も生存している参照体すべてのデフォルト強度のシミュレーションを伴うため、生存参照体数が多い場合にはやはり計算負荷が大きくなる。(20)式の計算負荷上の問題点を解決する方法として、Lee and Capriotti [2015] では、確率強度過程として Black and Karasinski [1991] のモデル、接合関数としてクレイトン・コピュラを用いることにより、(20)式を良好に近似する数値計算手法を提示している。

CDS のように参照体が 1 つの場合に、Cpty のデフォルト時刻を $\tau_c = t$ とすれば、(20)式は(21)式のように書き換えられる（導出は補論 3 を参照）。

$$\mathbf{1}_{\{\tau_c = t\}}\mathbb{Q}(\tau_R > u | \mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau_c = t\}} \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\partial C(\gamma_c(t), \gamma_R(u))}{\partial u_1} \middle| \mathcal{F}_t \right]}{\frac{\partial}{\partial u_1} C(\gamma_c(t), \gamma_R(t))}. \quad (21)$$

このように、参照体が 1 つの場合に限れば、数値計算の負担も小さくなり、様々なコピュラ関数を WWR 計測に適用できる可能性がある。

Brigo and Chourdakis [2009] でも CDS 評価において Cpty のデフォルト条件付きの参照体の生存確率を算定する方法を示しており、2 変量コピュラ関数 $C(u_1, u_2)$ を用いて、次式のように導ける（導出は補論 3 を参照）。

$$\begin{aligned}
& \mathbf{1}_{\{t_{i-1} < \tau_C \leq t_i\}} \mathbb{Q}(\tau_R > u \mid \mathcal{G}_{t_i}) \\
&= \mathbf{1}_{\{t_{i-1} < \tau_C \leq t_i\}} \frac{e^{-\Lambda_C(t_{i-1})} - e^{-\Lambda_C(t_i)} + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{C(1 - e^{-\Lambda_R(u)}, 1 - e^{-\Lambda_C(t_{i-1})})}{-C(1 - e^{-\Lambda_R(u)}, 1 - e^{-\Lambda_C(t_i)})} \mid \mathcal{F}_{t_i} \right]}{e^{-\Lambda_C(t_{i-1})} - e^{-\Lambda_C(t_i)} + \frac{C(1 - e^{-\Lambda_R(t_i)}, 1 - e^{-\Lambda_C(t_{i-1})})}{-C(1 - e^{-\Lambda_R(t_i)}, 1 - e^{-\Lambda_C(t_i)})}}, \quad (22)
\end{aligned}$$

ただし、 $\Lambda_j(t) = \int_0^t \lambda_j(s) ds, j \in \{C, R\}$ であり、 $\{\lambda_j(t)\}_{t \geq 0}$ はデフォルト強度を示している。参照体の生存確率の計算には、参照体のデフォルト情報のみならず、Cpty のデフォルト情報も取り込まなければならない。(22)式で、 $e^{-\Lambda_R(t_i)}$ については、デフォルト強度が CIR モデル等の解析的表現が得られるプロセスに従う場合には容易に計算できるが、 $e^{-\Lambda_R(u)}$ ($\tau_C < t_i < u \leq T$) を含む(22)式の分子の期待値については、非整数次フーリエ変換法等の数値計算手法を用いて計算することになる（数値計算の詳細は、Brigo and Chourdakis [2009]、安達・末重・吉羽 [2016] を参照）。

5. WWR のモデル化 III：実務への応用を考慮したアプローチ

本節では、実務（リスク管理、プライシング等）への応用を考慮した、比較の実装が容易ないくつかの WWR モデル化手法について整理する。

（1）デフォルト強度／確率に関するパラメトリック・アプローチ

Hull and White [2012] および Ruiz, Pachon, and del Boca [2015] では、Cpty のデフォルト強度（または確率）をデリバティブ・エクスポージャーに影響を与える市場変数の関数としてパラメトリックに定式化することにより、Cpty の信用水準とエクスポージャーの相互依存関係を表現している⁴³。彼らのアプローチでは、デフォルト強度/確率をエクスポージャーに依存させる一方、エクスポージャー自体は Cpty のデフォルトに影響されない無条件プロセスに従う。

イ. Hull and White [2012] のモデル

Hull and White [2012] では、Cpty のデフォルト強度 $\lambda_C(t)$ を(23)式のようにパラメトリックに定式化している。

⁴³ ただし、彼らのアプローチでは、Cpty の信用水準とエクスポージャーの相互依存関係の急激な変化を表現することができない。このアプローチを用いる場合には、リスク管理上は、ストレス・テスト等により、急激な相互依存関係の変化による WWR の顕現化が取引ポートフォリオに与える影響を別途検証・把握する必要がある。

$$\lambda_c(t) = \exp(a(t) + bx(t)), \quad (23)$$

ただし、 b は定数、 $a(t)$ は時間に関して確定的な関数、 $x(t)$ はデリバティブ価値 $V(t)$ ($= \sum_{n \in NS} v_n(t)$: Cpty のネットィングは考慮し担保考慮前のポートフォリオ価値) の変動に影響を与えるような市場変数を示している。Hull and White [2012] では、 $x(t)$ の決定について以下の 3 つの方法を提案している。

- ① $x(t)$ はデリバティブ価値と強い関係がある変数：[例] ネットィング・セットのデリバティブ・ポートフォリオの価値 $V(t)$ 等、
- ② $x(t)$ はデリバティブ価値および Cpty のデフォルト確率の双方に強い関係がある変数：[例] Cpty のビジネスと関係がある市場リスク・ファクター (金の生産者の場合には金価格、他の場合は為替レートや金利等)、
- ③ Cpty のデフォルト確率と強い関係がある変数：[例] Cpty の CDS スプレッド、株価、または Moody's KMV のデフォルト距離 (distance to default) 等。

Hull and White [2012] の数値計算例では、①の方法を採用しており $x(t) = V(t)$ としている。このとき、 $b > 0$ の場合、 $V(t)$ が増加するほど Cpty のデフォルト確率が高まるので、WWR を表現できる。モデルのパラメータである b と $a(t)$ は、Cpty の CDS スプレッド (テナー t) の時点 t_0 の市場価値を $S_c(t)$ として、評価時点 t_0 から見たテナー t の生存確率について、(24)式の等式を満たす。

$$\exp\left(-\frac{S_c(t)t}{LGD}\right) = \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_0^t \lambda_c(u) du\right)\right] (= \mathbb{Q}(\tau_c > t)). \quad (24)$$

WWR の程度を決定する重要なパラメータ b の推定方法として、Hull and White [2012] は、以下の 2 つの方法を提案している。

- ① 過去データの利用： $x(t)$ と Cpty の流動性が高いテナーの信用スプレッド $S(t)$ の過去データを収集し、最小二乗法等を用いて次式を満たすように b を推定する。

$$\Delta \lambda_c(t) / \lambda_c(t) = b \Delta x(t), \quad \lambda_c(t) \cong S_c(t) / LGD. \quad (25)$$

このアプローチは、過去において Cpty の信用スプレッドに影響を与えたファクターが、将来においても影響を与えるとの制約がある。

- ② ストレス・シナリオの利用：この方法では、 $x(t)$ および $S(t)$ に関する (ストレス) シナリオを複数考慮して、その上で(25)式を用いて、 b を推定する。この場合も、シナリオとして過去のストレス時期のデータのみを用いるときには①と同じ問題が生じる。

次に、推計された b を所与として、市場で観察される CDS スプレッドの期間

構造にフィットするようにパラメータ $a(t)$ を、(23)、(24)式 およびシミュレーション手法を用いて推計する。(23)式を推計できれば、 $\mathbb{Q}(\tau_c > t | \mathcal{F}_t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_c(u) du\right)$ (パスごとの生存確率) と(7)式より $EPE^{WWR}(t_i)$ を算定できる。

□. Ruiz, Pachon, and del Boca [2015] のモデル

Ruiz, Pachon, and del Boca [2015] は、WWR および RWR のモデル化を取り扱っており、双方を合わせて DWR (Directional-Way Risk) と呼んでいる。彼らは、Cpty のデフォルト確率を以下のように表現している。各変数の定義は、イ. と同じである。

$$g(x) := \mathbb{Q}(\tau_c \leq t | x) = 1 - \exp\left(-\frac{S_c(t; x)t}{LGD}\right).$$

ここで x は、Cpty の信用水準と関係を持ち、評価対象デリバティブ (ポートフォリオ) 価値を駆動する市場で観察可能なリスク・ファクター (株価 < 株価指数や流動性の高い個別株価 >、為替レート、コモディティ) である。Ruiz, Pachon, and del Boca [2015] は、 $g(x)$ の関数形として、以下の4つのパラメトリック・モデルを提案している。

$$\begin{aligned} g_1(x) &= A_1 x^{B_1}, \\ g_2(x) &= A_2 \exp(B_2 x), \\ g_3(x) &= A_3 + B_3 \ln x, \\ g_4(x) &= A_4 + B_4 x. \end{aligned} \tag{26}$$

