# IMES DISCUSSION PAPER SERIES

# 相互取引に伴う債権債務の依存構造を考慮した金融機関の与信評価について

西出勝正（にしでかつまさ）

Discussion Paper No. 2015-J-6

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 東京都中央区日本橋本石町 2-1-1

**IMES Discussion Paper Series 2015-J-6**
**2015 年 6 月**

# 相互取引に伴う債権債務の依存構造を考慮した金融機関の与信評価について

西出勝正*

要　　旨

本論文では、いわゆる Merton (1974) や Black and Cox (1976) 型の構造モデルを用いて、金融機関の融資先が相互に商取引をしている場合の与信(融資金) の評価モデルを提示し、融資先企業の債権債務の依存構造が融資継続・回収方針や実行時点でのスプレッドに与える影響を考察する。数値分析によって、企業が持つ商取引債権は、(1) 資産の分散効果(正の影響)、(2) 同時倒産効果(負の影響)、の 2 つの効果があり、それぞれの影響度を考慮して与信判断を行う必要があるという示唆が得られる。

キーワード：融資評価、構造モデル、相互取引、債権債務
JEL classification: G13、G32、G33、L14

* 横浜国立大学大学院国際社会科学研究院教授（E-mail: knishide@ynu.ac.jp）

本稿は、日本銀行金融研究所からの委託研究論文であり、作成に当たっては八木恭子氏（秋田県立大学）、吉羽要直氏（日本銀行）、内田善彦氏（金融庁）から貴重なコメントを頂いた。特に，竹山梓氏（日本銀行）には、本稿作成までに至る議論を始め先行研究の紹介や細部に亘る論文のチェックなど大変有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

# 1　序

本論文は企業の相互取引による債権債務構造が銀行の与信行動にどのような影響を与えるのかを考察するものである．

2000 年代に入って以降，都市銀行の合併や経営統合によって，国内の銀行数が減少傾向にある．吉本 (2013) によると 1989 年末と 2013 年 7 月の銀行数は表 1 のように変化している．最近では横浜銀行・東日本銀行や肥後銀行・鹿児島銀行の経営統合が発表されるなど，今後は地域金融を担っている地方銀行の間でも合併や経営統合の流れが進むと思われる．これは地方経済における金融機関の寡占化を意味するものと言えよう．

表 1　銀行数の推移

| | 1989 年 | 2013 年 |
|---|---|---|
| 大手銀行 | 25 | 9 |
| 地方銀行 | 64 | 64 |
| 第二地方銀行 | 68 | 41 |

吉本 (2013) を基に作成した．大手銀行には旧都市銀行，長期信用銀行，信託銀行が含まれている．

銀行の寡占化・集約化によって，各金融機関の融資先企業間における相互取引の比率が今後益々増えていくことが予想される．このような環境の下では，従来行われていた融資先単体の資産査定による信用リスク評価では不十分である可能性を指摘することができる．なぜならば，ある融資先企業の倒産や著しい信用不安によって，別の融資先企業の返済能力が著しく低下し，結果として連鎖倒産が引き起こされる状況が起こり得るからである．したがって，融資先企業間の取引ネットワークの構造，特に債権債務関係を融資判断の際に考慮する必要がある．言い換えると，相互取引による依存構造が融資金の継続・回収方針や初期時点での利子率 (スプレッド) の設定に与える影響を十分に理解・把握することが今後の間接金融に求められている*1.

一般に，企業倒産に関わる信用リスクの数学的モデル化は構造モデルと誘導モデルの 2 つの分析手法に大きく分類される．本論文と同様の構造モデルを用いて複数企業の倒産

*1　我が国における間接金融にあり方については塩澤 (2000) など多数の論文が存在するが，本論文の目的は金融機関の与信判断に対しての理論的説明を提示するものであるから，詳細な文献の紹介は割愛する．

の依存性を考察している先行論文として，Gordy (2000) や Rösch and Winterfeldt (2008), Bade et al. (2011) などを挙げることができる．これらの論文に共通する設定は，各企業の事業資産の確率過程を共通項と個別項に分解し，共通項を通じた資産価値の下落によって企業の同時倒産をモデル化することである．事業資産が正規確率過程でモデル化される場合には共通項による依存度が相関係数として表される．したがって，相関係数による複数企業の同時倒産確率への影響を多くの研究が考察している[*2]．但し，これらの論文では，企業間取引の債権債務による相互依存構造を明示的にモデルに取り入れている訳ではない．

一方，Eisenberg and Noe (2001) に始まる一連の研究では，主として株式や負債など証券の相互持合い構造を明示的にモデル化して複数企業間の倒産伝播について分析している．一般に企業間で証券の持ち合いをしている状況では，ある証券の利得は他の証券の利得に互いに依存して決まるため，相互持合い構造と整合的な最終利得が存在するのかが問題となる．Eisenberg and Noe (2001) の重要な貢献は負債の持合い構造と整合的な証券の最終利得ベクトル (clearing payment vector) が常に存在することを示したことである．また，倒産企業の判別アルゴリズムを提示することで，倒産伝播の仕組みが明らかになると主張している．その他，同様の問題意識を持つ論文として Shin (2008, 2009) や Elsinger (2009) および Rogers and Veraart (2013) などを挙げることができる．さらに，株式や負債持合い構造が初期時点での証券価値にどのような影響を与えるのかを分析している論文として Suzuki (2002) や Fischer (2014)，Karl and Fischer (2014) および Nishide et al. (2014) などが挙げられる．

本論文の目的は，主として企業向けに融資を実行している金融機関の立場から，企業間の商取引に伴う債権債務構造が与信判断にどのような影響を与えるのかを分析することである．特に，各企業の事業資産を相関のある多変量幾何ブラウン運動で表現するとともに，債権債務構造を明示的にモデルに取り入れている点が特徴である．より具体的に述べると，本論文では Nishide et al. (2014) で提案された Black and Cox (1976) 型の動的な倒産モデルを用いて融資の信用リスクを評価する．

本論文のもう一つの特徴は，金融機関が融資の満期 (返済期限) 前の中間時点において当該融資を継続するか回収するかの判断ができると仮定している点である．さらに，融資実行時点では，企業間の相互依存構造と中間審査による意思決定を織り込んだ上で当該企業の資産内容を評価し，金利水準 (信用スプレッド) を設定できるものとする．中間審査の仮定は財務制限条項が設定された融資だと考えることができる．中間審査や財務制限条項を

[*2] 橋本 (2008) では業種や企業規模によるグループ分けによる資産相関を実証的に推定している．

分析した論文として，Diamond (1991) や Mella-Barral and Perraudin (1997)，Mella-Barral (1999) および山下・吉羽 (2007) などが挙げられる[3]．しかしながら，(1) 中間審査では金融機関に融資回収のオプションが与えられている[4]，(2)Merton 流の構造モデルを基本とすることで，中間審査の持つ影響を定量的に分析することが可能である[5]，などの点が本論文の特徴であるといえよう．

本論文の主たる結果は以下の通りである．第一として，商取引に伴う債権・債務構造によって融資先企業間に相互依存関係が存在する場合には，当該依存関係が債権者・債務者ともに与信判断・信用リスクの評価に無視しえない影響を与える．特に，相互取引に伴う債権額が信用リスクに与える影響は非単調であることが示される．より具体的には (1) 債権額が少額であれば，その限界的増加によって信用リスクは減少する，(2) 一定額以上を超えると，信用リスクは債権額の増加関数に転じる，という数値結果が得られる．これは，相互取引に伴う債権が，分散投資効果という正の影響と，同時倒産リスクの上昇という負の影響の 2 つの異なる効果を持ち，その大小関係を考慮して最終的な信用リスクを評価する必要性があるからである．

第二の主たる結果として，中間審査によって初期時点での融資の信用リスクを下げる効果があるという知見を得ることができる．この結果は，特に初期時点において企業の信用力が低い場合に顕著である．その理由は以下のように説明できる．初期時点において，企業の信用力が十分に高い場合には倒産リスクをほとんど無視し得るので中間審査による企業の信用リスクに大きな影響を与えない．しかしながら，企業の信用力が低い場合には，中間審査を導入することで融資を回収するというオプションを行使できるので，金融機関は実行時点での融資に関する信用リスクを低減させることができるのである．

本論文の次節以降の構成は以下の通りである．まず第 2 節では，基本モデルとして金融機関の融資先企業の間で相互依存構造のない設定を構築して，信用リスクの評価を行う．第 3 節では，本論文の主要な考察対象である相互依存構造を織り込んだモデルを提示する．第 4 節では，前節で提示されたモデルを用いて数値計算を行い，相互依存構造が与信判断に与える影響について定量的に分析する．第 5 節は本論文の結果をまとめて結論づけている．付録 A は論文中の命題の数学的証明を与えている．

---

*3 文脈は異なるが，Calomiris and Kahn (1991) や Diamond and Rajan (2001) などでは短期債務の更新による資金調達を用いることによって，長期債務による調達よりも企業経営の規律付けが機能するとの結果が得られている．

*4 Mella-Barral and Perraudin (1997) などでは，企業に融資条件の再交渉力を与えている．

*5 Diamond (1991) とその拡張論文では事業資産が二項分布に従うと仮定しているため，詳細な定量分析には適していないといえる．

## 2　企業間の相互取引構造を考慮しないモデル

本節では，商取引による債権債務構造を考慮しない基本モデルを構築し，数値例を用いてその性質を考察する．

### 2.1　設定

融資先企業 $i$ の時価評価された事業資産過程を $Q_i = \{Q_{it}\}$ とする．金融機関の価格付け測度 $\hat{\mathbb{P}}$ の下で $Q_i$ は以下の幾何ブラウン運動に従うとする[*6]．

$$\mathrm{d}Q_{it} = \rho Q_{it}\mathrm{d}t + \sigma_i Q_{it}\mathrm{d}\hat{W}_{it} \tag{2.1}$$

但し，$\rho$ と $\sigma_i$ は正の定数であり，$\hat{W}_i$ は $\hat{\mathbb{P}}$ の下での標準ブラウン運動とする．ここで，係数 $\rho$ は金融機関が持つ連続複利の割引率であり，金融機関内で用いる本支店間レートなどを想定している[*7]．

融資先企業 $i$ への融資額 (額面) を $D_i$ とする．融資の満期 (返済期限) を $T$ とし，予め定められた満期前の中間時点 $\hat{t}$ において金融機関は融資金の中間審査 (与信判断) を実施できるとする[*8]．より具体的には，金融機関が融資先企業 $i$ の事業資産を評価 ($Q_{i\hat{t}}$ を観察) した上で，融資金を回収するか継続するかを選択する．金融機関が融資回収を選択した場合，当該融資先企業は事業が継続できずに清算するものと仮定する．融資実行時点を $t = 0$ とし，融資回収額のリスク調整後現在価値が等しくなるように実行時点での適用金利が設定されるとする．

まず満期時点 $T$ での状況を説明する．満期時点での事業資産価値 $Q_{iT}$ が倒産閾値 $B_{iT}$ を下回った場合，企業 $i$ は倒産すると仮定する．時点 $T$ において企業が倒産した場合には残余資産に比例する倒産費用と固定的倒産費用の 2 種類の費用が発生するものとする．比例的倒産費用の比率を $\delta_T$，固定的倒産費用を $K_T$ と表記する．このとき，満期時点 $T$ で

[*6] 事業資産が市場取引可能な場合には $\hat{\mathbb{P}}$ はいわゆるリスク中立測度となるが，ここでは金融機関の考えるリスク調整後の確率分布として考える．また，論文中の hat 記号は金融機関が意思決定するパラメータ等であることを示している．

[*7] リスク調整後における $Q_i$ の期待成長率 (ドリフト) を割引率と異なる値に設定して評価することも可能であるが，ファイナンスにおける無裁定価格理論と整合的な議論を展開するために，本論文ではドリフトを $\rho$ と設定している．また，本設定による分析結果への影響は軽微である．

[*8] 理論的には，満期でのみ企業の倒産が判定される Merton (1974) と，満期までの任意の時点で倒産が判定される Black and Cox (1976) との中間的設定であるといえる．モデル上は 2 時点以上での与信判断を導入することも可能であるが，数学的な取扱い易さを考慮して中間審査は 1 時点のみとした．

の融資金の回収額 $R_{iT}$ は以下で与えられる．

$$R_{iT} = 1_{\{Q_{iT} \geq B_{iT}\}} D_i + 1_{\{Q_{iT} < B_{iT}\}} L_T(Q_{iT})$$

である．但し，

$$L_T(Q_{iT}) = (1-\delta_T) Q_{iT} - K_T$$

とする．通常の Merton モデルでは $B_{iT} = D_i$ となる．また，正の定数 $\ell_T > 0$ に対して $B_{iT} = D_i/(1-\ell_T)$ とすると，倒産条件が

$$(1-\ell_T) Q_{iT} < D_i \tag{2.2}$$

となる．即ち，$\ell_T > 0$ の場合には倒産決定前においても資産の強制売却による損切り売却 (fire sale) に伴う損失が発生するとし，その損失率を $\ell_T$ と解釈することができる．条件式 (2.2) は資産の損切り売却による回収金では負債を返済できない状況を表している．

次に時点 $\hat{t}$ の状況を考える．時点 $\hat{t} \in (0, T)$ で金融機関は融資先企業 $i$ の事業資産 $Q_{i\hat{t}}$ を観察した上で，融資金を回収するか，継続するかの選択ができるとする[*9]．融資を継続した場合，満期時点回収額 $R_{iT}$ の時点 $\hat{t}$ におけるリスク調整後割引価値は，1 次元正規分布の累積分布関数を $\Phi_1$ と表記すると

$$\begin{aligned} A_{i\hat{t}}(Q_{i\hat{t}}) =& \hat{\mathbb{E}}_{\hat{t}} \left[ \mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})} R_{iT} \right] \\ =& \mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})} D_i \Phi_1 \left( d^-_{i,T-\hat{t}}(Q_{i\hat{t}}; B_{iT}) \right) \\ &+ (1-\delta_T) Q_{i\hat{t}} \Phi_1 \left( -d^+_{i,T-\hat{t}}(Q_{i\hat{t}}; B_{iT}) \right) \\ &- \mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})} K_T \Phi_1 \left( -d^-_{i,T-\hat{t}}(Q_{i\hat{t}}; B_{iT}) \right) \end{aligned}$$

と計算することができる．ただし，$\hat{\mathbb{E}}_{\hat{t}}$ は時点 $\hat{t}$ における情報を基にした確率測度 $\hat{\mathbb{P}}$ の下での条件付き期待値である．また，

$$d^{\pm}_{i,t}(Q; B) = \frac{\log\left(\frac{Q}{B}\right) + \left(\rho \pm \frac{\sigma_i^2}{2}\right) t}{\sigma_i \sqrt{t}}$$

である (複号同順)．

[*9] 日本のメインバンク制度 (リレーションシップバンキング) の下では，資金調達能力のない中小企業と融資先金融機関との間に暗黙の財務制限条項が存在すると仮定するのはそれほど不自然でないと考えられる．尚，日本における財務制限条項については岡東 (2008) などを参照のこと．

次に，金融機関が融資を継続せず，強制的に回収する状況を考える．このとき，融資先企業 $i$ は事業を清算し，融資の返済資金に充当すると仮定する．満期時点 $T$ と同様に，清算による比例的損失率を $\delta_{\hat{t}}$，固定損失額を $K_{\hat{t}}$ とすると，融資回収に伴う事業清算によって金融機関が受け取る金額は

$$L_{\hat{t}}(Q_{i\hat{t}}) = (1-\delta_{\hat{t}})Q_{i\hat{t}} - K_{\hat{t}}$$

である．

金融機関の融資継続の意思決定は以下の条件式で表されると仮定する．

$$\begin{aligned} A_{i\hat{t}}(Q_{i\hat{t}}) \geq L_{\hat{t}}(Q_{i\hat{t}}) &\Leftrightarrow \text{融資を継続} \\ A_{i\hat{t}}(Q_{i\hat{t}}) < L_{\hat{t}}(Q_{i\hat{t}}) &\Leftrightarrow \text{融資を回収} \end{aligned}$$

