

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

市場VaR計測の問題点とパラメトリック法による改善

くぼた こうちょう
久保田 幸長

Discussion Paper No. 2009-J-27

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 東京都中央区日本橋本石町 2-1-1

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい。

備考：日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

市場VaR計測の問題点とパラメトリック法による改善

くぼた こうちろう
久保田 幸長*

要 旨

市場リスクを表す VaR 計測の代表的な手法は、パラメトリック法の 1 つである分散共分散法（以下、VCV 法）と、経験分布を用いたヒストリカル・シミュレーション法（以下、HS 法）である。VCV 法では、仮定される正規分布よりも実際の損益分布の裾が重く、信頼水準どおりの VaR を得られないことが多い。一方、HS 法の VaR は、限られた観測期間の更にごく一部のデータに依存するため、観測データへの依存性が VCV 法以上に強くなり、これが VaR の不安定化をもたらすという問題を抱えている。

本稿では、市場価格変動やポートフォリオの損失分布の特徴を踏まえたうえで、安定的な VaR が得られる扱い易いパラメトリックな VaR 計測手法として、両側指数分布を用いた手法を提案する。また、観測データの多寡が VaR 計測誤差に強い影響を及ぼすことをシミュレーションや解析的評価法により算出し、VaR 値のブレの程度を示す。そのうえで、サンプルポートフォリオに対するバックテストを行い、VaR 評価に求められる 3 つの要件（適合性、安定性、保守性）について検証した。その結果、VCV 法、HS 法に比べると、本稿の手法により上記要件のパフォーマンスが改善することが示唆された。

キーワード：VaR（value-at-risk）、片対数グラフ、両側指数分布、計測誤差

JEL classification: C13、G20

* 日本銀行金融研究所（現 みずほコーポレート銀行 総合リスク管理部、E-mail: kocho.kubota@mizuho-cb.co.jp）

本稿の作成に当たっては、小暮厚之教授（慶應大）をはじめ JAFEE2008 冬季大会参加者および日本銀行スタッフから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

目次

1.	はじめに.....	1
2.	市場VaR計測手法.....	3
	(1) VaRの定義と主なVaR計測手法	3
	(2) パラメトリックなVaR計測手法	5
3.	市場価格の変動特性とパラメトリックな分布.....	6
	(1) 片対数グラフによる経験分布の把握	6
	(2) 代表的な市場価格変動の経験分布	8
	(3) パラメトリックな分布	11
	(4) 両側指数分布	12
	(5) 統計的検証と分布の選択	13
	(6) ポートフォリオの損益分布	17
4.	観測データのサンプル・サイズによるVaR推定誤差.....	17
	(1) 少ない観測日数でのVaR計測誤差	17
	(2) 計測誤差の考慮	19
5.	バックテスト.....	20
	(1) バックテストの考え方	20
	(2) 代表的な金融商品に関するバックテスト	22
	(3) サンプルポートフォリオに対するバックテスト	27
	イ. サンプルポートフォリオの構成.....	28
	ロ. サンプルポートフォリオの損益分布とVaR.....	29
	ハ. バックテスト.....	30
6.	おわりに.....	34
補論1.	VaR計測誤差の解析的な分布.....	36
補論2.	裾が重い分布での計測誤差.....	37
補論3.	ボラティリティ対比のVaRの最大値.....	38
参考文献	41

1. はじめに

金融資産の市場価格が変動するリスクを市場リスクと呼ぶ。市場リスクの指標にはさまざまなものがあるが、代表的なものがバリュー・アット・リスク（以下、VaRもしくは市場VaR）である¹。VaRは、一定の保有期間内に生じる損益分布について、ある特定の信頼水準での分位点を算出したものであり、1990年代前半から金融機関のリスク管理の現場で注目されてきた。1996年にはバーゼル銀行監督委員会が国際的に活動する金融機関に適用される自己資本合意の対象に市場リスクを含める改定を行った（Basel Committee on Banking Supervision [1996a,b]）。そこでは、市場リスクの把握方法として、金融機関の内部モデルによる10営業日99%信頼水準のVaRが1つの選択肢として示された。こうした市場リスク計測にどどまらず、例えば、トレーディング業務ではVaRを基準にロスカット・ラインを設定したり、統合リスク管理においては業務内容ごとに抱えるさまざまなリスクに対する経済資本の配賦にVaRを活用したりするようになった。このようにVaRはリスク管理の基本的なツールとして広く普及しており、適切なVaRの計測はリスク管理における必須要件となっている。

VaRの計測手法としては、ヒストリカル・シミュレーション法（以下、HS法）および分散共分散法（以下、VCV法）が主に知られており²、金融機関の市場リスク管理の現場でも、両者が中心的な役割を果たしてきた。両VaR計測手法は、ポートフォリオの損益分布に対する仮定に違いがある。HS法は特定のパラメータや分布を仮定しないノンパラメトリック手法であるのに対し、VCV法は損益の分布として正規分布という解析的に表現が可能な特定の分布を仮定するパラメトリック手法である。しかしながら金融資産ポートフォリオの損益分布は一般に正規分布よりも裾が重いことが多く、その点では、VCV法よりも損益分布の裾の重さを考慮できるHS法のほうがリスク管理上VaR計測を精度良く行えるという点で適切であると考えられてきた。もっとも、HS法はヒストリカル・データへの依存性が強く、十分なサンプル・サイズを確保できない場合には観測時期や観測期間によってVaRの値が大きく変動しやすいという問題点を抱えている。また、歴史が浅い金融商品については観測期間の長さをどう設定しようと、過去経験したことがない価格変動は一切考慮できないと

¹ VaR以外のリスク指標としては、期待ショートフォール、標準偏差、下半標準偏差などが知られている。

² VaR計測手法の分類については、山下 [2000]、木島 [1998]、Jorion [2001]を参照。

いう問題があり、2007 年来のサブプライム問題の中でも問題視されてきた。この点、パラメトリック手法であれば、先験的に特定のパラメトリックな分布を仮定したうえで観測データをパラメータに集約するため、過去経験したことがない価格変動も低い確率ではあるが考慮し得ると考えられる。

本稿では、価格変動の捉え方を見直したうえで、パラメトリックな分布を用いた市場 VaR 計測手法の改善方法を考える。まず、標準的なヒストグラムによる経験分布の把握に代えて片対数グラフによる経験分布の把握を提示したうえで、代表的な市場価格変動が両側指数分布に近いという特徴を示す。そのうえで、①なるべくシンプルなパラメトリック分布、②市場価格変動に近いファットテイルな分布、③頑健なパラメータ推定が可能な分布、④実務で用いられるポートフォリオ変動の標準偏差との変換可能性、といった観点も踏まえて、両側指数分布による変動分布の表現およびこの分布を用いることによる VaR 計測上の有用性を検証する。また、小さなサンプル・サイズによる VaR 推計精度をシミュレーションで評価し、観測データが少ない場合の VaR 計測の限界を論じ、市場 VaR 指標に実務上求められる性質として保守性の観点を提示する。保守性のほかに実務上求められる市場 VaR 指標の特性として、適合性、安定性などの基準を整理し、従来の VCV 法および HS 法と本稿の手法をバックテストで比較する。ここでいう適合性とは、バックテストで計測する超過回数が設定した信頼水準どおりになっているかという基準である。また安定性とは、VaR の値が日々安定しているかという基準である。こうした複数の評価基準を参照しつつバックテストを行い、その結果、VCV 法は適合性の面で問題が残ること、HS 法は安定性の面で問題が残ることを示す。これに対し、本稿の手法は、適合性の面では HS 法と同等ないしそれ以上のパフォーマンスが得られ、安定性の面では VCV 法と同等のパフォーマンスが得られることを示す。一方、本稿の手法に対する問題としては、①ポートフォリオの損益分布を把握するためのリスクファクターの相関構造についての統計的に厳密かつ簡便な扱いが難しいこと、②本稿では検討していないが短期の損益分布をベースに長期の損益分布の VaR を算出する場合に短期の損益分布を両側指数分布とするとともに長期の損益分布も両側指数分布となる統計学的な理論が得にくいことが挙げられる。

本稿の構成は以下のとおりである。2 節では、市場 VaR 計測手法として実務的に用いられている手法をまとめ、特に、HS 法と VCV 法の特徴を整理す

る。3節では、ポートフォリオを構成する代表的な金融商品の変動特性を統計的に検証し、損益分布に両側指数分布を適用することを提案する。4節では、少数サンプルに伴う VaR（分位点）の観測誤差を検討し、それに伴う VaR 調整法を提案する。5節では、バックテストの考え方を整理し、代表的な金融商品に対してバックテストを行う。6節では、サンプルポートフォリオを与え、損益分布の統計的性質の導出と各種 VaR 計測手法のバックテストを行い、両側指数分布による VaR 計測手法の有効性を確認する。7節では、本稿で考慮しなかった VaR 計測上の問題点に触れながら、本稿の論点をまとめる。

2. 市場 VaR 計測手法

本節では、現状主に用いられている市場 VaR 計測手法を簡単に整理する。

(1) VaR の定義と主な VaR 計測手法

VaR とは、ある金融資産ポートフォリオで、「特定のポジションを一定期間保有すると仮定した場合において、将来の価格変動により一定の確率（信頼水準）の範囲内で発生することが予想される最大の損失額」であり、信頼水準に対応した損失分布の分位点である。主な VaR の計測手法として山下 [2000] では、①BIS 標準法、②分散共分散法（デルタ法、VCV 法）、③HS 法、④モンテカルロ法の 4 種類が掲げられている。③の HS 法に関しては、安藤 [2004] で詳細な分析が行われている。また、最近の研究では、極値理論（EVT）を用いた VaR の計測手法（ダニエルソン・森本 [2000]）や、分布展開法による VaR 計測手法（丸茂 [2008]）など新しい手法が提案されている。これらの VaR 計測モデルのうち、金融機関の市場リスク管理実務で主として使われるものとしては、HS 法に代表されるノンパラメトリックなモデルと、VCV 法に代表されるパラメトリックなモデルに大別される。

本稿では、VaR 計測上勘案するポジションの保有期間は 1 日とし、「一定の確率」として考慮する信頼水準は $\alpha\%$ とする。 $\alpha\%$ は典型的には 99% とする。時刻 t で、保有期間でのポートフォリオ損益 $\Delta P(t)$ がある確率分布に従うとき、信頼水準 $\alpha\%$ の VaR は $\theta = 1 - \alpha/100$ として以下のように定義される³。ここで、

³ 本稿では、観測前日までの条件付きの日次損益が独立に同一の分布に従うことを仮定している。

c は損失の大きさを示している。

$$VaR_\alpha(t) = \inf\{c \mid \Pr(\Delta P(t) \leq -c) \leq \theta\} \quad (1)$$

ポートフォリオ損益 $\Delta P(t)$ の従う確率分布が連続的な分布で、分布関数が $\Psi(x) = \Pr(\Delta P(t) \leq x)$ で与えられるならば、(1)式のVaRは

$$VaR_\alpha(t) = -\Psi^{-1}(\theta) \quad (2)$$

と分布関数の逆関数を用いて表現することができる。

ポートフォリオ損益 $\Delta P(t)$ の分布は通常以下のように特定化される。まず、ポートフォリオ価値 $P(t)$ を定めるリスクファクターを選択する。たとえば、 m 個のリスクファクター X_1, \dots, X_m を選択したとする。リスクファクターが確率的に変動していると考え、保有期間後の X_1, \dots, X_m は m 次元の確率分布に従うことになり、その分布に基づいてポートフォリオ価値 $P(t; X_1, \dots, X_m)$ は 1次元の確率分布に従うことになる。これから現在のポートフォリオ価値を差し引くことによって保有期間後のポートフォリオ価値変化、すなわち、ポートフォリオ損益 $\Delta P(t)$ の確率分布を特定することができる。リスクファクター X_1, \dots, X_m の分布の構成方法などによって、さまざまな VaR 計測手法がある。

代表的な VaR 計測手法の 1 つである HS 法では、リスクファクター X_1, \dots, X_m の分布は過去 N 営業日の日次変動の経験同時分布を用いて表現される。リスクファクターのシナリオを N 組考え、各組 $\{x_1, \dots, x_m\}$ に対して保有期間後のポートフォリオ価値を $P(t; x_1, \dots, x_m)$ と評価する。1 組のシナリオに対してポートフォリオ損益 $\Delta P = P(t; x_1, \dots, x_m) - P(t)$ が 1 つ得られるため、 N 個のポートフォリオ損益 $\{\Delta P_1, \dots, \Delta P_N\}$ が得られる。

HS 法では、 $\{\Delta P_1, \dots, \Delta P_N\}$ がノンパラメトリックに経験的なポートフォリオ損益の分布であると考え、その分位点で VaR を表現する。典型的には ΔP_i ($i=1, \dots, N$) はどれも等確率 $1/N$ で生じ得ると考え、 ΔP_i を昇順に並べ替え、 $N=250$ で 99%信頼水準であれば、2 番目の値と 3 番目の値の平均値の逆符号値を VaR とする。

パラメトリックな手法では、 $\{\Delta P_1, \dots, \Delta P_N\}$ にパラメトリックな確率分布をあてはめる。パラメトリックな手法として代表的な VCV法は、正規分布をあてはめている。VCV法ではリスクファクター X_1, \dots, X_m の変動に対しても正規分布をあてはめ、典型的には各リスクファクターの変動に対してポートフォリオ損益が線形に変化すると仮定する。この結果、ポートフォリオ損益の分散 σ_p^2

は、リスクファクター X_1, \dots, X_m の変動に関する分散・共分散行列 C とポートフォリオ損益に対するリスクファクターの感応度ベクトル $w = (w_1, \dots, w_m)$ を用いて、 $\sigma_p^2 = wCw'$ (w' は w の転置ベクトル) と表すことができ、99%信頼水準のVaRは $2.33\sigma_p$ として求められる。2.33 の値は(2)式で $\Psi(\cdot)$ を標準正規分布関数としたときの $\Psi^{-1}(0.01)$ の値である。

(2) パラメトリックなVaR計測手法

リスクファクターの正規性と線形の感応度を仮定すると、ポートフォリオ損益も正規分布に従うことになる。そのため、VCV法によるVaR計測は、感応度ベースのリスク管理が可能という利点がある。しかしながら、ポートフォリオ損益の分布は実際には正規分布に従わず、正規分布よりもファットテイルといわれている。このことから、VCV法ではVaRを過小評価しがちであり、バックテスト上の適合性も相対的に劣る。

そこでポートフォリオ損益の分布に正規分布以外のパラメトリックな確率分布をあてはめることを考える。特に正規分布よりもファットテイルな分布を念頭に置く。こうすることで、感応度ベースのリスク管理は難しくなるが、実際の分布のテイルを考慮したより正確なVaRを計測できる可能性がある。

具体的には、(1)で考察したHS法の手順で、 N 個のポートフォリオ損益 $\{\Delta P_1, \dots, \Delta P_N\}$ が得られたとする。HS法ではここから直接的にVaRを算出するが、ここでは $\{\Delta P_1, \dots, \Delta P_N\}$ からパラメトリックなポートフォリオ損益分布を推定する。具体的には、 $\{\Delta P_1, \dots, \Delta P_N\}$ から、 $\overline{\Delta P}$ を平均値として、ポートフォリオ損益の分散を

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\Delta P_i - \overline{\Delta P})^2 \quad (3)$$

で推定する。本稿でのパラメトリック法も(2)式で示される信頼水準 $\alpha\%$ のVaRを算出する際、推定されたボラティリティ $\hat{\sigma}_p$ を所与として $\hat{\sigma}_p$ の定数倍でVaRを算出するものとする。

3節では、ポートフォリオ損益として単純に代表的な金融資産を1つ保有したときの損益を考え、そのパラメトリックな確率分布としてファットテイル性を考慮した分布について考察する。

3. 市場価格の変動特性とパラメトリックな分布

本節では、代表的な金融商品の市場価格変動特性を経験分布で捉えたいうで、その変動特性を的確に捉えやすいパラメトリックな分布として両側指数分布を提案する⁴。ただし、本稿でいう代表的な金融商品とは、為替や株式、スワップ金利等の、取引所等で一般かつ頻繁に取引されるようなプレーンな金融商品を対象としたものである。逆に、これらの資産価格から副次的に生成されるような金融派生商品の価格、一方向の変動に対する保険や売買の非対称性によって損益に歪みが生じやすいヘッジファンド等の投資信託の価格等、価格水準と価格変動の関係において非線形性が顕著な資産の価格についての議論は、本稿では扱わない。

(1) 片対数グラフによる経験分布の把握

ポートフォリオを構成する代表的な金融商品価格の変動を長期のヒストリカル・データから得られる経験分布で捉えることを考えるが、ここではまず経験分布の描き方を考察する。経験分布の描き方としてよく用いられるヒストグラムは、分布全体の傾向をみるには有効である。一方、VaR の計測という観点では分布全体よりも、VaR の信頼水準に近い分布のテイルの形状が問題になる。そこで、本稿では、ヒストグラムではなく、片対数グラフを利用して以下のように経験分布を表現する。