彼らは、様々な Cpty (コーポレート、金融機関、ソブリン等) のテナー1 年の CDS スプレッド (最も流動性のあるテナー t) から逆算されるデフォルト確率を被説明変数とし、市場リスク・ファクター (株価、為替レート、商品価格等) を説明変数 (x) として、観測期間5年の週次データについて、以下の回帰式に最小二乗法を当てはめることで、(26)式のパラメータを推定している。

$$1 - \exp\left(-\frac{S_{c(j)}(t; x_{(j)})t}{LGD}\right) = g(x_{(j)}) + \sigma \varepsilon_{(j)}, \tag{27}$$

ただし、 ε は、平均 0、分散 1 の標準化された確率変数である。添字 j は観測期間の過去データ番号を示している。

Ruiz, Pachon, and del Boca [2015] の実証結果によれば、多くの場合で $g_1(x)$ が決定係数の観点から良好なフィッティングを示しており、 $g_2(x)$ が続いている。

説明変数 (x) の観点からは、株価が多くの Cpty で良好なフィッティングを示しており、為替レートやコモディティ価格（原油、ガス、金、穀物、アルミニウム）の説明力が高いケースも多い。ソブリンが Cpty の場合では、為替レートの説明力が高いという結果が得られている。

(27)式よりパラメータが推計できれば、(26)式と(7)式より $EPE^{WWR}(t_i)$ を算定できる。Ruiz, Pachon, and del Boca [2015] は、 x を原資産とする 株式、為替およびコモディティの各デリバティブ取引について CVA、当初証拠金、実効 EPE 等を算定しており、WWR（および RWR）のプライシングおよびリスク管理上の影響の大きさを分析している。

（２）デフォルト時ジャンプ・モデル

Redon [2006] および Mercurio and Li [2015] は、Cpty のデフォルト時にデリバティブ価値を駆動する市場リスク・ファクターがジャンプすることで WWR を表現する「デフォルト時ジャンプ・モデル (jump-at-default model)」を提示している。Pykhtin and Sokol [2013] では、Cpty がソブリンまたはシステミックな影響を持つ大規模金融機関である場合に、このアプローチを応用している（本節（４）を参照）⁴⁴。Mercurio and Li [2015] では、確定的強度モデルを前提として、比例的ジャンプ（proportional jump：株式、為替、商品等）と加算的ジャンプ（additive jump：金利、信用スプレッド、ボラティリティ等）に分類した上で、WWR を含む CVA の一般的な定式化と実務への応用を前提とした近似式を提示している。

以下では、Mercurio and Li [2015] で提示されている 2 つのアプローチのうち、WWR 管理上の重要性が相対的に大きいと考えられる為替、株式、商品関連のデリバティブ取引のモデル化に適用される比例的ジャンプ・モデルについて紹介する。

比例的ジャンプ・サイズ（定数）を z^P 、定数強度 λ のポアソン過程を $N(t)$ とする。Cpty のデフォルト時刻は、 $\tau_c := \inf \{t \in (0, T]: N(t) > 0\}$ で定義され、市場リスク・ファクターのジャンプは、Cpty のデフォルト時刻に生起すると仮定する。 $M^P(t)$ は比例的ジャンプ過程（確率測度 \mathbb{Q} のもとでマルチンゲール）を示しており、ジャンプ後は一定値をとる。

⁴⁴ デフォルト時ジャンプ・モデルは、Cpty のデフォルト時に必ず市場リスク・ファクターがジャンプすると仮定するため、Cpty のデフォルトが特定の市場リスク・ファクターに大きな影響を与えることが前提となっている。すなわち、ソブリンやシステミックに重大な影響を持つ大規模企業が Cpty として暗黙に仮定されている。

ジャンプ付市場リスク・ファクター（株式、為替、商品等）を $X^J(t)$ とし、ジャンプ無しの市場リスク・ファクターを $X(t)$ とする。このとき、比例的ジャンプ過程 $M^P(t)$ は、次のような（確率測度 \mathbb{Q} での）確率過程に従うとする。

$$\begin{aligned} X^J(t) &:= X(t)M^P(t), \quad X^J(t_0) = X(t_0), \\ dM^P(t) &= z^P \mathbf{1}_{\{\tau_C \geq t\}} M^P(t-)(dN(t) - \lambda dt), \quad M^P(t_0) = 1, \quad z^P > -1, \\ M^P(t) &= (1 + z^P \mathbf{1}_{\{\tau_C \leq t\}}) \exp(-\lambda z^P(t \wedge \tau_C)), \end{aligned} \quad (28)$$

ただし、 $\exp(-\lambda z^P(t \wedge \tau_C))$ は、 $M^P(t)$ をマルチンゲールにするための補正項（compensator）である⁴⁵。

ここでは、Cpty のデフォルト時に $X^J(t)$ がジャンプすることにより、Cpty の信用水準の悪化とエクスポージャーの増大を紐付ける。すなわち、ある時点 t のデリバティブ（ポートフォリオ）価値を $X^J(t)$ に依存させて $V(t, X^J(t))$ で表現すると、(28)式より、WWRを考慮したCVA（ CVA^{WWR} ）は、以下で表せる。

$$CVA^{WWR}(t_0) = LGD_C \int_0^T EPE^{WWR}(t, X^J(t)) \mathbb{Q}(\tau_C \in (t, t+dt]), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} EPE^{WWR}(t, X^J(t)) &= \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[DF(t_0, t)V(t, X(t)(1+z^P)\exp(-\lambda z^P t))^+], \\ \mathbb{Q}(\tau_C \in (t, t+dt]) &= \lambda \exp(-\lambda t)dt. \end{aligned}$$

Mercurio and Li [2015] では、(29)式の $EPE^{WWR}(t, X^J(t))$ について近似式を導出するために、 $X(t)$ について「スケール不変性（scale invariant）」という性質を仮定している。スケール不変性とは、ある時点 t において $X(t)$ を定数倍（ α ）したとき、その後の過程を $\bar{X}(t)$ と表記すれば、時点 t より後の任意の時点 $s(>t)$ において、 $\bar{X}(s) = \alpha X(s)$ が成立するような性質である。この性質を満たす $X(t)$ の確率過程として、ブラック＝ショールズ・モデル（幾何ブラウン運動）、Heston [1993]の確率ボラティリティ・モデル、Merton [1976]のジャンプ拡散モデルなどが挙げられる。

仮に、(29)式の $EPE^{WWR}(t)$ の式中の $\exp(-\lambda z^P t)$ に含まれる（時点） t を何らかの適切な定数時点 \bar{t}_C に置き換えられれば、 $X(t)$ のスケール不変性の性質を利用して、 $X(t)$ のジャンプは $t = t_0 = 0$ 時点（評価日）に生起したとみなして $CVA^{WWR}(t_0)$ を近似できる。このとき、評価日でジャンプした市場リスク・ファクターの確率過程を $\bar{X}(t)$ （ $\bar{X}(t_0) = X(t_0)(1+z^P)\exp(-\lambda z^P \bar{t}_C)$ ）で置き換えられれば、 $EPE^{WWR}(t)$ は以下のように近似できる。

⁴⁵ $X^J(t)$ の具体例として、以下のような確率過程を挙げられる。

$$\begin{aligned} dX^J(t) &= X^J(t-)[(r - \lambda z^P \mathbf{1}_{\{\tau_C \geq t\}})dt + \sigma_X dW_X(t) + z^P \mathbf{1}_{\{\tau_C \geq t\}}dN(t)], \\ dX(t) &= X(t)[r dt + \sigma_X dW_X(t)], \quad dM^P(t) = z^P \mathbf{1}_{\{\tau_C \geq t\}} M^P(t-)(dN(t) - \lambda dt). \end{aligned}$$

$$EPE^{WWR}(t, X^J(t)) \cong \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}} \left[DF(t_0, t) V(t, \bar{X}(t))^+ \right] = EPE^{No WWR}(t, \bar{X}(t)). \quad (30)$$

すなわち、 $X(t)$ のスケール不変性により、 $X^J(t)$ に基づいた条件付期待エクスポージャーは、 $\bar{X}(t)$ に基づいた無条件期待エクスポージャー（(3)式参照）で近似できる。定数時点 $\bar{\tau}_C$ の選択については、Mercurio and Li [2015] では、(31)式を満たす定数デフォルト時刻 $\bar{\tau}_C$ を用いて(29)式を近似する方法を示している。

$$\int_0^T [\exp(-\lambda z^P t) - \exp(-\lambda z^P \bar{\tau}_C)] \mathbb{Q}(\tau_C \in (t, t + dt]) = 0, \quad (31)$$

$$\therefore \bar{\tau}_C = \frac{1}{\lambda z^P} \ln \frac{(1 + z^P)(1 - \exp(-\lambda T))}{1 - \exp(-(1 + z^P)\lambda T)}.$$

(31)式の $\bar{\tau}_C$ を(29)式に代入すれば、 $CVA^{WWR}(t_0)$ の近似式を得られる。このとき、市場リスク・ファクターの初期値を $X^J(t_0) = X(t_0)$ から $X^J(t_0) = X(t_0)(1 + z^P) \exp(-\lambda z^P \bar{\tau}_C)$ に変えて、WWR を考慮しない CVA ($CVA^{No WWR}$) の場合と同様の計算を行えばよい。