とする．ここで，融資継続の閾値を $\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})$ と表すことにする[*10]．即ち，

$$\begin{aligned} Q_{i\hat{t}} \geq \hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT}) &\Leftrightarrow \text{融資を継続} \\ Q_{i\hat{t}} < \hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT}) &\Leftrightarrow \text{融資を回収} \end{aligned}$$

である．このとき，$\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})$ は $b$ についての非線形方程式

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_i(b;B_{iT}) =& \mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})} D_i \Phi_1\left(d^-_{i,T-\hat{t}}(b;B_{iT})\right) + (1-\delta_T)b\Phi_1\left(-d^+_{i,T-\hat{t}}(b;B_{iT})\right) \\ &- \mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})} K_T \Phi_1\left(-d^-_{i,T-\hat{t}}(b;B_{iT})\right) - (1-\delta_{\hat{t}})b + K_{\hat{t}} = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

の解である．

最後に時点 0 における融資の現在価値を計算する．この価値を $P_i$ とすると，定義より

$$P_i = \hat{\mathbb{E}}_0\left[\mathrm{e}^{-\rho\hat{t}} 1_{\{Q_{i\hat{t}} \geq \hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})\}} A_{i\hat{t}}\right] + \hat{\mathbb{E}}_0\left[\mathrm{e}^{-\rho\hat{t}} 1_{\{Q_{i\hat{t}} < \hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})\}} L_{\hat{t}}(Q_{i\hat{t}})\right]$$

である．右辺の 2 つの期待値を計算することで以下の命題を得る．

**命題 1** 係数 $\kappa = \sqrt{\hat{t}/T}$ と定義する．また，時点 0 における企業 $i$ の事業価値を $Q_{i0} = q_i$ と表記する．このとき，融資金現在価値 $P_i$ は以下で与えられる．

[*10] 第 3 節での議論のために $B_{iT}$ への依存性を明記しておく．

$$\begin{aligned}P_i(q_i;B_{iT}) =& \mathrm{e}^{-\rho T} D_i \Phi_2 \left( d^-_{i,\hat{t}}(q_i;\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})), d^-_{i,T}(q_i;B_{iT});\kappa \right) \\ &+ (1-\delta_T) q_i \Phi_2 \left( d^+_{i,\hat{t}}(q_i;\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})), -d^+_{i,T}(q_i;B_{iT});-\kappa \right) \\ &- \mathrm{e}^{-\rho T} K_T \Phi_2 \left( d^-_{i,\hat{t}}(q_i;\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})), -d^-_{i,T}(q_i;B_{iT});-\kappa \right) \\ &+ (1-\delta_{\hat{t}}) q_i \Phi_1 \left( -d^+_{i,\hat{t}}(q_i;\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})) \right) - K_{\hat{t}} \mathrm{e}^{-\rho \hat{t}} \Phi_1 \left( -d^-_{i,\hat{t}}(q_i;\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})) \right)\end{aligned}$$

但し，$\Phi_2(\cdot,\cdot;\kappa)$ は相関係数 $\kappa$ を持つ 2 次元標準正規分布の累積分布関数である．

証明は付録 A で与えている．

金融機関は時点 0 で企業 $i$ に対して $P_i$ の額で割り引いて融資を実行するものとする．このとき，融資金の信用スプレッドは

$$\hat{s}_i = \frac{1}{T} \log\left(\frac{D_i}{P_i}\right) - \rho$$

として定義することができる．言い換えると，金融機関は連続複利の利子率 $\rho + \hat{s}_i$ にて企業 $i$ に融資していることになる．

以上の時間の流れをまとめたものが表 2 である．

表 2　本論文の時間的流れ

| | | |
|---|---|---|
| 時点 0 | 融資実行 | 額面 $D_i$，利子率 $\rho + \hat{s}_i$ |
| 時点 $\hat{t}$ | 中間審査 | $Q_{i\hat{t}} < \hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})$ のとき，融資を強制的に回収する |
| 時点 $T$ | 満期到来 | 額面 $D_i$ あるいは清算価値 $L_T(Q_{iT})$ での返済を受ける |

## 2.2　数値分析とその考察

第 3 節の相互取引のある場合の結果との比較のために，上で構築した相互取引のないモデルにおける数値分析を行う．本論文で用いる数値設定は，特に明記していない限り表 3 の数値を用いる[*11]．

[*11] 表 3 では，特徴的な結果が明確に表れるようやや恣意的に数値を設定した．

表 3　数値分析に用いる基本設定

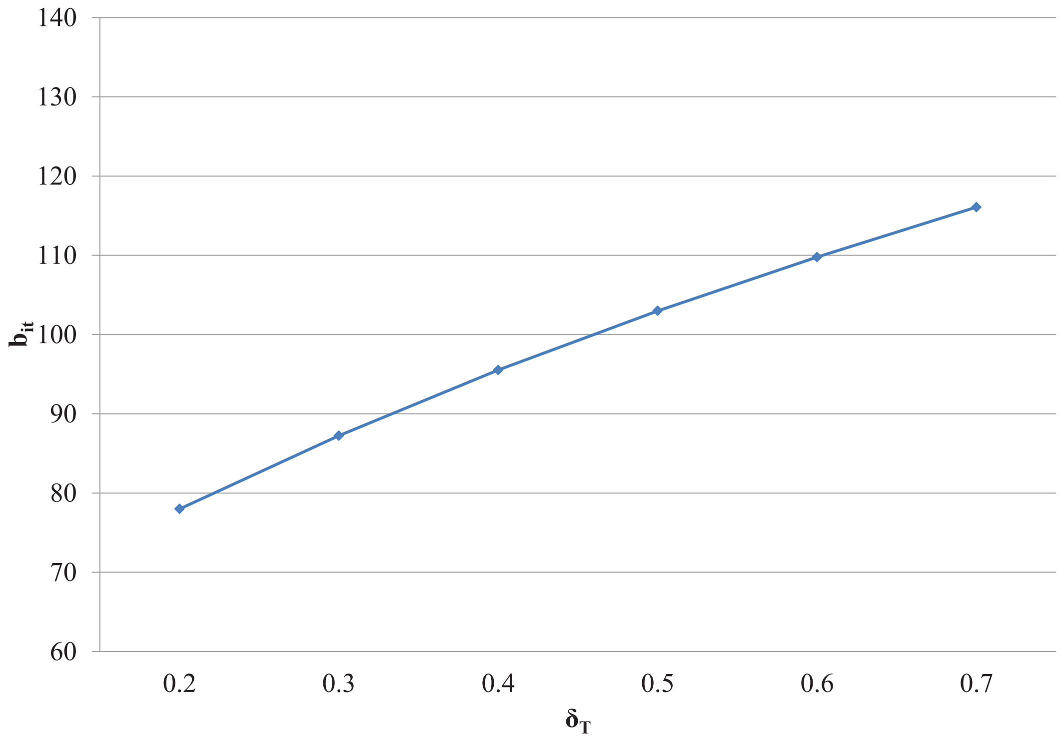
| $Q_{i0}$ | $D_i$ | $T$ | $\hat{t}$ | $B_{iT}$ | $\rho$ | $\sigma_i$ | $\delta_T$ | $\delta_{\hat{t}}$ | $K_T$ | $K_{\hat{t}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 180 | 100 | 1 | 0.5 | 100 | 0.03 | 0.5 | 0.7 | 0.5 | 0 | 30 |

### 2.2.1　中間評価時点における融資継続・回収方針の決定

まず，中間評価時点 $\hat{t}$ における融資金継続の閾値である $\hat{b}_{i\hat{t}}$ についての分析を行う．

中間時点での清算閾値 $\hat{b}_{i\hat{t}}$ の $\delta_T$(満期時点での比例的倒産費用の比率) に対する感応度が図 1 に与えられている．

図 1　中間時点における融資継続閾値 $\hat{b}_{i\hat{t}}$ の $\delta_T$ に対する感応度

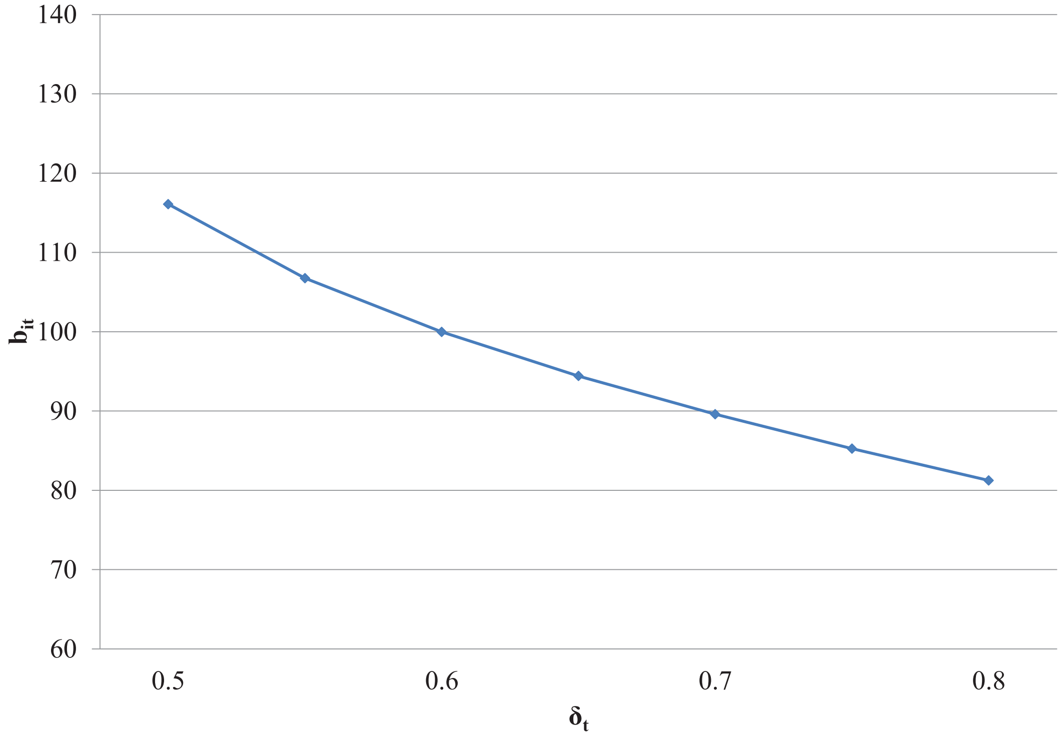



中間評価時点 $\hat{t}$ における融資継続の閾値 $\hat{b}_{it}$ は満期時点での比例的倒産費用 $\delta_T$ に関する増加関数である．これには以下のような解釈が可能である．即ち，$\delta_T$ の上昇によって将来時点における融資回収の期待利得 (期待返済額) が減少するので，中間時点でより厳

しい方針を採って早期に融資を回収した方が得策となる確率が上昇し，結果として $b_{i\hat{t}}$ を高く設定する．

次に，$\delta_{\hat{t}}$(中間評価時点での比例的倒産費用の比率) に対する影響を図 2 に示す．

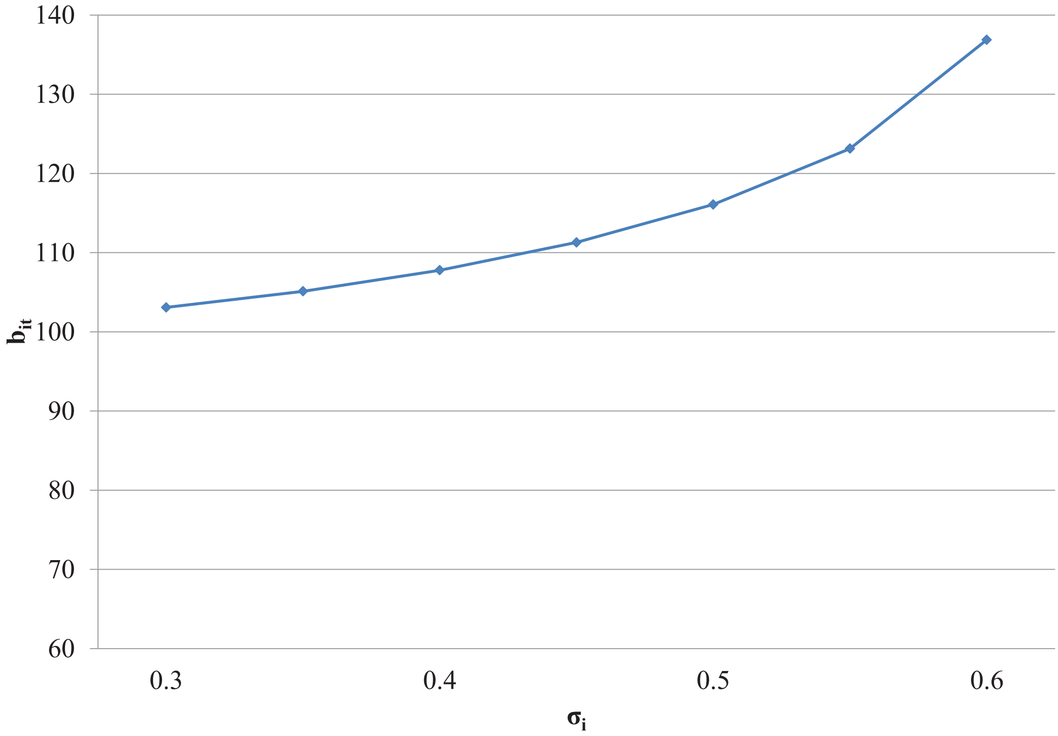
図 2　中間時点における融資継続閾値 $\hat{b}_{i\hat{t}}$ の $\delta_{\hat{t}}$ に対する感応度




上の図からわかるように，中間評価時点での比例的清算費用の上昇は融資継続閾値の下落をもたらす．即ち，満期時点 $T$ での倒産費用比率とは逆の効果を持つ．先ほどとは逆に，中間時点での清算費用が増加することで満期時点における期待利得の価値が相対的に上昇し，現時点で多額の清算費用を失って強制的に回収するよりも満期での返済・回収を待った方が得策となるからである．

図 3 は，企業 $i$ の事業資産の不確実性 (ボラティリティ) を表す $\sigma_i$ が中間評価時点での融資継続閾値 $\hat{b}_{i\hat{t}}$ に与える影響を示している．

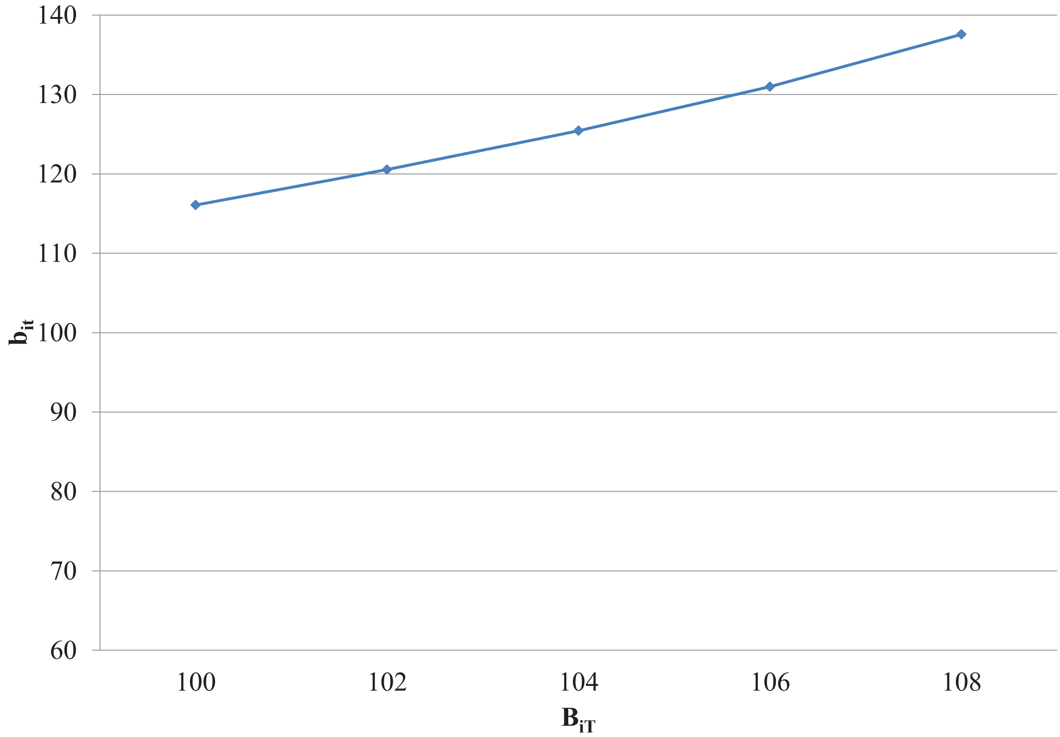
図 3　中間時点における融資継続閾値 $\hat{b}_{i\hat{t}}$ の $\sigma_i$ に対する感応度