価格変動データとして N 個のデータ x_1, \dots, x_N が得られているとする。まず、標準偏差 $\hat{\sigma}$ を(3)式と同様に求める。次に、負のデータ数を m 、ゼロのデータ数を z 、正のデータ数を p として、価格変動データを(4)式のように昇順に並べ替え、

$$x_1^- \leq \dots \leq x_m^- < 0 = x_1^0 = \dots = x_z^0 < x_1^+ \leq \dots \leq x_p^+ \quad (4)$$

負のデータについて

$$(x_i^- / \hat{\sigma}, \log_{10}(i/N)), \quad i = 1, \dots, m$$

⁴ Miura and Oue [2000]では、正規分布に代わる分布として、ロジステック分布やより一般的にパラメータを用いて特定の分布を変換した分布を想定し、VaR 計測の適合性を検討している。本稿では、後述のとおり、代表的な市場価格変動の片対数グラフでの直線性が高いことと同価格変動の非対称性が低いというデータ分析結果を踏まえ、簡単なパラメトリック分布として両側指数分布の採用を提案している。

正のデータについて、

$$(x_i^+ / \hat{\sigma}, \log_{10}((p - i + 1) / N)), \quad i = 1, \dots, p$$

ゼロのデータについて

$$(0, \log_{10}((N - m - i) / N)), \quad i = 1, \dots, z$$

を(横軸, 縦軸)に点でプロットする。比較のため、正規分布の理論曲線として、

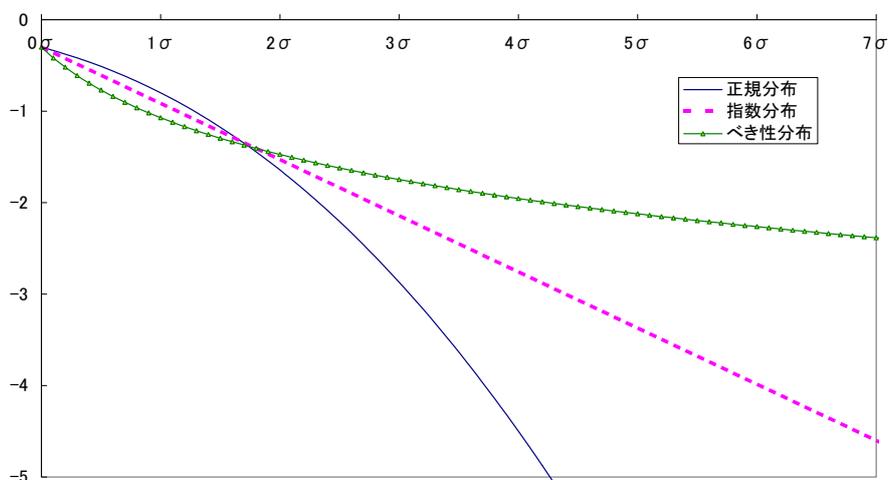
$$f(x) = \begin{cases} \log_{10}(1 - \Phi(x / \hat{\sigma})) & x \geq 0 \\ \log_{10} \Phi(x / \hat{\sigma}) & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

を併せて表示する。ただし、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数である。

このように正・負・ゼロのデータを分けて片対数グラフを描くと、価格変動のゼロ集中度合い、上昇・下落方向の非対称性、ファットテイル性を把握しやすいという利点がある。図 1 に示すとおり、理論的に変動の分布が正規分布であれば上に凸、指数分布であれば漸近的に直線⁵、べき乗性の分布であれば下に凸であるため、グラフの形状をみることで正規分布、指数分布、べき乗性分布のいずれに近いかを判断することができる。また、縦軸を常用対数(底が10)とすることにより、ポートフォリオの損益分布をこの片対数グラフに表した際に、縦軸の-1が90%、-2が99%、-3が99.9%の信頼水準のVaRに対応する損益が横軸に示されることになるため、実務でよく用いられる信頼水準のVaRとの対応をつけやすいという利点もある。

⁵ 密度関数が後述の(8)式で表される両側対称の指数分布であれば、 $\lambda = \sqrt{2}\sigma$ の関係から、 $x > 0$ については $\Pr(X > x) = (1/2)\exp(-\sqrt{2}x/\sigma)$ となり、表示される曲線は漸近的に $f(x) = -\log_{10} 2 - (\sqrt{2} \log_{10} e)(x/\sigma)$ という直線になる。

図 1 変動の累積密度分布（正の領域）の曲率の違いによる分類



備考：横軸は変動の大きさを標準偏差尺度で表しており、縦軸は累積確率を常用対数で表している。

(2) 代表的な市場価格変動の経験分布

代表的な金融商品として、①日経株価指数、②円ドル為替レート、③長期金利（7年円金利スワップ）、④短期金利（6ヵ月円LIBOR）を取り上げ、それらの約20年間の日次データ（観測データ数各5,000程度）を用いて、(1)の手法による片対数グラフで価格変動の経験分布を描いてみる。長期金利のデータは円金利スワップレート（7年物）の東京引時の仲値（アスクとビッドの平均値）レート（データソース：Bloomberg）を用いて分析した。

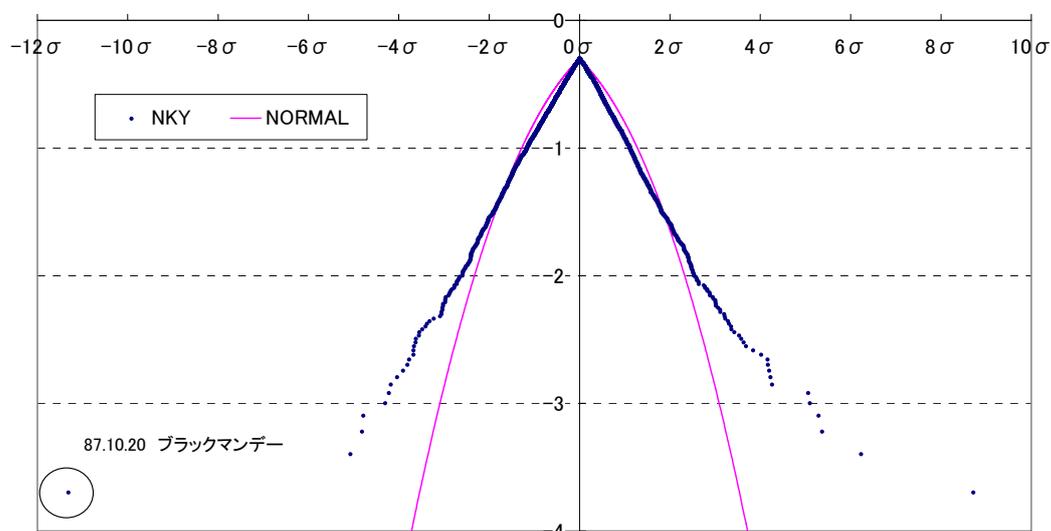
価格の「変動」の捉え方としては、主に変動率（対数変動率を含む）、変動幅の2つが挙げられる。価格の変動は、通常その水準に依存し、負の値をとらないことや価格変動を連続的に捉える統計理論上の立場から、変動率で捉える場合がほとんどである。しかしながら現実の市場価格は、特に単資産に注目する場合は、価格水準によらずある特定の金利・価格の最小変動単位の整数倍で変動すること、経験的に心理的抵抗線や切りのいい数字等の価格水準で価格変動性が変化しやすい現象がみられることを考慮すると、価格が一定幅の整数倍で変動するような市場では、変動幅で捉えたほうが市場価格の特徴を観測しかつ表現しやすい場合もある⁶。また、VaR計測上も最終的には金額ベースで損失が把握される場合が多いため、直接的に変動幅で分布を表現できれば扱いや

⁶ 例えば、ある現実の市場価格変動において100円→99円→100円→101円→100円の経路が生じたとする。この変動経路は、変動幅では±1円の2状態しか生じていないが、変動率では、±1%、約1.0101%、約-0.9901%の4状態生じていることになってしまう。

すい場合もある。本稿では、経験分布上の両者による価格特性を比較し、価格水準により最小変動単位の変化（呼び値幅変更）が生じる株価については変動率、最小変動単位が変化しにくい為替および金利については基本的に変動幅で捉えることとした。ただし、一般的には資産価格水準に対して比較的短期間で微小な価格変動であれば、変動幅および変動率の扱いによる差は微小である場合も多い。

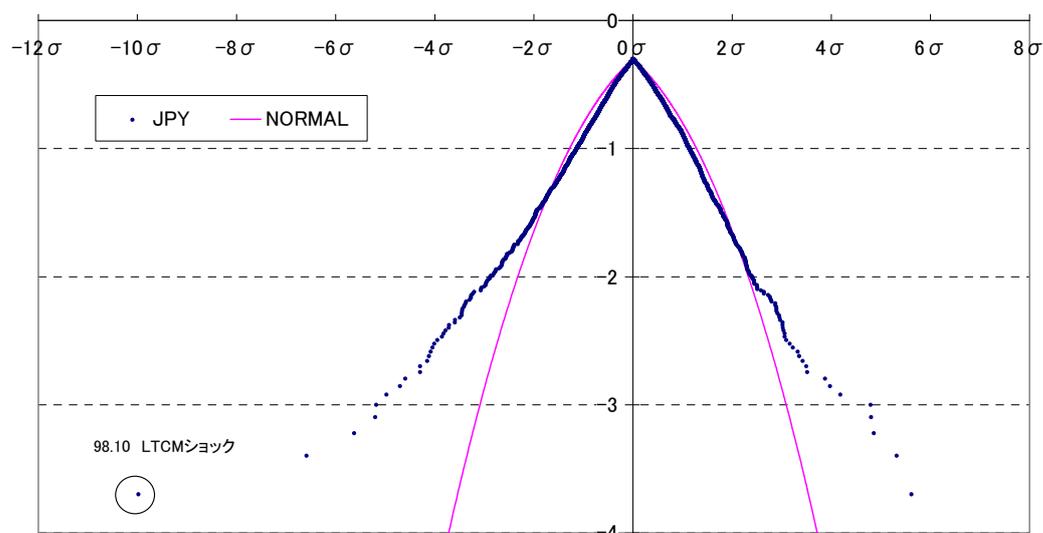
株価、為替レート、長短金利の変動の片対数グラフによる経験分布は図 2～図 5 のとおりである。図 2、図 3 では大変動が生じた日と原因を付記した。

図 2 日経平均（1987.7～2007.11）の変動率の分布（ $N=5000$ ）



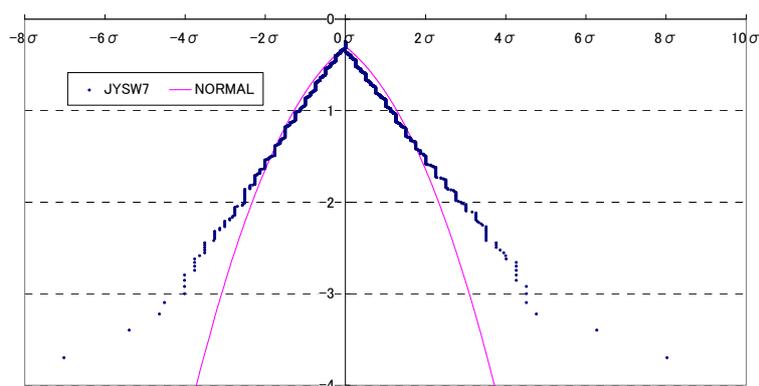
備考：縦軸・横軸は図 1 と同様。

図 3 円ドルレート（1987.7～2007.11）の変動幅の分布（ $N=5000$ ）



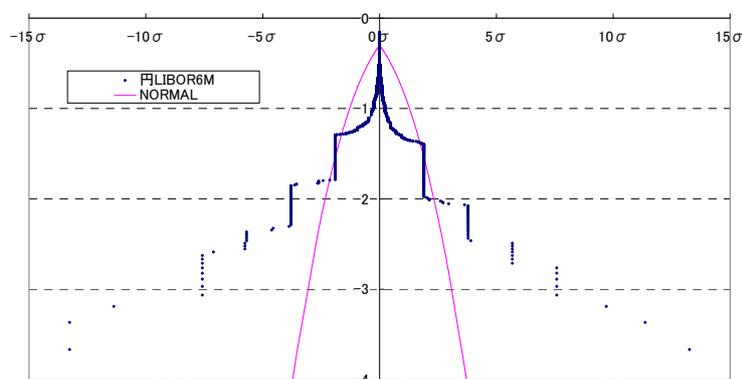
備考：縦軸・横軸は図 1 と同様。

図 4 円金利スワップ7年（1988.11～2008.4）の変動幅の分布（ $N=5000$ ）



備考：縦軸・横軸は図 1と同様。

図 5 円 LIBOR-6M（1989.11～2008.4）の変動幅の分布（ $N=4655$ ）



備考：縦軸・横軸は図 1と同様。

日経平均株価（図 2）では、極値付近を除いてテイルが直線的に伸びており、特に頻度 50%から 99.9%程度（縦軸-3）の領域までは、指数分布に近い形状を示していることがわかる。また、上昇方向および下落方向各々について、 $\pm 2\sigma$ 以上の領域では正規分布から乖離が大きくなっていることがわかる。円ドル為替レート（図 3）、長期金利（図 4）についても同様に、頻度 99.9%程度（縦軸-3）の領域までの指数分布性と、 $\pm 2\sigma$ 以上の領域での正規分布からの乖離を確認できる。短期金利（図 5）についても全体的には同様の傾向が窺える。ただし、政策金利の変動幅が離散的であることを反映し、ゼロ変動や特定の金利水準への集中によって階段状の構造が現れることがわかる。

以上のように価格変動の経験分布は全体的に正規分布よりも指数分布の形状に近いことがわかる（Kubota [2000]も参照。より詳しい他の検証として、Johansen and Sornette [2001]も参照）。なおこの傾向については、週次および月次のラグで変動を観測した場合でもみられる。

(3) パラメトリックな分布

市場価格変動を離散的に計測するとき、その価格変動パターンは基本的に以下の3種類で捉えられる。

- ① 取引の発生の有無に関わらず価格は不変
- ② 取引の発生により価格が上昇
- ③ 取引の発生により価格が下落

そこで、上昇、下落の変動の割合を w^+ 、 w^- とし（不変の割合は $1 - w^+ - w^- \geq 0$ ）、上昇方向への密度関数を $\varphi^+(x)$ 、下落方向への密度関数を $\varphi^-(x)$ で表すと、市場価格変動全体の確率密度は

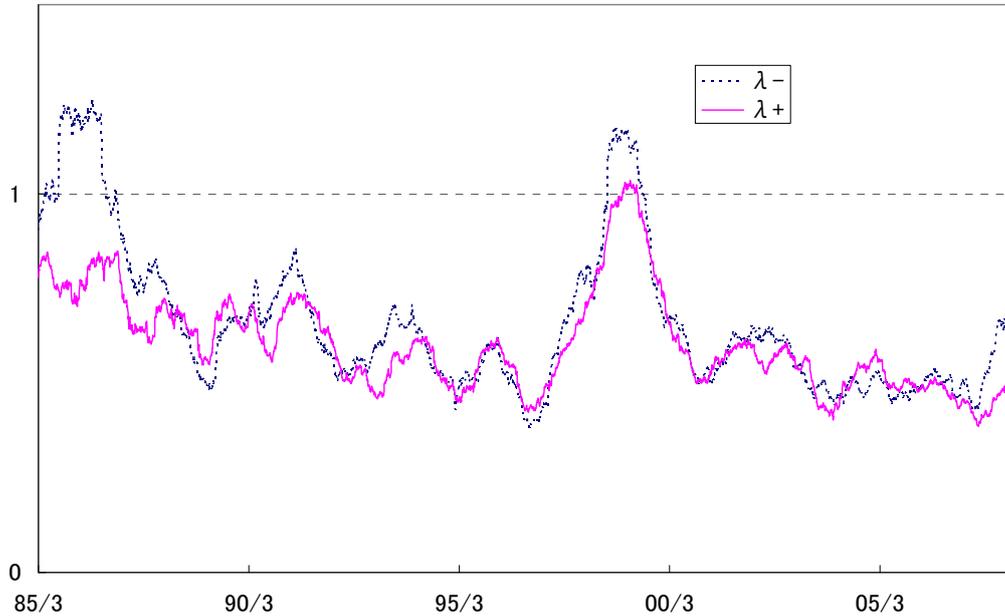
$$\psi(x; w^+, w^-, \lambda^+, \lambda^-) = w^+ \varphi^+(x) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x) + w^- \varphi^-(x) \mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(x) + (1 - w^+ - w^-) \mathbf{1}_0(x) \quad (6)$$

と表現できる。特に、上昇方向、下落方向ともに指数分布で捉え、上昇方向、下落方向のパラメータをそれぞれ λ^+ 、 λ^- とすると、(6)式は、

$$\psi(x; w^+, w^-, \lambda^+, \lambda^-) = \frac{w^+}{\lambda^+} e^{-\frac{x}{\lambda^+}} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x) + \frac{w^-}{\lambda^-} e^{\frac{x}{\lambda^-}} \mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(x) + (1 - w^+ - w^-) \mathbf{1}_0(x) \quad (7)$$