Mercurio and Li [2015] は、比例的小および加算的両ジャンプ・モデルについて、前者については為替レートを、後者については金利を例として、ジャンプ・サイズの推計方法を提案している。例えば、為替レートの比例的小ジャンプ・サイズ (z^P) については、市場データにインプライされているジャンプ・サイズの推定方法を示している。これは、Ehlers and Schönbucher [2004] で提案された手法⁴⁶であり、同一の参照体とマチュリティで、参照体のローカル通貨と異なる通貨建ての CDS が取引されていれば、それらの気配値の比率から Cpty デフォルト時の（ローカル通貨表示）為替レートの期待ジャンプ・サイズを推定できる。

⁴⁶ 通貨は異なってもデフォルト事象を識別するクレジット・イベントが同じであれば、デフォルト事象発生時に受け取る通貨のみが異なることから、同一参照体の異通貨 CDS は、参照体デフォルト時の通貨変動（ジャンプ）の情報を含んでいると考えられる。Ehlers and Schönbucher [2004] では、ローカル通貨国がデフォルトした場合に、ローカル通貨国の為替レートは急落（ジャンプ）すると仮定し、その減価率を $z \in (-1, 0)$ とすれば、デフォルトが発生した場合と発生しない場合との間で、自国通貨建て為替レート $FX(t)$ は、以下の関係を持つと仮定した。

$$FX(t)|_{\tau_C=t} = (1 + z) \times FX(t)|_{\tau_C>t}.$$

このとき、彼らはローカル国を参照体とするソブリン CDS（ローカル通貨建、自国通貨建）の間に以下の式が成立することを理論的に示した。

$$CDS_{local} = (1 + z) \times CDS_{domestic}.$$

この関係式を基に、Pykhtin and Sokol [2013] では、2010 年から 2012 年までの日本のソブリン CDS を対象に、 CDS_{JPY}/CDS_{USD} 比率の時系列データを調べたところ、 $z = -0.5$ の周りを変動していることを確認した。これは、1998 年 8 月のロシアや 2002 年 1 月のアルゼンチンのデフォルト時の（対 USD）ローカル通貨の減価率（ -50% ）とほぼ等しい。

(3) ストレス・シナリオを反映した条件付期待エクスポージャー

Turlakov [2013] は、確率的なストレス・シナリオを含む (Cpty のデフォルトの) 条件付期待エクスポージャーの簡便かつ汎用的な計算モデルを提示している⁴⁷。特にストレス・シナリオをテール・イベント (代表的にはソブリン・デフォルト) と関連付ける⁴⁸とともに、各テール・イベントと Cpty の信用水準のシステムティックな関連性の程度を、カップリング・パラメータ (coupling parameter) で定義しており、この大きさを分析者が決定することにより、ストレス・シナリオが WWR の大きさに与える影響を調整できるようにしている。ストレス・シナリオをソブリン・デフォルトだけでなく、多くのシステムミック・イベントに基づいて構築すれば、複数のシステムミック・イベントに基づいた WWR を考慮できる。

Turlakov [2013] では、WWR を、テール・イベントにかかる WWR とそれ以外の WWR に分類している。テール・イベントの発生時刻を τ_S として、当該テール・イベントにより誘発された Cpty のデフォルトを条件としたストレス時の期待エクスポージャーを $EPE^{Str}(t) := \mathbb{E}_0[V(t)^+ | \tau_C = t, \tau_S = t]$ とし、テール・イベントを伴わない非ストレス時の条件付エクスポージャーを $EPE^{No Str}(t) := \mathbb{E}_0[V(t)^+ | \tau_C = t, \tau_S \neq t]$ で表現する。ただし、ここでは時刻を離散的に考えており、 $\tau_C = t, \tau_S \neq t$ は τ_C と τ_S が同一の時間グリッドに含まれないことを示している。これより、(15)式で定義される最終的な Cpty のデフォルト条件付期待エクスポージャー (EPE^{WWR}) を EPE^{Str} と $EPE^{No Str}$ の確率加重平均で次式のように表現している。

$$EPE^{WWR}(t) = \mathbb{Q}(\tau_S = t | \tau_C = t) EPE^{Str}(t) + (1 - \mathbb{Q}(\tau_S = t | \tau_C = t)) EPE^{No Str}(t). \quad (32)$$

仮に、テール・イベントとしてソブリン・デフォルトを想定し、Cpty がソブリンそのものであったとすれば、 $\mathbb{Q}(\tau_S = t | \tau_C = t) = 1$ となるため、 $EPE^{WWR} = EPE^{Str}$ となる。

市場状況によっては、テール・イベントにかかる効果が既に市場価格に織り込まれている可能性があり、 $EPE^{No Str}$ は EPE^{Str} の一部分またはすべてを含む

⁴⁷ Ernst & Young [2012] のサーベイでは、多くの銀行が、特定の取引について、必要に応じて取引の当初認識時点において 1 回限り (one-off) のリザーブとして WWR に関する会計上の引当調整を行っていると報告している。この調整は、一般的に、ストレス時におけるポテンシャル・エクスポージャーを反映するストレス・テストの方法により算定されている。

⁴⁸ ソブリン・デフォルトが生じたときに、金利や為替レート、株価等が大きく変動する等。

と考えられる。これに対処するため、Turlakov [2013] は、 $EPE^{No\ Str}$ と EPE^{Str} を滑らかに結合する内挿 (interpolation) 手法を提示して、 $EPE^{Str}(t)$ を以下のように再定義している。

$$EPE^{Str}(t) = EPE^{No\ Str}(t) \tanh\left(\frac{Q(\tau_S=t)}{PD_{threshold}}\right) + EPE^{Abs-Str}\left(1 - \tanh\left(\frac{Q(\tau_S=t)}{PD_{threshold}}\right)\right). \quad (33)$$

(33)式において、 $EPE^{No\ Str}(t)$ は現在の市場価格に反映されている条件付期待エクスポージャーであり、 $EPE^{Abs-Str}$ は、ある一定レベルまでストレスをかけた市場パラメータによって計測した条件付期待エクスポージャーを示している。 $PD_{threshold}$ は、危機 (ストレス・シナリオ) と非危機の境界を識別する閾値となる確率に相当する。Turlakov [2013] の例では、この閾値はソブリン CDS の 1,000bps に対応するとしている。

Turlakov [2013] は、ソブリンと Cpty の関連性の相対的な強さを表現するために、次式に含まれるパラメータ ζ を導入しており、彼はこれを「カップリング・パラメータ」と呼んでいる。

$$Q(\tau_S = t | \tau_C = t) = \frac{Q(\tau_C = t | \tau_S = t)}{Q(\tau_C = t)} Q(\tau_S = t) = \zeta Q(\tau_S = t). \quad (34)$$

(34)式で、 ζ が大きいほど、当該 Cpty とソブリンの間により大きなシステムティックな関連性が存在する (ただし、 $\zeta Q(\tau_S = t) \leq 1$ を満たす範囲)。もし、Cpty とソブリンのデフォルトが独立な場合は、 $Q(\tau_C = t | \tau_S = t) = Q(\tau_C = t)$ より、 $\zeta = 1$ となる⁴⁹。

以上をまとめると、ストレス・シナリオのもとでの WWR を反映した条件付期待エクスポージャーの最終式を(35)式のように導出できる。

$$EPE^{WWR}(t) = EPE^{No\ Str}(t) + \zeta Q(\tau_S = t) \left(EPE^{Abs-Str} - EPE^{No\ Str}(t) \right) \left(1 - \tanh\left(\frac{Q(\tau_S = t)}{PD_{threshold}}\right) \right). \quad (35)$$

以上で紹介したモデルを前提に、Turlakov [2013] は、ソブリン・デフォルトに関する簡単なシナリオのもとで、金利スワップと通貨スワップを対象とした応用事例を示している。

⁴⁹ 稀なケースではあるが、Cpty とソブリンのデフォルトが互いに排反な場合 ($Q(\tau_C = t | \tau_S = t) = 0$) には、 $\zeta = 0$ となる。

（４）システミック・エクスポージャー

Pykhtin and Sokol [2013]では、市場全体にシステミックなインパクトを持つ Cpty（SICs [systemically important counterparties] と呼ばれる）のデフォルトが市場リスク・ファクターに与える影響を考慮して⁵⁰、デフォルト条件付期待エクスポージャーをモデル化している。彼らは、SIC のデフォルトを条件とした WWR を、「システミック（systemic）WWR」と呼び、すべての Cpty を対象とした WWR の分類（一般 WWR、個別 WWR）と区別している⁵¹。

イ． SICs のデフォルト周りのイベント・スケジュール

Pykhtin and Sokol [2013]では、SICs に対するエクスポージャー計算上考慮すべきデフォルト周りのイベント・スケジュールとして以下を考慮している⁵²。

- ① 担保授受の最終日
- ② 信用損失が確定する日（クローズ・アウト日）
- ③ デフォルトに関するニュースがリリースされた日（news onset date : NOD）

このうち、①と②の 2 日間のインターバルはリスクのマージン期間（MPoR）であり、ここでは、 $\delta (\geq 0)$ で表現する。MPoR の期間中は、Cpty は新たな担保を差し入れることはないが、取引の価値は市場変動の影響を受けて変動し続けるため、MPoR の期間中のエクスポージャー変動の適切なモデル化は、Cpty の信用リスク管理を行う上で非常に重要となる⁵³。NOD（③）は、SICs のデフォルトにかかる市場の混乱が始まった日として認識される⁵⁴。担保付取引の場合、