上の図は，企業の事業資産のボラティリティが中間時点における融資継続閾値の増加関数であることを示している．即ち，企業の事業リスクの上昇によって中間時点での融資回収条件が厳しくなる．この結果に対しては以下のような直観的理解が可能である．企業の事業資産の不確実性が上昇することは満期時点での倒産確率が高くなることを意味する．従って，中間時点での融資回収の相対的価値が上昇し，より厳しい融資継続条件を課すことが適切となる．

図 4 は，時点 $T$ の倒産閾値を表す $B_{iT}$ が中間評価時点での融資回収閾値 $\hat{b}_{i\hat{t}}$ に与える影響を示している．

図 4　中間時点における融資継続閾値 $\hat{b}_{i\hat{t}}$ の $B_{iT}$ に対する感応度




満期時点の倒産閾値 $B_{iT}$ が上昇すると，中間評価時点における融資継続閾値 $\hat{b}_{i\hat{t}}$ は増加している．この結果に対する直感的な解釈は $\delta_T$ の場合と同様である．即ち，$B_{iT}$ の上昇によって将来時点における融資金の期待返済額が減るため，中間時点でより厳しい方針を採った方が得策となるという理論的説明が可能である．

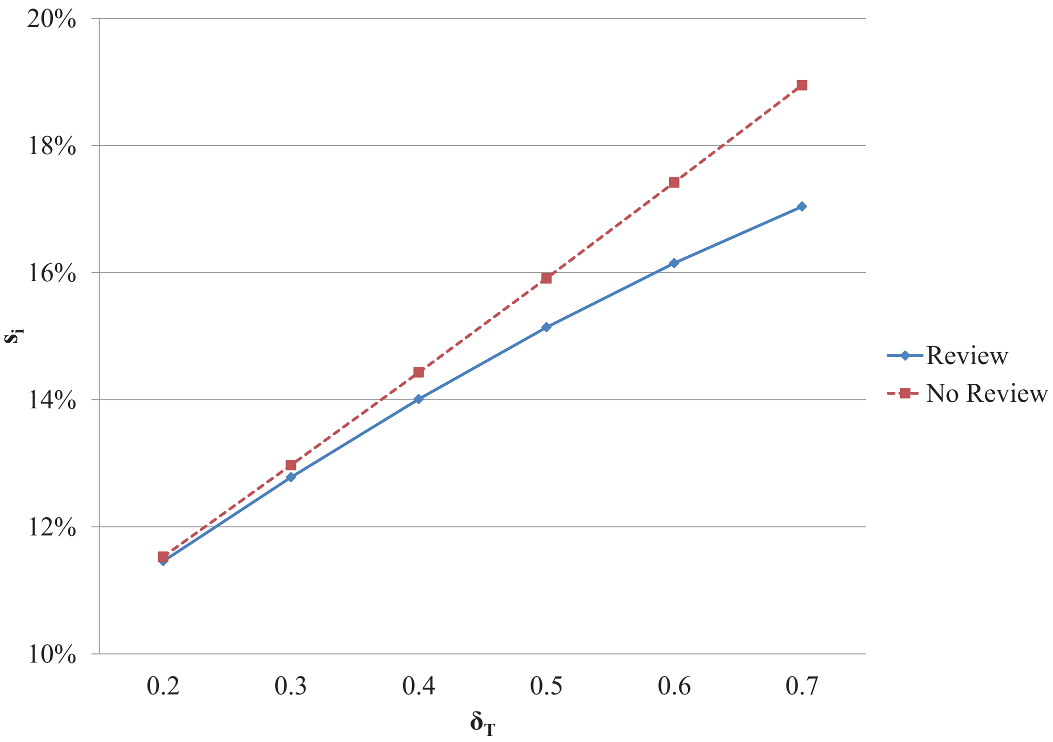
以上が中間評価時点における与信判断に関する数値結果である．ほとんどが直感的に理解できる結果であると言える．即ち，中間時点において回収方針を採るかどうかは，同時点での回収額と満期時点での期待回収額を相対的に比較して，金融機関自身にとって有利な判断をすべきであることを示している．

### 2.2.2　融資実行時点における信用スプレッド

次に，融資先企業 $i$ への融資実行時点における与信判断である信用スプレッド $\hat{s}_i$ に関する感応度分析を以下に示す．図 5–9 における赤点線は，中間評価時点における融資回収という選択肢がなく，満期時点での融資回収のみが金融機関に許されている場合の信用スプレッドを表している．

図 5 は，満期時点における比例的倒産費用 $\delta_T$ がスプレッド $\hat{s}_i$ に与える影響を図示している．

図 5　信用スプレッド $\hat{s}_i$ の $\delta_T$ に対する感応度

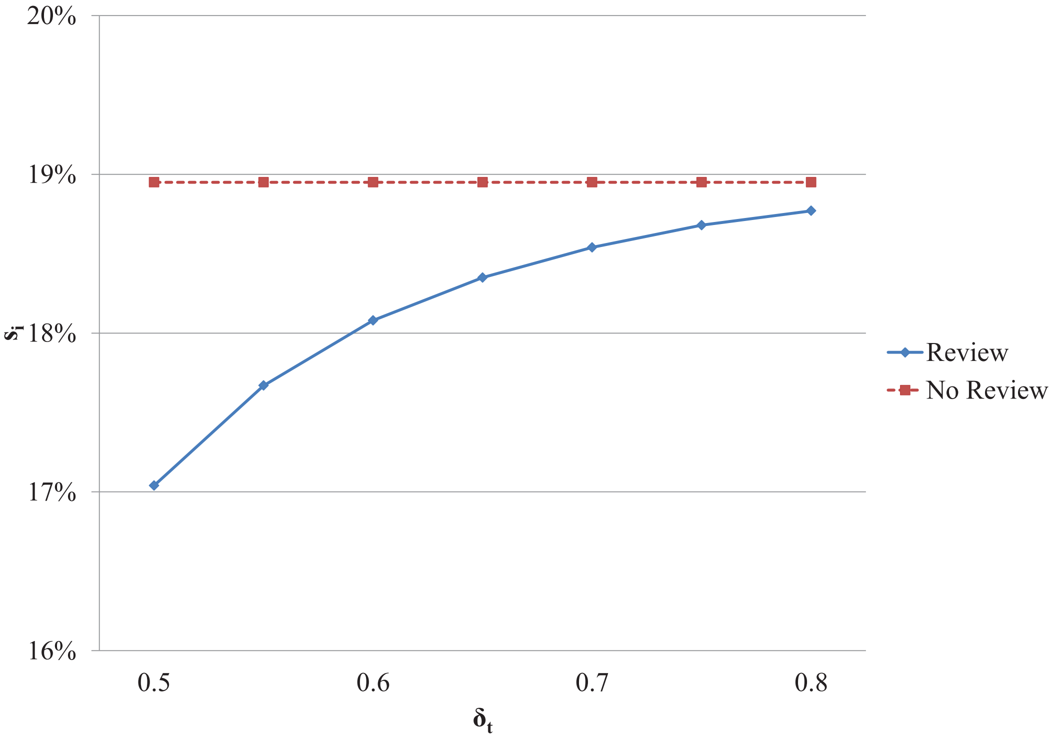



上の図より，満期時点における比例的倒産費用 $\delta_T$ の上昇は信用スプレッド $\hat{s}_i$ の上昇をもたらすことがわかる．これは，$\delta_T$ の上昇によって満期時点での期待回収額が減少することから，信用スプレッドを高く設定する必要があることが原因であり，直感的にも容易に理解できる．但し，中間評価のない場合に比べて，中間審査を実施した場合にはスプレッドの感応度がそれほど大きくない．これは，中間時点における融資回収という選択肢の存在によって，倒産に伴う回収減額分を抑制することができるからである．比例的倒産費用比率 $\delta_T$ が高い値を取る状況下では中間審査での融資回収によって満期倒産の損失を回避できる可能性があるため，2 つの信用スプレッドの差が大きくなっている．

次に，中間評価時点における比例的倒産費用 $\delta_{\hat{t}}$ が信用スプレッド $\hat{s}_i$ に与える影響を図 6 は表している．

信用スプレッド $\hat{s}_i$ は中間時点における比例的清算費用 $\delta_{\hat{t}}$ の増加関数である．この結果はほぼ自明である．即ち，$\delta_{\hat{t}}$ の上昇は融資金の期待回収額の減少を意味し，信用スプレッ

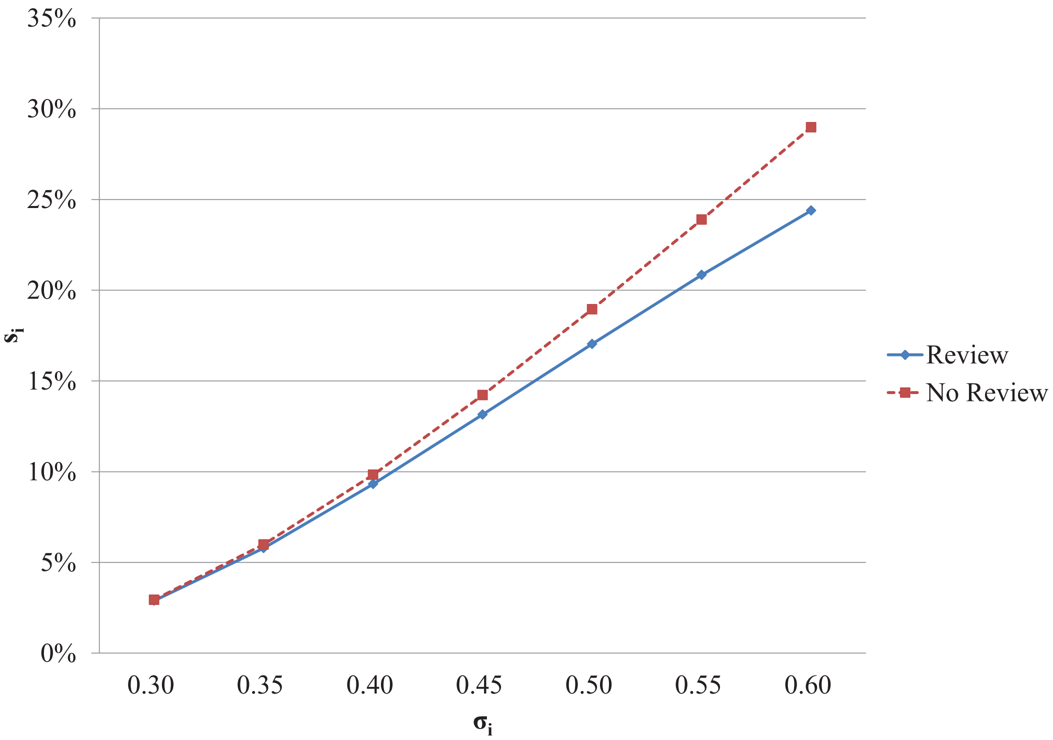
図 6　信用スプレッド $\hat{s}_i$ の $\delta_{\hat{t}}$ に対する感応度




ドを高く設定する必要が生じる．また，$\delta_{\hat{t}}$ が上昇すると，中間審査のない場合のスプレッドに近づいていることがわかる．この事実には以下のような解釈が可能である．図 2 で見たように，$\delta_{\hat{t}}$ が高い値をとるにつれて $\hat{b}_{i\hat{t}}$ が低く設定されている．これは，$\delta_{\hat{t}}$ の上昇によって中間審査による融資回収のオプション価値が減少することを意味し，結果として $\hat{s}_i$ を高く設定する必要がある．中間審査における融資継続閾値 $b_{i\hat{t}}$ に関しては $\delta_T$ と $\delta_{\hat{t}}$ で逆の効果が見られたが，信用スプレッド $\hat{s}_i$ に対しては同方向の効果をもたらす．

図 7 では，事業資産のボラティリティ $\sigma_i$ に対する信用スプレッド $\hat{s}_i$ の感応度が描かれている．

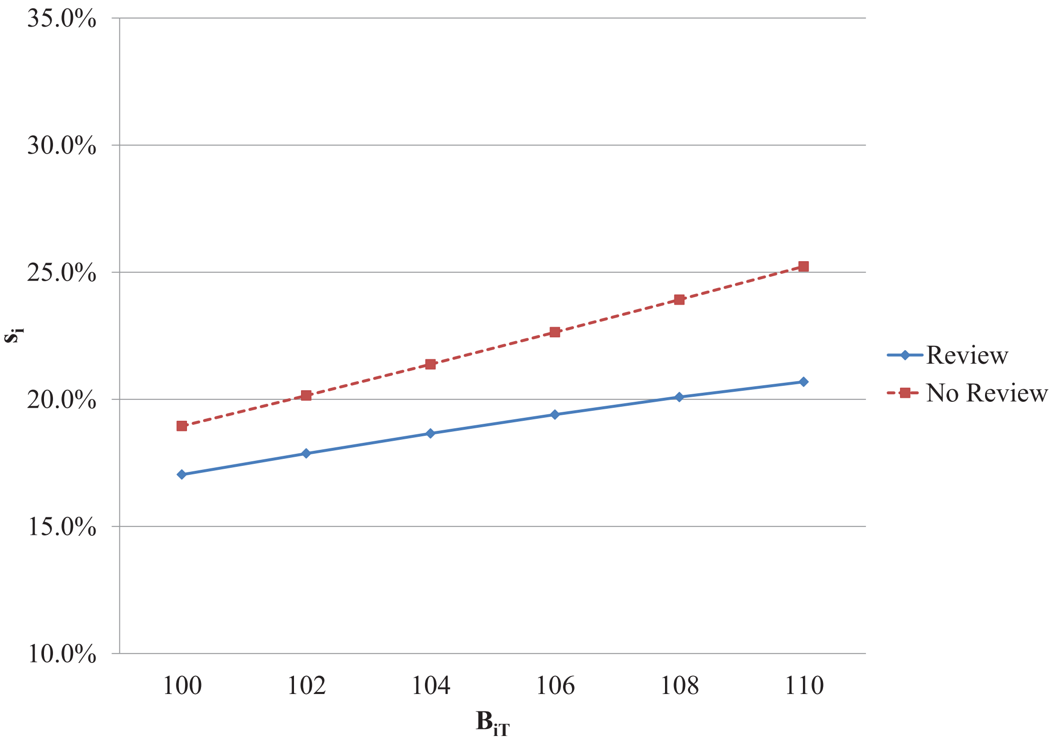
図 7　信用スプレッド $\hat{s}_i$ の事業資産のボラティリティ $\sigma_i$ に対する感応度