という式に帰着する。この分布は非対称性も考慮できる指数分布となっている。最尤法を用いるとパラメータ λ^+ 、 λ^- はそれぞれ上昇方向への変動に関する平均絶対偏差、下落方向への変動に関する平均絶対偏差で推定される。(7)式の非対称な指数分布でポートフォリオの損益分布を捉える場合、信頼水準 $\alpha = 100(1 - \theta)\%$ のVaRは $\lambda^- \ln(\theta / w^-)$ で与えられる。分布の非対称性は(7)式の非対称な指数分布のパラメータ w^+ 、 λ^+ と w^- 、 λ^- の違いで捉えられる。例えば図6は1985年3月～2008年3月までの円ドル為替相場の変動幅について、観測期間を250日として、(7)式の非対称な指数分布のパラメータ λ^+ と λ^- をローリング推計したものである。大抵の期間においては $\lambda^+ \approx \lambda^-$ とみなせるが、円高トレンドが顕著になる期間では $\lambda^+ < \lambda^-$ となる傾向が窺われる。また、投資ブーム等で市場取引が活発になる期間では λ^+ と λ^- 双方の水準自体が大きくなる傾向がわかる。

図 6 円ドル為替レート変動の λ^+ および λ^- の推移



一般に市場ポートフォリオでは、ロングポジションとショートポジションが組み合わさっているため、ポートフォリオ収益の非対称性は目立たない場合が多い。しかし、例えばゼロ金利政策以降、バイ・アンド・ホールドの債券ポートフォリオなど偏ったポートフォリオを保有していたような場合には、ポートフォリオ収益の非対称性は顕著になり得る。

なお、 λ^+ と λ^- の差異についての統計的な検証としては、分散が未知の場合の平均の差異に対する t 検定を観測期間に応じて行い、p 値の変化を観察した。先述と同様に 1985 年 1 月～2008 年 3 月までの日次データを対象に、観測期間 250 日の変動差計測による価格変動データを日次でローリングして適用した場合、約 9 割近くの期間で有意水準 5%で λ^+ と λ^- が等しいという帰無仮説は棄却されなかった。価格変動データを変動率で計測した場合は全期間において有意水準 10%でも帰無仮説は棄却されなかった。したがって総じてみれば、円ドル為替レートの変動は、ごく一部の期間を除いて非対称であるとは言い難いと評価できる。

(4) 両側指数分布

(2) 節で検討した代表的な市場価格変動の片対数グラフによる経験分布を振り返ると、99%程度の信頼水準での VaR 算出を念頭におく（グラフの縦軸 -2 近辺に注目する）場合には目立った非対称性は観察されない。また、図 6

で非対称性を示す λ^+ と λ^- の推移をみても、また t 検定によっても、長期間にわたる差異は否定されている。したがって、1 つのパラメータ $\lambda (= \lambda^+ \approx \lambda^-)$ で表現できる単純なパラメトリックな対称分布として、両側指数分布（ラプラス分布）が適切な分布の候補になる。両側指数分布の確率密度は(8)式で示される。

$$\psi(x; \lambda) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x|}{\lambda}} \quad (8)$$

両側指数分布は正規分布よりもファットテイルであり、0 値近辺の密度が高く、経験分布の形状をよく捉えた対称な分布になっている。この分布の平均は 0、分散は $2\lambda^2$ 、絶対値の期待値は λ である。したがって、変動データの系列 X_1, \dots, X_n に対して、

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i| \quad (9)$$

として、平均絶対偏差でパラメータ λ の推定量 $\hat{\lambda}$ を求められるほか、変動データ X_1, \dots, X_n の標準偏差 $\hat{\sigma}$ を用いて、 $\hat{\lambda} = \hat{\sigma} / \sqrt{2}$ としても推定量 $\hat{\lambda}$ を求められる。

分散を 1 に基準化した両側指数分布の分布関数は、

$$\Psi_{Laplace}(x) = \int_{-\infty}^x \psi(u; 1/\sqrt{2}) dt = \begin{cases} e^{\sqrt{2}x} / 2 & (x < 0) \\ 1 - e^{-\sqrt{2}x} / 2 & (x \geq 0) \end{cases} \quad (10)$$

と表現される。 $\Psi_{Laplace}(x_{\theta}^{Laplace}) = \theta$ となる分位点 $x_{\theta}^{Laplace} < 0$ を求めると、

$$x_{\theta}^{Laplace} = \frac{\ln(2\theta)}{\sqrt{2}} \quad (11)$$

となり、例えば $\theta = 1\% = 0.01$ のときの分位点は、 $x_{0.01}^{Laplace} = -2.766 \dots \approx -2.77$ で与えられる。

(5) 統計的検証と分布の選択

代表的な金利、為替、株価インデックスの単体のリスクファクターについて、データの欠損が比較的少ない 2000 年 4 月から 2008 年 3 月の日次データ（変動の観測数：各 1,721）を用いて、各種統計量の算出と正規性の検定（Jarque-Bera 検定、D'Agostino-Pearson 検定、Geary 検定⁷）を行うとともに、正規分布と

⁷ Jarque-Bera、D'Agostino-Pearson の両統計量は、正規性のもとで共に自由度 2 のカイ 2 乗分布に従い、1% 有意水準は 9.210 で与えられ、統計量がこの値以上のときに 1% 水準で有意に正規性が棄却される。一方、Geary 統計量の 1% 有意水準は、0.784 であり、統計量

両側指数分布のAICを比較した。

以下のように行った。正規分布の推定分散を $\hat{\sigma}^2$ ⁸、(9)式で計算される両側指数分布の平均絶対偏差を $\hat{\lambda}$ とすると、各分布のAICは観測データ数を N として(12)式で表せる。 $AIC_0 \leq AIC_\lambda$ ならば正規分布、 $AIC_0 > AIC_\lambda$ ならば両側指数分布がより適切な分布であると判断した⁹。

$$\text{正規分布： } AIC_0 = N(\ln 2\pi\hat{\sigma}^2 + 1) + 2 \times 2$$

$$\text{両側指数分布： } AIC_\lambda = 2N(\ln 2\hat{\lambda} + 1) + 2 \times 1$$

(12)

検証対象としたリスクファクターは表 1 のとおりであり、検証結果は表 2 の「AIC判定」に示されている。また、表 2には、主要統計量として、平均、標準偏差（ボラティリティ）、歪度、尖度とボラティリティ対比の分位点も掲載したほか¹⁰、正規性の検定統計量としてJarque-Bera、D'Agostino-Pearson、Gearyの各検定統計量も掲載した。表 2の「 α %点」は「標準偏差」で示される $\hat{\sigma}$ の何倍が α %点であるかを示している。例えば、99% VaRを考える場合には「1%点」をみて、-2.33 より小さければ正規分布よりファットテイルでありVCV法よりも大きなVaRを、-2.77 より小さければ両側指数分布よりもファットテイルであり両側指数法よりも大きなVaRを算出すると考えることができる。

各市場リスクファクターに対する検証結果を概観すると以下のとおりである。

① 各正規性の検定の結果、検証対象となった全てのリスクファクターで、いずれの検定においても有意水準 1%で正規性が棄却された。AIC による正規分布と両側指数分布の選択では、検証対象の 73 個のリスクファクターのうち変動率計測の場合で 68 個、変動幅計測では 69 個について、正規分布よりも両側指数分布に近いとの結果を得た。

② 特に各短期金利については、5, 10, 90, 95%の各分位点では、他のリスク

がこの値以下のとき 1%水準で有意に正規性が棄却され、正規分布よりもファットテイルであると判断される。各種検定の概略は蓑谷 [2001]を参照。D'Agostino-Pearson 検定はD'Agostino [1986]を参照。

⁸ AIC の適用に際しては厳密には分散の最尤推定量を用いるべきであるが、ここでは(3)式で定義される分散の推定量を用いた。

⁹ VaR の算出という観点では分布の裾の適合性に注目すべきかもしれないが、ここでは分布全体で正規と両側指数のいずれの適合性が高いかを考察している。

¹⁰ 歪度は平均からの乖離の 3 乗平均を標準偏差の 3 乗で割ったもの、尖度は平均からの乖離の 4 乗平均を標準偏差の 4 乗で割り、正規分布からのずれがわかるように 3 を差し引いたものである。

カテゴリーのリスクファクターより小さめの絶対値となっており、最大値や最小値では、逆に他のリスクファクターより大きくなる傾向が特徴的である。

表 1 リスクファクターの内容

株式インデックス (10種類)

略称	地域名	インデックス名
NKY	日本	日経平均株価指数
TPX	日本	東証株価指数 (TOPIX)
INDU	米国	NYダウ工業株30種
SPX	米国	S&P500指数
DAX	ドイツ	DAX指数
CAC	フランス	CAC40指数
CCMP	米国	ナスダック
HSI	香港	ハンセン指数
UKX	イギリス	FT100指数
SX5E	ユーロ	ユーロ株価指数

対円為替 (16種類)

略称	地域名	幣種名
AUDJPY	オーストラリア	ドル
BRLJPY	ブラジル	レアル
CADJPY	カナダ	ドル
CHFJPY	スイス	フラン
CNYJPY	中国	元
DKKJPY	デンマーク	クローネ
EURJPY	EU	ユーロ
GBPJPY	イギリス	ポンド
HKDJPY	香港	ドル
IDRJPY	インドネシア	ルピア
NZDJPY	ニュージーランド	ドル
PHPJPY	フィリピン	ペソ
SGDJPY	シンガポール	ドル
THBJPY	タイ	バーツ
USDJPY	米国	ドル
ZARJPY	南アフリカ	ランド

金利 (3通貨×14グリッド<満期>)

略称	内容
JYL_XM	Xヵ月円LIBOR
JYSW_ZY	Z年円金利スワップ
USL_XM	Xヵ月米ドルLIBOR
USSW_ZY	Z年米ドル金利スワップ
EUL_XM	Xヵ月ユーロLIBOR
EUSW_ZY	Z年ユーロ金利スワップ

X = 1, 3, 6, 9; Z = 1, 2, 3, 5, 7, 10, 13, 15, 20, 30

国内債券インデックス (5種類)

略称	内容
BPITTO	NOMURA-BPI国内債券総合
BPIJTO	NOMURA-BPI国債総合
BPIJST	NOMURA-BPI短期国債 (1Y~3Y)
BPIJMT	NOMURA-BPI中期国債 (3Y~7Y)
BPIJLT	NOMURA-BPI長期国債 (7Y~)

表 2 主要リスクファクターに対する主要統計量および AIC 検定

	リスクファクター	平均	標準偏差	歪度	尖度	最小値	1%点	5%点	95%点	99%点	最大値	Jarque-Bera	D'Agostino-Pearson	Geary	AIC判定
為替	AUDJPY	1.73E-02	6.82E-01	-1.26	8.44	-8.09	-3.48	-1.48	1.41	2.33	5.15	5.53E+03	528.35	0.68	指数
	BRLJPY	-1.22E-03	6.07E-01	-0.27	3.68	-5.60	-2.86	-1.69	1.52	2.47	5.72	9.84E+02	155.50	0.70	指数
	CADJPY	1.05E-02	7.10E-01	-0.82	6.17	-8.58	-3.06	-1.48	1.45	2.45	4.35	2.90E+03	349.83	0.72	指数
	CHFJPY	1.62E-02	5.22E-01	-0.18	0.90	-3.85	-2.60	-1.70	1.61	2.62	3.43	6.69E+01	37.63	0.77	正規
	CNYJPY	-6.07E-04	8.62E-02	-0.35	1.59	-5.17	-2.79	-1.68	1.53	2.28	4.10	2.16E+02	92.59	0.76	指数
	DKKJPY	3.74E-03	1.12E-01	-0.47	2.27	-6.05	-3.04	-1.62	1.54	2.42	4.06	4.32E+02	145.01	0.75	指数
	EURJPY	2.71E-02	8.40E-01	-0.48	2.43	-6.27	-2.84	-1.64	1.52	2.42	4.09	4.85E+02	152.49	0.75	指数
	GBPJPY	1.11E-02	1.30E+00	-0.66	4.26	-7.58	-2.90	-1.66	1.44	2.49	4.40	1.41E+03	256.55	0.72	指数
	HKDJPY	-1.96E-03	8.86E-02	-0.36	1.41	-5.36	-2.84	-1.69	1.51	2.33	3.48	1.77E+02	85.24	0.76	指数
	IDRJPY	-7.21E-05	1.14E-02	0.77	13.38	-6.40	-2.79	-1.58	1.49	2.46	11.32	1.29E+04	444.54	0.70	指数
	NZDJPY	1.60E-02	6.65E-01	-0.92	5.64	-6.64	-3.30	-1.55	1.44	2.39	4.35	2.51E+03	367.12	0.70	指数
	PHPJPY	-8.66E-05	1.67E-02	-0.45	5.95	-7.93	-3.17	-1.50	1.44	2.62	6.06	2.58E+03	248.48	0.71	指数
	SGDJPY	1.49E-03	3.66E-01	-0.50	3.17	-5.29	-3.28	-1.56	1.47	2.45	5.40	7.86E+02	183.58	0.73	指数
	THBJPY	2.14E-04	2.35E-02	-1.01	15.26	-10.70	-2.98	-1.40	1.32	3.10	6.74	1.69E+04	537.52	0.64	指数
USDJPY	-1.55E-02	6.93E-01	-0.36	1.52	-5.33	-2.87	-1.70	1.54	2.29	3.67	2.00E+02	90.25	0.76	指数	
ZARJPY	-1.94E-03	1.93E-01	-0.36	3.00	-4.52	-3.12	-1.78	1.43	2.37	7.01	6.79E+02	148.26	0.73	指数	
株式	NKY	-2.16E-05	1.39E-02	-0.26	1.30	-4.92	-2.75	-1.70	1.54	2.47	4.11	1.84E+02	78.93	0.74	指数
	TPX	-3.00E-05	1.27E-02	-0.42	1.60	-5.20	-2.81	-1.66	1.56	2.31	3.66	3.51E+02	129.94	0.74	指数
	INDU	1.26E-04	1.06E-02	0.08	4.69	-7.00	-2.72	-1.56	1.57	2.93	5.83	8.49E+02	130.59	0.71	指数
	SPX	7.61E-05	1.08E-02	0.18	3.16	-4.66	-2.77	-1.59	1.54	3.16	5.14	5.07E+02	101.85	0.72	指数
	DAX	6.63E-05	1.59E-02	-0.15	3.69	-5.57	-2.97	-1.59	1.48	2.82	5.50	1.05E+03	181.77	0.72	指数
	CAC	-5.57E-05	1.43E-02	-0.04	3.75	-5.38	-3.02	-1.61	1.47	2.86	4.91	5.77E+02	123.56	0.72	指数
	CCMP	1.24E-04	1.51E-02	0.27	2.84	-4.68	-2.46	-1.68	1.54	3.08	5.65	5.31E+02	105.34	0.73	指数
	HSI	3.38E-04	1.34E-02	-0.18	6.28	-6.94	-2.92	-1.57	1.59	2.84	7.61	1.90E+04	342.44	0.58	指数
	UKX	7.01E-06	1.16E-02	-0.24	3.92	-5.08	-3.26	-1.56	1.53	2.83	5.10	7.20E+02	142.87	0.71	指数
	SX5E	-8.30E-05	1.47E-02	-0.07	3.65	-5.18	-3.07	-1.61	1.49	2.83	4.98	6.92E+02	128.75	0.72	指数
国内金利	JYL_1M	3.59E-04	1.27E-02	13.45	372.78	-8.49	-1.58	-0.39	0.39	2.46	27.45	9.96E+06	3081.55	0.25	指数
	JYL_3M	4.57E-04	5.78E-03	2.31	48.10	-11.24	-2.38	-0.76	1.08	3.65	12.75	1.66E+05	1091.26	0.44	指数
	JYL_6M	5.07E-04	5.58E-03	2.97	44.23	-9.19	-2.46	-0.67	1.12	3.76	12.32	1.42E+05	1255.97	0.47	指数
	JYL_9M	5.36E-04	5.66E-03	2.48	53.96	-9.94	-2.58	-0.75	1.32	3.69	15.47	2.09E+05	1151.69	0.47	指数
	JYSW_1Y	4.50E-04	1.07E-02	-0.20	8.14	-7.52	-2.70	-1.49	1.63	2.79	6.70	4.73E+03	248.91	0.67	指数
	JYSW_2Y	4.04E-04	1.48E-02	0.22	6.04	-6.84	-2.84	-1.52	1.57	3.07	6.22	2.61E+03	210.36	0.67	指数
	JYSW_3Y	3.63E-04	1.93E-02	0.19	4.80	-6.03	-2.86	-1.58	1.65	2.92	6.33	1.65E+03	177.34	0.67	指数
	JYSW_5Y	2.40E-04	2.64E-02	0.23	2.58	-4.68	-2.63	-1.61	1.74	2.89	6.36	4.87E+02	112.62	0.72	指数
	JYSW_7Y	1.39E-04	3.06E-02	0.40	2.18	-4.28	-2.48	-1.47	1.71	2.86	5.21	3.81E+02	124.68	0.73	指数
	JYSW_10Y	5.81E-05	3.09E-02	0.45	2.42	-4.66	-2.42	-1.49	1.68	3.04	5.02	4.76E+02	146.26	0.74	指数
	JYSW_13Y	1.43E-05	3.40E-02	0.74	11.40	-8.15	-2.49	-1.32	1.53	3.05	9.99	9.41E+03	413.21	0.68	指数
	JYSW_15Y	-5.81E-06	3.19E-02	0.41	3.04	-4.35	-2.67	-1.45	1.61	3.10	5.52	7.05E+02	159.54	0.74	指数
	JYSW_20Y	2.91E-06	3.25E-02	0.45	3.21	-4.50	-2.52	-1.50	1.54	3.07	5.66	7.91E+02	172.84	0.74	指数
JYSW_30Y	1.31E-05	3.23E-02	0.35	3.05	-4.95	-2.47	-1.51	1.58	3.23	5.46	6.95E+02	147.41	0.74	指数	
米国金利	USL_1M	-1.38E-03	3.12E-02	-5.88	106.43	-16.95	-3.53	-0.88	0.64	1.62	12.92	8.17E+05	1970.86	0.34	指数
	USL_3M	-1.27E-03	2.74E-02	-7.05	82.80	-15.21	-3.92	-1.09	0.73	1.67	4.37	5.03E+05	2137.54	0.43	指数
	USL_6M	-1.22E-03	3.39E-02	-3.53	31.97	-12.25	-3.97	-1.40	1.11	2.34	4.43	7.64E+04	1347.55	0.55	指数
	USL_9M	-1.24E-03	4.19E-02	-1.72	14.46	-9.90	-3.44	-1.59	1.31	2.56	5.34	1.57E+04	750.79	0.63	指数
	USSW_1Y	-1.32E-03	4.88E-02	-1.17	12.73	-9.84	-2.85	-1.62	1.43	2.52	7.17	1.19E+04	560.90	0.67	指数
	USSW_2Y	-1.40E-03	6.51E-02	-0.09	2.38	-5.56	-2.71	-1.69	1.58	2.63	4.87	4.05E+02	92.69	0.74	指数
	USSW_3Y	-1.36E-03	6.85E-02	0.08	1.79	-5.24	-2.60	-1.66	1.61	2.72	4.78	2.29E+02	68.48	0.75	指数
	USSW_5Y	-1.22E-03	7.10E-02	0.19	1.69	-4.53	-2.56	-1.58	1.65	2.81	4.62	2.12E+02	72.42	0.75	指数
	USSW_7Y	-1.13E-03	6.85E-02	0.24	1.50	-4.00	-2.50	-1.55	1.71	2.83	4.61	1.76E+02	70.22	0.76	指数
	USSW_10Y	-1.03E-03	6.60E-02	0.26	1.48	-3.82	-2.51	-1.52	1.64	2.85	4.64	1.76E+02	73.05	0.76	指数
	USSW_13Y	-9.70E-04	6.46E-02	0.32	1.54	-4.16	-2.49	-1.55	1.69	2.79	4.80	1.98E+02	84.53	0.76	指数
	USSW_15Y	-9.48E-04	6.20E-02	0.32	1.45	-4.25	-2.41	-1.56	1.68	2.74	4.60	1.79E+02	80.78	0.76	指数
	USSW_20Y	-9.47E-04	5.95E-02	0.31	1.41	-4.38	-2.37	-1.58	1.65	2.83	4.75	1.70E+02	77.60	0.76	指数
USSW_30Y	-9.47E-04	5.65E-02	0.27	1.47	-4.56	-2.37	-1.58	1.61	2.83	4.53	1.74E+02	73.05	0.76	指数	
ユーロ金利	EUL_1M	-1.98E-04	2.57E-02	5.31	281.34	-16.29	-2.37	-0.66	0.70	2.02	24.94	5.65E+06	1964.09	0.30	指数
	EUL_3M	9.65E-05	1.71E-02	-6.10	132.13	-20.96	-2.97	-1.17	1.05	2.55	9.31	1.26E+06	2032.52	0.44	指数
	EUL_6M	1.75E-04	1.97E-02	-1.70	31.42	-13.54	-2.65	-1.42	1.37	2.68	9.01	7.12E+04	856.52	0.60	指数
	EUL_9M	2.17E-04	2.46E-02	-0.36	10.12	-8.57	-2.56	-1.58	1.50	2.84	7.60	7.33E+03	302.76	0.66	指数
	EUSW_1Y	1.13E-04	3.09E-02	0.22	3.14	-5.78	-2.66	-1.59	1.62	2.98	5.24	7.16E+02	131.50	0.71	指数
	EUSW_2Y	-7.23E-05	4.25E-02	0.46	2.22	-4.22	-2.37	-1.62	1.69	3.03	5.24	4.10E+02	139.33	0.74	指数
	EUSW_3Y	-1.75E-04	4.72E-02	0.63	4.19	-4.26	-2.40	-1.55	1.67	2.95	8.11	1.36E+03	248.00	0.72	指数
	EUSW_5Y	-3.14E-04	4.61E-02	0.36	2.00	-4.97	-2.29	-1.52	1.63	2.81	4.95	3.21E+02	111.04	0.75	指数
	EUSW_7Y	-4.12E-04	4.31E-02	0.38	1.70	-4.96	-2.27	-1.56	1.63	2.73	4.90	2.46E+02	101.37	0.76	指数
	EUSW_10Y	-4.60E-04	4.05E-02	0.35	1.50	-4.89	-2.29	-1.54	1.65	2.81	4.87	1.96E+02	88.14	0.76	指数
	EUSW_13Y	-4.99E-04	3.90E-02	0.37	1.38	-4.66	-2.31	-1.60	1.68	2.87	4.84	1.75E+02	86.66	0.76	正規
	EUSW_15Y	-5.00E-04	3.93E-02	0.33	1.32	-4.64	-2.32	-1.59	1.67	2.83	4.71	1.55E+02	76.66	0.76	正規
	EUSW_20Y	-5.52E-04	3.87E-02	0.37	1.34	-4.23	-2.34	-1.54	1.69	2.80	4.62	1.65E+02	83.68	0.76	指数
EUSW_30Y	-6.08E-04	3.84E-02	0.32	1.18	-4.10	-2.33	-1.56	1.72	2.73	4.91	1.28E+02	68.05	0.77	正規	
国内債	BPIITTO	1.64E-02	4.13E-01	-0.36	3.21	-5.83	-2.96	-1.50	1.59	2.69	4.95	7.70E+02	154.80	0.74	指数
	BPIJTO	1.67E-02	4.45E-01	-0.39	3.43	-6.01	-2.97	-1.48	1.60	2.65	5.06	8.83E+02	168.29	0.74	指数
	BPIJST	3.66E-03	5.74E-02	0.23	8.02	-5.87	-3.02	-1.53	1.67	3.05	8.26	4.59E+03	249.60	0.62	指数
	BPIJMT	1.49E-02	3.47E-01	-0.19	2.63	-5.63	-2.84	-1.55	1.60						