⁵⁰ Senior Supervisors Group [2009] の報告書では、2007～08 年の金融危機において、WWR がシステミック・リスクの顕現化の大きな要因になったと述べている。

⁵¹ 自己資本規制で定義されている SIFIs と異なり、Pykhtin and Sokol [2013] で定義している SICs は金融機関に限定していない。SICs とは、そのデフォルトが金融市場に影響を与え得る Cpty の総称であり、ソブリン、大規模金融機関、大規模非金融機関を含んでいる。ただし、過去データによれば、大規模非金融機関のデフォルト（または、デフォルトに近い状況）は金融市場に甚大なインパクトは与えていない。

⁵² 一般的な Cpty の信用リスクのモデル化において、デフォルト周りの時間スケジュールを考慮する際の重要事項として、Cpty の「デフォルト日」がある。ただし、デフォルトを生起させるイベントの予測不能性や手続き上の係争の可能性により、デフォルト周りの正確な時間スケジュールの定式化は非常に困難であることが知られている。また、正確なデフォルト日の特定は、Cpty のエクスポージャーのモデルリングを行う上で本質的ではない。

⁵³ MPoR の内部管理上の標準期間は 10 日間であるが、自己資本規制（バーゼル III）上では、取引の種類や係争等の状態によって 5 日間から 40 日間と幅広く設定されている。

⁵⁴ NOD は、デフォルト日の 1～2 週間程度前（リーマン・ブラザーズの場合）または、デフォルト日と一致（ロシアのデフォルト）の 2 つのケースがある。前者の場合、NOD は、MPoR 初日に先行するか、一致する場合がある。先行する場合、NOD と MPoR 初日のインターバルのことを、“news period” と呼ぶ。

NOD のタイミングは非常に重要となる。これは、NOD から MPoR 初日までに取引価値が変動した分については担保を受け取ることができるので、デフォルト時（＝クローズ・アウト時）に取引価値がジャンプする場合に比べて、デフォルト時のエクスポージャーは減少するためである。

ロ. システミック WWR を考慮した信用エクスポージャーのモデル化

(イ) 無担保取引の場合（uncollateralized counterparties）

ソブリンが Cpty の場合の無担保取引（ソブリンは担保差し入れない）は依然として多い。無担保取引の場合、デフォルト周辺の時間スケジュール（NOD、MPoR 初日、クローズ・アウト日）はエクスポージャー算定上大きな影響を及ぼすことはないため、SIC のデフォルトの市場リスク・ファクターへの影響はクローズ・アウト日に一気に「ジャンプ」として顕現化すると仮定できる。このため、無担保取引のシステミック WWR のシミュレーションは以下のようなステップに従って実行する（特定の SIC のジャンプ幅 β は所与とする）。

1. デフォルトに影響される前の市場リスク・ファクター X_t （プレ・インパクト値）のパスを特定の確率過程に従ってシミュレートする。
2. 各パスの時点 t_k において、エクスポージャーのポスト・インパクト値を得るために、市場リスク・ファクターのプレ・インパクト値のパスにジャンプ幅 βX を加える（ $X \rightarrow (1 + \beta)X$ ）。
3. 2.で計算した市場リスク・ファクターのポスト・インパクト値に基づいて時点 t_k の SIC との個々の取引価値 $v(t_k)$ を(1)式のように計算する。
4. 各パスの時点 t_k において、 n というラベルで識別される個々の取引価値 $v_n(t_k)$ を(2)式のようにネットイングを考慮し Cpty レベルで集計してポートフォリオ価値 $V(t_k)$ を算定する。

(ロ) 有担保取引の場合（collateralized counterparties）

Cpty がシステミックな影響を持つ大規模金融機関の場合、一般的には担保付取引を前提としてエクスポージャー計算を行う。有担保取引の場合には、NOD（ t_{NOD} ）から MPoR 初日（ $t_{CO} - \delta$ 、 t_{CO} はクローズ・アウト日）までのデリバティブ価値の変動分は MPoR 初日に受取る現金担保（変動証拠金）によってカバーされるとみなし、MPoR 初日からクローズ・アウト日（MPoR 最終日 $[t_{CO}]$ ）までのデリバティブ価値変動により担保価値を上回る部分がエクスポージャーとして認識されることになる（MPoR を考慮した担保付エクスポージャーの計算方法については補論 4 を参照）。したがって、有担保取引の場合、SICs（Cpty）

のデフォルトの市場リスク・ファクターへの全インパクト (β) が t_{co} で一気に顕現化するのではなく、NOD（一般的に MPoR 初日より前）を起点として変動し始め、 t_{co} まで継続して変動することになる。

Pykhtin and Sokol [2013] では、NOD から MPoR 初日までの市場リスク・ファクターの変動を考慮しながら、MPoR 初日 ($t_{co} - \delta$) の必要担保額の計算を簡便化するために図 3 で示されるような“collateral delivery ratio q ”を導入している。 q は、SICs のデフォルトの市場リスク・ファクターへの全インパクト (β) に対する NOD から MPoR 初日までの寄与分を表現するパラメータである。例えば、 $q = 0$ であれば、MPoR 初日までに SICs のデフォルトに関するニュースのインパクトが市場リスク・ファクターに全く反映されず、 $q = 1$ であれば、その全インパクトが MPoR 初日前に市場リスク・ファクターに反映されることを示している。 q の導入により、SICs のエクスポージャーの計算に、NOD を考慮する必要はなくなる。つまり、 $t_{co} - \delta$ (MPoR 初日) に全インパクト ($X \rightarrow (1 + \beta)X$) のうち、 q の割合だけがジャンプにより顕現化し、残りは クローズ・アウト日にジャンプにより瞬間的に顕現化、または、クローズ・アウト日までにストレス係数 $\gamma (> 1)$ を用いたストレス時ボラティリティ $\gamma\sigma$ を考慮したダイナミクスを利用して徐々に顕現化すると仮定する⁵⁵。以上より、有担保取引の場合においてシステミック WWR を表現するために必要なパラメータは、 β 、 γ および q の 3 つとなる。

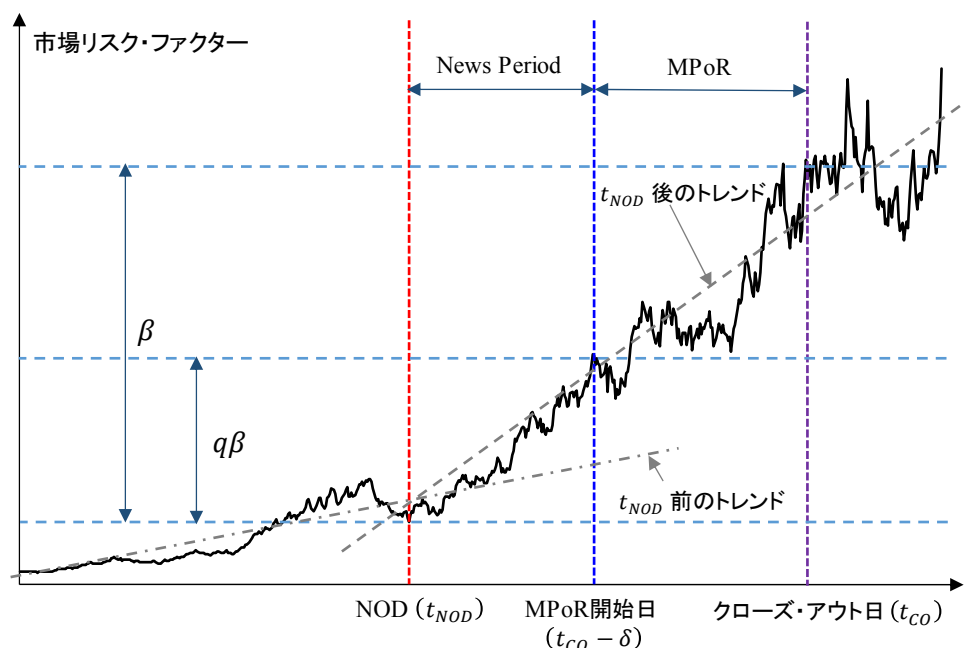
一般的に、モデルのパラメータの推計は、現在の市場データ（市場インプライド）または過去データのいずれかを用いて行われる。しかし、Pykhtin and Sokol [2013] によれば、システミック WWR のパラメータを市場インプライドで推計できるのは、Ehlers and Schönbucher [2004] で提案された、ソブリン CDS の市場気配値にインプライされているローカル為替レートの減価幅 β を推計する方法に限られている⁵⁶。他のパラメータについては、過去データに基づくキャリブレーションのみ実行可能となる。しかし、問題となる SICs (Cpty) が過去にデフォルトしたかデフォルトに近い状態に陥ったかの過去データは、一般に入手困難である。Pykhtin and Sokol [2013] では、有担保取引の代表的な SICs であるシステミックな影響を持つ大規模金融機関の場合を取り上げ、2008 年 9 月のリーマン・ブラザーズのデフォルト事象にマッピングする事例を示している⁵⁷。