上の図は，事業資産のボラティリティ $\sigma_i$ が上昇した場合に金融機関は融資の信用スプレッドを高く設定すべきであることを示している．この結果は，直感とも整合的である．即ち，$\sigma_i$ の上昇は中間評価時点における融資金の回収や満期時点での倒産の確率が上昇することを意味しており，倒産した場合の期待損失を織り込んで利子率を設定すべきという示唆が導かれる．さらに，$\sigma_i$ が高い値の場合には，中間審査の有無による信用スプレッドの差が大きい．この結果に対しては，図 6 と同様の説明が可能である．即ち，$\sigma_i$ が高い値の場合には $\hat{b}_{i\hat{t}}$ の上昇によって中間審査による融資回収のオプション価値が大きくなり，2 つのスプレッドの差が拡大する．

図 8 は，満期時点における倒産閾値 $B_{iT}$ が信用スプレッド $\hat{s}_i$ に与える影響度を表している．

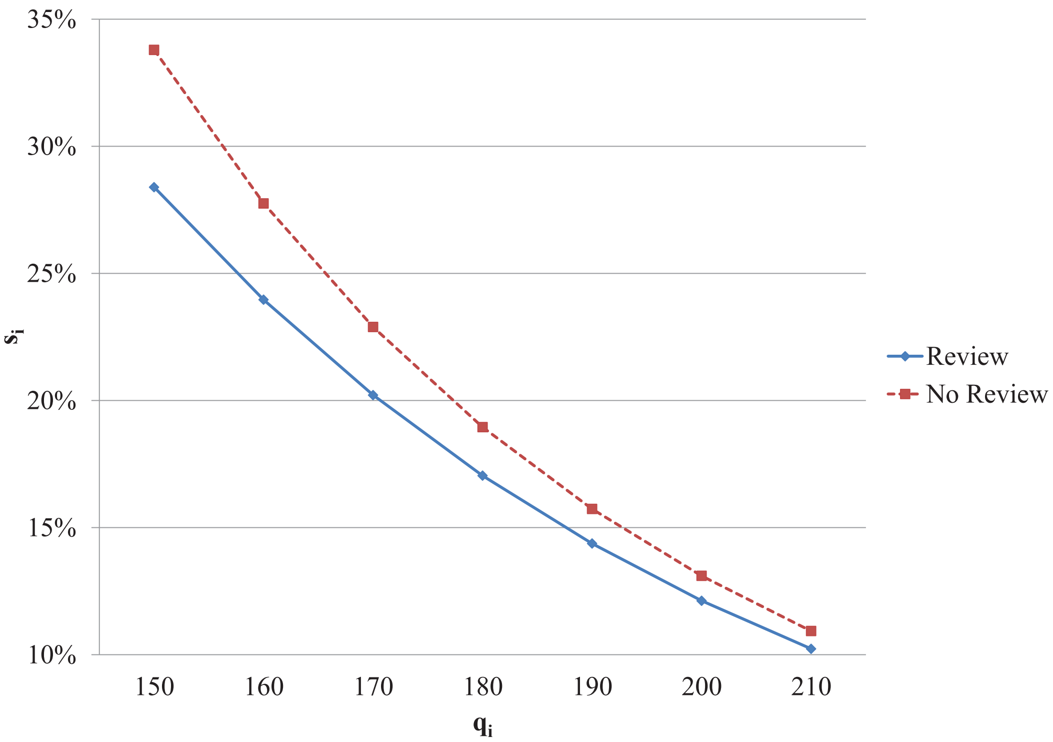
図 8　信用スプレッド $\hat{s}_i$ の満期時点における倒産閾値 $B_{iT}$ に対する感応度




満期時点での倒産閾値 $B_{iT}$ が上昇した場合には信用スプレッド $\hat{s}_i$ は高く設定すべきであることが上の図からわかる．この結果も直感と非常に整合的であり，基本的には $\delta_T$ が $\hat{s}_i$ に与える影響と同じ説明ができる．即ち，$B_{iT}$ の上昇によって満期時点での期待回収額が減少することから，信用スプレッドを高く設定する必要があることが要因である．また，$B_{iT}$ の上昇が融資資産の有無によるスプレッドの差を拡大させていることにも注意が必要である．

最後に，初期時点における事業資産の水準 $q_i = Q_{i0}$ と信用スプレッド $\hat{s}_i$ との関係が図 9 に与えられている．

図 9　信用スプレッド $\hat{s}_i$ の初期時点における事業資産の水準 $q_i$ に対する感応度




初期時点における企業の事業資産価値 $q_i$ が高い場合には，信用スプレッドを低く設定することができる．事業資産価値が高くなると中間評価時点において融資回収方針となる確率や，満期時点において倒産閾値を下回る確率が減少することから，この結果は極めて容易に理解できる．

最後に，中間審査がなく，満期でのみ融資金が回収される場合との比較について言及したい．図 5–9 からわかるように，中間評価時点における融資回収の可能性があることで信用スプレッドは大きく減少している．これは，金融機関にいわゆるオプションを与えている構造になっていることが主たる要因である．以上の事実は，中間時点における融資継続・回収の選択肢を金融機関に与えることは金融機関自身にとってのみならず，融資を受ける企業にとってもメリットがあるという示唆を与えている．

さらに，中間審査の有無によるスプレッドの差は企業の事業リスクに依存する．より具体的にいうと，企業の倒産リスクが高まるにつれて中間審査による融資回収のオプション価値が上昇するため，結果として両社のスプレッド差が拡大するという事実を見てとることができる．

## 3 企業間の相互取引を考慮したモデル

本節では，金融機関が融資対象となる企業の間で相互に取引を行っている状況を仮定し，その相互依存関係が与信判断や融資方針に与える影響についてモデル化する．

金融機関は企業 $i = 1, \ldots, n$ に融資しているものとする．融資先企業全体の集合を $\mathbb{N}$ と表す．集合 $A$ の要素の数を $|A|$ と表記すると，$|\mathbb{N}| = n$ である．

各企業は互いに商取引をしており，企業 $i$ から企業 $j$ への取引債権を $G_{ij}$ で表す．当該債権の満期は $T$ とする．定義より $G_{ji} = -G_{ij}$ である[*12]．また，$\{x\}_+ = \max\{x, 0\}$ として以下の変数を定義する．

$$G_{ij}^+ = \{G_{ij}\}_+, \quad G_{ij}^- = \{-G_{ij}\}_+$$

時点 $T$ における企業 $i$ の融資返済前の総資産は以下のように表現することができる．

$$Q_{iT} + \sum_{j \in \mathbb{N}} \Gamma_{ij}$$

但し，$\Gamma_{ij}$ は企業 $i$ が企業 $j$ に対して有する取引債権 $G_{ij}^+$ の回収額を表す．ここで，企業 $j$ が支払い可能である場合は明らかに $\Gamma_{ij} = G_{ij}^+$ であるが，時点 $T$ までに倒産あるいは清算した場合には全額が回収できず $\Gamma_{ij} < G_{ij}^+$ となる場合がある．最終的な回収額の算出については第 3.1 節の議論で与える．

企業間で相互取引が存在する状況では，企業が倒産あるいは清算した場合に債務の優先劣後構造や資産回収の時間的流れが問題となる．本論文では以下の仮定を置く．

**仮定 1**　満期時点 $T$ において企業は総資産が総負債を下回った場合に倒産する．即ち，

$$Q_{iT} + \sum_{j \in \mathbb{N}} \Gamma_{ij} < D_i + \sum_{j \in \mathbb{N}} G_{ij}^-$$

のとき，企業 $i$ は倒産する．

**仮定 2**　銀行の融資債権は企業間の取引債権よりも優位である[*13]．また，取引債権の間では同位であるとする．即ち，企業 $j$ が倒産したとき，企業 $i$ が $j$ に対して持つ債権は，残

---

[*12] 本論文では，二社間の債権債務が相殺可能であるとの仮定を置いている．我が国では民法 505 条以下において一定条件の下での債権債務の相殺が認められている．

[*13] 金融機関の融資債権は，預金との相殺などによってほとんどの場合に商取引に伴う債権よりも優位となる．

余資産のうち

$$\lambda_{ij} = \frac{G_{ij}^{+}}{\sum\limits_{h\in\mathbb{N}} G_{hj}^{+}}$$

の割合で回収額を受け取ることができる．

仮定 3　時点 $\hat{t}$ で金融機関が融資を回収した場合，清算後の残余資産を銀行が保全・管理し，満期時点 $T$ において関係する債権者に分配するものとする．

前節と同様に，時点 $t$ で倒産あるいは融資回収のために取引債権を除く事業資産を清算した場合の費用控除後金額を

$$L_t(Q_{it}) = (1-\delta_t)Q_{it} - K_t, \quad t = \hat{t}, T$$

と定義する．但し，$\delta_t$ は比例的倒産費用比率，$K_t$ は固定的倒産費用を表す．仮定 3 は，時点 $\hat{t}$ で金融機関が企業 $i$ の融資回収を意思決定した場合には $L_{\hat{t}}(Q_{i\hat{t}})$ を安全利子率 $\rho$ で運用し，保全された残余資産 $e^{\rho(T-\hat{t})}L_{\hat{t}}(Q_{i\hat{t}})$ を満期 $T$ において自らの融資債権を含めて分配することを意味する．

## 3.1　満期 $T$ における均衡利得の導出

時点 $\hat{t}$ において融資の継続がなされず，強制回収されたために事業を清算した企業の集合を $\mathbb{D}_{\hat{t}}$，満期時点 $T$ で倒産した企業の集合を $\mathbb{D}_T$ と書くことにする．

満期 $T$ の利得を計算するためには，相互取引による依存関係と整合的な均衡利得を導出する必要がある．そのためには，依存構造と整合的な倒産企業集合を明示しなければならない．倒産企業集合を導出するアルゴリズムは Eisenberg and Noe (2001) や Suzuki (2002)，Rogers and Veraart (2013) などで提案されている．本論文では Cont and Minca (2014) において示された以下のアルゴリズムを採用する．

仮定 4（Cont and Minca, 2014）　時点 $\hat{t}$ において融資回収方針が採られた企業の集合を $\mathbb{D}_{\hat{t}}$ とする．満期時点 $T$ における倒産企業の集合 $\mathbb{D}_T$ は以下の集合列の極限と定義する．

1. 倒産企業集合の初期値行列を $\mathbb{D}_T^{(0)} = \emptyset$ で与える[*14]．

[*14] 初期値集合を $\mathbb{D}_T^{(0)} = \emptyset$ として最終的な倒産領域と利得を計算する手法は Nishide et al. (2014) における greatest clearing payment vector に該当する．即ち，複数均衡の内で最も利得の高い均衡を導出している．逆に，$\mathbb{D}_T^{(0)} = \mathbb{N}\setminus\mathbb{D}_{\hat{t}}$ として帰納的に倒産企業を定めるアルゴリズムを用いると，最も利得の低い均衡であ

2. 倒産企業集合列 $\{\mathbb{D}_T^{(k)}\}$ と債権回収額の列 $\{\Gamma_{ij}^{(k)}\}$ を以下のように帰納的に定める．

$$\mathbb{D}_T^{(k+1)} = \left\{ i \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{D}_{\hat{t}} \,\middle|\, Q_{iT} + \sum_{j\in\mathbb{N}} \Gamma_{ij}^{(k)} < D_i + \sum_{j\in\mathbb{N}} G_{ij}^- \right\}$$

但し，$\Gamma_{ij}^{(k)}$ は $G_{ij} \leq 0$ のとき 0 で，$G_{ij} > 0$ のとき，

$$\Gamma_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \lambda_{ij} \left\{ \mathrm{e}^{\rho(T-\hat{t})} L_{\hat{t}}(Q_{j\hat{t}}) - D_j + \sum_h \Gamma_{hj}^{(k-1)} \right\}_+ & j \in \mathbb{D}_{\hat{t}} \text{のとき} \\ \lambda_{ij} \left\{ L_T(Q_{jT}) - D_j + \sum_h \Gamma_{hj}^{(k-1)} \right\}_+ & j \in \mathbb{D}_{\hat{T}}^{(k-1)} \text{のとき} \\ G_{ij} & \text{上記以外} \end{cases}$$

である．

3. $\mathbb{D}_T^{(\tilde{k}+1)} = \mathbb{D}_T^{(\tilde{k})}$ となった時点で終了し，$\mathbb{D}_T = \mathbb{D}_T^{(\tilde{k}+1)}$ および $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ij}^{(\tilde{k}+1)}$ とする．

上記アルゴリズムにおいて $\mathbb{D}_T^{(k)}$ と $\Gamma_{ij}^{(k)}$ は $k$ に関して単調な列であり，かつ $0 \leq |\mathbb{D}_T^{(k)}| \leq n$ であるから，繰り返し計算は高々 $n$ 回で収束する．

時点 $\hat{t}$ で強制回収されていない場合には，融資先企業 $i$ への融資の最終利得 (回収額) は

$$R_{iT} = 1_{\{i \notin \mathbb{D}_T\}} D_i + 1_{\{i \in \mathbb{D}_T\}} \left( L_T(Q_{iT}) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \Gamma_{ij} \right) \tag{3.1}$$

で与えられる．

## 3.2 中間時点における融資継続の意思決定

時点 $\hat{t}$ における金融機関の融資継続の意思決定問題を考える．相互依存関係のない一企業の場合と同様に，

$$A_{i\hat{t}} = \hat{\mathbb{E}}_{\hat{t}} \left[ \mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})} R_{iT} \right] \geq L_{\hat{t}}(Q_{i\hat{t}}) = (1-\delta_{\hat{t}}) Q_{i\hat{t}} - K_{i\hat{t}} \tag{3.2}$$

のとき，金融機関は融資を継続し，そうでない場合には融資を回収するものとする．条件 (3.2) の左辺は融資を継続した場合の満期利得のリスク調整後割引価値であり，右辺は時点 $\hat{t}$ で融資を強制回収した場合の回収金額を表している．

一企業の場合と異なり，時点 $\hat{t}$ における企業 $i$ への融資金継続・回収の意思決定が他社の事業資産を含めたベクトル $\{Q_{\hat{t}}\} = \{(Q_{1\hat{t}}, \ldots, Q_{n\hat{t}})\}$ に依存することに注意する．特に，

---

る least clearing payment vector が得られる．より保守的な分析が必要な場合はこちらを用いるべきである．

次節で見るように，企業 $i$ が融資先企業 $j$ との商取引において債権を有する場合 (すなわち $G_{ij} > 0$) には，時点 $\hat{t}$ における事業資産価値 $Q_{j\hat{t}}$ が $A_{i\hat{t}}$ に影響を与える．直観的な説明として，金融機関が融資先企業 $i$ の売掛債権 $G_{ij}$ を不良資産とみなした場合には中間時点においても融資を中断して債権を回収する可能性があることを意味している．

## 3.3　融資先企業が二社の場合

本論文では議論を簡単にするために融資先企業二社 ($n = 2$) の状況を考える．前節と同様に，リスク調整後の各企業の事業資産 $\{Q_{it}\}$ は (2.1) の幾何ブラウン運動に従うとする．但し，2 つのブラウン運動 $(\hat{W}_1, \hat{W}_2)$ の間の相関を $\eta$ で表す．また，一般性を失うことなく，$G_{21} \geq 0$ とすることができる．即ち，融資先企業 2 は融資先企業 1 に対して取引債権を有しているとする．

### 3.3.1　満期における倒産領域の導出

時点 $T$ で企業 1 が倒産した場合の企業 2 の債権回収額は

$$\Gamma_{21}^{T}(Q_{1T}) = \{(1-\delta_T)Q_{1T} - K_T - D_1\}_+$$

である．また，時点 $\hat{t}$ で企業 1 の融資が強制回収された場合の企業 2 の債権回収額は

$$\Gamma_{21}^{\hat{t}}(Q_{1\hat{t}}) = \{e^{\rho(T-\hat{t})}((1-\delta_{\hat{t}})Q_{1\hat{t}} - K_{\hat{t}}) - D_1\}_+ \wedge G_{21}$$

