

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

早期行使条項付き派生証券のプライシングの効率化 -楠岡近似と積分曲線上の有限差分法-

ふじわら たけひろ
藤原武弘

Discussion Paper No. 2009-J-9

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 東京都中央区日本橋本石町 2-1-1

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい。

備考：日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

早期行使条項付き派生証券のプライシングの効率化 -楠岡近似と積分曲線上の有限差分法-

ふじわら たけひろ
藤原武弘*

要 旨

転換社債や優先株のように早期行使条項が内包された派生証券が数多く取引されている。こうした派生証券の価格は偏微分方程式の解として導出され、その数値計算法として有限差分法が広く用いられている。もっとも、派生商品のペイオフや原資産価格の確率過程によっては偏微分方程式が複雑になり、計算コストの著しい増大を招きやすいという問題点を抱えている。本稿では、その解決法として以下の方法を提案する。

- (1) 楠岡近似を用いて、偏微分方程式の生成作用素が単一のベクトル場で表現されるよう問題を分割する。
- (2) 単純化された問題について、対応するベクトル場の積分曲線に着目することで、1次元熱移流拡散方程式の問題に帰着させる。
- (3) 移流項を含まない1次元熱拡散方程式については、固有値分解を用いた有限差分法により効率的に計算を行う。
- (4) 移流項の考慮や作用素の再結合で必要となる格子点上の値は、スプライン補間で求めることにより、近似的な作用素を構成する。

さらに、上記の手法をヘストン・モデルにおけるヨーロピアン・プット・オプションのプライシングに適用し、その計算効率性を確認する。

キーワード：楠岡近似、有限差分法、ヘストン・モデル、早期行使条項付き派生証券

JEL classification: C60、G13

* 日本銀行金融研究所

(現 野村証券金融工学研究センター、E-mail: fujiwara-0hw6@jp.nomura.com)

本稿の作成に当たっては、楠岡成雄教授（東京大学大学院）、金融研究所スタッフから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行あるいは野村証券の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

目次

1	はじめに	1
2	既存の有限差分法との比較	2
2.1	有限差分法の手順と誤差評価	2
2.2	本稿で提案する手法と既存手法の比較	4
3	近似手法の導出と誤差評価	5
3.1	準備	5
3.2	楠岡近似による拡散半群の近似	6
3.3	境界値条件の付与による誤差の評価	7
3.4	近似作用素の条件と誤差評価	10
4	積分曲線上における有限差分法	12
4.1	d 次元空間モデルの1次元熱方程式への帰着	12
4.2	積分曲線上の近似作用素の構成	13
5	派生証券の価格計算への応用	17
5.1	ヘストン・モデル	17
5.2	計算の準備	17
5.3	計算の手順	21
5.4	数値実験による評価	23
補論 1	不完全ガンマ関数を用いる方法	25
補論 2	非可換代数に関する諸結果	27
	参考文献	29

1 はじめに

派生商品の価格は、原資産価格の変動を表す確率過程を仮定したうえで、ペイオフの期待値として評価される。想定する拡散過程とペイオフが極めて単純な場合には、ブラック・ショールズ公式のように期待値で表される価格を解析的に導出できることがある。これが困難な場合でも、想定する拡散過程とペイオフが比較的単純な場合には、高速フーリエ変換や漸近展開法のような準解析的手法を用いて、価格を効率的に評価することができる。

しかし、現実の原資産価格変動をより精緻に表現した複雑な確率過程を想定したり、ペイオフが複雑な派生商品を考える場合には、解析的手法や準解析的手法の適用は困難となる。こうしたケースでは、モンテカルロ法や有限差分法によるプライシングが用いられる。モンテカルロ法は確率変動をシミュレートし期待値を評価する手法である。一方、有限差分法は派生商品の価格が満たす偏微分方程式を導出したうえで、その偏微分方程式を離散化して数値計算より解く手法である。

両手法には、以下のような相互補完的な特徴がある。モンテカルロ法は、確率的ファクターが多数存在する高次元のモデルで有効なほか、ペイオフが原資産価格の経路に依存する経路依存型派生商品のプライシングでも有効である。しかし、満期以前に行使可能な早期行使条項付き派生商品のプライシングへの適用は一般的には難しい。一方、有限差分法は、早期行使条項付き派生商品のプライシングに有効であり、満期でペイオフが決まるヨーロピアン型派生商品のプライシングにおいても低次元のモデルを想定する際には計算コストの面でモンテカルロ法よりも優位となる。

このように、有限差分法は派生商品のプライシングにおいて重要な数値計算法となっているが、既存の手法では、十分な精度を得るためには離散化の際の時間分割数や原資産価格の状態に関する分割数（空間分割数）を高める必要があり、計算時間の増大に繋がるケースが少なくない。特に、ペイオフ関数が滑らかでない場合に、この問題が深刻となる。

本稿では、ペイオフを偏微分方程式の解に対応させる作用素を考え、楠岡近似と呼ばれる拡散過程の離散化手法により近似作用素を与えることで、効率的なプライシング手法を考案する。まず、2節では、既存の有限差分法の誤差収束と計算コストを示し、本稿で提案する手法との比較結果を予め整理する。3節では近似作用素を導出し、その理論的な誤差評価を行う。4節では実装のために必要な拡張を行う。最後に5節では、具体的な応用事例を示した後、プライシングの計算効率の改善を数値実験によって確認する。実装に主たる関心がある読者は、2節から5節に読み進むことも可能である。