⁵⁵ SICs のデフォルトは多くの市場リスク・ファクターの短期のボラティリティと相関係数を大きく増加させる可能性があり、 $t_{co} - \delta$ から t_{co} までの市場リスク・ファクターのダイナミクスには、ストレス時のボラティリティと相関係数を考慮する必要がある。

⁵⁶ 5 節 (2) および 脚注 46 を参照。

⁵⁷ Pykhtin and Sokol [2013] の β 、 γ および q の推計方法の詳細は、補論 5 を参照。

図3 デフォルト周辺のイベント・スケジュールと市場リスク・ファクター



β 、 γ および q の推計値を所与とすれば、担保付取引のシステミック WWR を反映したエクスポージャーは、以下のステップで計算できる。

1. 特定の SIC のデフォルトに影響される前の市場リスク・ファクター X_t (プレ・インパクト値) のパスを MPoR 初日グリッド $\{t_k - \delta\}$ 上でサンプリング。
2. 各パスの各 $\{t_k - \delta\}$ において、市場リスク・ファクターのプレ・インパクト値にジャンプ幅 $q\beta X$ を加える ($X \rightarrow (1 + q\beta)X$)。次に、各 $\{t_k - \delta\}$ におけるポスト・インパクト値 $(1 + q\beta)X$ を始点として、ストレスを加えたボラティリティ ($\gamma\sigma$) を用いて時点 t_k までの市場リスク・ファクターをシミュレートする (または、ボラティリティと相関係数は無条件の値を用いて、時点 t_k に残りのジャンプ幅 $(1 - q)\beta$ を考慮する)。
3. 各パスの各 $\{t_k - \delta\}$ において、市場リスク・ファクターのポスト・インパクト値 $(1 + q\beta)X$ に基づいて個別取引価値 $v(t_k - \delta)$ を(1)式のように計算し、ネットティングを考慮し Cpty 単位で個別取引価値を集計してポートフォリオ価値 $V(t_k - \delta)$ を(2)式のように算定する。そして、時点 $t_k - \delta$ のポートフォリオ価値を時点 t_k (クローズ・アウト時) で利用可能な担保勘定 $C(t_k)$ (変動証拠金) とする。
4. 各パスの各 $\{t_k\}$ において、ステップ2で計算した市場リスク・ファクターのポスト・インパクト値を用いて時点 t_k における個別取引価値 $v(t_k)$ を(1)式のように計算し、(2)式のように Cpty 単位でネットティングを考慮したう

えで集計してポートフォリオ価値 $V(t_k)$ を算定する。これに、ステップ 3 で計算した時点 t_k において利用可能な担保勘定 $C(t_k)$ を適用して、時点 t_k のエクスポージャーを算定する。

6. まとめ

本稿では、CVA にかかる WWR モデル化のアプローチについて、条件付エクスポージャーに焦点を当てて、Cpty のデフォルト事象とエクスポージャーの相互依存関係のモデル化について、最近の研究成果も含めて整理した。

WWR の最大の問題は、ストレス・イベント発生時に Cpty の信用水準とエクスポージャーの相互依存関係が平時に比べて大きくしかも急激に変わることによって、銀行のポートフォリオに甚大な損失をもたらすことにある。2007～08 年の金融危機においても CVA にかかる WWR の顕在化により巨額の損失が発生しており、その後の国際資本規制においては、WWR 管理強化が求められている⁵⁸。このような巨額の損失をもたらす可能性のある WWR をモデル化することにより、その保有ポートフォリオへの影響やコストを明示的に認識・把握することで、緊急時の対応性を高めるとともに経営効率を向上させることは、金融機関のリスク管理はもとより経営管理上も重要となろう。一方、WWR は、その顕在化に関する十分なデータの確保が困難であることから、WWR に関するモデルの妥当性や市場整合性を確認する手段がなく、市場のコンセンサスが得られるようなモデルを開発することが困難となっている。このように、WWR は「モデルの不確実性」に晒されており、それゆえ、WWR に関する様々なモデル化アプローチについて理解を深め、各手法の利点・欠点を踏まえて保有ポートフォリオのリスク特性対比で適切なモデルを選択・運用し、WWR の影響を定量的に把握することは、金融機関の WWR 管理上重要となる。

参考文献

- 安達 哲也、「金融危機後の OTC デリバティブ価値評価～公正価値測定にかかる諸問題を中心に～」、IMES Discussion Paper No.2015-J-13、日本銀行金融研究所、2015 年
- 安達 哲也・末重 拓己・吉羽 要直、「CVA における誤方向リスク・モデル：実装と含意」、IMES Discussion Paper forthcoming、日本銀行金融研究所、2016 年

⁵⁸ 脚注 4 を参照。

- 桜井 悠司、「OTC デリバティブ取引におけるカウンターパーティ・リスクの管理手法：CVA の理論と実務上の論点に関するサーベイ」、『金融研究』 第 30 巻第 2 号、日本銀行金融研究所、2011 年、89～144 頁
- 戸坂 凡展・吉羽 要直、「コンピュータの金融実務での具体的な活用方法の解説」、『金融研究』 第 24 巻第 2 号、日本銀行金融研究所、2005 年、115～162 頁
- Adachi, Tetsuya and Yoshihiko Uchida, “Variation of Wrong-Way Risk Management and Its Impact on Security Price Changes,” IMES Discussion Paper No.2015-E-12, 2015.
- Basel Committee on Banking Supervision (BCBS), “Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework Comprehensive Version- Annex IV (Treatment of Counterparty Credit Risk and Cross Product Netting),” 2006.
- Basel Committee on Banking Supervision (BCBS), “Basel III: A Global Regulatory Framework for More Resilient Banks and Banking Systems,” 2010.
- Basel Committee on Banking Supervision (BCBS), “Consultative Document : Review of the Credit Valuation Adjustment Risk Framework,” 2015.
- Black, Fischer, and John C. Cox, “Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions,” *Journal of Finance*, **31**(2), 1976, pp.351–367.
- Black, Fischer, and Piotr Karasinski, “Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal,” *Financial Analysts Journal*, **47**(4), 1991, pp.52–59.
- Böcker, Klaus, and Michael Brunnbauer, “Path-consistent wrong-way risk,” *Risk*, **27**(11), 2014, pp.48–53.
- Brace, Alan, Dariusz Gatarek, and Marek Musiela, “The Market Model of Interest Rate Dynamics,” *Mathematical Finance*, **7**(2), 1997, pp.127–155.
- Brigo, Damiano, and Agostino Capponi, “Bilateral Counterparty Risk Valuation with Stochastic Dynamical Models and Application to Credit Default Swaps,” Working Paper, 2009.
- Brigo, Damiano, and Kyriakos Chourdakis, “Counterparty Risk for Credit Default Swaps: Impact of Spread Volatility and Default Correlation,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **12**(7), 2009, pp.1007–1026.
- Brigo, Damiano, and Massimo Morini, “Structural credit calibration,” *Risk*, **19**(4), 2006, pp.78–83.
- Brigo, Damiano, Massimo Morini, and Andrea Pallavicini, *Counterparty Credit Risk, Collateral and Funding with Pricing Cases for All asset Classes*, Wiley, 2013.
- Brigo, Damiano, Massimo Morini, and Marco Tarenghi, “Equity Return Swap Valuation under Counterparty Risk,” in T. R. Bielecki, D. Brigo and F. Patras (eds.), *Credit*

- Frontiers: Sub-Prime Crisis, Pricing and Hedging, CVA, MBS, Ratings and Liquidity*, John Wiley & Sons, 2011, pp.457–484.
- Brigo, Damiano and Fabio Mercurio, *Interest Rate Models – Theory and Practice with Smile, Inflation and Credit* 2nd ed., Springer, 2006.
- Brigo, Damiano, and Marco Tarenghi, “Credit Default Swap Calibration and Equity Swap Valuation under Counterparty Risk with a Tractable Structural Model,” Working Paper, 2004.
- Buckley, Kirk, Sascha Wilkens, and Vladimir Chorniy, “Capturing credit correlation between counterparty and underlying,” *Risk*, **24**(4), 2011, pp.70–74.
- Cesari, Giovanni, John Aquilina, Niels Charpillon, Zlatko Filipović, Gordon Lee, and Ion Manda, *Modelling, Pricing, and Hedging Counterparty Credit Exposure*, Springer, 2009.
- Çetin, Umut, Robert Jarrow, Philip Protter, and Yildirim Yildirim, “Modeling Credit Risk with Partial information,” *Annals of Applied Probability*, **14**(3), 2004, pp.1167–1178.
- Cherubini, Cherubini, “Credit valuation adjustment and wrong way risk,” *Quantitative Finance Letters*, **1**(1), 2013, pp.9–15.
- Cont, Rama, “Model uncertainty and its impact on the pricing of derivative instruments,” *Mathematical Finance*, **16**(3), 2006, pp.519–547.
- Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll and Stephen Ross, “A Theory of the Term Structure of Interest Rates,” *Econometrica*, **53**(2), 1985, pp.385–407.
- Crepey, Stephane, Monique Jeanblanc and Behnaz Zargari, “CDS with Counterparty Risk in a Markov Chain Copula Model with Joint Defaults,” Working Paper, Universite de Lyon and Universite de Nice, 2009.
- Duffie, Darrel, and David Lando, “Term Structure of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information,” *Econometrica*, **69**(3), 2001, pp.633–664.
- Duffie, Darrel, and Kenneth J. Singleton, “Simulating Correlated Defaults,” Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University, 1999.
- Ehlers, Philippe, and Philipp J. Schönbucher, “The Influence of FX Risk on Credit Spreads,” Working Paper, Department of Mathematics, ETH Zurich, 2004.
- Elizalde, Abel, “Credit Risk Models I: Default Correlation in Intensity Models,” Working Paper, CEMFI and Universidad Publica de Navarra, 2005.
- Ernst & Young, *Reflecting Credit and Funding Adjustments in Fair Value: Insight into practices: A Survey*, 2012.
- Finger, Christopher, “Toward a Better Estimation of Wrong Way Exposure,” *RiskMetrics Journal*, May, 2000, pp.25–40.