で与えられる．

ここで，$\Gamma_{21}^{T}(D_1 + G_{21}) = 0$ のとき，即ち

$$(1-\delta_T)G_{21} \leq \delta_T D_1 + K_T \tag{3.3}$$

が成り立つときには常に $\Gamma_{21}^{T} = 0$ が成立する．以下では議論の簡単化のために不等式 (3.3) が成り立つ状況を考える[*15]．このとき，仮定 4 のアルゴリズムを用いると，満期時点 $T$ における倒産領域は以下のように与えられることがわかる．

[*15] 直観的には，時点 $T$ における倒産費用が大きいために，企業 1 が倒産してしまうと劣後債務である $G_{21}$ を全く支払うことができない状況を表している．表 3 の数値設定の下では $G_{21} \ll 700/3 \approx 233$ より (3.3) が成立している．

- $\mathbb{D}_{\hat{t}} = \emptyset$ のとき

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}_T = \emptyset &\Leftrightarrow \{(Q_{1T}, Q_{2T}) \in \boldsymbol{R}_+^2 | Q_{1T} \geq D_1 + G_{21}, Q_{2T} \geq D_2 - G_{21}\} \\
\mathbb{D}_T = \{1\} &\Leftrightarrow \{(Q_{1T}, Q_{2T}) \in \boldsymbol{R}_+^2 | Q_{1T} < D_1 + G_{21}, Q_{2T} \geq D_2\} \\
\mathbb{D}_T = \{2\} &\Leftrightarrow \{(Q_{1T}, Q_{2T}) \in \boldsymbol{R}_+^2 | Q_{1T} \geq D_1 + G_{21}, Q_{2T} < D_2 - G_{21}\} \\
\mathbb{D}_T = \{1,2\} &\Leftrightarrow \{(Q_{1T}, Q_{2T}) \in \boldsymbol{R}_+^2 | Q_{1T} < D_1 + G_{21}, Q_{2T} < D_2\}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

- $\mathbb{D}_{\hat{t}} = \{1\}$ のとき

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}_T = \emptyset \quad &\Leftrightarrow \quad \{Q_{2T} \in \boldsymbol{R}_+^1 | Q_{2T} + \Gamma_{21}^{\hat{t}}(Q_{1\hat{t}}) \geq D_2\} \\
\mathbb{D}_T = \{2\} \quad &\Leftrightarrow \quad \{Q_{2T} \in \boldsymbol{R}_+^1 | Q_{2T} + \Gamma_{21}^{\hat{t}}(Q_{1\hat{t}}) < D_2\}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

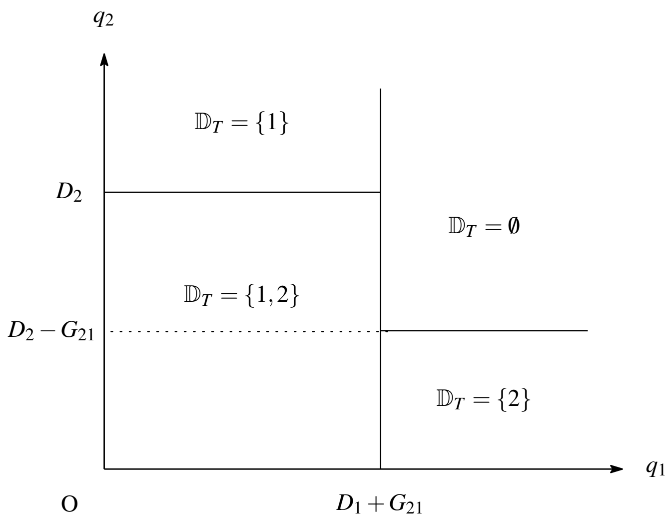
- $\mathbb{D}_{\hat{t}} = \{2\}$ のとき

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}_T = \emptyset \quad &\Leftrightarrow \quad \{Q_{1T} \in \boldsymbol{R}_+^1 | Q_{1T} \geq D_1 + G_{21}\} \\
\mathbb{D}_T = \{1\} \quad &\Leftrightarrow \quad \{Q_{1T} \in \boldsymbol{R}_+^1 | Q_{1T} < D_1 + G_{21}\}
\end{aligned}
$$

- $\mathbb{D}_{\hat{t}} = \{1,2\}$ のとき，明らかに $\mathbb{D}_T = \emptyset$ である．

中間時点 $\hat{t}$ において両企業とも融資が継続された条件の下での満期 $T$ における生存・倒産領域を直交座標を用いて表すと図 10 のようになる．

図 10　$\mathbb{D}_{\hat{t}} = \emptyset$ の場合の満期時点 $T$ での倒産領域




相互取引で債務を有する融資先企業の倒産領域は変化がない ($B_{1T} = D_1 + G_{21}$) が，債権を有する企業の倒産領域は相手方の倒産事象によって閾値が異なる ($B_{2T} = D_2 - G_{21}$ あるいは $D_2$)．

上の図からわかるように，相互取引の存在によって債務を有する融資先企業の倒産領域は変化がないが，債権を有する企業の倒産領域は相手方企業の倒産事象に応じて閾値が異なる．

最後に，$\mathbb{D}_{\hat{t}} = \emptyset$ として，満期 $T$ における各領域でのそれぞれの企業への融資回収額を導出する．利得関数 (3.1) を 2 企業の場合に適用すると，以下を得る．

1. $\mathbb{D}_T = \emptyset$ の時：
$$R_{1T} = D_1, \quad R_{2T} = D_2$$
2. $\mathbb{D}_T = \{1\}$ の時：
$$R_{1T} = (1-\delta_T)Q_{1T} - K_T, \quad R_{2T} = D_2$$
3. $\mathbb{D}_T = \{2\}$ の時：
$$R_{1T} = D_1, \quad R_{2T} = (1-\delta_T)Q_{2T} + G_{21} - K_T$$
4. $\mathbb{D}_T = \{1,2\}$ の時：
$$R_{1T} = (1-\delta_T)Q_{1T} - K_T, \quad R_{2T} = (1-\delta_T)Q_{2T} - K_T$$

以上の結果を用いて中間時点での意思決定問題と融資実行時点における信用スプレッドの設定問題を考える．

### 3.3.2　取引債務を有する融資先企業の融資継続問題

倒産領域とそれぞれの領域での融資の利得 (回収額) からわかるように，取引債務を有する企業 1 の問題は基本的に前節での結果をそのまま援用することができる．但し，倒産閾値が $B_{1T} = D_1 + G_{21}$ であることに注意する．即ち，時点 $\hat{t}$ における融資継続の価値は，第 2 節の表記を用いて

$$\begin{aligned}
A_{1\hat{t}} =& \mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})} D_1 \Phi_1\left(d^-_{1,T-\hat{t}}(Q_{1\hat{t}}; D_1+G_{21})\right) \\
&+ (1-\delta_T)Q_{1\hat{t}}\Phi_1(-d^+_{1,T-\hat{t}}(Q_{1\hat{t}}; D_1+G_{21})) \\
&- \mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})} K_T \Phi_1\left(-d^-_{1,T-\hat{t}}(Q_{1\hat{t}}; D_1+G_{21})\right)
\end{aligned}$$

と書くことができる．したがって，融資継続の意思決定は (2.3) と同様の非線形方程式 $\hat{\psi}_1(b; D_1+G_{21}) = 0$ の解 $\hat{b}_{1\hat{t}}(D_1+G_{21})$ に対して

$$\begin{array}{lcc}
Q_{1\hat{t}} \geq \hat{b}_{1\hat{t}}(D_1+G_{21}) & \Leftrightarrow & \text{融資継続} \\
Q_{1\hat{t}} < \hat{b}_{1\hat{t}}(D_1+G_{21}) & \Leftrightarrow & \text{融資回収・回収}
\end{array}$$

と書くことができる．

### 3.3.3　取引債権を有する融資先企業の融資継続問題

次に，融資先企業 2 に対する時点 $\hat{t}$ での意思決定問題を考える．融資先企業 2 への融資金の価値評価は，企業 1 の融資継続判断によって異なる．それぞれの場合に応じて，企業 2 の融資継続・回収の条件を導出する．

**■融資先企業 1 が時点 $\hat{t}$ で回収方針となった場合**　このとき，満期 $T$ における融資先企業 2 の倒産領域は，時点 $\hat{t}$ で確定的となる．即ち，3.5 より，$B_{2T} = D_2 - \Gamma_{21}^{\hat{t}}(Q_{1\hat{t}})$ として，第 2 節における一企業の問題がそのまま適用される．したがって，時点 $\hat{t}$ における企業 2 への融資の継続価値は

$$\begin{aligned} A_{2\hat{t}} =& \mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})} D_2 \Phi_1 \left( d_{2,T-\hat{t}}^{-}(Q_{2\hat{t}}; D_2 - \Gamma_{21}^{\hat{t}}(Q_{1\hat{t}})) \right) \\ & + (1-\delta_T) Q_{2\hat{t}} \Phi_1 (-d_{2,T-\hat{t}}^{+}(Q_{2\hat{t}}; D_2 - \Gamma_{21}^{\hat{t}}(Q_{1\hat{t}})) \\ & - \mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})} K_T \Phi_1 \left( -d_{2,T-\hat{t}}^{-}(Q_{2\hat{t}}; D_2 - \Gamma_{21}^{\hat{t}}(Q_{1\hat{t}})) \right) \end{aligned}$$

となる．また，企業 2 への融資継続の意思決定は (2.3) と同様の非線形方程式 $\hat{\psi}_2(b; D_2 - \Gamma_{21}^{\hat{t}}(Q_{1\hat{t}})) = 0$ の解 $\hat{b}_{2\hat{t}}$ に対して

$$\begin{array}{lcc} Q_{2\hat{t}} \geq \hat{b}_{2\hat{t}}(D_2 - \Gamma_{21}^{\hat{t}}(Q_{1\hat{t}})) & \Leftrightarrow & \text{融資継続} \\ Q_{2\hat{t}} < \hat{b}_{2\hat{t}}(D_2 - \Gamma_{21}^{\hat{t}}(Q_{1\hat{t}})) & \Leftrightarrow & \text{融資回収・回収} \end{array}$$

と表現される．ここで，$\Gamma_{21}^{\hat{t}}(Q_{1\hat{t}})$ は時点 $\hat{t}$ で確定値であり，企業 2 の状態とは無関係に定まることに注意する．

**■融資先企業 1 が時点 $\hat{t}$ で継続方針となった場合**　次に企業 1 が時点 $\hat{t}$ で継続方針となった場合を考える．式 (3.4) から分かるように，この場合には満期 $T$ における企業 2 自らの事業資産価値 $Q_{2T}$ だけでなく，取引債権の相手方である企業 1 の事業価値 $Q_{1T}$ の実現値にも依存する．

先ほど導出した倒産領域と融資回収額の関係から，継続価値 $A_{2\hat{t}}$ は以下の式で与えられることがわかる．

$$\begin{aligned} & A_{2\hat{t}}(Q_{1\hat{t}}, Q_{2\hat{t}}) \\ =& \mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})} \hat{\mathbb{E}}_{\hat{t}} \Big[ 1_{\{\mathbb{D}_T=\emptyset\} \cup \{\mathbb{D}_T=\{1\}\}} D_2 + 1_{\{\mathbb{D}_T=\{2\}\}} \{(1-\delta_T) Q_{2T} + G_{21} - K_T\} \\ & \qquad + 1_{\{\mathbb{D}_T=\{1,2\}\}} \{(1-\delta_T) Q_{2T} - K_T\} \Big] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})}D_2\left(\hat{\mathbb{P}}_{\hat{t}}\{Q_{1T}\geq D_1+G_{21},Q_{2T}\geq D_2-G_{21}\}\right.\\
&\qquad\left.+\hat{\mathbb{P}}_{\hat{t}}\{Q_{1T}<D_1+G_{21},Q_{2T}\geq D_2\}\right)\\
&+(1-\delta_T)Q_{2\hat{t}}\left(\tilde{\mathbb{P}}^2_{\hat{t}}\{Q_{1T}\geq D_1+G_{21},Q_{2T}<D_2-G_{21}\}\right.\\
&\qquad\left.+\tilde{\mathbb{P}}^2_{\hat{t}}\{Q_{1T}<D_1+G_{21},Q_{2T}<D_2\}\right)\\
&-\mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})}K_T\left(\hat{\mathbb{P}}_{\hat{t}}\{Q_{1T}\geq D_1+G_{21},Q_{2T}<D_2-G_{21}\}\right.\\
&\qquad\left.+\hat{\mathbb{P}}_{\hat{t}}\{Q_{1T}<D_1+G_{21},Q_{2T}<D_2\}\right)\\
&+\mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})}G_{21}\hat{\mathbb{P}}_{\hat{t}}\{Q_{1T}\geq D_1+G_{21},Q_{2T}<D_2-G_{21}\}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

但し，$\tilde{\mathbb{P}}^2$ は以下で定義される確率測度である[16]．

$$
\tilde{\mathbb{P}}^2(A)=\hat{\mathbb{E}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\rho T}Q_{2T}}{Q_{20}}1_A\right]
$$

前節までと同様の計算によって，(3.6) は最終的に

$$
\begin{aligned}
&A_{2\hat{t}}(Q_{1\hat{t}},Q_{2\hat{t}})\\
=&\mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})}D_2\left[\Phi_2\left(d^-_{1,T-\hat{t}}(Q_{1\hat{t}};D_1+G_{21}),d^-_{2,T-\hat{t}}(Q_{2\hat{t}};D_2-G_{21});\eta\right)\right.\\
&\qquad\left.+\Phi_2\left(-d^-_{1,T-\hat{t}}(Q_{1\hat{t}};D_1+G_{21}),d^-_{2,T-\hat{t}}(Q_{2\hat{t}};D_2);-\eta\right)\right]\\
&+(1-\delta_T)Q_{2t}\left[\Phi_2\left(d^\eta_{1,T-\hat{t}}(Q_{1\hat{t}};D_1+G_{21}),-d^+_{2,T-\hat{t}}(Q_{2\hat{t}};D_2-G_{21});-\eta\right)\right.\\
&\qquad\left.+\Phi_2\left(-d^\eta_{1,T-\hat{t}}(Q_{1\hat{t}};D_1+G_{21}),-d^+_{2,T-\hat{t}}(Q_{2\hat{t}};D_2);\eta\right)\right]\\
&-\mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})}K_T\left[\Phi_2\left(d^-_{1,T-\hat{t}}(Q_{1\hat{t}};D_1+G_{21}),-d^-_{2,T-\hat{t}}(Q_{2\hat{t}};D_2-G_{21});-\eta\right)\right.\\
&\qquad\left.+\Phi_2\left(-d^-_{1,T-\hat{t}}(Q_{1\hat{t}};D_1+G_{21}),-d^-_{2,T-\hat{t}}(Q_{2\hat{t}};D_2);\eta\right)\right]\\
&+\mathrm{e}^{-\rho(T-\hat{t})}G_{21}\Phi_2\left(d^-_{1,T-\hat{t}}(Q_{1\hat{t}};D_1+G_{21}),-d^-_{2,T-\hat{t}}(Q_{2\hat{t}};D_2-G_{21});-\eta\right)
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

であることが分かる[17]．但し，

$$
d^\eta_{1,t}(Q;B)=\frac{\log\left(\frac{Q}{B}\right)+\left(\rho-\frac{\sigma_i^2(1-2\eta)}{2}\right)t}{\sigma_i\sqrt{t}}
$$

である．

---

[16] いわゆる Black-Scholes モデルの第 1 項に相当し，原資産価格過程 $P$ のノックインオプションの利得

$$1_{\{P\geq K\}}P$$

などを評価するときに用いる確率測度である．

[17] 条件式 (3.3) が成立しない場合には解析的な表現ができない．

以上の議論から時点 $\hat{t}$ における融資先企業 2 への融資継続可否の判断は (3.7) で得られる $A_{2\hat{t}}$ と融資中断によって回収される金額との差額である

$$\hat{\varphi}_2(Q_{1\hat{t}}, Q_{2\hat{t}}) = A_{2\hat{t}}(Q_{1\hat{t}}, Q_{2\hat{t}}) - L_{\hat{t}}(Q_{2\hat{t}})$$