2 既存の有限差分法との比較

まず、有限差分法の手順を確認し、既存の標準的な手法について誤差収束と計算コストを概観する。そのうえで、本稿で提案した手法の理論値を既存手法と比較する。なお、本稿の解説は、ヨーロピアン型の派生商品に沿って行うが、バミューダ型にも拡張可能である。

2.1 有限差分法の手順と誤差評価

満期の原資産価格によりペイオフが決定するヨーロピアン型の派生商品の価格は、以下の偏微分方程式 (PDE) に従うことが知られている (Feynman-Kac の定理)。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \mathcal{L}u(t, x), \\ u(0, x) = g(x), \quad g \in C_b(\mathbb{R}^N), \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (2.1)$$
$$\mathcal{L}h(x) := \sum_{i=0}^N c^i(x) \partial_i h(x) + \sum_{0 \leq i < j \leq N} c^{ij}(x) \partial_i \partial_j h(x), \quad h \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N),$$
$$c^i, c^{ij} \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N), \quad i, j = 0, \dots, N.$$

ただし、 $C_b^m(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M)$ は \mathbb{R}^N から \mathbb{R}^M への m 階微分可能、かつ微分値が有界な関数全体と定義し、 $C_b^m(\mathbb{R}^N) := C_b^m(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, $C_b(\mathbb{R}^N) := C_b^0(\mathbb{R}^N)$ と定める。ここで N は状態変数 x の次元であり、満期時のペイオフ $u(0, x)$ を試験関数 $g(x)$ で与えている。本稿では、試験関数 g を関数 $u(t, \cdot)$ に対応させる作用素を $e^{t\mathcal{L}}$ と表記し、作用素 $e^{t\mathcal{L}}$ を拡散半群、微分作用素 \mathcal{L} を PDE (2.1) の空間微分作用素と呼ぶこととする。

注意 2.1. 一般には、微分作用素 \mathcal{L} は PDE (2.1)、あるいは、拡散半群 $e^{t\mathcal{L}}$ の (無限小) 生成作用素と呼ばれることが多い。

注意 2.2. 試験関数 g は満期 T におけるペイオフを表し、解 $u(t, x)$ は時刻 $T - t$ におけるオプション価格を表す。

有限差分法の一般的な手順

[手順 0] (空間微分作用素 \mathcal{L} の分割) PDE (2.1) の空間微分作用素 \mathcal{L} の分割を考えることで、問題を空間が 1 次元である場合に帰着させることができる。以下では、簡単化のため、空間の次元 N は 1 とする。

[手順 1] (空間の制限と境界値条件の付与) 空間を閉区間 $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ に制限し、境界における解の挙動 (境界値条件) を付与する。

[手順 2] (差分近似) 時間 $[0, T']$ と空間 $[a, b]$ をそれぞれ以下の格子点において離散化する。

$$0 = t_0 \leq \dots \leq t_{n'} = T', \quad a = x_0 \leq \dots \leq x_m = b, \quad n', m \in \mathbb{N}.$$

関数 $u(t, x)$ の時間微分 $\frac{\partial}{\partial t}u(t, x)$, 空間微分 $\mathcal{L}u(t, x)$ を以下の格子点での $u(t, x)$ の値を用いて差分近似する。

$$\{u(t_i, x_j)\}_{i=0, \dots, n', j=0, \dots, m}$$

[手順 3] (方程式を解く) 手順 2 により得られる連立方程式を解き、派生商品価格の近似値を求める。

各手順における誤差や計算コストの発生

次に手順 0~3 について、既存手法、及びその精度と計算コストを確認する。代表的な有限差分法として、陽解法、陰解法、クランク・ニコルソン法、ADI 法 (交互方向陰解法) などがあるが、以下では、本稿の手法と比較するため、これらの誤差収束と計算コストに関するオーダーについて上記の手順に沿って予め示しておく。

[手順 0] ADI 法は他の既存手法に比べ優れているが、その優位性は次元の減少法に伴う工夫に起因している。この工夫により、試験関数が滑らかである場合、時間の分割数 n' に対して誤差は $O(n'^{-2})$ で収束する。

[手順 1] 空間を閉区間に制限することに伴う誤差には、閉区間への打ち切りに起因するものと刻み幅の増大に起因するもののが存在する。後者については手順 2 で考察する。

[手順 2] ADI 法、陽解法、陰解法及びクランク・ニコルソン法ともに、試験関数が滑らかであるとき、空間の分割数 m について誤差は $O(m^{-2})$ で収束する。また、時間の分割数 n' については、陽解法、陰解法では誤差は $O(n'^{-1})$ で収束し、ADI 法及びクランク・ニコルソン法では $O(n'^{-2})$ で収束する。また、陽解法に関しては時間と空間に関する分割幅 s, ϵ を定める際、解の安定性を保証するために s/ϵ^2 をモデルに応じて決まるある定数より小さくとる必要がある (安定性条件)。

[手順 3] ADI 法では、手順 2 で導かれる連立方程式の係数行列は三重対角行列となる。この連立方程式を解くための計算コストは、空間の分割数 m に対して $O(m)$ となる。1 ステップあたり m^{N-1} 回連立方程式を解くため、全体として $O(m^N)$ となる。