(6) ポートフォリオの損益分布

本節におけるこれまでの検証を踏まえると、各市場リスクファクターの変動分布のテイル部分を的確に表現できるかどうかという観点では、正規分布やべき乗分布よりも両側指数分布に優位性があることがわかる。分布の非対称性が大きな影響を及ぼす場合には、これを拡張して非対称性を勘案することも可能であるが、過去のデータをみる限り、対称分布である両側指数分布を利用することで大きな問題はなさそうであった。

現実のリスク管理においては、複数のリスクファクターを含むポートフォリオの損益分布をどう評価するかが問題となる。この点、正規分布は、各リスクファクターが線形的に組み合わせられた単純なポートフォリオであれば、その損益分布も正規分布によって表現できるという便利な性質を有していたが、両側指数分布については、このような性質が成立しない。ただ、ポートフォリオ損益についても、特にテイル部分の厚みに焦点を絞る場合には、正規分布の分位点を基準とするよりは両側指数分布を基準とする方がより適切であることは容易に推察される。また、後述する本稿5節のバックテストの結果も、ポートフォリオ損益に対する両側指数分布の適用を支持している。

4. 観測データのサンプル・サイズによるVaR推定誤差

VaR の推定にあたっては、HS 法でも VCV 法でも、数百営業日程度のヒストリカル・データを基にリスクファクターの分布を推定し、VaR を算出する。真の確率分布の種類を仮定したとしても、数百程度のサイズのサンプルでは、分布を正確に計測することは困難である。そこで、本節では、パラメトリックに真の損益分布が与えられたという仮定のもと、実務で用いられるサンプル・サイズ（観測日数）で、VaR の推定値にどの程度のブレが生じるか検討する。また、HS 法との比較のためのバイアス調整法を示す。

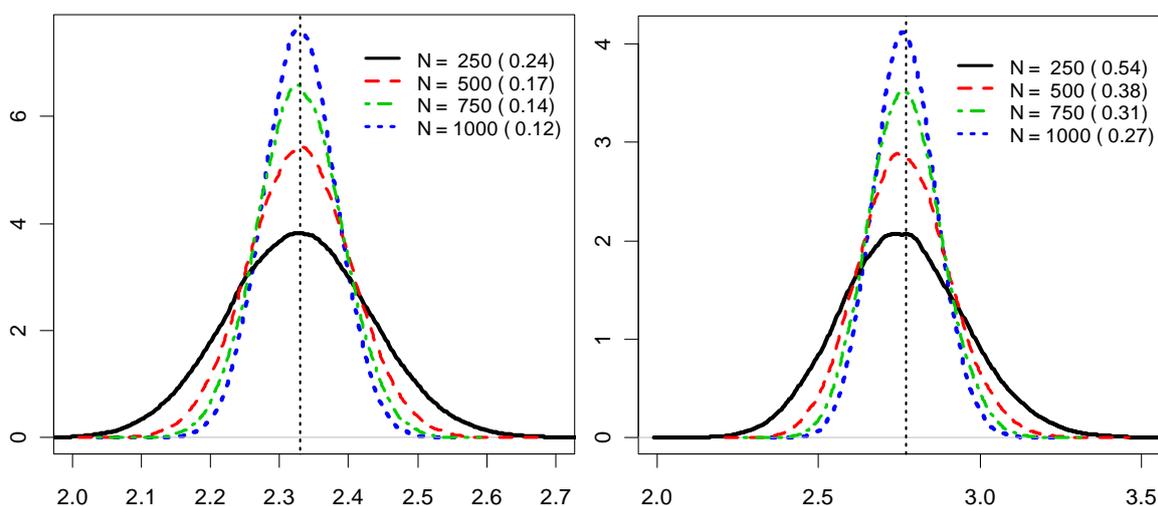
(1) 少ない観測日数でのVaR計測誤差

市場リスク規制では最低 250 営業日（約 1 年間）のデータを用いて VaR の推定を行うことが求められている。推定に用いる観測数を N とすると、 $N \geq 250$ が求められていると言い換えられる。一般に N が小さい場合には計測

誤差が大きくなり、逆に N を大きくすれば計測誤差を抑えることができる可能性は高いが、例えば N を 5,000 にしようとする 20 年間のデータを用いて 1 組のパラメータの損益分布を推定していることになり、20 年間の経済構造の変化の可能性を勘案すると不適切な推定になる。すなわち、日次データを用いた VaR 推定ではサンプル・サイズが限られ、計測誤差の問題が生じる。本節では計測誤差を具体的に定量化する。

パラメトリックな分布として、正規分布と、よりファットテイルな分布である両側指数分布を考える。観測数 N としては、250、500、750、1,000 を与える。モンテカルロ・シミュレーションによって各観測期間に応じた各分布に従うサンプルを 10 万個生成した¹¹。乱数生成の際の母分布（正規分布ないし両側指数分布）の分散は 1 で基準化している。各サンプルでは、 N 個のデータから(3)式に従って推定分散 $\hat{\sigma}^2$ を求めたうえで、正規分布ならば $2.33\hat{\sigma}$ 、両側指数分布ならば $2.77\hat{\sigma}$ をそのサンプルでの 99% VaR とした。10 万個のサンプルで 99% VaR の確率密度を推定した結果は図 7 のとおりである。左図が正規分布の場合、右図が両側指数分布の場合である。各図の凡例では括弧書きで 99% VaR の標準偏差を示している。また、99% VaR の理論値として、左図（正規分布）では $x = 2.33$ に、右図（両側指数分布）では $x = 2.77$ に点線を表示している。

図 7 99% VaR の計測誤差分布（左：正規分布、右：両側指数分布）



損益分布に対して正規分布を所与とした場合、推定分散 $\hat{\sigma}^2$ は自由度 $N-1$ の

¹¹ 本小節の計算は統計言語 R を用いた。正規乱数は `rnorm` 関数で生成させ、両側指数分布に従う乱数は(11)式の逆関数に基づいて一様乱数 `runif` から生成した。

カイ 2 乗分布に従う。図 7の左図の密度は $2.33\hat{\sigma}$ の密度に直したものと考えることができる。図 7からわかるように 99%VaRの計測誤差分布の形状自体は、観測数 N が 250 程度もあれば、母分布が正規分布であっても両側指数分布であっても、中心極限定理により正規分布に近づくことがわかる。平均値や最頻値は 2.33 あるいは 2.77 周辺になっていることがわかる。しかし、99%VaRの計測誤差の標準偏差は、観測数 250 では、0.24（正規分布）、0.54（両側指数分布）と理論値（2.33、2.77）からのブレは比較的大きい。特に、両側指数分布のように裾の重い分布を母分布とする場合には、理論値からのブレは相対的に大きくなることがわかる。なお、観測数を増やすに従い、99%VaRの理論値の周りからのブレが小さくなる傾向は双方の分布に共通して観察される。

HS 法などノンパラメトリックな手法では、母分布を仮定しないため、算出した VaR の推定誤差を明示的に見積もることができない。しかしながら、経験分布が指数分布に近いとすると、HS 法による VaR 値はサンプル・サイズ（観測数）が小さいときには両側指数分布で検討した場合と同様に信頼性が低いということになる。

本稿で提案する VaR手法は、ポートフォリオの損益データからボラティリティ $\hat{\sigma}$ を推定し、VaRを $\hat{\sigma}$ の定数倍として評価するものである。また、ボラティリティを介さなくても、真の分布を正規分布や両側指数分布と仮定したうえで $N\theta$ 番目のデータで VaRを算出する場合には、計測誤差を解析的に評価することができる。この点については補論 1 で論じる。また、極端にファットテイルな分布を想定した場合の VaR計測上の問題については補論 2、補論 3 で論じる。

（2） 計測誤差の考慮

ポートフォリオの損益分布をパラメトリックに把握する場合には、上記のように観測データのサンプル・サイズに応じて 99%VaR の計測誤差を推定できる。例えば、観測数 250 では、損益分布に対して両側指数分布を所与とした場合に 1 標準偏差の範囲においては $2.23\hat{\sigma}$ から $3.31\hat{\sigma}$ の推計値のブレが生じている。これらの範囲ではどの値も 99%VaR の値の候補になりうる。

見積もった計測誤差に対して 99%VaR の値をどのように調整するかは VaR をどのような目的で利用するかに依存する。VaR モデルが正確であり、小さなサンプル・サイズにより計測誤差が発生したとしても、平均的に 99%VaR を当

てればよいということであれば、見積もった計測誤差を使った調整は不要である。ところが、市場リスク規制あるいはリスク管理上は 99%VaR の過小評価がより大きな問題となろう。99%VaR のブレに対して、上方よりも下方のリスクを重視するならば、 2.77σ よりも大きな値を 99%VaR としておくことも考えられる。

一方で、計測誤差に対して上方よりも下方のリスクを重視して過度に大きな値を 99%VaR とすることは、信頼水準を引き上げていることに相当してしまい、99%VaR 値に従って積んだ資本が実は過剰であったということにもなりかねない。計測誤差を VaR に上乘せする場合には、どの程度の保守性を勘案すべきか十分な検討が必要である。したがって、本稿の以下の分析では VaR に計測誤差に応じた上乘せは行わずに手法間の比較を行う。

5. バックテスト

本節では、バックテストの考え方を整理したうえで、代表的な金融商品およびサンプル・ポートフォリオに対するバックテストにより、VCV 法、両側指数分布法、HS 法の比較を行う。

(1) バックテストの考え方

バックテストは、市場リスク規制で内部モデルを用いる際に要求される統計的な検証手続きでもあり、この場合直近 250 日での超過回数などを基にモデルの妥当性を検証する¹²。本節では、市場リスク規制の面だけではなく、モデルの妥当性を統計的に検証する手続きとしてのバックテストの考え方を整理する。

超過回数は以下のように定義される。前営業日までのデータを用いて算出された対象ポートフォリオの VaR と当該日のポートフォリオの日次損失額を対比させ VaR の値よりも損失額が大きくなった場合を超過とする。バックテストの基準日を含む直近 250 日で超過が生じた日数を超過回数と定義する。市場リスク規制では、超過回数が一定の範囲に収まることを要求している。

99%VaR を算出している場合、250 日間のバックテストによる期待超過回数は 2.5 回である。統計学的には、いくつかの基準日のバックテストによる超過

¹² 市場リスク規制上のバックテストの利用に関する国際合意は、Basel Committee on Banking Supervision [1996a]を参照。本邦での取扱いについては金融庁[2006]を参照。

回数を平均化すれば、大数の法則により、この期待超過回数に近づくはずである。信頼水準の本来の考え方からは、超過回数はその期待値である 2.5 回に近いことが望ましい。こうした基準を適合性の基準と呼ぶことにする。

VaR を基にした所要資本額の算出およびトレーディング枠の設定といった実務的な観点からは、VaR の値はあまり大きく変動しないほうが望ましい。こうした基準を安定性の基準と呼ぶことにする。VaR が急激に大きくなるときには、変動に応じて資本を調達するか、ポジションをクローズして VaR を抑える必要がある。