の符号によって判断されることになる．ここで，(3.7) は $Q_{2\hat{t}}$ だけでなく $Q_{1\hat{t}}$ にも依存していることに注意する．言い換えると，企業 2 にとって取引債権の相手先である企業 1 の事業資産価値 $Q_{1\hat{t}}$ の価値が低い場合には，その債権額 $G_{21}$ が不良資産とみなされて減額されるために，結果的に中間評価の時点で融資金の回収が行われる可能性があることを意味している．

以上を踏まえると，時点 $\hat{t}$ における二企業の融資継続の意思決定は以下のように定式化できる．

1. 以下の条件式を用いて取引債務を有する企業 1 の融資を継続するかどうかの意思決定をする．即ち，

   $$\hat{\psi}_1(Q_{1\hat{t}}; D_1 + G_{21}) \geq 0$$

   のとき融資を継続し，そうでない場合には回収する．
2. 手順 1 で企業 1 の融資が回収された場合 ($\psi_1(Q_{1\hat{t}}; D_1 + G_{21}) < 0$ のとき)：
   以下の条件を用いて取引債務を有する企業 2 の融資を継続するかどうかの意思決定をする．
   (i) $\hat{\psi}_2(Q_{2\hat{t}}; D_2 - \Gamma^{\hat{t}}_{21}(Q_{1\hat{t}})) \geq 0$ のとき，企業 2 の融資は継続する．したがって，$\mathbb{D}_{\hat{t}} = \{1\}$ である．
   (ii) $\hat{\psi}_2(Q_{2\hat{t}}; D_2 - \Gamma^{\hat{t}}_{21}(Q_{1\hat{t}})) < 0$ のとき，企業 2 の融資は回収される．したがって，$\mathbb{D}_{\hat{t}} = \{1, 2\}$ である．
3. 手順 1 で企業 1 の融資が継続された場合 ($\hat{\psi}_1(Q_{1\hat{t}}; D_1 + G_{21}) \geq 0$ のとき)：
   以下の条件を用いて取引債務を有する企業 2 の融資を継続するかどうかの意思決定をする．
   (i) $\hat{\varphi}_2(Q_{1\hat{t}}, Q_{2\hat{t}}) \geq 0$ のとき，企業 2 の融資は継続する．したがって，$\mathbb{D}_{\hat{t}} = \emptyset$ である．
   (ii) $\hat{\varphi}_2(Q_{1\hat{t}}, Q_{2\hat{t}}) < 0$ のとき，企業 2 の融資は回収される．したがって，$\mathbb{D}_{\hat{t}} = \{2\}$ である．

### 3.3.4 時点 0 における価値評価

取引債務を負っている融資先企業 1 の融資に対する価値は，上の議論でもわかるように企業 2 の事業資産価値と独立に定まる．従って，時点 0 における融資金価値 $P_1$ は命題 1 の表記を用いて

$$
\begin{aligned}
P_1 =& \mathrm{e}^{-\rho T} D_1 \Phi_2 \left( d_{1\hat{t}}^{-}(q_1; \hat{b}_{1\hat{t}}(D_1 + G_{21})), d_{1T}^{-}(q_1; D_1 + G_{21}); \kappa \right) \\
&+ (1-\delta_T) q_1 \Phi_2 \left( d_{1\hat{t}}^{+}(q_1; \hat{b}_{i\hat{t}}(D_1 + G_{21})), -d_{1T}^{+}(q_1; D_1 + G_{21}); -\kappa \right) \\
&- \mathrm{e}^{-\rho T} K_T \Phi_2 \left( d_{1\hat{t}}^{-}(q_1; \hat{b}_{1\hat{t}}(D_1 + G_{21}), -d_{1T}^{-}(q_1; D_1 + G_{21}); -\kappa \right) \\
&+ (1-\delta_{\hat{t}}) q_1 \Phi_1 \left( -d_{1\hat{t}}^{+}(q_1; \hat{b}_{1\hat{t}}(D_1 + G_{21})) \right) \\
&- \mathrm{e}^{-\rho \hat{t}} K_{\hat{t}} \Phi_1 \left( -d_{1\hat{t}}^{-}(q_1; \hat{b}_{1\hat{t}}(D_1 + G_{21})) \right)
\end{aligned}
$$

で与えられる．但し，$q_i = Q_{i0}$ である．

一方，融資先企業 2 の時点 0 における融資価値は

$$
P_2 = \mathrm{e}^{-\rho \hat{t}} \hat{\mathbb{E}}_0 \left[ 1_{\{\hat{\varphi}_2(Q_{1\hat{t}}, Q_{2\hat{T}}) \geq 0)\}} A_{2\hat{t}}(Q_{1\hat{t}}, Q_{2\hat{t}}) + 1_{\{\hat{\varphi}_2(Q_{1\hat{t}}, Q_{2\hat{T}}) < 0\}} L_{\hat{t}}(Q_{2\hat{t}}) \right]
$$

を計算することで得られる．但し，企業 2 の倒産条件を規定する方程式

$$
\hat{\varphi}_2(Q_{1\hat{t}}, Q_{2\hat{t}}) = A_{2\hat{t}}(Q_{1\hat{t}}, Q_{2\hat{t}}) - L_{\hat{t}}(Q_{2\hat{t}})
$$

は非線形方程式で解析的表現ができない．したがって，本論文では $P_2$ についてはモンテカルロシミュレーションによって数値解を求めた上で，その性質について考察する．

# 4 数値分析

本節では数値例を用いて，融資先二企業間の取引債権債務関係が中間時点 $\hat{t}$ における融資継続問題や融資実行時点における信用スプレッド評価にどのような影響を与えるのかを分析する．

本数値分析において特に明記がない場合には事業資産間の相関係数を $\eta = 0.3$ とし，取引相互取引額を $G_{21} = 20$ と設定する．その他の係数については表 3 と同一の値を用いる．但し，$i = 1,2$ である．また，企業の貸借対照表上の資産価値を合わせるために時点 0 において取引債権を有する企業 2 の資産は $Q_{20} + G_{21} = 180$ で固定する．即ち，$G_{21} = 10$ のときには $q_2 = Q_{20} = 170$ などとする[*18]．

[*18] この設定では常に $\Gamma_{21}^{\hat{t}} = 0$ も成り立つことが数値計算によって確かめることができる．

これまでの議論からわかるように，企業 1 の中間審査における融資継続閾値や実行時点での信用スプレッドについては，満期時点の倒産閾値を $D_1 + G_{21}$ として第 2 節の結果をそのまま適用できる．以下の議論では企業 1 に対する分析は省略し，企業 2 に対する融資について特筆すべき結果を与えている数値分析のみを示すことで，結果の新奇性や得られる示唆を明確にすることを目指す．

数値分析による結果を簡単にまとめると以下の通りである．

第一に，相互取引はそれぞれの企業の信用評価に影響を与える．特に，倒産閾値が直接的に上昇する相互取引の債務者だけでなく，債権を有する企業に対しても無視し得ない影響があることが示される．さらに，債権を持つ企業の初期時点の信用スプレッドの設定にあたっては，多くのパラメータが無視しえない影響を与えるので，適切な評価が必要となることがわかる．信用評価の際に注意すべき点として，取引債権は (1) 資産分散効果 (2) 倒産閾値の上昇効果，の 2 つの相異なる効果があるため，債権者の信用スプレッドは当該債権額に対して非単調の関係にある，という事実を挙げることができる．

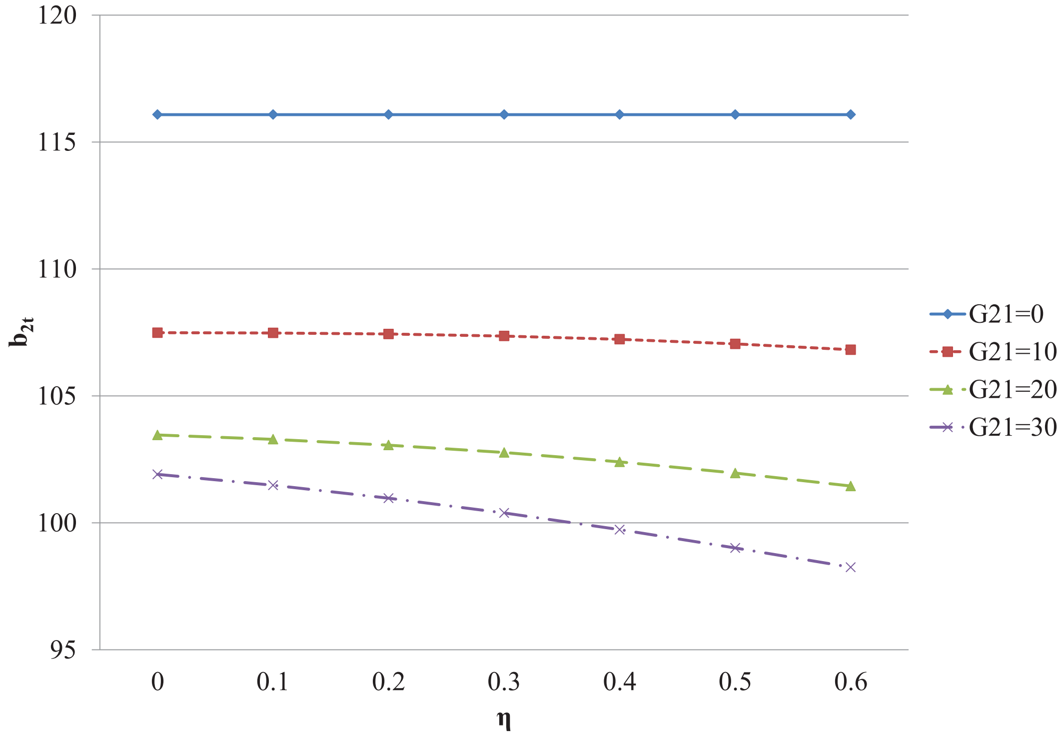
第二に，中間審査が融資の信用リスクを低減させる効果があるという点である．企業の信用状況が良くない場合に有効であることは第 2 でも得られた結果である．即ち，融資回収というオプション価値が信用スプレッドの低減をもたらすことがその理由である．しかしながら，事業資産の相関や相互取引額の大きさによって低減効果は企業の信用力などパラメータ設定によって異なる．

以上のことから，金融機関が取引債権企業の融資継続・回収方針や信用スプレッドを決定するにあたっては，対象企業の信用力だけでなく，その企業が持つ債権の評価を適切に行うことが重要であることがわかる．

## 4.1 中間評価時点における取引債権企業への融資継続・回収方針の決定

まず，相互取引よる債権を有している企業 2 に対する中間審査での融資継続・回収方針について分析する．図 11 は，事業資産間の相関係数 $\eta$ が企業 2 の融資に対する融資継続閾値 $\hat{b}_{2\hat{t}}$ に与える影響を示している．但し，$\mathbb{D}_{\hat{t}} = \emptyset$ および $Q_{1\hat{t}} = 180$ と置いている．

図 11　事業資産の相関係数 $\eta$ に対する取引債権企業の融資継続閾値 $\hat{b}_{2\hat{t}}$ の感応度




基本設定の下では債権を有する企業の融資方針に相関係数 $\eta$ はほとんど影響を与えないことを上の図は示している．一般的には，企業間の (債権債務関係を除いた) 事業資産の相関が高ければ，企業 2 の業況が悪化 ($Q_2$ が下落) した時には企業 1 の事業資産も下がる傾向にある．したがって，企業 2 が受け取る取引債権 $G_{21}$ が不良資産化して倒産確率が高くなることが予想されるが，$Q_{1\hat{t}} = 180 \gg B_{1T} = 100$ の設定 (満期時点の倒産閾値に比べて中間時点の事業資産価値が十分高い) ではそのような効果が数値計算上はほとんどないことを示している．

図 12 は，債権の相手先企業である企業 1 の資産価値水準が，中間時点 $\hat{t}$ における企業 2 の融資回収閾値 $\hat{b}_{2\hat{t}}$ に与える影響について図示している．

図 12　取引債務企業の中間時点 $\hat{t}$ における資産価値 $Q_{1\hat{t}}$ に対する取引債権企業の融資継続閾値 $\hat{b}_{2\hat{t}}$ の感応度

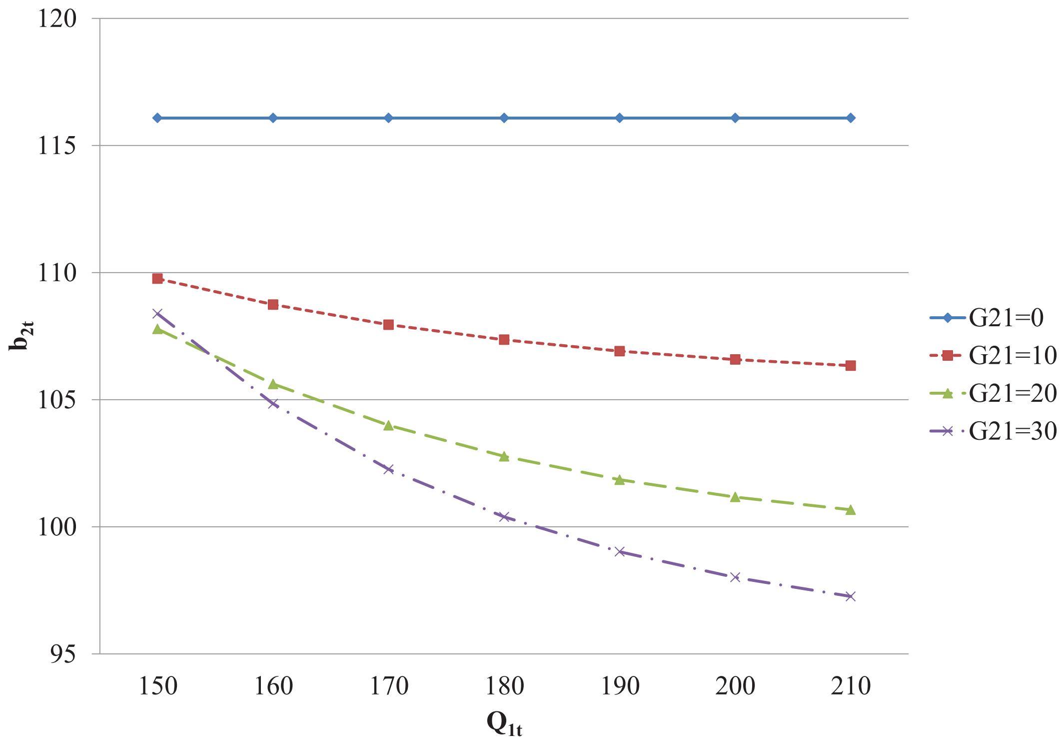



図 12 からわかるように，債権の相手企業の中間時点資産水準 $Q_{1\hat{t}}$ が上昇すると金融機関は企業 2 に対して融資回収条件を緩和することができる．これは，直感的にもほぼ明らかである．ここで注目すべきは，$Q_{1\hat{t}} = 150$ の下では相互取引額 $G_{21}$ に関して中間時点の融資継続閾値 $b_{2\hat{t}}$ が必ずしも単調ではない事実である．この結果に対しては，取引債権先の信用力が低い状況では売掛債権 $G_{21}$ が不良資産と評価できるために融資継続閾値を高く設定する必要があると解釈することができる．

相互取引額の非単調的効果を確認するために，中間審査時点において取引債務を有する企業 1 の信用力が極端に低い状況での相関係数 $\eta$ の影響を見る．図 13 では，$Q_{1\hat{t}} = 120$ として計算している．

図 13　事業資産の相関係数 $\eta$ に対する取引債権企業の融資継続閾値 $\hat{b}_{2\hat{t}}$ の感応度 (取引債務先企業の信用力が極端に低い場合)