注意 2.3. 陰解法、クランク・ニコルソン法では、 $N \geq 2$ の場合、係数行列が三重対角行列となるとは限らない。

2.2 本稿で提案する手法と既存手法の比較

本稿で提案する方法を 2.1 節で示した既存の有限差分法の手順に沿って示すと以下のとおりである。

本稿で提案する手法

[手順 0] 空間微分作用素に代わる新しい作用素を用いて、PDE (2.1) を 1 次元熱移流拡散方程式により近似する。試験関数が滑らかな場合、同方程式の解の収束オーダーは 6 次となり、試験関数が滑らかではなくても有界である場合においては 4 次となる。なお、5 節の数値実験では、滑らかではない有界な関数に対しても 6 次の収束オーダーになることが確認されている。また、任意の自然数 p に対して、同様の手法により $2p$ 次まで改善できる可能性がある。こうした収束オーダーの高さは、本稿の手法が高い計算効率性を有していることを理論的に示している。

[手順 1] 空間の制限及び境界値条件の付与に伴う誤差を評価する。

[手順 2,3] 1 次元熱移流拡散方程式を、スプライン補間と 1 次元熱伝導方程式の有限差分法により近似計算する。有限差分法においては、空間微分に関して、 $2w$ 次微分まで差分近似を行い、空間の分割 m に関する誤差の収束オーダーを $O(m^{-2w})$ に改善する。また、時間に関する離散化誤差は、行列の反復計算によって小さくする。ここでは、係数行列がモデル依存しない点に注目し、固有値と固有ベクトルを予め求めることによって計算効率性を高める。

注意 2.4. 差分近似を $2w$ 次微分まで行うため、試験関数の $2w + 1$ 階微分値までが空間分割誤差に影響を与える。3.4 節で紹介する数値積分法、あるいは、補論 1 で紹介する不完全ガンマ関数を用いる方法を併用することで、試験関数が滑らかでない場合にも本稿の手法が適用可能となる。

注意 2.5. 本稿の手法では、熱伝導方程式に関する時間分割の誤差が 0 となるため、時間分割の誤差に関しては、手順 0 における空間微分作用素 \mathcal{L} の分割による誤差のみを考慮すればよい。

既存手法との比較

こうした本稿の計算手法を ADI 法と比較すると表 1 のようになる。ただし、 N は空間の次元、 K は閉区間 $[a, b]$ への制限に際して、 $K = -a = b$ としたものである。

表 1 ADI 法との計算効率性比較

	ADI 法	New
誤差の収束オーダー（時間分割）	2	4 [6]
誤差の収束オーダー（空間分割）	2	$2w, w \in \mathbb{N}$
計算コストのオーダー（時間分割）	1	1
計算コストのオーダー（空間分割）	N	$N + 1$
空間の制限による誤差	—	$\frac{1}{K}e^{-K^2}$
試験関数（ペイオフ関数）	滑らかな関数	有界な関数 [滑らかな関数]

3 近似手法の導出と誤差評価

本節では、3.1 節で他の節でも用いる基本概念の準備を行ったうえで、(2.1) 式の空間微分作用素 \mathcal{L} で表現される問題を「生成作用素が単一のベクトル場で表現される境界値条件付きの偏微分方程式」の場合に単純化する。その際、以下のような 3 段階の手順を経る。まず、3.2 節で生成作用素 \mathcal{L} が単一のベクトル場で表現されるよう単純化する。通常の有限差分法では空間を直交する格子で分割するが、本稿の手法はベクトル場に沿った積分曲線上に格子を取る点が異なる。この点が大幅な計算の効率化をもたらす。3.3 節では、空間の境界値条件を付与することに伴い、作用素の修正を行う。その際、ベクトル場に沿った積分曲線を用いる。修正された作用素を用いた場合の誤差を評価する。最後に、3.4 節で、各々のベクトル場について単純化された作用素の近似作用素を考え、これを再合成することにより近似作用素を構築する。また、その際の誤差評価も行い、既存手法と比べ効率性が高いことを確認する。

3.1 準備

ここでは、本稿で用いる基本概念を整理する。

定義 3.1. (1) 以下の関数を考える。

$$V := {}^t(v^1, \dots, v^N) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N).$$

ただし、 t は行列の転置を表す。

この関数に対して、以下のベクトル場（滑らかな 1 階の微分作用素） \hat{V} を定める。

$$\hat{V}g(x) := \sum_{i=1}^N v^i(x) \partial_i g(x).$$

(2) $n + 1$ 階の微分作用素 \hat{V}^{n+1} を以下のとおり帰納的に定める。

$$\hat{V}^{n+1}g(x) := \hat{V} \left(\hat{V}^n g \right) (x), \quad g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N).$$

ここで、2 階の微分作用素 \hat{V}^2 は以下のとおりである。

$$\hat{V}^2 g(x) = \sum_{i,j=1}^N (v^i(x) \partial_i v^j(x) \partial_j g(x) + v^i(x) v^j(x) \partial_{ij} g(x)).$$

定義 3.2. 以下の常微分方程式の解を $\text{Exp}(t, V)(x)$ と書く。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y(t, x) = V(y(t, x)) \\ y(0, x) = x \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad V \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N).$$

定義 3.3. また、対角成分が $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, m$ である $m+1$ 次の対角行列を以下で表す。

$$\text{diag}[\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m].$$

3.2 楠岡近似による拡散半群の近似

本小節では、拡散過程の離散化法として知られる楠岡近似 (Kusuoka [2001]、Ninomiya and Victoir [2008]、Fujiwara [2006] 等) で発展した拡散半群の分割に関する諸結果を一般的な形でまとめた定理を示す。以下、実数 $\bar{T} \geq 0$ は固定する。

作用素 $e^{t\mathcal{L}}$ における生成作用素 \mathcal{L} が関数 $V_i \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, $i = 0, \dots, d+1$ に関するベクトル場 \hat{V}_i を用いて以下のとおり表現できる場合を考える。

$$\mathcal{L} = \hat{V}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \hat{V}_i^2. \quad (3.1)$$