- Garcia-Cespedes, Juan Carlos, Juan Antonio de Juan Herrero, Dan Rosen, and David Saunders, "Effective modeling of wrong way risk, counterparty credit risk capital, and alpha in Basel II," *Journal of Risk Model Validation*, **4**(1), 2010, pp.71–98.
- Ghamami, Samim, and Lisa R. Goldberg, "Stochastic Intensity Models of Wrong Way Risk: Wrong Way CVA Need Not Exceed independent CVA," *Journal of Derivatives*, **21**(3), 2014, pp.24–35.
- Giesecke, Kay, "Correlated Default with Incomplete Information," *Journal of Banking and Finance*, **28**(7), 2004, pp.1521–1545.
- Giesecke, Kay, "Default and Information," working paper, Cornell University, 2005.
- Giesecke, Kay, and Lisa R. Goldberg, "Forecasting Default in the Face of Uncertainty," *Journal of Derivatives*, **12**(1), 2004a, pp.11–25.
- Giesecke, Kay, and Lisa R. Goldberg, "Sequential Defaults and Incomplete Information," *Journal of Risk*, **7**(1), 2004b, pp.1–26.
- Glasserman, Paul, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2004.
- Gregory, Jon, *Counterparty Credit Risk and Credit Value Adjustment – A continuing challenge for global financial markets – 2nd ed.*, Wiley Finance, 2012.
- Guo, Xin, Robert A. Jarrow, and Yan Zeng, "Credit Risk Models with Incomplete Information," *Mathematics of Operations Research*, **34**(2), 2009, pp.320–332.
- Heston, Steven L., "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options," *Review of Financial Studies*, **6**(2), 1993, pp.327–343.
- Hilberink, Bianca, and L. C. G. Rogers, "Optimal Capital Structure and Endogenous Default," *Finance and Stochastics*, **6**(2), 2002, pp.237–263.
- Hull, John, and Alan White, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two Factor Models," *Journal of Derivatives*, **2**(2), 1994, pp.37–47.
- Hull, John, and Alan White, "Valuing Credit Default Swaps II: Modeling Default Correlations," *Journal of Derivatives*, **8**(3), 2001, pp.12–21.
- Hull, John, and Alan White, "CVA and Wrong Way Risk," *Financial Analysts Journal*, **68**(5), 2012, pp.58–69.
- Jarrow, Robert A., and Fan Yu, "Counterparty Risk and the Pricing of Defaultable Securities," *Journal of Finance*, **56**(5), 2001, pp.1765–1799.
- Lee, Jacky and Luca Capriotti, "Wrong-way risk done right," *Risk*, **28**(9), 2015, pp.74–79.
- Leung, Seng Yuen, and Yue Kuen Kwok, "Credit Default Swap Valuation with Counterparty Risk," *Kyoto Economic Review*, **74**(1), 2005, pp.25–45.
- Levy, Arnon, "Wrong-Way Exposure," *Risk*, **12**(7), 1999, pp.52–55.

- Lipton, Alexander, and Arthur Sepp, "Credit Value Adjustment for Credit Default Swaps via the Structural Default Model," *Journal of Credit Risk*, **5**(2), 2009, pp.127–150.
- Lo, Chi-Fai, H. C. Lee, and Cho-Hoi Hui, "A simple approach for pricing barrier options with time-dependent parameters," *Quantitative Finance*, **3**(2), 2003, pp.98–107.
- Mercurio, Fabio, and Minqiang Li, "Jumping with Default: Wrong-Way Risk Modeling for CVA," *Risk*, **28**(11), 2015, pp.58–63.
- Merton, Robert C., "On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates," *Journal of Finance*, **29**(2), 1974, pp.449–470.
- Merton, Robert C., "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, **3**(1–2), 1976, pp.125–144.
- Morini, Massimo, *Understanding and Managing Model Risk: A Practical Guide for Quants, Traders and Validators*, Wiley, 2011.
- Peterson, Sandra, Richard C. Stapleton, and Marti G. Subrahmanyam, "A Two Factor Lognormal Model of the Term Structure and the Valuation of American-Style Options and Bonds," Working Paper, 1999.
- Pykhtin, Michael, and Dan Rosen, "Pricing Counterparty Risk at the Trade Level and CVA Allocations," *Journal of Credit Risk*, **6**(4), 2010, pp.3–38.
- Pykhtin, Michael, and Alexander Sokol, "Exposure under systemic impact," *Risk*, **26**(9), 2013, pp.100–105.
- Redon, Christian, "Wrong way risk modeling," *Risk*, **19**(4), 2006, pp.90–95.
- Ruiz, Ignacio., Ricardo Pachon, and Piero del Boca, "Optimal Right- and Wrong-Way Risk," *Financial Analysts Journal*, **71**(2), 2015, pp.47–60.
- Schönbucher, Philipp J., *Credit Derivatives Pricing Models*, Wiley, 2003.
- Schönbucher, Philipp J., and Dirk Schubert, "Copula-Dependent Default Risk in Intensity Models," Working Paper, Department of Statistics, Bonn University, 2001.
- Senior Supervisors Group, "Risk Management Lessons from the Global Banking Crisis of 2008," 2009.
- Sokol, Alexander, "A Practical Guide to Monte Carlo CVA," in Bred, Arthur M. (ed.), *Lessons from the Financial Crisis*, Risk Books, 2010, Chapter 14, pp.379–406.
- Sorensen, Eric H. and Thierry F. Bollier, "Pricing Swap Default Risk," *Financial Analysts Journal*, **50**(3), 1994, pp.23–33.
- Tilley, James A., "Valuing American options in a path simulation model," *Transactions of the Society of Actuaries*, **45**, 1993, pp.83–104.
- Turlakov, Mihail, "Wrong-way risk, credit and funding," *Risk*, **26**(3), 2013, pp.69–71.
- Zhou, Chunsheng, "A Jump-Diffusion Approach to Modeling Credit Risk and Valuing

Defaultable Securities,” Federal Reserve Board, Washington, 1997.
 Zhou, Chunsheng, “The Term Structure of Credit Spreads with Jump Risk,” *Journal of Banking and Finance*, **25**(11), 2001, pp.2015–2040.

補論 1 構造モデルのもとでの WWR モデリング

企業の資産価値 $A(t)$ が以下の確率過程に従うものとする。

$$dA(t) = (r - q)A(t)dt + \sigma_A A(t)dW_A(t), \quad (\text{A-1})$$

ただし、 $\{W_A(t)\}_{t \geq 0}$ は企業価値を駆動するシステムティック・ファクターであり標準ブラウン運動で表現する。ブラック＝コックス・モデルにおいて、デフォルト・バリアを定数 $H > 0$ としたとき、Cpty のデフォルト確率 $\mathbb{Q}(\tau_c \leq t)$ は以下のように定式化できる。

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\tau_c \leq t) &= \mathbb{Q}\left(\inf_{s \in [0, t]} A(s) \leq H\right) \\ &= \mathbb{Q}\left(\inf_{s \in [0, t]} \left\{\left(r - q - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)t + \sigma_A W_A(t)\right\} \leq -\ln\left\{\frac{A(0)}{H}\right\}\right) \\ &= N(-DD(t)) + \exp(-2\lambda\theta) N(-DD(t) + 2\theta\sqrt{t}), \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

ただし、 $\lambda = \ln\left(\frac{V(0)}{H}\right)/\sigma_A$, $\theta = \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)/\sigma_A$, $DD(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{t}} + \theta\sqrt{t}$ である。また、時点 $t > 0$ のデリバティブ価値 $V(t)$ は、市場変数 $X(t)$ の関数 $v(X(t))$ として表現できるとし、市場変数 $X(t)$ は標準ブラウン運動 $Z(t)$ に定数ボラティリティ σ_X とドリフト $\mu_X(t)$ を加えて $X(t) = \mu_X(t) + \sigma_X Z(t)$ とする。

まず、 $Z(t)$ が $W_A(t)$ と独立な場合、デリバティブ価値 $V(t)$ は、Cpty のデフォルト事象と独立となるため、デフォルト条件付エクスポージャー $EPE(t_0)$ は無条件エクスポージャーと等しい ($h(\mu_X(t), \sigma_X^2)$) で定義)。

$$EPE^{No WWR}(t_0) = \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[V(t)^+ | \tau_c = t] = \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[\left(v(\mu_X(t) + \sigma_X Z(t))\right)^+\right] =: h(\mu_X(t), \sigma_X^2). \quad (\text{A-3})$$