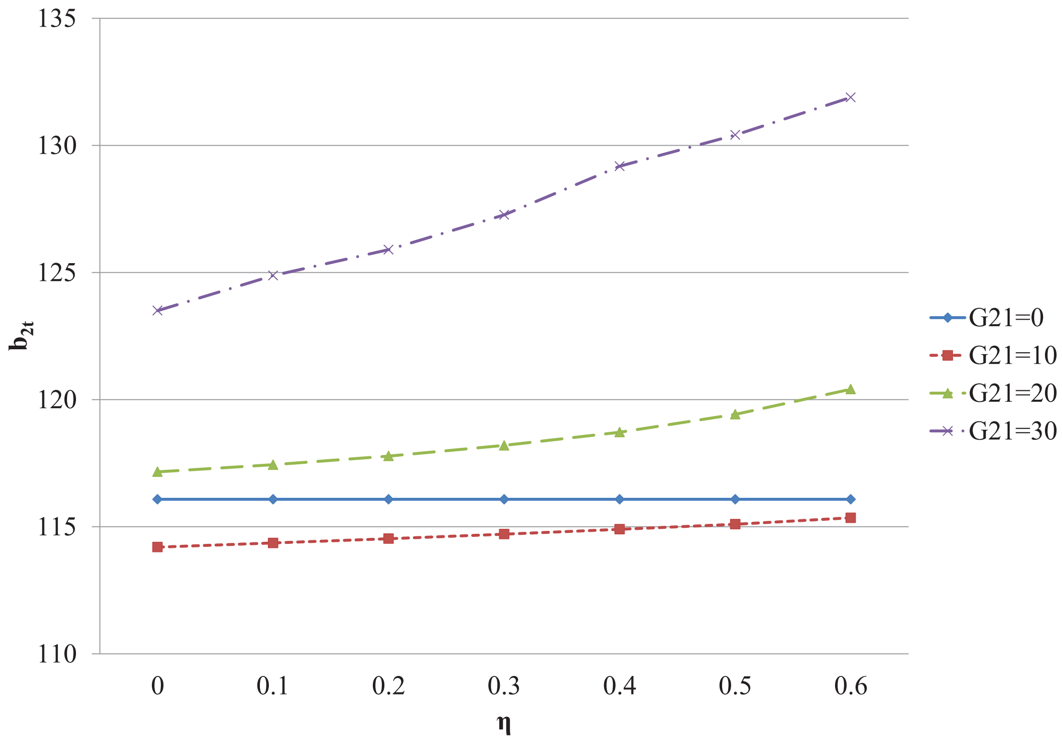


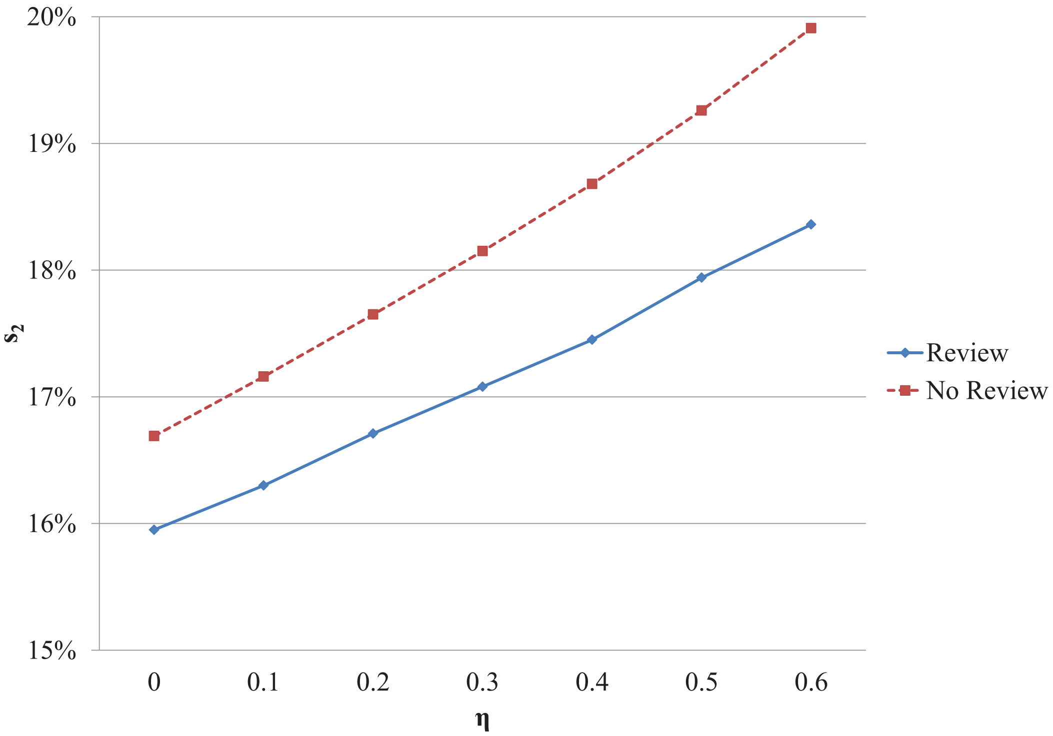

図 11 の場合とは違って，上記の分析では融資継続閾値 $\hat{b}_{2\hat{t}}$ は相関係数 $\eta$ に関して単調増加な関係であることがわかる．この事実に対しては以下のような解釈が可能である．いま，時点 $\hat{t}$ における企業 1 の事業資産 $Q_{1\hat{t}}$ が低い値を取り，相関係数 $\eta$ が正の値である設定を考える．満期での企業 2 の資産価値 $Q_{2T}$ が下落する場合には，満期における企業 1 の事業資産が同時に下落し，$Q_{1T}$ が倒産閾値を下回る事象が高い確率で生じる．このとき，企業 2 は相互取引による債権を全額回収できなくなり (即ち $\Gamma_{21} < G_{21}$)，企業 2 の信用力がさらに悪化することになる．この傾向は $\eta$ の値が大きくなればなるほど強くなり，取引債権 $G_{21}$ に対してより厳格にな資産評価が必要となる．結果として，$\eta$ が高くなるに従って融資継続閾値を高く設定することを意味している．また，図 12 における $Q_{1t} = 150$ の場合と同様に，図 13 では全ての $\eta$ において，相互取引額 $G_{21}$ に関して融資継続閾値 $b_{\hat{t}}$ が非単調となっている．即ち，$G_{21}$ の限界的な増加は，$G_{21}$ が低水準の場合 (この数値例では $G_{21}$ が 10 以下) に融資継続閾値を下落させるが，$G_{21}$ が高水準の場合 (この数値例では $G_{21}$ が 10 以上) に融資継続閾値を上昇させる．この事実の解釈については後に詳しく

議論する．

## 4.2　取引債権企業への融資実行時点での信用スプレッド

ここでは，債権を持つ企業 2 の信用スプレッド $\hat{s}_2$ に相互依存関係が与える影響について考察する．図 14 では，企業の事業資産過程 $Q_1$ と $Q_2$ の相関係数 $\eta$ が取引債権を持つ企業 2 の信用スプレッド $\hat{s}_2$ に与える影響を示している．

図 14　事業資産の相関係数 $\eta$ に対する取引債権企業の信用スプレッド $\hat{s}_2$ の感応度

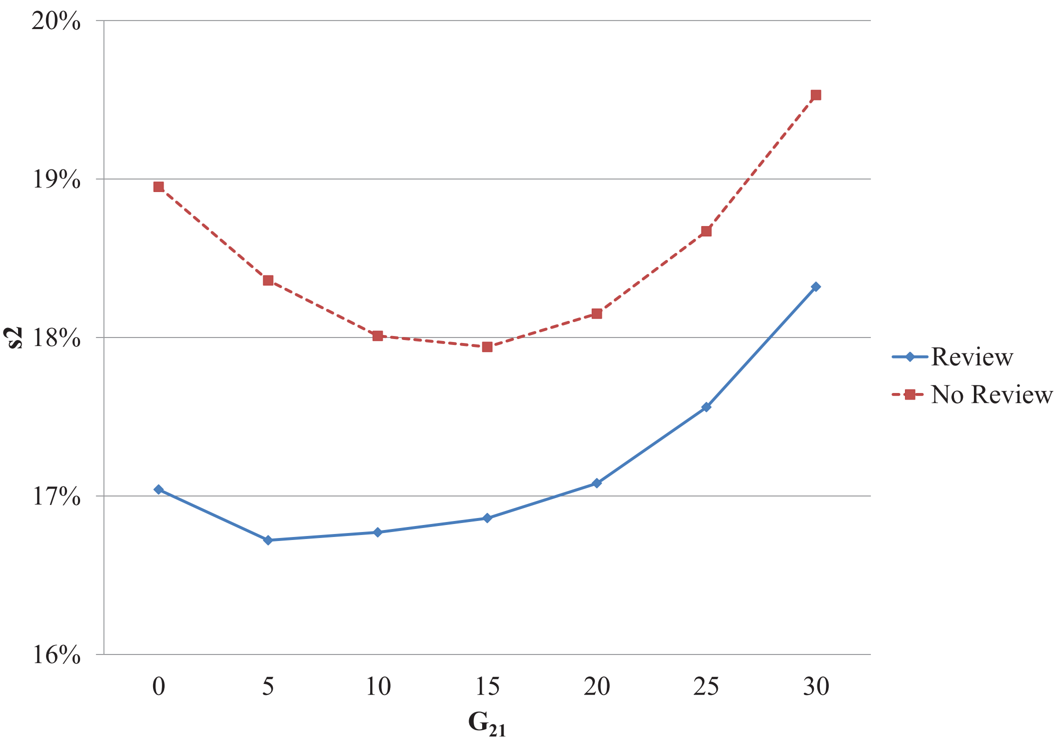



二社の事業資産過程の相関が高くなると，取引債権を持つ企業の信用スプレッドは上昇することが観察される．これは，以下のような理由付けが可能である．事業資産間の相関が高い場合には，満期における企業 2 の業績が悪い ($Q_{2T}$ が低い) 状況の下で企業 1 の事業資産 $Q_{1T}$ が低くなる傾向にある．即ち，企業 2 の業績が悪化した場合に，企業 1 から本来受け取るべき取引債権 $G_{21}$ を受け取ることができない確率が高まることを意味し，結果として信用スプレッドが高まる．言い換えると，高い相関係数の下では二社の同時倒産確率が高く，取引債権を有する企業の持つ債権が低く評価されてしまい，結果として金融

機関は高い信用スプレッドを設定する必要が生じるのである．

図 15 では企業間の相互取引額 $G_{21}$ が取引債権を持つ企業 2 の信用スプレッド $\hat{s}_2$ に与える影響を示している．

図 15　相互取引額 $G_{21}$ に対する取引債権企業の信用スプレッド $\hat{s}_2$ の感応度




企業間の相互取引額 $G_{21}$ は企業 2 の信用スプレッドに対して非単調な (谷型の) 関係にある．即ち，相互取引額 $G_{21}$ が一定額以下の状況ではその限界的増加は企業 2 の信用スプレッドを低減させる効果があるが，一定額以上になると $G_{21}$ の限界的増加が逆に信用スプレッドを高めることになる．この結果は図 13 とも整合的である．

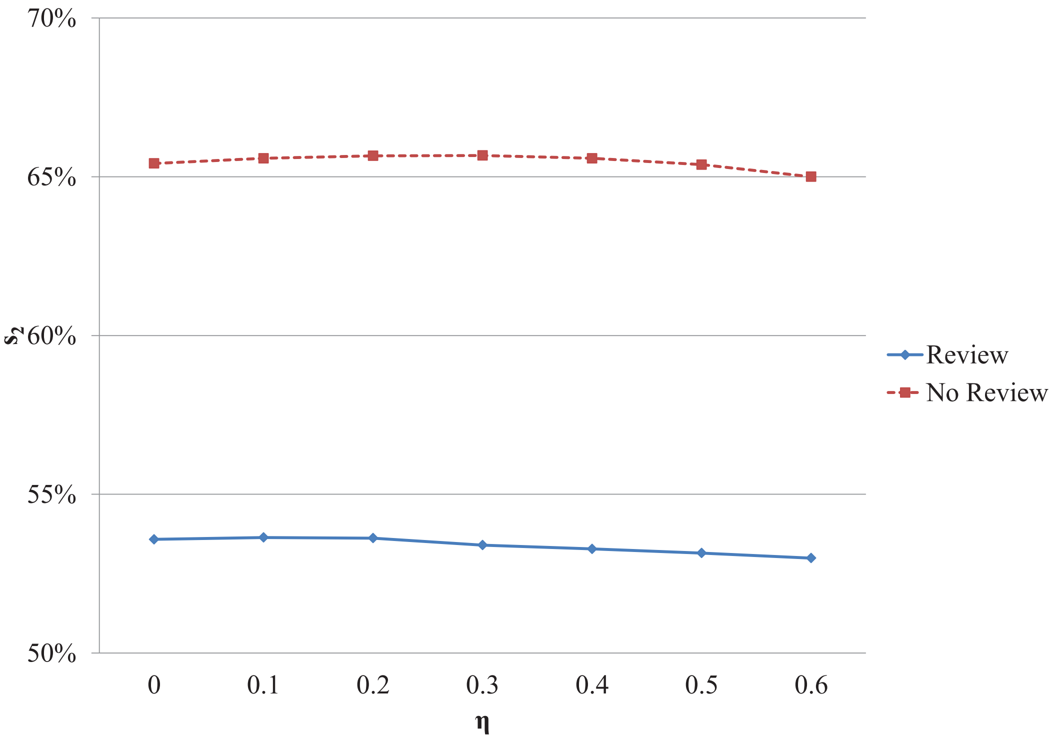
相互取引額と信用スプレッドの谷型の関係については以下のような解釈を与えることができる．満期における企業 2 の総資産は $Q_{2T}+\Gamma_{21}^{T}$ と分解できる．相互取引額 $G_{21}$ が小さい時には，その限界的増加によって資産の分散効果が働いて企業 2 の信用スプレッドは低く設定される．さらに相互取引額が大きくなると，企業 1 の倒産閾値が高くなることで同社の倒産確率が上昇することから，$\Gamma_{21}^{T}$ の現在価値が下落し，結果として金融機関は企業 2 の信用スプレッド $\hat{s}_2$ を高く設定することになる．

また，分散効果が最も大きくなる $G_{21}$ の水準 (曲線の最も低い点) が中間審査の有無に

よって異なることにも注意が必要である．中間審査を実施する場合には，企業 2 の事業資産 $Q_2$ と取引債権 $G_{21}$ の両方の資産価値を中間時点で評価できることになり，時点 0 における 2 つの資産の分散効果を考慮する必要性が相対的に低くなる．なぜならば，中間審査を実施しない場合には融資実施から満期までの期間におけるリスクが相互取引を通じて分散されるのに対し，中間審査を実施する場合には中間審査から満期までの期間に対するリスクが分散されないために分散効果が限定的になることによる．

次に，$q_2 = Q_{20} = 120$，即ち取引債権を持つ企業 2 の初期時点における信用力が極端に低い状況を想定して，本モデルの特徴を表す幾つかの数値結果を示す．図 16 では，$q_2$ が低い状況の下で $\eta$ が信用スプレッド $\hat{s}_2$ に与える影響を表している．