さらに、ベクトル場 \hat{V}_0 について以下の分解を考える。

$$\hat{V}_0 := \sum_{i=0}^d \hat{V}_{0i}, \quad V_{0i} \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N), \quad i = 0, \dots, d+1.$$

本稿では、特に関数 V_{0i} , $i = 0, \dots, d+1$ に以下の仮定をおく。ただし、本節の定理はこの仮定に無関係に成立する。

$$\begin{aligned} [\hat{V}_{00}, \hat{V}_{0d+1}] &:= \hat{V}_{00} \hat{V}_{0d+1} - \hat{V}_{0d+1} \hat{V}_{00} = 0, \\ [\hat{V}_{00}, \hat{V}_i] &= 0, \quad i = 1, \dots, d, \\ \hat{V}_{0i} &= b_i \hat{V}_i, \quad b_i \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N), \quad i = 1, \dots, d, \\ \hat{V}_{0d+1} &\perp \hat{V}_i, \quad i = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

すなわち、ベクトル場 \hat{V}_{00} は $\hat{V}_{0d+1}, \hat{V}_i$, $i = 1, \dots, d$ と可換、ベクトル場 \hat{V}_{0i} はベクトル場 \hat{V}_i , $i = 1, \dots, d$ に従属し、ベクトル場 \hat{V}_{0d+1} は \hat{V}_i , $i = 1, \dots, d$ と直交すると仮定する。本稿では、簡単化のため、 $V_{0d+1} = 0$ となる場合を考える。

定義 3.4. 作用素、及び定数を以下のとおり定義する。

$$\begin{aligned} P_t^{(i)} &:= e^{\frac{t}{2}\hat{V}_{0i}} e^{t\hat{V}_i^2} e^{\frac{t}{2}\hat{V}_{0i}}, \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, d, \\ P_t &:= P_{t/2}^{(1)} \cdots P_{t/2}^{(d-1)} P_t^{(d)} P_{t/2}^{(d-1)} \cdots P_{t/2}^{(1)}, \quad t \geq 0, \\ f_i(\alpha) &:= \prod_{j \in \alpha \setminus \{i\}} \frac{i^2}{i^2 - j^2}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad \alpha \subset \mathbb{N}, \\ P[\alpha, n'] &:= \sum_{i \in \alpha} f_i(\alpha) (P_{\bar{T}/in'})^{in'}, \quad n' \in \mathbb{N}, \quad \alpha \subset \mathbb{N}. \end{aligned}$$

定義 3.5. (1) 有界可測関数 g に対して、以下を定める。

$$\|g\|_\infty := \operatorname{ess.\,sup}_{x \in \mathbb{R}^N} |g(x)|.$$

(2) w 階微分可能な \mathbb{R}^N 上の関数 g に対して、以下を定める。

$$\|g\|_{(w)} := \max_{\substack{l \leq w \\ i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, N\}}} \|\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_l} g\|_\infty.$$

このとき、近似誤差の上限値に関する以下の定理が成立する。

定理 3.1. (1) 自然数の集合 α で $\#\alpha \leq 3$ となるものに対して、以下を満たす正数 C と自然数 w が存在する。ただし、 $\#\alpha$ は α の要素の数を表す。

$$\left\| \left(e^{\bar{T}\mathcal{L}} - P[\alpha, n'] e^{\bar{T}\hat{V}_{00}} \right) g \right\|_\infty \leq \frac{C}{n'^{2\#\alpha}} \|g\|_{(w)}, \quad g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N), \quad n' \in \mathbb{N}.$$

(2) ベクトル場が UFG 条件 (Kusuoka [2003]) を満たすとき、自然数の集合 α で、 $\#\alpha \leq 2$ となるものに対して、以下を満たす正数 C と自然数 w が存在する。

$$\left\| \left(e^{\bar{T}\mathcal{L}} - P[\alpha, n'] e^{\bar{T}\hat{V}_{00}} \right) g \right\|_\infty \leq \frac{C}{n'^{2\#\alpha}} \|g\|_\infty, \quad g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N), \quad n' \in \mathbb{N}.$$

注意 3.1. 上記の定理は、誤差に関する代数的評価と解析的評価とで証明される (Fujiwara [2006])。また、(2) では Malliavin 解析を用いたより詳細な評価 (Kusuoka [2003, 2006]) が必要となる。代数的評価に関しては一般の $\alpha \subset \mathbb{N}$ に対して成立し (補論 2)、数値実験により上の定理が一般に成立することが期待されている (藤原 [2006])。また、飛躍型拡散半群に関して、Jacod *et al.* [2005] と同様の条件の下で拡張可能である (藤原 [2006]、Lyons and Victoir [2004])。

3.3 境界値条件の付与による誤差の評価

本小節では、前小節で構成した近似作用素に境界値条件を付与し、そのもとで近似作用素 $P_{t,K}$ を導出する。境界値条件は各次元に関して $[-K, K]$ の閉区間で与える。また、同条件の付与に伴う誤差の増大を評価する。以下、 $\bar{n} \in \mathbb{N}$ 、 $x_0 \in \mathbb{R}^N$ は固定する。

定義 3.6. (1) 点 $x \in \mathbb{R}^N$ を通る、関数 $V \in C_b(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ の積分曲線を次式で定義する。

$$\text{IC}[V](x) := \{ \text{Exp}(s, V)(x) \in \mathbb{R}^N \mid s \in \mathbb{R} \}.$$