金融実務におけるバックテストの基準としては、上記の適合性と安定性の基準が重要であると考えられる。一方、市場リスク規制上は、さらに保守性の基準も要求されていると考えられる¹³。

このように、バックテストは、①適合性、②安定性、③保守性の 3 つの観点から VaR モデルの検証を行うものとして整理できる。本稿 5 (3) 節では、各基準の具体的な指標として以下の内容を採用する。

① **適合性**：超過回数累積 2 乗誤差、超過回数絶対偏差

超過回数累積 2 乗誤差は、超過回数の期待値 (2.5 回) と実際の超過回数との差 (超過回数差) の 2 乗の累積値、超過回数絶対偏差は超過回数差の絶対値の累積値とする。

② **安定性**：VaR の日次最大変動率 (上下各方向)、標準偏差

③ **保守性**：超過回数の最大値、累積ペナルティ

超過回数 5 回以上となっている期間は、超過回数が前基準日対比で増加するごとにペナルティ 1 が与えられるとして、バックテスト期間中にペナルティを累積させたものを「累積ペナルティ」とする。

¹³ 市場リスク規制では、直近 250 日での超過回数を基に 3 つのゾーンに分けた管理がなされている。超過回数が 4 回以下の場合には特に問題とならずグリーンゾーンと呼ばれる。超過回数が 5~9 回はイエローゾーンと呼ばれ、原因を分析する必要があるほか、適切に説明できない場合には VaR 値のスケールを大きくして自己資本を積み増すことが求められる。超過回数が 10 回以上はレッドゾーンと呼ばれ、モデルの見直しを迫られることとなる。

(2) 代表的な金融商品に関するバックテスト

代表的な金融商品の市場価格として、3 (2) 節で取り上げた①日経平均株価、②円ドル為替レート、③7年円金利スワップ、④6ヵ月円LIBORを再び取り上げ、各資産を単独で保有（ロング）していた場合のVaRと日次収益率を比較することで、バックテストを行う。バックテストの対象となるVaR計測手法としては、VCV法、HS法、両側指数法、非対称指数法を取り上げ、99%信頼水準のVaRについて比較検討する。VCV法、HS法の計測方法は2 (1) 節で記述したとおりであり、両側指数法は2 (2) 節に示したように(3)式で計算された損益分布のボラティリティ $\hat{\sigma}_p$ を用いて99%VaRを $2.77\hat{\sigma}_p$ で算出する¹⁴。非対称指数法は下側の変動について計算した絶対偏差 $\hat{\lambda}$ を用いて¹⁵99%VaRを $3.92\hat{\lambda}$ で算出する。各資産の保有量は、日経平均については指数1単位、円ドル為替については1ドル、各金利商品については日次で1bpv単位の割引債を保有すると仮定する。

図8～図11は、1995年3月～2008年5月の時系列データを用いてバックテストを行った結果であり、上段に日次損益とVaRと比較したグラフ、下段に直近250日の超過回数を示している¹⁶。VaR算出に使用するデータの観測期間は一律500日とした。なお、価格変動を捉えるうえで変動率・変動幅のいずれを選択するかについては、基本的には3 (2) 節の考え方を踏襲したが、6ヵ月

¹⁴ 両側指数分布のパラメータ λ は最尤法では平均絶対偏差で推定され、観測データの異常値の影響を受けにくい頑健な推定量になる。しかし、ここでは実務で多用されるボラティリティの推定値 $\hat{\sigma}_p$ を所与として考えている。

¹⁵ $\hat{\lambda} = (\sum_{i=1}^N -X_i 1_{\{X_i < 0\}}) / (\sum_{i=1}^N 1_{\{X_i < 0\}})$ と表現できる。

¹⁶ HS法との比較のため、VCV法、両側指数法については、以下のようにサンプルサイズに応じたバイアスを補正した値を用いている。HS法では典型的には観測数 N の $100(1-\theta)\%$ のVaRを以下のように求めている。 N 個のポートフォリオ損益を昇順に並べ替え、 $N\theta$ が整数であれば $N\theta$ 番目のデータの値、 $N\theta$ が整数でない場合には前後のデータの値で線形補間する。このとき観測数 N も θ も小さい場合には $N\theta$ 番目のデータの値が厳密な意味での $100(1-\theta)\%$ 分位点とずれてしまう。HS法とパラメトリック法（VCV法、両側指数法）を比較する場合には、下表のようにシミュレーションで線形補間値の平均値を算出し、パラメトリック法での理論値の代わりにその値を使って比較することが考えられる。下表の値は100万回のシミュレーションで算出した。

	観測数					
	250	500	750	1,000	1,250	2,500
正規分布	2.41	2.36	2.35	2.34	2.34	2.33
両側指数分布	2.94	2.84	2.82	2.80	2.80	2.78

円LIBORについては、最小取引単位の影響を回避するために変動率を採用した。

これらの結果から、HS 法による 99% VaR は、両側指数法による 99% VaR の計測誤差を含めた領域を上下しながら、平均的には両側指数法による 99% VaR 周辺を変動する様子が窺われる。VCV 法による 99% VaR は他の 3 つの手法による 99% VaR よりも低く算出されていることがわかる。

超過回数については、VCV 法は頻繁に超過回数の期待値 (2.5 回) を上回っており、パフォーマンスが悪い。一方、HS 法や非対称指数法では、観測期間内でトレンドが急激に変化した初期の段階において両側指数法に比べてパフォーマンスが悪いことがわかる。また、両側指数分布、非対称指数法および HS 法とも、観測期間内で捉えることのできないボラティリティの急激な上昇に対しては、超過回数の観点で適合性を保てないことがわかる。

図 8 各種 VaR のバックテスト：日経平均株価

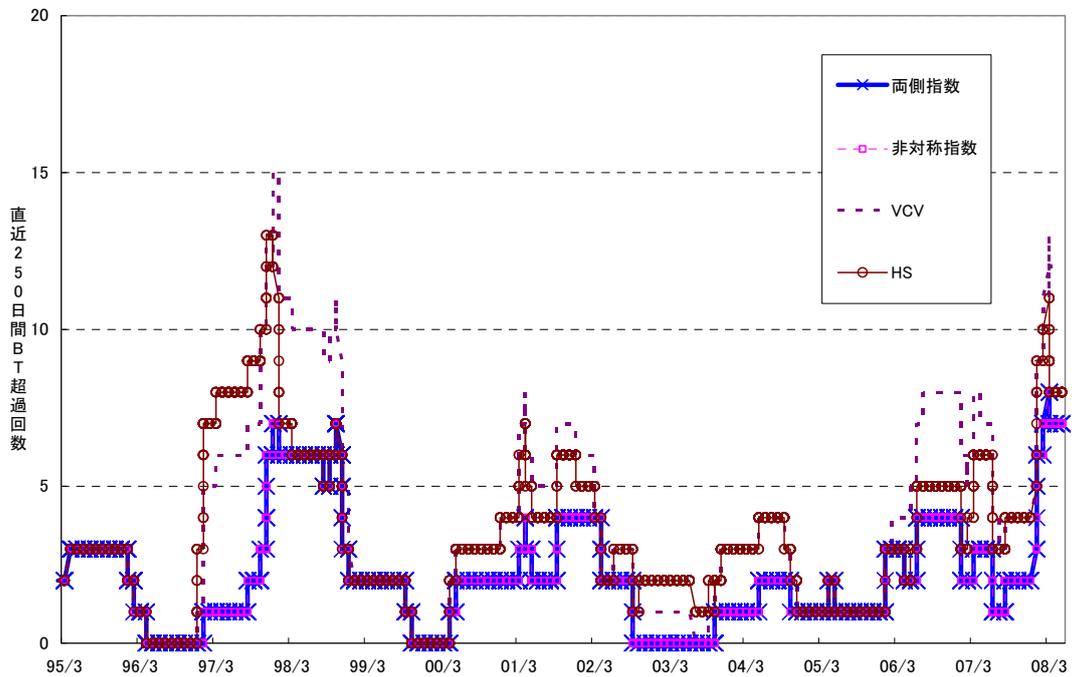
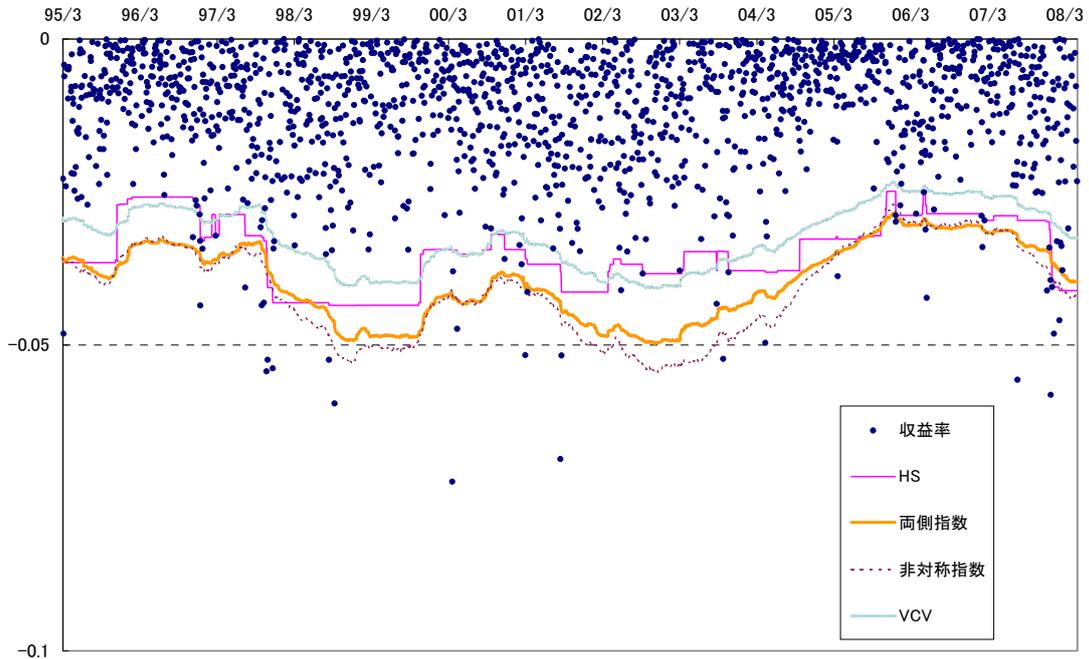


図 9 各種 VaR のバックテスト : 円ドル為替相場

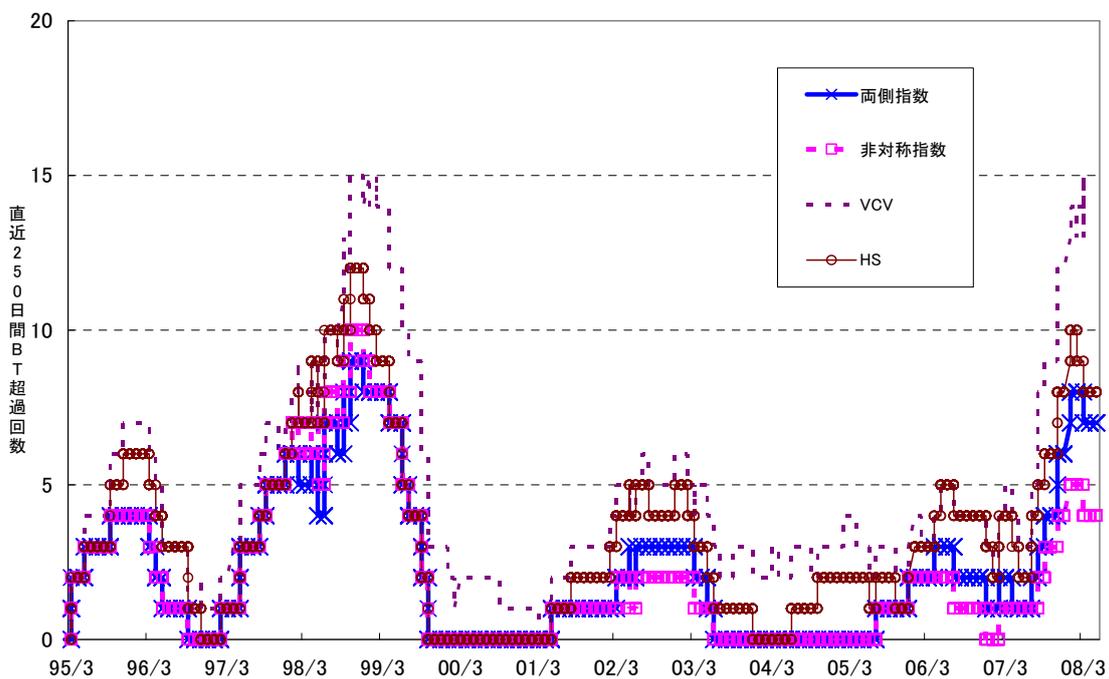
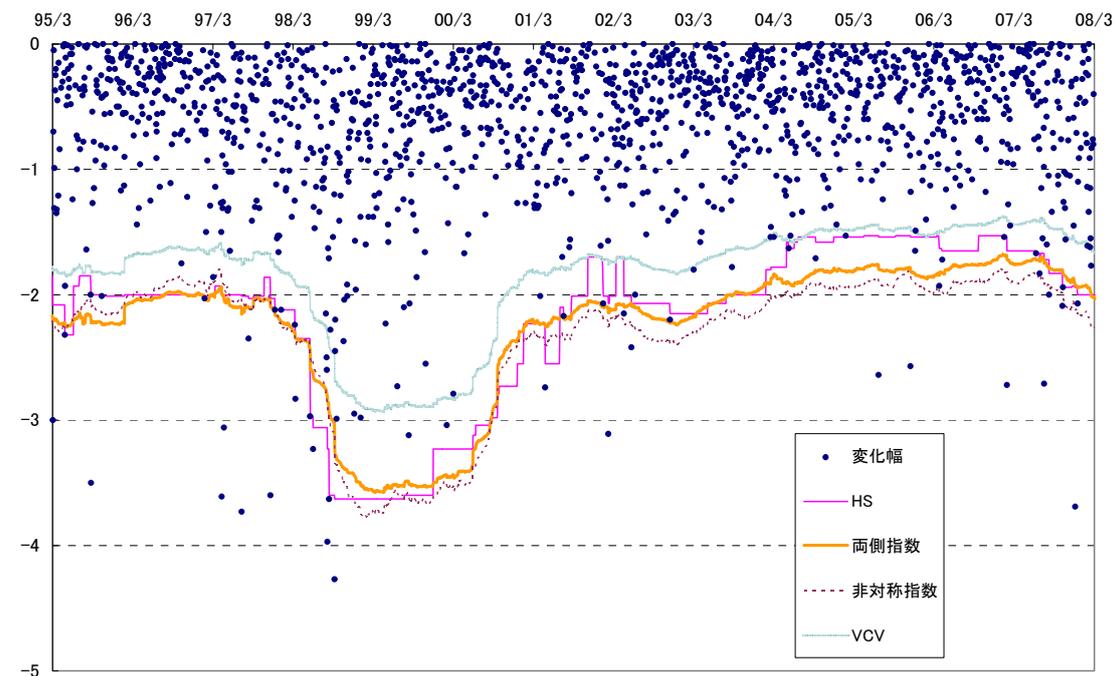