次に、WWR を考慮するため、 $Z(t)$ と $W_A(t)$ に相関関係がある場合を考える。 $Z(t)$ は、 $V(t)$ を駆動する市場リスク・ファクターであり、Cpty の企業価値と連動するシステムティック・ファクター $W_A(t)$ に依存する部分と、市場変数固有の変動要因部分 $\varepsilon_Z(t)$ から構成されると仮定する。

$$Z(t) = \rho_{AZ} W_A(t) + \sqrt{1 - \rho_Z^2} \varepsilon_Z(t), \quad (\text{A-4})$$

ただし、 $\{\varepsilon_Z(t)\}_{t \geq 0}$ は $W_A(t)$ とは独立な標準ブラウン運動に従うとする。この

とき、時点 0 からみた、デフォルト条件付エクスポージャー $EPE^{WWR}(t_0)$ は次式のように導出できる。

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[V(t)^+ | \tau_c = t] \\ &= \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}} \left[\left\{ v \left(\mu_X(t) + \sigma_X \left[-\rho_{AZ} \sqrt{t} DD(t) + \sqrt{1 - \rho_{AZ}^2} \varepsilon_Z(t) \right] \right) \right\}^+ | \tau_c = t \right] \quad (\text{A-5}) \\ &= h(\mu_X(t) - \sigma_X \rho_{AZ} \sqrt{t} DD(t), \sigma_X^2 (1 - \rho_{AZ}^2)). \end{aligned}$$

ここで、 $t = \tau$ の場合には、 $V(t) = H$ および $W_A(t) = -\sqrt{t} DD(t)$ となることを考慮している。

(A-5)式のとおり、WWR を考慮したデフォルト条件付エクスポージャーは、市場変数 $X(t)$ について企業価値 $A(t)$ との相関関係を調整した後のドリフト $\mu_X(t) - \sigma_X \rho_{AZ} \sqrt{t} DD(t)$ とボラティリティ $\sigma_X \sqrt{1 - \rho_{AZ}^2}$ を前提とした $X(t)$ に対する修正分布のもとでの無条件期待エクスポージャーの値と等しい。

補論 2 コピュラ密度を用いたウェイト関数の解析的表現

本補論では、様々なコピュラ関数 $C(u_1, u_2)$ のコピュラ密度の解析的表現を示す。 $C(u_1, u_2)$ については、戸坂・吉羽 [2005] の表記を用いると、本稿で用いるフランク、正規、グンベルの 4 つに加え、 t コピュラの 2 変量コピュラ密度 $c(u_1, u_2) = \phi_s(u_1, u_2)$ は以下のとおりに表せる。

クレイトン・コピュラ密度 (パラメータ: α)

$$c(u_1, u_2) = (1 + \alpha)(u_1 u_2)^{-\alpha-1} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha-2}. \quad (\text{A-6})$$

フランク・コピュラ密度 (パラメータ: δ)

$$c(u_1, u_2) = -\frac{\delta e^{-\delta u_1} e^{-\delta u_2} (e^{-\delta} - 1)}{\{(e^{-\delta} - 1) + (e^{-\delta u_1} - 1)(e^{-\delta u_2} - 1)\}^2}. \quad (\text{A-7})$$

正規コピュラ密度 (パラメータ: ρ)

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left(-\frac{\rho^2 x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + \rho^2 x_2^2}{2(1 - \rho^2)} \right), \\ x_1 &= N^{-1}(u_1), \quad x_2 = N^{-1}(u_2). \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

グンベル・コピュラ密度 (パラメータ: γ)

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2) &= \exp \left(-\{(-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma\}^{1/\gamma} \right) \frac{\{(\ln u_1)(\ln u_2)\}^{\gamma-1}}{u_1 u_2} \\ &\times \{(-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma\}^{1/\gamma-2} [\{(-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma\}^{1/\gamma} + \gamma - 1]. \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

t コピュラ密度 (パラメータ: ρ, ν)

$$c(u_1, u_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \left(1 + \frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}}}{\sqrt{1-\rho^2} \left\{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\right\}^2 \left\{\left(1 + \frac{x_1^2}{\nu}\right) \left(1 + \frac{x_2^2}{\nu}\right)\right\}^{-\frac{\nu+1}{2}}}}, \quad (A-10)$$

$$x_1 = t_\nu^{-1}(u_1), \quad x_2 = t_\nu^{-1}(u_2).$$

Böcker and Brunnbauer [2014]の図 2 では、コピュラのパラメータについてスピアマンのロー ρ_S が $\rho_S = -0.6$ となるように各コピュラのパラメータを設定している。そこで、各コピュラのパラメータとスピアマンのロー ρ_S との関係を表にすると、表 A-1 のようになる。表 A-1 中の‘—’は解析解がないことを示すため、定義に立ち返り、

$$\rho_S = 12 \int_0^1 \int_0^1 [C(u_1, u_2) - u_1 u_2] du_1 du_2 \quad (A-11)$$

を数値計算する必要がある。

表 A-1 コピュラのパラメータとスピアマンのロー

コピュラ	パラメータ	スピアマンのロー ρ_S
クレイトン	α	—
フランク	δ	$1 - \frac{12}{\delta} \{D_1(\delta) - D_2(\delta)\}$
正規	ρ	$\frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right)$
グンベル	γ	—
t	ρ, ν	$\frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right)$

備考：表中の $D_k(\delta)$ は k 次のデバイ (Debye) 関数で $D_k(\delta) = \frac{k}{\delta^k} \int_0^\delta \frac{t}{e^t - 1} dt$ で与えられる。

補論 3 強度モデルにコピュラを適用した場合の参照体の条件付生存確率

本補論では、強度モデルにコピュラを適用した場合の参照体にかかる (Cpty のデフォルト) 条件付生存確率である本文(21)、(22)式を導出する。

(1) (21)式の導出

本文(21)式において、参照体の (Cpty のデフォルト) 条件付生存確率は以下のように導出できる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\{\tau_C=t\}} \mathbb{Q}(\tau_R > u \mid \mathcal{G}_t) &= \mathbf{1}_{\{\tau_C=t\}} \mathbf{1}_{\{\tau_R>t\}} \mathbb{Q}(\tau_R > u \mid \mathcal{G}_t) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau_C=t\}} \mathbf{1}_{\{\tau_R>t\}} \mathbb{Q}(\tau_R > u \mid \mathcal{F}_t, \tau_C = t) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau_C=t\}} \mathbf{1}_{\{\tau_R>t\}} \frac{\mathbb{Q}(\tau_R > u, \tau_C = t \mid \mathcal{F}_t)}{\mathbb{Q}(\tau_R > t, \tau_C = t \mid \mathcal{F}_t)} \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau_C=t\}} \mathbf{1}_{\{\tau_R>t\}} \frac{\mathbb{E}^\mathbb{Q}[\mathbb{Q}(\tau_C = t, \tau_R > u \mid \mathcal{F}_t)]}{\mathbb{E}^\mathbb{Q}[\mathbb{Q}(\tau_C = t, \tau_R > t \mid \mathcal{F}_t)]} \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau_C=t\}} \frac{\mathbb{E}^\mathbb{Q}\left[\frac{\partial}{\partial u_1} C(\gamma_C(t), \gamma_R(u)) \mid \mathcal{F}_t\right]}{\frac{\partial}{\partial u_1} C(\gamma_C(t), \gamma_R(t))}
\end{aligned} \tag{A-12}$$

(20)式も同様に導出できる。

(2) (22)式の導出

本文(22)式において、参照体の（Cpty のデフォルト）条件付生存確率は以下の
ように導出できる。

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{\{t_{i-1} < \tau_C \leq t_i\}} \mathbb{Q}(\tau_R > u \mid \mathcal{G}_{t_i}) \\
&= \mathbf{1}_{\{t_{i-1} < \tau_C \leq t_i\}} \mathbf{1}_{\{\tau_R > t_i\}} \mathbb{Q}(\tau_R > u \mid \mathcal{F}_{t_i}, t_{i-1} < \tau_C \leq t_i, \tau_R > t_i) \\
&= \mathbf{1}_{\{t_{i-1} < \tau_C \leq t_i\}} \frac{\mathbb{Q}(\tau_R > u, t_{i-1} < \tau_C \leq t_i \mid \mathcal{F}_{t_i})}{\mathbb{Q}(\tau_R > t_i, t_{i-1} < \tau_C \leq t_i \mid \mathcal{F}_{t_i})} \\
&= \mathbf{1}_{\{t_{i-1} < \tau_C \leq t_i\}} \frac{\mathbb{Q}(U_R > 1 - e^{-\Lambda_R(u)}, 1 - e^{-\Lambda_C(t_{i-1})} < U_C \leq 1 - e^{-\Lambda_C(t_i)} \mid \mathcal{F}_{t_i})}{\mathbb{Q}(U_R > 1 - e^{-\Lambda_R(t_i)}, 1 - e^{-\Lambda_C(t_{i-1})} < U_C \leq 1 - e^{-\Lambda_C(t_i)} \mid \mathcal{F}_{t_i})}.
\end{aligned} \tag{A-13}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}(U_R > 1 - e^{-\Lambda_R(u)}, 1 - e^{-\Lambda_C(t_{i-1})} < U_C \leq 1 - e^{-\Lambda_C(t_i)} \mid \mathcal{F}_{t_i}) \\
&= \mathbb{Q}(1 - e^{-\Lambda_C(t_{i-1})} < U_C \leq 1 - e^{-\Lambda_C(t_i)} \mid \mathcal{F}_{t_i}) \\
&\quad - \mathbb{Q}(U_R \leq 1 - e^{-\Lambda_R(u)}, 1 - e^{-\Lambda_C(t_{i-1})} < U_C \leq 1 - e^{-\Lambda_C(t_i)} \mid \mathcal{F}_{t_i}) \\
&= \mathbb{Q}(U_C > 1 - e^{-\Lambda_C(t_{i-1})} \mid \mathcal{F}_{t_i}) - \mathbb{Q}(U_C > 1 - e^{-\Lambda_C(t_i)} \mid \mathcal{F}_{t_i}) \\
&\quad + \mathbb{Q}(U_R \leq 1 - e^{-\Lambda_R(u)}, U_C \leq 1 - e^{-\Lambda_C(t_{i-1})} \mid \mathcal{F}_{t_i}) \\
&\quad - \mathbb{Q}(U_R \leq 1 - e^{-\Lambda_R(u)}, U_C \leq 1 - e^{-\Lambda_C(t_i)} \mid \mathcal{F}_{t_i}),
\end{aligned} \tag{A-14}$$