(2) S_d は $\{1, \dots, d\}$ 上の置換全体とする。

ここで、ベクトル場 \hat{V}_i に以下の条件 3.1 を仮定する。

条件 3.1. (1-a) 実数列 $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$, $\tau_i \in S_d$, $\tau_i(1) = i$, $i = 1, \dots, d$ に対して、以下を満たす実数列 $t_j[i]$, $i, j = 1, \dots, d$ と点 $x(t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^N$ が存在する。

$$t_i[i] = t_i, \quad i = 1, \dots, d,$$

$$x(t_1, t_2, \dots, t_d) = \text{Exp}(t_{\tau_i(d)}[i], V_{\tau_i(d)}) \circ \dots \circ \text{Exp}(t_{\tau_i(1)}[i], V_{\tau_i(1)})(x_0), \quad i = 1, \dots, d.$$

ただし、 \circ は関数の合成積を表す。

議論の簡単化のため、上式を満たす点列は一意に存在すると仮定し、以下で表す。

$$t_j[i, \tau_1, \dots, \tau_d](t_1, \dots, t_d), \quad i, j = 1, \dots, d.$$

(1-b) さらに、以下を満たす実数 C が存在すると仮定する。

$$\max_{\substack{i, j \in \{1, \dots, d\} \\ \tau_i \in S_d}} |t_j[i, \tau_1, \dots, \tau_d](t_1, \dots, t_d)| \leq C \max_{i \in \{1, \dots, d\}} |t_i|, \quad \{t_i\}_{i=1, \dots, d} \subset \mathbb{R}.$$

(2-a) 実数列 $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ 及び、 $\tau \in S_d$ に対して、以下を満たす実数列 $t_1[\tau], \dots, t_d[\tau] \in \mathbb{R}$ が存在する。

$$x(t_1, t_2, \dots, t_d) = \text{Exp}(t_d[\tau], V_{\tau(d)}) \circ \dots \circ \text{Exp}(t_1[\tau], V_{\tau(1)})(x_0) \in \mathbb{R}^N.$$

議論の簡単化のため、上式を満たす点列は一意に存在すると仮定し、以下で表す。

$$t_i[\tau](t_1, \dots, t_d), \quad i = 1, \dots, d.$$

(2-b) さらに、以下を満たす実数 C が存在すると仮定する。

$$\max_{\substack{i \in \{1, \dots, d\} \\ \tau \in S_d}} |t_i[\tau](t_1, \dots, t_d)| \leq C \max_{i \in \{1, \dots, d\}} |t_i|.$$

定義 3.7. (1) ベクトル場の族 $\{\hat{V}_i\}_{i=1, \dots, d}$ に関する積分多様体 IM , $\text{IM}[i] \subset \mathbb{R}^N$, $i = 1, \dots, d$ を以下で定義する。

$$\text{IM} := \{x(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^N \mid t_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, d\},$$

$$\text{IM}[i] := \{x(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^N \mid t_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, d\}.$$

- (2) 自然数 $i \in \{1, \dots, d\}$ に対し、次式を満たす IM 上の関数 $p_1[i]$ と IM から IM[i] への写像 $p_2[i]$ を定義する。

$$x = \text{Exp}(p_1[i](x), V_i)(p_2[i](x)).$$

- (3) 自然数 $i \in \{1, \dots, d\}$ に対し、次式を満たす $\mathbb{R} \times \text{IM}[i]$ 上の関数 $\varphi[i]$ を定義する。

$$\varphi[i](u, x(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_d)) := p_1[i](x(t_1, \dots, t_{i-1}, u, t_{i+1}, \dots, t_d)).$$

また、 $\mathbb{R} \times \text{IM}[i]$ 上の関数 $\varphi_j[i]$, $j = 1, 2$ を以下で定める。

$$\varphi_1[i](u, x') := \min(\varphi[i](u, x'), \varphi[i](-u, x')), \quad u \in \mathbb{R}, x' \in \text{IM}[i],$$

$$\varphi_2[i](u, x') := \max(\varphi[i](u, x'), \varphi[i](-u, x')), \quad u \in \mathbb{R}, x' \in \text{IM}[i].$$

ここで、以下の条件 3.2 を仮定する。

条件 3.2. 自然数 $i \in \{1, \dots, d\}$ に対して、以下が満たされる。

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sup_{x' \in \text{IM}[i]} \varphi_1[i](K, x')}{K} &< 0, \\ \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sup_{x' \in \text{IM}[i]} \varphi_2[i](K, x')}{K} &> 0. \end{aligned}$$

定義 3.8. 可測空間 (Ω, \mathcal{F}) とその上の 1 次元ブラウン運動族 $\{B_t, \{\mathbf{P}^x\}_{x \in \mathbb{R}^N}\}$ を考える。このとき、実数 $K, t \geq 0$, $i \in \{1, \dots, d\}$, $x' \in \text{IM}[i]$ に対して、作用素 $P_{t,K}$ 、および、その構成要素と定数を以下のとおり定義する。ただし、 \mathbf{E}^x は確率測度 \mathbf{P}^x における期待値を表す。

$$A(i, K, x', t) := \{\omega \in \Omega \mid \varphi_1[i](K, x') \leq B_s(\omega) \leq \varphi_2[i](K, x'), 0 \leq \forall s \leq t\},$$

$$\bar{P}_{t,K}^{(i)} g(x) := \mathbf{E}^{\mathbf{P}^{p_1[i](x)}} [g \circ \text{Exp}(B_t, V_i)(p_2[i](x)) 1_{A(i,K,p_2[i](x),t)}],$$

$$P_{t,K}^{(i)} := e^{\frac{t}{2} \hat{V}_{0i}} \bar{P}_{t,K}^{(i)} e^{\frac{t}{2} \hat{V}_{0i}},$$

$$P_{t,K} := P_{t/2,K}^{(1)} \cdots P_{t/2,K}^{(d-1)} P_{t,K}^{(d)} P_{t/2,K}^{(d-1)} \cdots P_{t/2,K}^{(1)}.$$