図 10 各種 VaR のバックテスト : 7 年円金利スワップ

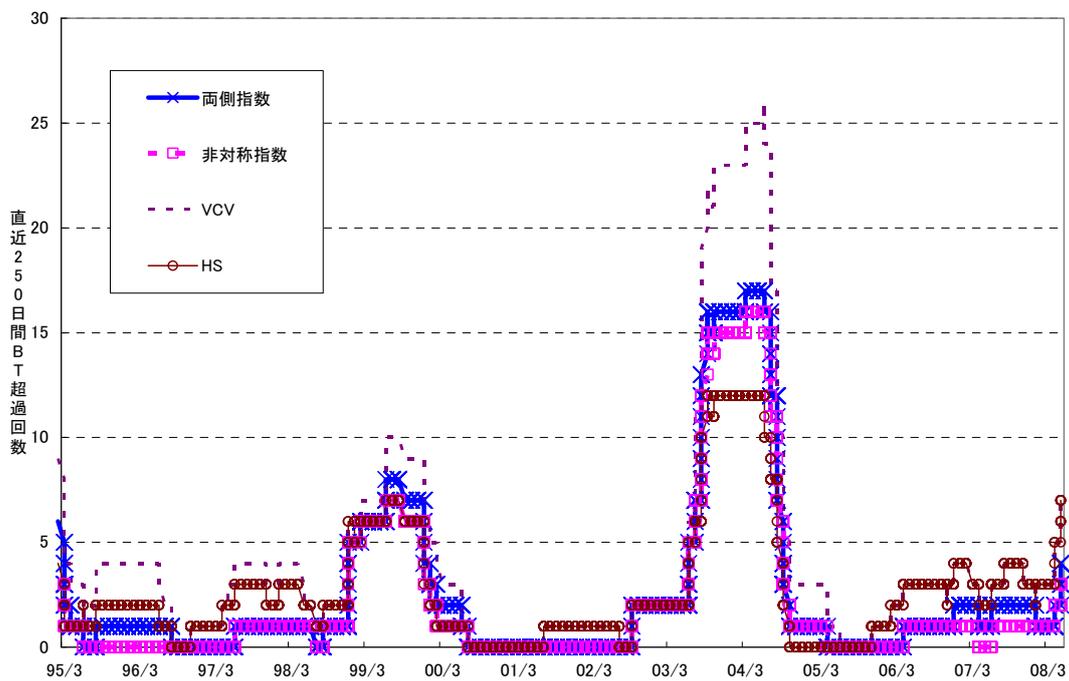
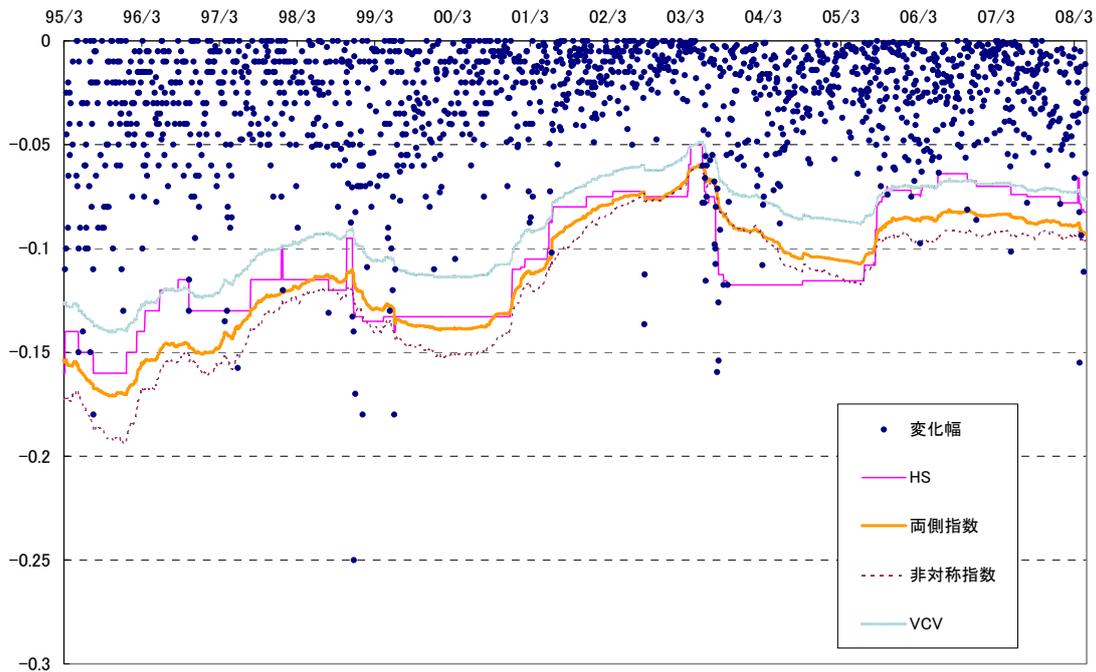
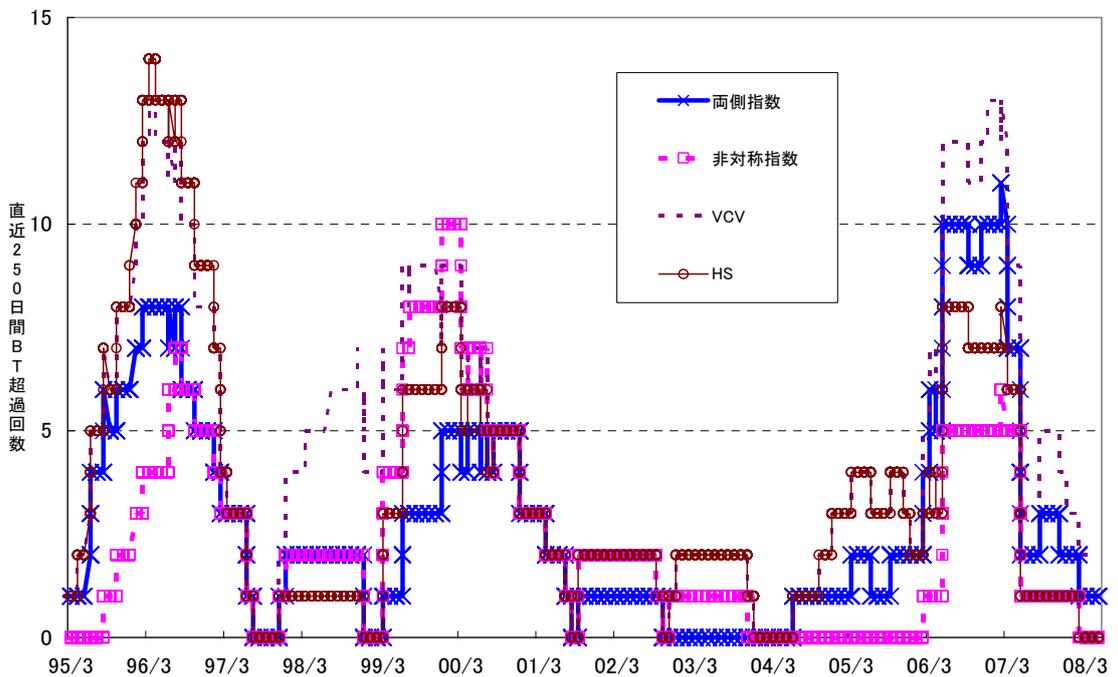
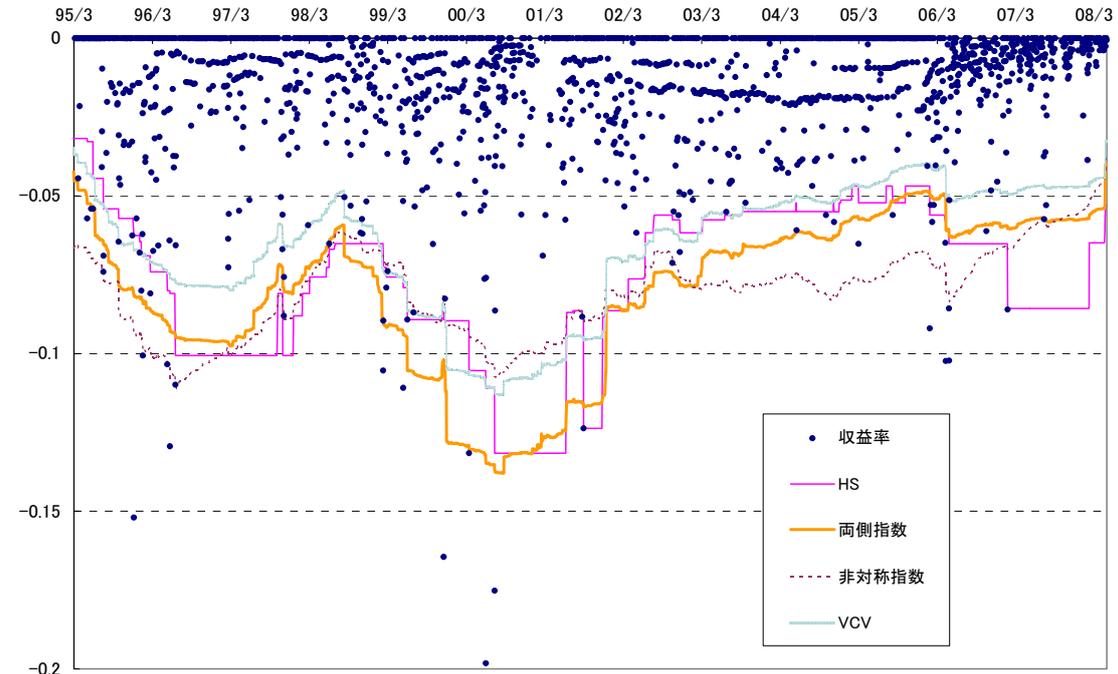


図 11 各種 VaR のバックテスト：6 ヵ月円 LIBOR



(3) サンプルポートフォリオに対するバックテスト

ここでは、金融機関での市場リスク管理で扱われる市場ポートフォリオを念頭に置きつつ、仮想的かつ簡単なサンプルポートフォリオを構成し、損益の分

布特性を把握したうえでバックテストを行い、そのパフォーマンスを考察する。

イ. サンプルポートフォリオの構成

表 1 のリスクファクターを対象にして、以下の 2 種類のタイプのポートフォリオをそれぞれ 100 個（計 200 ポートフォリオ）作成する。タイプに応じて各リスクファクターにかかるエクスポージャーの統計的性質が異なっているほか、タイプの中でもエクスポージャーをランダムに発生させるためポートフォリオごとにエクスポージャーは異なっている。

タイプ 1：表 1 のリスクファクターのうち、国内債券インデックスを除き広範に各リスクファクターの変動に合わせて、エクスポージャーを構成する。具体的には、為替 16 種類、株式インデックス 10 種類、日米欧金利の各々 13 種類のグリッド（1M、3M、6M、9M、1Y、3Y、5Y、7Y、10Y、13Y、15Y、20Y、30Y）をリスクファクターに採用する。各リスクファクターの 750 日分の変動率ボラティリティを求め、金利以外については、各リスクファクターのボラティリティの逆数をエクスポージャーの上限とする。金利については、各グリッドの期間とボラティリティの積の逆数をエクスポージャーの上限とする。0 から各エクスポージャーの上限の区間内の一様乱数を生成することにより、各リスクファクターに対するエクスポージャーを決定する。また、各リスクファクターのロングないしショートの方角性も対称にランダムに与える。

タイプ 2：表 1 のリスクファクターのうち、国内債券を中心に保有する金融機関を想定する。それ以外には、株式、金利、為替の中で主に円資産、米ドル資産、ユーロ資産を保有することを念頭に置きながら、エクスポージャーを構成する。タイプ 1 で採用したリスクファクターに加え 3 種類の国内債券インデックス（短期型、中期型、長期型）を混合したものをユニバースとする。まずは、為替、株式、金利、国内債券の各カテゴリーでエクスポージャーの上限をタイプ 1 と同様に決定する¹⁷。為替、株式、金利の各カテゴリー内では、日本円、米ドル、ユーロ資産の順で配分が相対的に高くなるようにエクスポージャーの調整を行いながら保有可能ポジション区間を決定する¹⁸。こ

¹⁷ 各カテゴリーの配分は、為替：株式：金利：国内債券＝20：100：55：300。国内債券カテゴリー内の配分は、短期：中期：長期＝75：20：10。

¹⁸ 為替カテゴリー内の配分は、米ドル：ユーロ：その他＝60：20：23。株式カテゴリー内の配分は、円株：米株：ユーロ株：その他株＝150：75：30：30。金利カテゴリー内の

の区間内において、一様にランダムなポジションを取ったとして仮想ポートフォリオ群を生成する。ただし、株式インデックスおよび国内債券インデックスについては、ショートポジションを取れないものとする。

ロ. サンプルポートフォリオの損益分布とVaR

各ポートフォリオの2001年3月～2008年3月の日次の損益分布に対して正規性の検定を行ったところ、Jarque-Bera、D'Agostino-Pearson、Geary検定のいずれの検定でも1%有意水準で正規性は棄却された。各タイプの100個のポートフォリオに関する統計量とAIC規準による正規分布と両側指数分布との選択結果は表3のようにまとめられる。表3の左欄に示した統計量は各ポートフォリオの日次損益の時系列分布から導出し、各タイプの100個のポートフォリオについて横軸の平均、標準偏差の欄でそれらの統計量の平均、標準偏差を示している。右欄の「正規分布」「両側指数」には、損益がそれぞれ正規分布、両側指数分布に従っていた場合の理論値を示している。下欄のAIC判定の正規／指数の欄は100個のポートフォリオのうちAIC規準により正規分布あるいは両側指数分布が選択された数を示す。図12は、99%VaRに相当する1%点について、表3で示した平均・標準偏差だけでなく、各タイプの100個のポートフォリオでの分布状況全体をヒストグラムで示したものである。

表3 サンプルポートフォリオに対する主要統計量およびAIC判定

	タイプ1		タイプ2		正規分布	両側指数
	平均	標準偏差	平均	標準偏差	理論値	理論値
平均	-0.003	0.103	-0.034	0.524	0.000	0.000
標準偏差	4.736	1.056	34.876	10.665	-	-
歪度	0.036	0.669	-0.073	0.225	0.000	0.000
尖度	4.570	4.374	1.761	0.806	0.000	3.000
1%点	-2.598	0.229	-2.659	0.195	-2.326	-2.766
5%点	-1.556	0.084	-1.613	0.052	-1.645	-1.628
10%点	-1.150	0.063	-1.192	0.041	-1.282	-1.138
90%点	1.148	0.061	1.190	0.041	1.282	1.138
95%点	1.564	0.088	1.596	0.059	1.645	1.628
99%点	2.622	0.232	2.555	0.155	2.326	2.766

AIC判定	タイプ1		タイプ2	
	正規	指数	正規	指数
	9	91	31	69

配分は、円金利：米金利：ユーロ金利=30：15：10であり、短期金利については1M～12Mの各短期金利の影響度が1/12になるように調整。

図 12 1%点のヒストグラム (左: タイプ1、右: タイプ2)

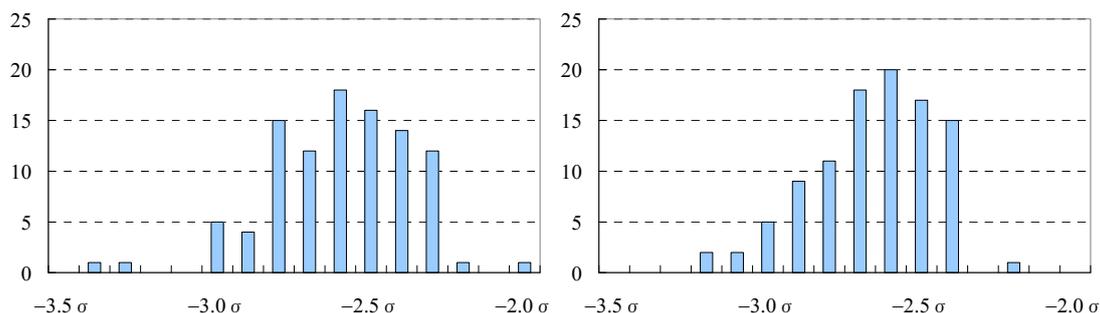


表 3 より、タイプ1およびタイプ2の各統計量の平均を正規分布・両側指数分布の理論値と比べてみると、相対的に両側指数分布のプロファイルに近いように窺われる。また、タイプ1とタイプ2のポートフォリオを比較すると、リスクの制限を強めたタイプ2では、タイプ1に比べ尖度が緩和され、1, 5, 95, 99%点の値での比較から損益分布の中心部で若干膨らみを持ち、正規分布に近づいていることがわかる。AICによる正規分布と指数分布の選択をみても、タイプ2で正規分布に近いという判定が増えている。AICでは分布全体でみて、タイプ2では正規分布に近いものが相応にあると判断されているが、99%VaRの値に直接関係する1%点に関する図12のヒストグラムをみると、タイプ2の平均や最頻値は正規分布の理論値(-2.33σ)よりも両側指数分布の理論値(-2.77σ)に近いことがわかる。

一般に、ポートフォリオの損益分布が複数の資産価格変動の和の分布であることに鑑みると、各資産の損益分布が独立に同一の分布に従っていれば中心極限定理により、ポートフォリオの損益分布は正規分布に近づくと予想される。しかしながら、①各資産変動の依存性が強く、②資産変動の時系列の相関も大きいことが多いことから、正規分布には近づきづらいものと考えられる。さらに、VaRとして算出するような信頼水準の分位点については、影響を与えるリスクファクターが限定されることも正規分布には近づかない理由として考えられる。

ハ. バックテスト

イで生成したタイプ1、タイプ2の仮想ポートフォリオ群を対象に、ボラティリティの観測データ日数 N を250日、500日、750日に設定し、HS法、VCV法、両側指数分布法、非対称指数の4種類の計測手法による99%VaRの

バックテストを行った結果を示す。データの始期は 2002 年 4 月とし、 $N=250$ 日の場合に VaR 計測可能となる 2003 年 4 月から 2008 年 3 月までの各日次時点をバックテスト基準日とする。タイプ 1、タイプ 2 のポートフォリオに対するバックテストの結果はそれぞれ表 4、表 5 のとおりである。表 4、表 5 では、2003 年 4 月から 2008 年 3 月の期間を年度ごとに区切り、各年度について (1) 節で検討した①適合性 (超過回数累積 2 乗誤差、超過回数絶対偏差)、②安定性 (VaR の日次最大変動率<上下各方向>、標準偏差)、③保守性 (超過回数の最大値、累積ペナルティ) の基準を評価している。安定性以外の指標は、観測期間 N によって計測可能な年度が異なる。