と展開され、

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}(U_R > 1 - e^{-\Lambda_R(u)}, 1 - e^{-\Lambda_C(t_{i-1})} < U_C \leq 1 - e^{-\Lambda_C(t_i)} \mid \mathcal{F}_{t_i}) \\
&= e^{-\Lambda_C(t_{i-1})} - e^{-\Lambda_C(t_i)} + \mathbb{E}[C(1 - e^{-\Lambda_R(u)}, 1 - e^{-\Lambda_C(t_{i-1})}) \\
&\quad - C(1 - e^{-\Lambda_R(u)}, 1 - e^{-\Lambda_C(t_i)}) \mid \mathcal{F}_{t_i}],
\end{aligned} \tag{A-15}$$

となり、同様に、

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}(U_R > 1 - e^{-\Lambda_R(t_i)}, 1 - e^{-\Lambda_C(t_{i-1})} < U_C \leq 1 - e^{-\Lambda_C(t_i)} \mid \mathcal{F}_{t_i}) \\
&= e^{-\Lambda_C(t_{i-1})} - e^{-\Lambda_C(t_i)} + C(1 - e^{-\Lambda_R(t_i)}, 1 - e^{-\Lambda_C(t_{i-1})}) - C(1 - e^{-\Lambda_R(t_i)}, 1 - e^{-\Lambda_C(t_i)}),
\end{aligned} \tag{A-16}$$

となる。

補論 4 担保取引と MPoR を考慮した場合のエクスポージャー計算

ここでは、Cpty ごとのネットティング・セット (NS) のポートフォリオ価値 $V(t) = \sum_{n \in NS} v_n(t)$ ($v_n(t)$ は、NS に含まれる個々の取引価値) を対象とする。担保契約は片方向 (unilateral: 銀行は担保を受け取るが差し出さない) であり、 H を担保の極度額 (threshold) とし、最低引渡額 (MTA: Minimum Transfer Amount) および当初証拠金 (IM: Initial Margin) は考慮せず、変動証拠金 (現金) のみを考慮する。時点 t をクローズ・アウト日 (MPoR の最終日) とする⁵⁹。

担保契約がある場合の Cpty へのエクスポージャーは、次式で計算される。

$$E(t) = [V(t) - C(t)]^+, \quad (\text{A-17})$$

ただし、 $[x]^+ = \max\{x, 0\}$ であり、 $C(t)$ は銀行の担保勘定を表している (片方向なので、 $C(t) \geq 0$ となる)。このとき、クローズ・アウト日における銀行の担保勘定を次のように定式化する。

$$C(t) = [V(t - \delta) - H]^+, \quad (\text{A-18})$$

ただし、 $\delta > 0$ は、MPoR の長さを示しており、 $t - \delta$ は MPoR 初日を示している。(A-18)式を(A-17)式に代入すると、時点 t のエクスポージャー $E(t)$ は次式で表現できる。

$$E(t) = \begin{cases} [H + V(t) - V(t - \delta)]^+ & \text{if } V(t - \delta) > H, \\ [V(t)]^+ & \text{if } V(t - \delta) \leq H. \end{cases} \quad (\text{A-19})$$

(A-19)式で示される担保付取引のエクスポージャーをシミュレートするため、基本的な時間グリッド・ポイント $\{t_k\}_{k=1}^N$ に加えて、デフォルト前の最終担保受入日のグリッド・ポイント集合 $\{t_k - \delta\}_{k=1}^N$ を定義する。これより、担保付取引の時間グリッド単位は、クローズ・アウト日 (t_k : MPoR の最終日) およびそれに対応する最終担保受取日 ($t_k - \delta$: MPoR 初日) の 2 時点ペアの集合 $\{t_k - \delta, t_k\}_{k=1}^N$ で特徴付けられることになる。市場リスク・ファクターはデフォルトの条件無しのプロセスのもとで、拡張された時点グリッド単位上でシミュレートする (t_k [エクスポージャー計算グリッド] と $t_k - \delta$ [担保計算グリッド] の双方)。

$t_k - \delta$ 時点でのデリバティブ価値 (=クローズ・アウト日 $[t_k]$ の担保価値)

⁵⁹ Cpty は MPoR 初日 ($t - \delta$) とクローズ・アウト日 (t) の間のどこかでデフォルトしていると仮定する。モデル上は、デフォルト日の特定は本質的ではない。一般的には、デフォルト日をクローズ・アウト日とし、デフォルトと同時にクローズ・アウトすると仮定していることが多い。

をサンプリングする方法としては、基本的な時間グリッド・ポイント $\{t_k\}_{k=1}^N$ を 2 節 (4) の方法でサンプリングした後、 $V(t_{k-1})$ と $V(t_k)$ の間のパスをブラウン橋 (Brownian Bridge) で接続することにより $V(t_k - \delta)$ ($= C(t_k)$) を算定する方法がある ($t_k - t_{k-1} > \delta$ を仮定)。担保付取引のシステミック・エクスポージャーの場合のシミュレーション方法は、5 節 (4) を参照。

補論 5 Pykhtin and Sokol [2013] の β 、 γ および q の推計方法

Pykhtin and Sokol [2013]では、システミックな大規模金融機関を Cpty とする担保付デリバティブ取引において、Cpty デフォルトの市場リスク・ファクターへの影響を示す 3 つのパラメータである β (市場リスク・ファクターの期待ジャンプ率)、 γ (市場リスク・ファクターの期待増加率) および q (collateral delivery ratio) を推定する方法として、リーマン・ブラザーズのデフォルト日 (2008 年 9 月 15 日) 周辺のイベント日と関連する実際の市場リスク・ファクター $X(t)$ 変動へのマッピング手法を提示している。彼らは、 $X(t)$ の確率過程として幾何ブラウン運動を仮定して、NOD (t_{NOD}) の前後の期間に分けて、それぞれの期間について、ドリフト・パラメータ μ (t_{NOD} 後の期間の推計値は μ_C と表記) とボラティリティ・パラメータ σ (t_{NOD} 後の期間の推計値は σ_C と表記) を推計している。 t_{NOD} の特定方法として、リーマン・ブラザーズの Google search volume (出所: Google Trends) により判断する方法を示しており、 t_{NOD} を 2008 年 9 月 8 日と、デフォルト日 (t_D) の 1 週間前にしている。また、パラメータ推定上、リーマン・ブラザーズはデフォルト直前まで担保の授受を行っていたと仮定して、デフォルト日を MPoR 初日 ($t_D = t_{CO} - \delta$) としている。MPoR (δ) は、2 週間 (10 営業日) としている。 β 、 γ および q は以下の式により推計される。

$$\beta = \frac{X_C(t_{CO}) - X(t_{CO})}{X(t_{CO})} = \exp[(\mu_C - \mu)(t_{CO} - t_{NOD})] - 1 \cong (\mu_C - \mu)(t_{CO} - t_{NOD}), \quad (A-20)$$

$$q = \frac{X_C(t_D) - X(t_D)}{X_C(t_{CO}) - X(t_{CO})} = \frac{\exp[\mu_C(t_D - t_{NOD})] - \exp[\mu(t_D - t_{NOD})]}{\exp[\mu_C(t_{CO} - t_{NOD})] - \exp[\mu(t_{CO} - t_{NOD})]} \cong \frac{t_D - t_{NOD}}{t_{CO} - t_{NOD}}, \quad (A-21)$$

$$\gamma = \frac{\sigma_C - \sigma}{\sigma}. \quad (A-22)$$

ここで、 $X_C(t) := X(t_{NOD}) \exp[\mu_C(t - t_{NOD})]$ および $X(t) := X(t_{NOD}) \exp[\mu(t - t_{NOD})]$ であり、図 3 の t_{NOD} 後のトレンド線 (破線) は $X_C(t)$ を、 t_{NOD} 前のトレンド線 (一点鎖線) は $X(t)$ を示している。