定義 3.9. 関数 $b \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$, $V \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ に対して、以下の関数を定義する。

$$\psi[b, V](x, s, y) := \text{Exp}(s, b \circ \text{Exp}(\cdot, V)(x))(y), \quad x \in \mathbb{R}^N, s, y \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{\psi}[b, V](x, s, y) := \psi[b, V](\text{Exp}(s, bV)(x), s, y) + b(x)s, \quad x \in \mathbb{R}^N, s, y \in \mathbb{R}.$$

補題 3.1. 関数 $b \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$, $V \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ に対して、以下が成立する。

$$\text{Exp}(s, bV) \circ \text{Exp}(y, V)(x) = \text{Exp}(\psi[b, V](x, s, y), V)(x),$$

$$\text{Exp}(s, bV) \circ \text{Exp}(y, V) \circ \text{Exp}(s, bV)(x) = \text{Exp}(\tilde{\psi}[b, V](x, s, y), V)(x).$$

注意 3.2. 上の補題より $\text{IC}[bV](\xi) \subset \text{IC}[V](\xi)$ が成立することがわかる。

注意 3.3. 以下が成立する。

$$\begin{aligned} |\psi[b, V](x, s, y) - y| &\leq \|b\|_{\infty} s, \\ |\tilde{\psi}[b, V](x, s, y) - y| &\leq 2\|b\|_{\infty} s. \end{aligned} \quad (3.2)$$

注意 3.4. ブラウン運動 B_s に関して、以下が成立する。

$$\mathbf{P}^0 \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |B_s| > K \right) \leq \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \frac{4}{K} e^{-K^2/2t}. \quad (3.3)$$

以上の準備により、以下の定理が示される。本定理は境界値条件の付与に伴う誤差の増大に上限値が存在することを示している。

定理 3.2. 自然数 j に対して、以下を満たす正数 C_1, C_2 が存在する。

$$\left| \left((P_{\bar{T}/j\bar{n}})^{j\bar{n}} - (P_{\bar{T}/j\bar{n}, K})^{j\bar{n}} \right) e^{\bar{T}\hat{V}_{00}} g(x_0) \right| \leq \frac{C_1}{K} e^{-C_2 K^2} \|g\|_{\infty}, \quad K > 0, \quad g \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^N).$$

3.4 近似作用素の条件と誤差評価

本小節では、各々のベクトル場 \hat{V}_i について導出した作用素 $P_{t,K}^{(i)}$ を、 $(m+1)^N$ 個の空間分割点において近似した $Q_{t,m}^{(i)}$ の合成によって近似する。また、その際の誤差評価を行う。さらに、試験関数 g が滑らかでない場合にも本手法を適用できるような理論の拡張を行う。以下、 $\bar{K} \geq 0, w \in \mathbb{N}$ は固定する。

定義 3.10. (1) 自然数 m に対して、 \mathbb{R}^N の部分集合を以下のとおり定義する。

$$\mathbb{L}[m] := \{x((2k_1 - m)\bar{K}/m, \dots, (2k_N - m)\bar{K}/m) \in \mathbb{R}^N | k_j \in \{0, \dots, m\}, j = 1, \dots, N\}.$$

(2) 集合 E 上の関数全体を $F(E)$ と定める。

(3) 集合 $E \subset \mathbb{R}^N$ 上定義された関数 g に対して、以下を定義する。

$$\|g\|_E := \sup_{x \in E} |g(x)|.$$

(4) $m+1$ 次ベクトル $x := (x_i)_{i=0, \dots, m} \in \mathbb{R}^{m+1}$ に対し、 $\|x\| := \max_{i \in \{0, \dots, m\}} |x_i|$ と定める。

以下を満たす $F(\mathbb{L}[m])$ 上の作用素の族 $\left\{ Q_{t,m}^{(i)} \right\}_{t \geq 0, i=1, \dots, d}$ を考える。

条件 3.3. (1) 以下を満たす正数 C が存在する。

$$\left\| Q_{t,m}^{(i)} g(x) \right\|_{\mathbb{L}[m]} \leq C \|g\|_{\mathbb{L}[m]}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad g \in F(\mathbb{L}[m]).$$

(2) 以下を満たす自然数 p と正数 C が存在する。

$$\left\| \left(P_{t,\bar{K}}^{(i)} - Q_{t,m}^{(i)} \right) g \right\|_{L[m]} \leq \frac{C}{m^{2w}} \sum_{k=0}^p \left\| \hat{V}_i^k g \right\|_{\infty}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad g \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^N).$$