表 4 ポートフォリオ（タイプ1）のバックテスト結果

観測期間250日	両側指数			非対称指数			VCV			HS			
	平均	上側5%	下側5%	平均	上側5%	下側5%	平均	上側5%	下側5%	平均	上側5%	下側5%	
平均	1074	1831	504	1115	1712	614	2724	7064	692	996	2066	441	
超過回数	2003	1133	1506	246	1198	1506	278	2346	11250	98	640	1770	98
累積2乗	2004	1120	1531	141	1160	1531	293	1275	5995	89	666	1531	89
誤差	2005	1093	1538	278	1132	1538	436	847	2220	134	716	1346	138
	2006	759	1538	122	762	1538	144	2727	10220	148	1070	5898	62
	2007	1264	3875	237	1323	3163	279	6425	20031	355	1890	5219	205
平均	454	590	298	466	585	334	562	928	321	393	563	261	
超過回数	2003	466	603	214	478	603	216	517	1488	140	330	583	140
絶対偏差	2004	484	613	154	494	613	215	386	914	137	350	613	137
	2005	488	615	227	502	615	303	375	642	159	361	567	161
	2006	384	615	153	389	615	164	612	1515	166	392	1070	123
	2007	447	782	211	466	759	231	919	1876	263	534	1004	192
VaR変動性	標準偏差	0.61%	0.84%	0.49%	0.73%	0.82%	0.66%	0.61%	0.84%	0.49%	1.59%	2.31%	1.07%
	最大値	7.89%	17.35%	3.55%	5.43%	10.31%	3.07%	7.89%	17.35%	3.55%	24.80%	41.02%	13.81%
	最小値	-6.11%	-2.83%	-14.51%	-4.26%	-2.86%	-6.31%	-6.11%	-2.83%	-14.51%	-20.88%	-11.84%	-33.69%
平均	2.4	4.2	0.8	2.3	4.0	0.8	6.1	9.4	4.0	4.3	6.0	3.0	
超過回数の最大値	2003	2.0	6.0	0.0	2.0	6.0	0.0	5.1	11.0	1.0	3.5	6.0	1.0
	2004	1.6	6.0	0.0	1.6	6.0	0.0	4.8	12.0	2.0	3.1	6.0	1.0
	2005	1.4	4.0	0.0	1.1	3.0	0.0	3.9	8.0	1.0	3.0	6.0	1.0
	2006	2.1	6.0	0.0	1.7	4.0	0.0	6.2	12.0	2.0	4.9	9.0	2.0
	2007	5.0	10.0	1.0	5.1	10.0	1.0	10.4	19.0	5.0	7.0	10.0	3.0
平均	0.5	1.4	0.0	0.4	1.4	0.0	2.6	4.8	0.8	1.1	2.0	0.2	
累積ベナルティ	2003	0.3	2.0	0.0	0.3	2.0	0.0	2.0	9.0	0.0	0.5	3.0	0.0
	2004	0.1	1.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.4	2.0	0.0	0.2	1.0	0.0
	2005	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.9	5.0	0.0	0.3	2.0	0.0
	2006	0.2	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.4	7.0	0.0	1.1	4.0	0.0
	2007	1.8	7.0	0.0	1.7	6.0	0.0	7.2	15.0	1.0	3.4	8.0	0.0

観測期間500日	両側指数			非対称指数			VCV			HS			
	平均	上側5%	下側5%	平均	上側5%	下側5%	平均	上側5%	下側5%	平均	上側5%	下側5%	
平均	1428	3309	527	1482	3433	710	3311	8292	631	2397	6082	700	
超過回数	2004	1186	1469	83	1224	1469	221	1439	4167	87	981	3333	79
累積2乗	2005	1250	1538	578	1299	1538	704	806	1478	178	913	1538	168
誤差	2006	741	1538	124	939	1538	152	1722	6368	102	1362	5948	66
	2007	2536	9693	237	2466	11137	343	9275	26589	419	6334	21669	513
平均	485	674	288	513	706	354	598	1020	321	548	887	329	
超過回数	2004	471	588	130	489	588	190	410	743	132	391	780	128
絶対偏差	2005	537	615	325	551	615	370	400	600	170	431	615	176
	2006	375	615	153	442	615	168	493	1195	143	441	1112	125
	2007	558	1129	211	570	1246	252	1090	2102	268	929	2067	307
VaR変動性	標準偏差	0.36%	0.56%	0.26%	0.38%	0.45%	0.33%	0.36%	0.56%	0.26%	0.98%	1.54%	0.64%
	最大値	4.66%	10.77%	1.72%	2.85%	5.64%	1.54%	4.66%	10.77%	1.72%	14.55%	26.95%	7.26%
	最小値	-3.53%	-1.61%	-8.90%	-2.24%	-1.46%	-3.44%	-3.53%	-1.61%	-8.90%	-12.89%	-7.08%	-23.75%
平均	3.0	5.0	1.0	2.6	5.0	0.8	6.1	9.3	3.3	5.4	7.5	3.5	
超過回数の最大値	2004	1.7	7.0	0.0	1.5	6.0	0.0	4.2	11.0	0.0	3.6	9.0	0.0
	2005	1.0	3.0	0.0	0.8	2.0	0.0	2.4	5.0	1.0	2.2	4.0	0.0
	2006	2.2	5.0	0.0	1.6	5.0	0.0	5.5	11.0	2.0	5.3	10.0	2.0
	2007	6.9	16.0	1.0	6.5	15.0	1.0	12.2	23.0	5.0	10.6	17.0	5.0
平均	1.0	3.0	0.0	0.9	3.0	0.0	3.1	6.3	0.5	2.5	5.0	0.8	
累積ベナルティ	2004	0.1	1.0	0.0	0.1	1.0	0.0	0.6	3.0	0.0	0.6	3.0	0.0
	2005	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	1.0	0.0	0.1	0.0	0.0
	2006	0.2	1.0	0.0	0.1	1.0	0.0	2.4	7.0	0.0	1.9	6.0	0.0
	2007	3.6	12.0	0.0	3.3	12.0	0.0	9.4	20.0	1.0	7.6	15.0	1.0

観測期間750日	両側指数			非対称指数			VCV			HS			
	平均	上側5%	下側5%	平均	上側5%	下側5%	平均	上側5%	下側5%	平均	上側5%	下側5%	
平均	2053	6434	689	1971	5500	727	4654	14716	792	2755	7914	792	
超過回数	2005	1267	1444	596	1315	1444	756	920	1444	248	1089	1444	248
累積2乗	2006	929	1538	248	1112	1538	216	1010	4162	118	772	1538	132
誤差	2007	3964	16753	249	3486	13609	431	12033	39123	395	6403	21169	621
平均	546	816	349	559	824	355	673	1276	363	582	936	356	
超過回数	2005	529	578	333	542	578	406	428	578	205	477	578	205
絶対偏差	2006	443	615	200	495	615	200	396	951	150	375	615	158
	2007	664	1527	217	640	1437	276	1195	2780	268	894	2025	336
VaR変動性	標準偏差	0.28%	0.50%	0.18%	0.27%	0.35%	0.23%	0.28%	0.50%	0.18%	0.68%	1.04%	0.44%
	最大値	3.61%	8.42%	1.18%	2.02%	4.05%	1.01%	3.61%	8.42%	1.18%	7.85%	14.78%	3.40%
	最小値	-2.61%	-1.08%	-6.83%	-1.53%	-1.00%	-2.67%	-2.61%	-1.08%	-6.83%	-7.48%	-4.42%	-12.71%
平均	3.5	7.0	0.7	3.0	7.0	0.7	6.5	11.7	3.0	5.0	8.0	2.3	
超過回数の最大値	2005	0.5	2.0	0.0	0.4	2.0	0.0	1.7	4.0	0.0	1.1	3.0	0.0
	2006	1.5	4.0	0.0	1.0	4.0	0.0	3.9	8.0	1.0	2.8	6.0	0.0
	2007	8.3	19.0	1.0	7.6	18.0	1.0	14.0	25.0	5.0	11.0	19.0	5.0
平均	1.7	5.3	0.0	1.4	5.0	0.0	4.1	9.3	0.3	2.7	6.0	0.3	
累積ベナルティ	2005	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2006	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	5.0	0.0	0.4	3.0	0.0
	2007	4.9	16.0	0.0	4.3	14.0	0.0	11.2	24.0	1.0	7.8	16.0	1.0

表 5 ポートフォリオ（タイプ2）のバックテスト結果

観測期間250日		両側指数			非対称指数			VCV			HS		
		平均	上側5%	下側5%	平均	上側5%	下側5%	平均	上側5%	下側5%	平均	上側5%	下側5%
平均		1108	3385	475	1238	4080	570	3245	9143	816	1078	2414	469
超過回数	2003	1590	8876	182	2083	11542	198	5704	25024	82	1120	5340	72
累積2乗	2004	1167	5003	167	1376	5419	159	3214	12057	141	1071	3135	191
誤差	2005	1231	1538	528	1233	1538	560	754	1744	134	814	1458	234
	2006	525	1538	78	577	1538	78	2360	8398	118	1357	4958	76
	2007	1028	4411	209	920	2569	241	4193	13117	215	1029	3419	159
平均		431	717	284	450	770	321	629	1071	340	409	580	264
超過回数	2003	478	1275	182	539	1461	190	832	2206	132	386	966	127
絶対偏差	2004	443	960	176	469	960	172	615	1363	163	428	742	178
	2005	531	615	317	531	615	324	369	609	159	399	595	209
	2006	307	615	131	325	615	131	596	1386	151	450	1060	130
	2007	395	875	197	387	688	213	732	1541	200	384	787	172
VaR変動性	標準偏差	0.55%	0.63%	0.49%	0.73%	0.81%	0.67%	0.55%	0.63%	0.49%	1.52%	1.88%	1.21%
	最大値	5.35%	8.15%	3.42%	4.67%	6.49%	3.50%	5.35%	8.15%	3.42%	23.19%	39.15%	14.27%
	最小値	-4.56%	-3.02%	-6.74%	-4.27%	-3.14%	-5.88%	-4.56%	-3.02%	-6.74%	-20.09%	-13.03%	-28.38%
平均		2.8	5.2	1.6	2.9	5.4	1.4	6.8	10.0	4.4	4.6	6.2	3.0
超過回数	2003	3.4	11.0	1.0	3.7	12.0	1.0	7.8	16.0	3.0	5.2	9.0	3.0
の最大値	2004	3.2	10.0	0.0	3.6	11.0	0.0	7.5	15.0	2.0	4.5	8.0	1.0
	2005	1.0	3.0	0.0	1.0	3.0	0.0	3.5	7.0	1.0	2.7	6.0	1.0
	2006	2.3	4.0	1.0	2.2	5.0	0.0	5.9	10.0	2.0	5.0	8.0	2.0
	2007	4.4	10.0	1.0	4.1	8.0	1.0	9.2	16.0	4.0	5.6	9.0	3.0
平均		0.5	1.6	0.0	0.5	1.8	0.0	2.8	4.8	1.0	1.1	2.2	0.2
累積ペナルティ	2003	1.0	8.0	0.0	1.3	9.0	0.0	4.6	14.0	0.0	1.7	7.0	0.0
	2004	0.1	1.0	0.0	0.1	1.0	0.0	0.8	3.0	0.0	0.4	2.0	0.0
	2005	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	3.0	0.0	0.2	2.0	0.0
	2006	0.1	0.0	0.0	0.1	1.0	0.0	2.4	6.0	0.0	1.3	4.0	0.0
	2007	1.1	7.0	0.0	0.9	5.0	0.0	6.0	13.0	0.0	1.9	6.0	0.0

観測期間500日		両側指数			非対称指数			VCV			HS		
		平均	上側5%	下側5%	平均	上側5%	下側5%	平均	上側5%	下側5%	平均	上側5%	下側5%
平均		1234	3096	539	1172	2566	551	3000	6279	992	1968	4617	661
超過回数	2004	1578	6427	127	1488	5819	113	4065	17545	147	2416	7151	321
累積2乗	2005	1320	1538	704	1348	1538	850	1020	1538	328	1079	1538	402
誤差	2006	627	1538	96	717	1538	150	1839	6808	82	1421	6074	166
	2007	1413	4863	229	1136	3347	251	5076	16359	429	2954	10531	297
平均		445	612	291	449	612	307	612	869	337	539	757	340
超過回数	2004	462	1007	152	452	981	144	668	1466	162	586	1092	236
絶対偏差	2005	555	615	384	563	615	443	464	615	237	482	615	283
	2006	339	615	140	369	615	167	525	1269	133	472	1128	174
	2007	425	900	200	413	687	216	791	1479	265	617	1299	239
VaR変動性	標準偏差	0.30%	0.35%	0.25%	0.38%	0.42%	0.34%	0.30%	0.35%	0.25%	0.95%	1.36%	0.65%
	最大値	2.78%	5.05%	1.69%	2.36%	3.28%	1.78%	2.78%	5.05%	1.69%	14.77%	24.41%	8.66%
	最小値	-2.27%	-1.51%	-3.36%	-2.14%	-1.54%	-2.87%	-2.27%	-1.51%	-3.36%	-12.94%	-6.80%	-20.84%
平均		3.4	4.8	2.0	2.9	4.3	1.3	6.5	8.5	4.3	5.6	7.3	3.8
超過回数	2004	4.4	12.0	0.0	3.9	12.0	0.0	8.4	18.0	2.0	6.8	12.0	2.0
の最大値	2005	1.0	3.0	0.0	0.9	3.0	0.0	2.5	5.0	0.0	2.2	5.0	0.0
	2006	2.7	5.0	0.0	2.2	6.0	0.0	5.4	10.0	1.0	5.2	9.0	2.0
	2007	5.4	12.0	2.0	4.5	10.0	1.0	9.8	19.0	4.0	8.0	14.0	4.0
平均		0.7	2.0	0.0	0.5	1.8	0.0	2.7	4.8	0.8	2.0	3.5	0.5
累積ペナルティ	2004	0.5	2.0	0.0	0.4	2.0	0.0	1.8	4.0	0.0	1.7	5.0	0.0
	2005	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	1.0	0.0	0.1	0.0	0.0
	2006	0.2	1.0	0.0	0.1	2.0	0.0	2.2	7.0	0.0	1.8	5.0	0.0
	2007	2.1	8.0	0.0	1.4	7.0	0.0	6.8	16.0	0.0	4.5	13.0	0.0

観測期間750日		両側指数			非対称指数			VCV			HS		
		平均	上側5%	下側5%									
平均		1346	3629	586	1246	2154	589	2938	9008	626	1542	3738	585
超過回数	2005	1264	1444	664	1303	1444	756	1008	1444	334	1141	1444	498
累積2乗	2006	784	1538	180	831	1538	150	1245	5216	166	829	1538	164
誤差	2007	1990	8035	219	1605	4787	219	6562	20823	381	2655	10439	311
平均		470	752	305	469	648	316	587	1084	315	483	761	312
超過回数	2005	528	578	377	539	578	406	453	578	241	491	578	310
絶対偏差	2006	391	615	174	408	615	167	438	1074	174	393	615	172
	2007	489	1136	202	459	904	202	871	2020	254	564	1290	248
VaR変動性	標準偏差	0.20%	0.26%	0.17%	0.26%	0.29%	0.23%	0.20%	0.26%	0.17%	0.63%	0.95%	0.36%
	最大値	1.71%	3.28%	0.78%	1.48%	2.25%	1.01%	1.71%	3.28%	0.78%	7.05%	11.94%	2.89%
	最小値	-1.55%	-1.04%	-2.23%	-1.43%	-1.06%	-1.97%	-1.55%	-1.04%	-2.23%	-7.59%	-3.90%	-13.16%
平均		3.0	5.7	0.7	2.5	5.0	0.7	5.8	9.7	2.3	4.0	6.3	1.3
超過回数	2005	0.9	3.0	0.0	0.8	3.0	0.0	2.3	5.0	0.0	1.7	4.0	0.0
の最大値	2006	1.9	5.0	0.0	1.7	4.0	0.0	4.1	9.0	1.0	2.8	6.0	0.0
	2007	6.1	12.0	2.0	5.2	11.0	1.0	11.0	21.0	5.0	7.6	15.0	3.0
平均		0.9	4.0	0.0	0.7	3.0	0.0	3.1	7.3	0.3	1.5	4.0	0.0
累積ペナルティ	2005	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2006	0.1	1.0	0.0	0.1	0.0	0.0	1.3	6.0	0.0	0.4	3.0	0.0
	2007	2.7	10.0	0.0	2.1	9.0	0.0	8.0	18.0	1.0	4.2	12.0	0.0

このバックテストの結果は、以下のようにまとめられる。

- ① **VCV** 法については、**VaR** 変動性は小さく安定性が確保されている。一方、超過回数の理論値からの乖離は上側に大きく、適合性と保守性の面で問題を残している。
- ② **HS** 法については、超過回数の理論値からの上側への乖離は **VCV** に比べれば小さいものの、両側指数分布法に比べるとやや大きく、保守性の点でなお問題が残っている。観測期間が短い場合には理論値からの乖離が小さくなることがあるが、観測期間が長いときには理論値からの乖離が大きくなるように見受けられる。さらに、**VaR** 変動性は **VCV** 法や両側指数分布法に比べて大きく、安定性の面で他の手法より劣っている。
- ③ 両側指数分布法については、**VaR** 変動性が小さく、**VCV** 法と同様に安定性の面で **HS** 法よりも優れている。超過回数の理論値からの乖離も **HS** 法と同様に小さく、適合性の問題は少ない。また、最大超過回数、累積ペナルティともに小さく、保守性の観点での問題も同様に小さい。なお、非対称性を考慮した指数分布法を用いると、適合性が若干向上する場合もあったが、ポートフォリオ価値が一方的に上昇あるいは下落する局面では、観測が少ない方向の推定が不安定となり、適合性が低下する場合もみられた。