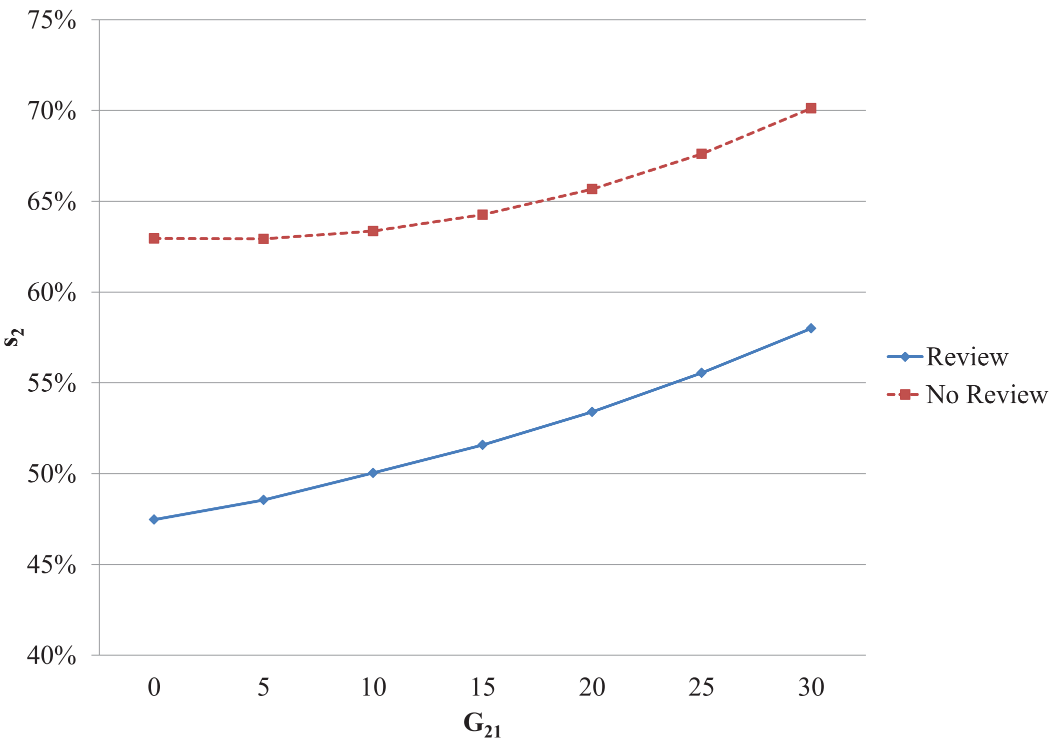
図 16　相互取引額 $G_{21}$ に対する取引債権企業の信用スプレッド $\hat{s}_2$ の感応度 (取引債務先企業の信用力が極端に低い場合)




基本設定の場合と異なり $\eta$ は $\hat{s}_2$ について非単調な (山型の) 関係であることを見て取ることができる．この結果の直観的説明は図 15(基本設定における $G_{21}$ の影響) と同様の説明が可能である．即ち，取引債権は債権者である企業 2 に対して 2 つの異なる効果を持つことから，$\eta$ が必ずしも一方向に影響を与える訳ではないと理解できる．

最後に，初期時点における企業 2 の信用力が極端に低い状況の下で相互取引額 $G_{21}$ が信用スプレッド $\hat{s}_2$ に与える影響について図 17 によって分析する．

図 17　相互取引額 $G_{21}$ に対する取引債権企業の信用スプレッド $\hat{s}_2$ の感応度 (取引債務先企業の信用力が極端に低い場合)




中間審査がない状況の下では，図 15 と同様に企業 2 の信用力が低い場合でも $G_{21}$ は信用スプレッドに対して谷型の非単調な関係にあるのに対して，中間審査を行う状況では信用スプレッドは $G_{21}$ に関して単調増加であることがわかる．図 15 でも述べたように，中間審査によって，相互取引による資産の分散効果が信用リスクに与える (正の) 影響度を考慮する必要性が相対的に低くなる．初期時点の信用力が低い場合には相互取引の負の影響が大きくなり，結果として $\hat{s}_2$ は $G_{21}$ に対して単調な関係になるとの解釈が可能である．

## 5　結論

本論文では，金融機関の融資先企業の間で相互に取引を行っている状況下において，その相互依存関係を考慮した与信判断のあり方について議論した．

主たる結果は以下の通りである．第一として，債権・債務構造によって融資先企業間に相互依存関係が存在する場合には，当該依存関係が債権者・債務者ともに与信判断・信用リスクの評価に無視しえない影響を与える．特に，相互取引に伴う債権額が債権者の信用リスクに与える影響は非単調であることが示される．これは，相互取引に伴う債権が，分散投資効果という正の影響と，同時倒産リスクの増加という負の影響の 2 つの異なる効果を持ち，その大小関係を考慮して最終的な信用リスクを評価する必要性があるからである．

第二の主たる結果は，中間審査によって初期時点での融資の信用リスクを下げる効果があるという示唆である．この結果は，特に初期時点において企業の信用力が低い場合に顕著である．この事実に対しては，満期時点の倒産による期待損失を中間審査による融資回収のオプションによって低減できるという説明が可能である．

数値分析では簡単化のために二社のみの相互取引を仮定し，取引債権企業と取引債務企業への与信判断についての結果を示した．しかしながら，実務上に応用していくためには債権と債務の両方をお互いに持つような複雑な依存関係の下での融資評価と与信判断について議論する必要があろう．また，商取引の依存関係だけでなく株式の持ち合いなど証券保有に関わる相互依存関係が与信判断に与える影響についても重要な研究対象である．これらについては今後の課題としたい．

# 付録 A　命題 1 の証明

定義より $P_i$ は

$$\begin{aligned}P_i =&\hat{\mathbb{E}}_0\left[1_{\{Q_{i\hat{t}}\geq\hat{b}_{i\hat{t}}\}}\mathrm{e}^{-\rho T}D_i\Phi_1\left(d^-_{i,T-\hat{t}}(Q_{i\hat{t}})\right)\right]\\&+\hat{\mathbb{E}}_0\left[1_{\{Q_{i\hat{t}}\geq\hat{b}_{i\hat{t}}\}}\mathrm{e}^{-\rho\hat{t}}(1-\delta_T)Q_{i\hat{t}}\Phi_1\left(-d^+_{i,T-\hat{t}}(Q_{i\hat{t}})\right)\right]\\&-\hat{\mathbb{E}}_0\left[1_{\{Q_{i\hat{t}}\geq\hat{b}_{i\hat{t}}\}}\mathrm{e}^{-\rho T}K_T\Phi_1\left(-d^-_{i,T-\hat{t}}(Q_{i\hat{t}})\right)\right]\\&+\hat{\mathbb{E}}_0\left[1_{\{Q_{i\hat{t}}<\hat{b}_{i\hat{t}}\}}\mathrm{e}^{-\rho\hat{t}}\{(1-\delta_{\hat{t}})Q_{i\hat{t}}-K_{\hat{t}}\}\right]\end{aligned}\tag{A.1}$$

と書き換えることができる．

まず，(A.1) の第 4 項について考察する．$Q_{i0}=q_i$ とすると，

$$Q_{i\hat{t}}=q_i\exp\left\{\left(\rho-\frac{\sigma_i^2}{2}\right)\hat{t}+\sigma_i\hat{W}_{i\hat{t}}\right\}\tag{A.2}$$

であるから

$$x=\frac{\log Q_{i\hat{t}}-\left(\rho-\frac{\sigma_i^2}{2}\right)\hat{t}}{\sigma_i\sqrt{\hat{t}}}=\frac{W_{i\hat{t}}}{\sqrt{\hat{t}}} \tag{A.3}$$

は確率測度 $\hat{\mathbb{P}}$ の下で標準正規分布に従う．その密度関数を $\phi_1(x)$ と表記する．このとき，

$$\{Q_{i\hat{t}}<\hat{b}_{i\hat{t}}\}=\{x>d^-_{i,t}(q_i,;\hat{b}_{i\hat{t}})\}$$

に注意すると

$$\hat{\mathbb{E}}_0\left[1_{\{Q_{i\hat{t}}<\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})\}}\right]=\int_{d^-_{i,\hat{t}}\left(q_i;\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})\right)}^{\infty}\phi_1(x)\mathrm{d}x=\Phi_1\left(-d^-_{i,\hat{t}}(q_i;\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT}))\right)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{E}}_0\left[1_{\{Q_{i\hat{t}}<\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})\}}Q_{i\hat{t}}\right]=&\int_{d^-_{i,\hat{t}}\left(q_i;\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})\right)}^{\infty}q_i\mathrm{e}^{\left(\rho-\frac{\sigma_i^2}{2}\right)\hat{t}+\sigma_i\sqrt{\hat{t}}x}\phi_1(x)\mathrm{d}x\\=&q_i\mathrm{e}^{\rho\hat{t}}\int_{d^-_{i,\hat{t}}\left(q_i;\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})\right)}^{\infty}\phi_1\left(x+\sigma_i\sqrt{\hat{t}}\right)\mathrm{d}x\\=&q_i\mathrm{e}^{\rho\hat{t}}\Phi_1\left(-d^+_{i,\hat{t}}(q_i;\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT}))\right)\end{aligned}$$

より，(A.1) の第 4 項の期待値は

$$(1-\delta_{\hat{t}})q_i\Phi_1\left(-d^+_{i,\hat{t}}(q_i,\hat{B}_{i\hat{t}})\right)-K_{i\hat{t}}\mathrm{e}^{-\rho\hat{t}}\Phi_1\left(-d^-_{i,\hat{t}}(q_i,\hat{B}_{i\hat{t}})\right)$$

となる．

次に，(A.1) 式の第 1 項の期待値を評価する．(A.2) と (A.3) および $\kappa=\sqrt{\hat{t}/T}$ を用いると，

$$d^-_{i,T-\hat{t}}(Q_{i\hat{t}};B_{iT})=\frac{d^-_{i,\hat{t}}(q_i;B_{iT})-\kappa x}{\sqrt{1-\kappa^2}}$$

と変形できることから

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{E}}_0\left[1_{\{Q_{i\hat{t}}\geq\hat{B}_{i\hat{t}}\}}\Phi_1\left(d^-_{i,T-\hat{t}}(Q_{i\hat{t}};B_{iT})\right)\right]=&\int_{-\infty}^{d^-_{i,\hat{t}}\left(q_i;\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})\right)}\phi_1(x)\Phi_1\left(\frac{d^-_{i,T}(q_i;B_{iT})}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right)\mathrm{d}x\\=&\Phi_2\left(d^-_{i,\hat{t}}(q_i;\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})),d^-_{i,T}(q_i;B_{iT});\kappa\right)\end{aligned}$$

と表現することができる．

(A.1) 式の第 2 項の期待値は，(A.3) 式の $x$ を用いて $\tilde{x}=x+\sigma_i\sqrt{\hat{t}}$ と置くと

$$-d^+_{i,T-\hat{t}}(Q_{i\hat{t}};B_{iT})=\frac{-d^+(q_i;B_{iT})+\kappa\tilde{x}}{\sqrt{1-\kappa^2}}$$

となり，同様の計算によって

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mathbb{E}}_0\left[1_{\{Q_{i\hat{t}}\geq\hat{B}_{i\hat{t}}\}}\mathrm{e}^{-\rho\hat{t}}Q_{i\hat{t}}\Phi_1(-d^{+}_{i,T-\hat{t}}(Q_{i\hat{t}})\right]\\
=&\int_{-\infty}^{d^{-}_{i,\hat{t}}\left(q_i;\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})\right)}\mathrm{e}^{-\rho\hat{t}}q_i\mathrm{e}^{\left(\rho-\frac{\sigma_i^2}{2}\right)\hat{t}+\sigma_i\sqrt{\hat{t}}x}\Phi_1\left(\frac{-d^{+}_{i,T}(q_i;B_{iT})+\kappa\tilde{x}}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right)\phi_1(x)\mathrm{d}x\\
=&q_i\int_{-\infty}^{d^{+}_{i,\hat{t}}\left(q_i;\hat{b}_{i\hat{t}}(B_{iT})\right)}\phi_1(\tilde{x})\Phi_1\left(\frac{-d^{+}_{i,T}(q_i;B_{iT})+\kappa\tilde{x}}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right)\mathrm{d}\tilde{x}\\
=&q_i\Phi_2\left(d^{+}_{i,\hat{t}}(q_i;\hat{b}_{i,\hat{t}}(B_{iT})),-d^{+}_{i,T}(q_i;B_{iT});-\kappa\right)
\end{aligned}
$$

を得る．

最後に (A.1) 第 3 項も同様の計算によって 2 次元正規分布の分布関数を使って表現することができる．以上の結果より命題が証明された． □

# 参考文献

岡東務 (2008)「財務制限条項の研究」阪南論集社会科学編，**44**(1), 123–149.

塩澤修平 (2000)「中堅中小企業ファイナンスに関する理論的分析の視点」日本銀行金融市場局ワーキングペーパーシリーズ，No.2000-J-11.

橋本崇 (2008)「与信ポートフォリオの信用リスク計量における資産相関について」日本銀行ワーキングペーパーシリーズ，No.08-J-10.

山下智志・吉羽要直 (2007)「追加融資を考慮した信用リスク：構造モデルによる EL と UL の解析解」日本銀行金融研究所機関誌『金融研究』，第 26 巻別冊第 2 号.

吉本澄司 (2013)「数字を追う ～ 業態別の銀行数：メガ集約，地銀ほぼ不変」日本総研 Research Focus，No.2013-0012.

Bade, B., D. Rösch, and H. Scheule (2011), “Default and Recovery Risk Dependencies in a Simple Credit Risk Model,” *European Financial Management*, **17**(1), 120–144.

Black, F. and J. C. Cox (1976), “Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions,” *Journal of Finance*, **31**(2), 351–367.

Calomiris, C. W. and C. M. Kahn (1991), “The Role of Demandable Debt in Structuring Optimal Banking Arrangements,” *American Economic Review*, **81**(3), 497–513.

Cont, R. and A. Minca (2014), “Credit Default Swaps and Systemic Risk,” working paper.

Diamond, D. W. (1991), “Monitoring and Reputation: The Choice between Bank Loans and Directly Placed Debt,” *Journal of Political Economy*, **99**(4), 689–721.

Diamond, D. W. and R. G. Rajan (2001), “Liquidity Risk, Liquidity Creation, and Financial Fragility: A Theory of Banking,” *Journal of Political Economy*, **109**(2), 287–327.

Eisenberg, L. and T. H. Noe (2001), “Systemic Risk in Financial Systems,” *Management Science*, **47**(2), 236–249.

Elsinger, H. (2009), “Financial Networks, Cross Holdings, and Limited Liability,” working paper.

Fischer, T. (2014), “No-Arbitrage Pricing under Systemic Risk: Accounting for Cross-Ownership,” *Mathematical Finance*, **24**(1), 97—124.

Gordy, M. B. (2000), “A Comparative Anatomy of Credit Risk Models,” *Journal of Banking and Finance*, **24**(1-2), 119–149.

Karl, S. and T. Fischer (2014), “Cross-Ownership as a Structural Explanation for Over- and Underestimation of Default Probability,” *Quantitative Finance*, **14**(6), 1031–1046.

Mella-Barral, P. (1999), "The Dynamics of Default and Debt Reorganization," *Review of Financial Studies*, **12**(3), 535–578.

Mella-Barral, P. and W. Perraudin (1997), "Strategic Debt Service," *Journal of Finance*, **52**(2), 531–556.

Merton, R. C. (1974), "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, **29**(2), 449–470.

Nishide, K., T. Suzuki, and K. Yagi (2014), "The Pricing Model of Corporate Securities under Cross-Holdings of Equities and Debts," working paper.

Rogers, L. C. G. and L. A. M. Veraart (2013), "Failure and Rescue in an Interbank Network," *Management Science*, **59**(4), 882–898.

Rösch, D. and B. Winterfeldt (2008), "Estimating Credit Contagion in a Standard-Factor Model," *Risk*, **21**(8), 74–79.

Shin, H. S. (2008), "Risk and Liquidity in a System Context," *Journal of Financial Intermediation*, **17**(3), 315–329.

Shin, H. S. (2009), "Securitisation and Financial Stability," *Economic Journal*, **119**(536), 309–332.

Suzuki, T. (2002), "Valuing Corporate Debt: The Effect of Cross-Holdings of Stock and Debt," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **45**(2), 123–144.