この作用素を用いて、以下の作用素を定義する。

$$\begin{aligned} Q_{s,m} &:= Q_{s/2,m}^{(1)} \cdots Q_{s/2,m}^{(d-1)} Q_{s,m}^{(d)} Q_{s/2,m}^{(d-1)} \cdots Q_{s/2,m}^{(1)}, \quad s \geq 0, \quad m \in \mathbb{N}, \\ Q'_{d',m} &:= \left(Q_{\bar{T}/\bar{n},m} \right)^{\bar{n}-1} Q_{\bar{T}/2\bar{n},m}^{(1)} \cdots Q_{\bar{T}/2\bar{n},m}^{(d-1)} Q_{\bar{T}/\bar{n},m}^{(d)} Q_{\bar{T}/2\bar{n},m}^{(d-1)} \cdots Q_{\bar{T}/2\bar{n},m}^{(1)}, \quad 1 \leq d' \leq d, \quad m \in \mathbb{N}, \\ P'_{d'} &:= \left(P_{\bar{T}/\bar{n},\bar{K}} \right)^{\bar{n}-1} P_{\bar{T}/2\bar{n},\bar{K}}^{(1)} \cdots P_{\bar{T}/2\bar{n},\bar{K}}^{(d-1)} P_{\bar{T}/\bar{n},\bar{K}}^{(d)} P_{\bar{T}/2\bar{n},\bar{K}}^{(d-1)} \cdots P_{\bar{T}/2\bar{n},\bar{K}}^{(1)}, \quad 1 \leq d' \leq d, \\ P'_{s,d'} &:= P_s^{(d')} \cdots P_s^{(1)}, \quad s \geq 0, \quad 1 \leq d' \leq d. \end{aligned}$$

このとき、以下が成立する。

定理 3.3. ある自然数 p と正数 C が存在して、以下が成立する。

$$\left\| \left(\left(P_{\bar{T}/\bar{n},\bar{K}} \right)^{\bar{n}} - \left(Q_{\bar{T}/\bar{n},m} \right)^{\bar{n}} \right) e^{\bar{T}\hat{V}_{00}} g \right\|_{L[m]} \leq \frac{C}{m^{2w}} \|g\|_{(p)}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad g \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^N).$$

定理 3.4. 自然数 $d' \leq d$ に対して、以下を満たす自然数 q が存在する。

$$\begin{aligned} \left\| \left(P'_{d'} - Q'_{d',m} \right) P'_{\bar{T}/\bar{n},d'} e^{\bar{T}\hat{V}_{00}} g \right\|_{L[m]} &\leq \frac{C}{m^{2w}} \max_{\tau \in S_q} \sum_{k \leq q} \left\| \hat{V}_{i_{\tau(1)}} \cdots \hat{V}_{i_{\tau(k)}} g \right\|_{\infty}, \\ i_j &\in \{d'+1, \dots, d\}, \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

注意 3.5. 上の 2 つの定理では、定数 C は \bar{n} に依存していた。自然数 k , 実数 t に対して、

$$\sup_{u \leq t, x' \in \text{IM}[i]} \left| \frac{\partial^k}{\partial u^k} \varphi[i](u, x') \right| < +\infty,$$

が成立すると仮定すれば、 $C = O(\bar{n}^2)$ となる。

注意 3.6. 定理 3.3 および 3.4 中の作用素 $P'_{\bar{T}/\bar{n},d'} e^{\bar{T}\hat{V}_{00}}$ は、以下の手順により実装される。

(1) 作用素 $e^{\bar{T}\hat{V}_{00}}$ について、常微分方程式 $\text{Exp}(\bar{T}, V_{00})$ を解き、関数 $P'_{\bar{T}/\bar{n},d'}$ との合成積を求める。

(2) 作用素 $P'_{\bar{T}/\bar{n},d'} e^{\bar{T}\hat{V}_{00}}$ について、各格子上的値を数値積分により求める。

ただし、(2) で数値積分の代わりに、解析近似式や準モンテカルロ法を用いた方が効率的な場合もある。

注意 3.7. 数値積分の次元を下げるために以下の工夫が考えられる。

1. 試験関数 g に対し、滑らかでないベクトル場の数が最小となるよう、作用素 \mathcal{L} を分解する。
2. g に対し、滑らかでないベクトル場についてのみ数値積分を行うように添え字を入れ替える。(滑らかでないベクトル場の添え字が、滑らかなベクトル場の添え字よりも大きくなるよう定める)

ただし、ベクトル場 \hat{V} が試験関数 g に対し滑らかとは、 $g \circ \text{Exp}(\cdot, V)(x) \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^N$ が成立することと定義した。

4 積分曲線上における有限差分法

前節では、境界値条件付き偏微分方程式を近似する方法を示した。同方程式は空間が d 次元となっているが、ベクトル場の積分曲線に着目することにより、1次元熱移流拡散方程式の問題に帰着できることを4.1節で示す。次に、4.2節では、有限差分法とスプライン補間法を適用するために近似作用素を再構成し直し、その効率性を確認する。以下、 $\bar{i} \in \{1, \dots, d\}$ は固定する。

4.1 d 次元空間モデルの1次元熱方程式への帰着

本小節では、生成作用素を構成するベクトル場の積分曲線に着目し、解の領域を初期値の異なる積分曲線に分割する。各積分曲線上に制限することで、前節で導出した d 次元の問題が1次元の熱移流拡散方程式の問題に帰着できることを示す。

定義 4.1. (1) 点 $x' \in \text{IM}[\bar{i}]$ に対して、 $K_j(x') := \varphi_j[\bar{i}](\bar{K}, x')$, $j = 1, 2$ と定める。
(2) 試験関数 $g \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ に対して、以下の熱方程式の解 $u(t, \cdot)$ を対応させる作用素を $H_t[x']$ とおく。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, y) \\ u(0, y) = g(y), \\ u(t, y) = 0, \quad y \in (-\infty, K_1(x')] \cup [K_2(x'), \infty). \end{cases} \quad (4.1)$$