以上の結果から、本サンプルポートフォリオの損益は両側指数分布によって良好に記述されることがわかり、両側指数分布を用いた**VaR**計測法の有効性が示唆された。もっとも、ポートフォリオの構成によっては損益分布が両側指数分布からずれる可能性があるほか、本稿では仮定しなかった損益分布の自己相関やボラティリティの自己相関などによって両側指数分布による説明力が低下する可能性もある。観測期間が短い場合には保守性の観点から**VaR**の計測誤差に応じて両側指数分布法の**VaR**値を上乗せすることも考えられる。どの程度の上乗せを考えるかは、保守性の重要性を勘案して、4節で検討した計測誤差を参照しながら判断することになる。

6. おわりに

本稿では、リスク管理の実務について伝統的に使われてきたボラティリティを重視し、各資産価格のボラティリティに適切なスケール因子を乗じる形で**VaR** 値を算出する方法を分析した。個々の資産価格の変動は、正規分布より指

数分布に近いことを見出したうえで、パラメータの推定に用いる観測データのサンプルのサイズは有限であることも踏まえ、VaR 推定に伴う計測誤差の算出等を行った。また、個別のリスクファクターにランダムなエクスポージャーを与えて作成した複数のポートフォリオにおいても、損益分布には指数分布性が現れていることを示すとともに、バックテストにおいては、両側指数分布法を用いた VaR が HS 法のパフォーマンスを上回ることなどを示した。ただし、どの VaR 計測手法においても、過去のヒストリカル・データでは観測されないほどにボラティリティの急激に増大する局面では、バックテスト上の適合性を満たすことが難しいことも示された。

本稿の分析には、今後さらに検討すべき課題が残されている。まず、ポートフォリオを構成する各資産の変動分布からポートフォリオ全体の損益分布を明示的に導出することは試みなかった。そのためには、両側指数分布で捉えられるようなファットテイルな各資産の変動分布の他に、各資産変動分布間の依存構造を特定化する必要がある。VCV 法ではそれが線形の相関行列で表現されているが、必ずしもそうした相関行列で十分な説明力があるわけではなく、分布のテイルにおける依存関係の強まりや、線形相関では表しきれない複雑な依存構造についても考察することが望まれる。

また、資産価格変動の分析上は、変動分布の静学的な分析だけでなく、価格変動の動学的な構造（価格過程）の分析も重要である。例えば、予定されている行事に呼応した取引量ないし取引頻度の変化を記述できるモデルの構築、価格変動ボラティリティの非定常性に関する分析の応用、各資産の価格変動の動学的な因果関係の把握などが具体的な課題として挙げられる。さらに、本稿で扱ったような価格変動分析の成果を、ポートフォリオのリスクとリターンのコントロール・モデルに応用したり、ストレステストなどのリスク管理分野に広く活用していくことも課題といえよう。

以 上

補論 1 .VaR 計測誤差の解析的な分布

ポートフォリオの損益データの確率分布が与えられている場合、 $N\theta$ 番目のデータ ($N\theta$ は整数値とする) で VaR を算出する際の計測誤差は以下のように解析的に評価することができる。

同一の分布から独立にサンプリングした N 個のデータ X_1, \dots, X_N を考える。サンプリングする分布の分布関数は $F_X(\cdot)$ で与えられているとする。 X_1, \dots, X_N を昇順に並べ替え、 k 番目のデータを $X_{N:k}$ と表記する。 $X_{N:k}$ は k 番目の順位統計量と呼ばれ、 $X_{N:k}$ の分布関数は

$$F_{X_{N:k}}(x) \equiv I(F_X(x); k, N-k+1) = \frac{B(F_X(x); k, N-k+1)}{B(k, N-k+1)} \quad (\text{A-1})$$

で与えられる¹⁹。ただし、 $B(a, b)$ はベータ関数、 $B(x; a, b)$ (ただし、 $x \leq 1$) は不完全ベータ関数と呼ばれ、

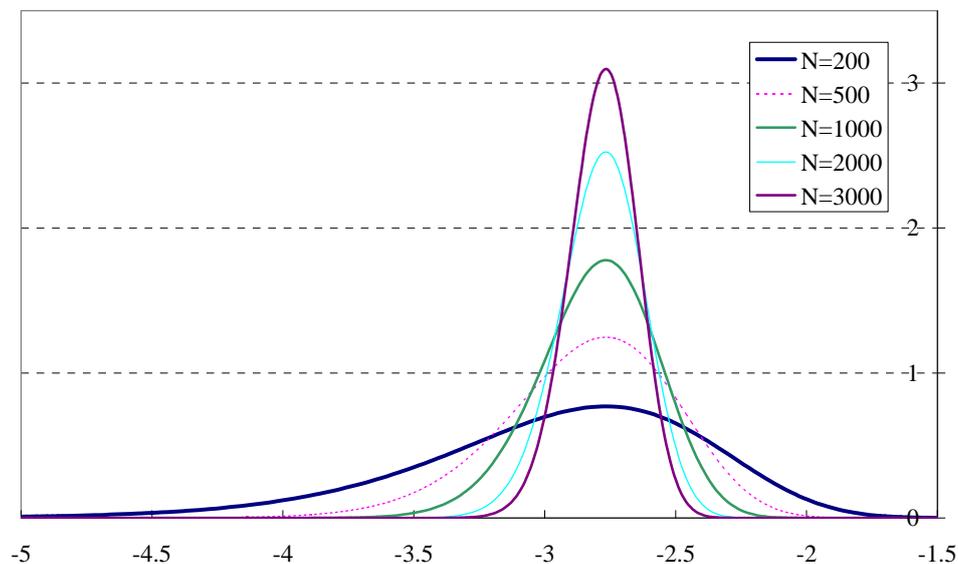
$$B(x; a, b) \equiv \int_0^x u^{a-1} (1-u)^{b-1} du, \quad B(a, b) \equiv B(1; a, b)$$

で定義される (詳細は、例えば Meucci [2005] を参照)。

(A-1) 式より、 $k = N\theta$ 番目のデータで与えられる VaR の分布の p 分位点は $F_X^{-1}(I^{-1}(p, k, N-k+1))$ で与えられる。分布 $F_X(\cdot)$ として両側指数分布をあてはめた際の $k = 0.01N$ 番目のデータ (99% VaR に相当) の確率密度関数を $N = 200, 500, 1000, 2000, 3000$ について示すと図 A-1 のとおりとなる。 N が小さいときには、左裾が重くなっていることが確認できる。

¹⁹ 確率密度関数は $f_{X_{N:k}}(x) = \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} F_X(x)^{k-1} (1-F_X(x))^{N-k} f_X(x)$ で表せる。ただし、 $f_X(x)$ は X_i の確率密度関数である。

図 A-1 順位統計量の確率密度関数（両側指数分布 1%分位点の場合）



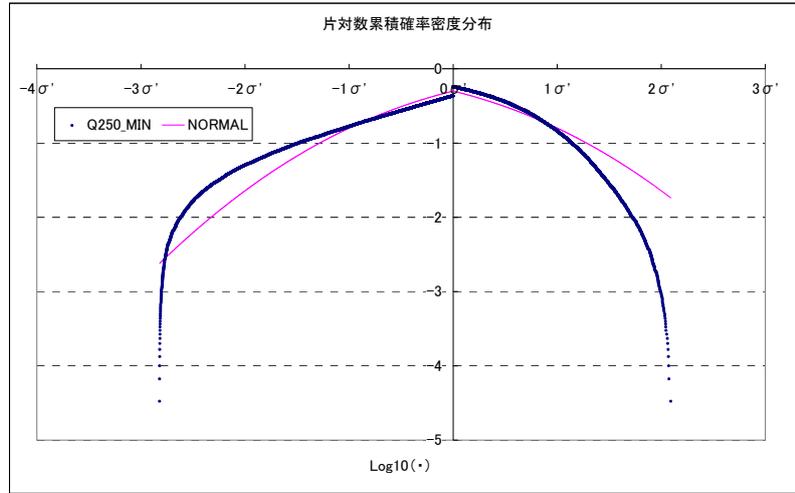
補論 2. 裾が重い分布での計測誤差

指数分布よりもさらに裾が厚いべき性のある分布を想定すると、シミュレーション中に時折発生する発散的変動によって計測誤差は大きく振れる。ここでは、べき性のある分布として(A-2)式で表される分布を想定する。

$$\Psi_{QPower}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(|x|+1)^{1-\alpha} & (x < 0) \\ 1 - \frac{1}{2}(x+1)^{1-\alpha} & (x \geq 0) \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

べき指数 $\alpha=3$ として、サンプル・サイズ 250 のサンプル群を 30,000 個生成し、各サンプル群における最小値の分布関数を片対数グラフで描画すると図A-2 のようになる。図A-2 では、標準偏差 σ に対して、平均 $= -6.8\sigma$ 、 $1\sigma' = 3.2\sigma$ で調整して表示している。

図 A-2 べき分布に従う 250 個のデータの最小値の分布



図A-2 から、分布は右側の $2\sigma'$ 近辺と左側の $-3\sigma'$ 近辺で垂直の形状になり、 $2\sigma'$ より上、 $-3\sigma'$ より下にはデータが存在していないことがわかる。右側の $2\sigma'$ は 0σ に相当している。一方、左側の $-3\sigma'$ は 250 のデータの最小値、すなわち、 $N=250$ として $1/N$ 分位点の理論上の最小値を示している。 $1/N$ 分位点は、理論上の最小値から 0σ まで振動し、推計値としての不安定性が高い。 $1/N$ 分位点を VaR に一般化しても同様である。 $1/N$ 分位点の理論上の最小値を一般化し、計測誤差 $\hat{\sigma}$ 対比で信頼水準の $100(1-\theta)\%$ の VaR を考えると、(A-3)式の最大値 $S_{\max}(\theta)$ を持つことがわかる（証明は補論 3 を参照）。観測数 250 での 99% VaR の挙動は $1/N$ 分位点と同様で 0σ 近辺から漸近的な最大値 $S_{\max}(0.01)\sigma$ の間を振動し、推計値としての不安定性が高いことが確かめられる。

$$S_{\max}(\theta) = \sqrt{\frac{(N-1)(N-[N\theta])}{N[N\theta]}} \quad (\text{A-3})$$

ここで、 $[z]$ は z を超えない整数を表すものとする。

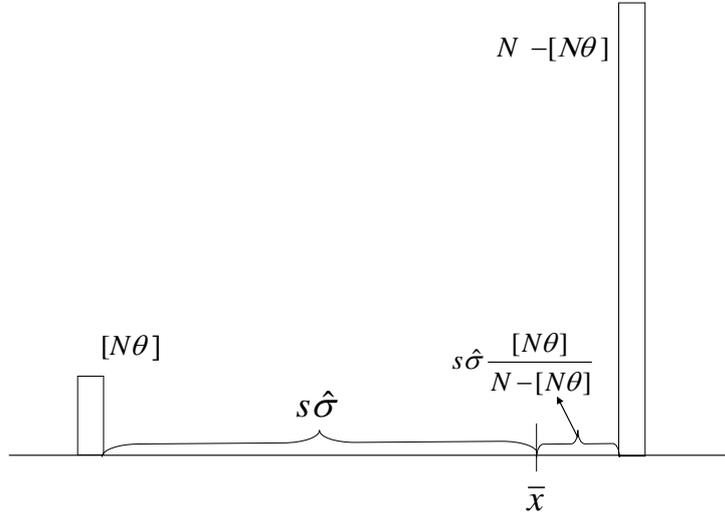
補論 3. ボラティリティ対比の VaR の最大値

VaR の信頼水準 $100(1-\theta)\%$ を所与とし、観測数 N のデータ x_1, \dots, x_N を与えて、その平均 \bar{x} 、標準偏差 $\hat{\sigma}$ を計算し、VaR ($100(1-\theta)\%$ 分位点) を $s\hat{\sigma}$ のように与

えると、 s の最大値は(A-3)式で与えられる。本補論ではこの点を証明する²⁰。

予め s が最大になる状況を説明すると、横軸にポートフォリオの損益、縦軸に頻度をとったとき、図A-3のような頻度分布を描く状況である。

図 A-3 VaR が最大となる頻度分布



証明は以下のとおり。 x_1, \dots, x_N を昇順に並べ \bar{x} を差し引いたデータを y_1, \dots, y_N とする。信頼水準 $100(1-\theta)\%$ の VaR が $s\hat{\sigma}$ で与えられるとすると、 $y_1 \leq \dots \leq y_{[N\theta]} \leq -s\hat{\sigma}$ となる。したがって、

$$-s\hat{\sigma}[N\theta] + y_{[N\theta]+1} + \dots + y_N \leq 0 \quad (\text{A-4})$$

となり、

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{N-1} (y_1^2 + \dots + y_{[N\theta]}^2 + y_{[N\theta]+1}^2 + \dots + y_N^2) \\ &\geq \frac{1}{N-1} (s^2 \hat{\sigma}^2 [N\theta] + y_{[N\theta]+1}^2 + \dots + y_N^2) \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

となる。ここで(A-4)式の条件のもとで(A-5)式右辺の $y_{[N\theta]+1}^2 + \dots + y_N^2$ の最小化を考え、ラグランジアンを $\mathcal{L} = y_{[N\theta]+1}^2 + \dots + y_N^2 + \eta(s\hat{\sigma}[N\theta] - y_{[N\theta]+1} - \dots - y_N)$ と置くと、 y_i ($i = [N\theta]+1, \dots, N$) に関する 1 階の条件から、 $\eta \geq 0$ で $y_{[N\theta]+1} = \dots = y_N = \eta/2$ 、また、線形相補性条件 $\eta(s\hat{\sigma}[N\theta] - y_{[N\theta]+1} - \dots - y_N) = 0$ から、 $\eta/2 = s\hat{\sigma}[N\theta]/(N - [N\theta])$ を満たすとき、 $y_{[N\theta]+1}^2 + \dots + y_N^2$ が最小値： $s^2 \hat{\sigma}^2 [N\theta]^2 / (N - [N\theta])$ になることがわかる。したがって、(A-5)式は

²⁰ 本証明については吉羽要直氏（日本銀行金融研究所）の協力を頂いた。

$$\hat{\sigma}^2 \geq \frac{1}{N-1} (s^2 \hat{\sigma}^2 [N\theta] + s^2 \hat{\sigma}^2 \frac{[N\theta]^2}{N-[N\theta]}) = \frac{s^2 \hat{\sigma}^2 N [N\theta]}{(N-1)(N-[N\theta])}$$

となり、変形すると、(A-3)式の $S_{\max}(\theta)$ を用いて、 $s \leq S_{\max}(\theta)$ が導かれる。

参考文献

- 安藤 美孝、「ヒストリカル法によるバリュー・アット・リスクの計測：市場価格変動の非定常性への実務的対応」、『金融研究』、第 23 巻別冊第 2 号、2004 年、1～41 頁
- 木島 正明、『金融リスクの計量化（上）：バリュー・アット・リスク』、金融財政事情研究会、1998 年
- 金融庁、「銀行法第十四条の二の規定に基づき、銀行がその保有する資産等に照らし自己資本の充実の状況が適当であるかどうかを判断するための基準」、金融庁告示第十九号、2006 年
- ジョン・ダニエルソン、森本 祐司、「市場リスクの予測について—EVT と GARCH モデルを用いたバリュー・アット・リスク算定の比較分析—」、『金融研究』、第 19 巻別冊第 2 号、2000 年、1～27 頁
- 丸茂 幸平、「分布展開法の市場リスク計測への応用」、日本銀行ワーキングペーパーシリーズ No.08-J-9、2008 年
- 蓑谷 千鳳彦、『金融データの統計分析』、東洋経済新報社、2001 年
- 山下 智志、『市場リスクの計量化と VaR』、朝倉書店、2000 年
- Basel Committee on Banking Supervision, “Supervisory framework for the use of “backtesting” in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirements,” Basel Committee Publications No. 22, January 1996a.
(<http://www.bis.org/>で入手可、日本銀行仮訳は <http://www.boj.or.jp/>で入手可)
- Basel Committee on Banking Supervision, “Amendment to the capital accord to incorporate market risks,” Basel Committee Publications No. 24, January 1996b.
(<http://www.bis.org/>で入手可、日本銀行仮訳は <http://www.boj.or.jp/>で入手可)
- D’Agostino, R. B., “Tests for the normal distribution,” *Goodness-of-fit Techniques*, D’Agostino, R. B. and M. A. Stephens eds., Marcel Dekker, 1986, pp.367–419.
- Johansen, A. and D. Sornette, “Large stock market price drawn downs are outliers,” *Journal of Risk*, 4(2), 2001, pp.69–110.
- Jorion, P., *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, Second edition, McGraw-Hill, 2001.

Kubota, K., “Why is it fat-tails,” in *Empirical Science of Financial Fluctuations: The Advent of Econophysics*, H. Takayasu (Ed.), Springer, 2000, pp.207–213.

Meucci, A., *Risk and Asset Allocation*, Springer-Verlag, 2005.

Miura, R. and S. Oue, “Statistical Methodologies for the Market Risk Measurement,” *Asia-Pacific Financial Markets*, 7(4), 2000, pp.305–319.