(3) 点 $x' \in \text{IM}[\bar{i}]$, $t \in \mathbb{R}$ に対して、以下の作用素を定義する。

$$\begin{aligned} \text{In}[x']g(y) &:= g \circ \text{Exp}(y, V_{\bar{i}})(x'), \quad g \in C_b(\mathbb{R}^N), \quad y \in \mathbb{R}, \\ \text{Ad}[x', t]g(y) &:= g \circ \psi[b_{\bar{i}}, V_{\bar{i}}](x', t, y), \quad g \in C_b(\mathbb{R}), \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

命題 4.1. 関数 $g \in C_b(\mathbb{R}^N)$, $x' \in \text{IM}[\bar{i}]$, $t \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$ に対して、以下が成立する。

$$\text{In}[x']P_{t, \bar{K}}^{(\bar{i})}g(y) = \text{Ad}[x', t/2]H_t[x']\text{Ad}[x', t/2]\text{In}[x']g(y).$$

上の命題を用いて、積分曲線上に制限することで問題を局所化する。

定義 4.2. (1) 集合 $\text{IML}[m] := \text{IM}[\bar{i}] \cap \text{L}[m]$, $m \in \mathbb{N}$ を定める。

(2) 自然数 m 、点 $x' \in \text{IML}[m]$ に対して、以下を定める。

$$\begin{aligned} y_j(x', m) &:= \varphi[\bar{i}](-\bar{K} + 2j\bar{K}/m, x') \in \mathbb{R}, \quad j = 0, \dots, m, \\ l[m](x') &:= \{y_j(x', m)\}_{j \in \{0, \dots, m\}}. \end{aligned}$$

定理 4.1. $F(l[m](x'))$ 上の作用素の族 $\{Q_{t,m}[x']\}_{t \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}, x' \in \text{IML}[m]}$ が以下を満たすと
する。

(1) 以下を満たす正数 C が存在する。

$$\|Q_{t,m}[x']g\|_{l[m](x')} \leq C\|g\|_{l[m](x')}, \quad m \in \mathbb{N}, x' \in \text{IML}[m], g \in F(l[m](x')).$$

(2) 以下を満たす自然数 p と正数 C が存在する。

$$\begin{aligned} \|(\text{Ad}[x', t/2]H_t[x']\text{Ad}[x', t/2] - Q_{t,m}[x'])g\|_{l[m](x')} &\leq \frac{C}{m^{2w}}\|g\|_{(p)}, \\ m \in \mathbb{N}, x' \in \text{IML}[m], g \in C_b^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

このとき、作用素 $Q_{t,m}^{(i)}$ を以下で定義すると、条件 3.3 を満たす。

$$\text{In}[x']Q_{t,m}^{(i)}g(y) = Q_{t,m}[x']\text{In}[x']g(y), \quad g \in F(\text{L}[m]), x' \in \text{IML}[x'], y \in l[m](x').$$

4.2 積分曲線上の近似作用素の構成

まず、4.1 節で導出した 1 次元の熱伝導方程式に対して、固有値分解を用いた有限差分法により効率的に計算する方法を提案する。これにより、積分曲線上のある格子上の値を求めることが可能となる。しかし、移流項による影響と作用素の再合成については、これとは異なる格子上の値も必要となる。これらの値は、スプライン補間を用いることにより算出でき、その手法を示す。

なお、前節では空間微分の分割の際に時間 \bar{T} を \bar{n} 分割した。本節では、さらに、時間 $T := \bar{T}/\bar{n}$ を n 分割することで近似作用素を構成する。

定義 4.3. 実数 $\epsilon > 0$, $s \geq 0$, $g \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ に対して、空間差分作用素 $L[\epsilon]$ と作用素 $R_s[\epsilon]$ を以下のとおり定義する。

$$\begin{aligned} L[\epsilon]g(y) &:= \frac{1}{2\epsilon^2}(g(y + \epsilon) + g(y - \epsilon) - 2g(y)), \\ f_i &:= \prod_{j=1, j \neq i}^w \frac{i^2}{i^2 - j^2}, \quad i = 1, \dots, w, \\ R_s[\epsilon]g(y) &:= g(y) + s \sum_{i=1}^w f_i L[\epsilon/i]g(y). \end{aligned}$$

補題 4.1. 以下を満たす自然数 p と正数 C が存在する。

$$\left\| \frac{\partial^p}{\partial y^p} H_s[x']g(y) \right\|_{\infty} \leq \frac{C}{s^{p/2}} \|g\|_{\infty}, \quad x' \in \text{IML}[\bar{i}], \quad g \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}), \quad 0 < s \leq \bar{T}. \quad (4.2)$$

補題 4.2. (1) 自然数 p に対して、以下を満たす正数 C が存在する。

$$\|(H_s[x'] - R_s[\epsilon])H_t[x']g\|_{(p)} \leq \frac{C}{\sqrt{t}} (s^2 + s\epsilon^{2w}) \|g\|_{(2w+p+1)},$$

$$x' \in \text{IML}[\bar{i}], \quad \epsilon > 0, \quad 0 < s, t \leq \bar{T}, \quad g \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}).$$

(2) 以下を満たす正数 C が存在する。

$$\|(H_s[x'] - R_s[\epsilon])g\|_{[K_1[x'], K_2[x']]} \leq C \left(\sqrt{s} + \frac{s}{\epsilon} \right) \|g\|_{(1)},$$

$$x' \in \text{IML}[\bar{i}], \quad \epsilon > 0, \quad 0 < s \leq T, \quad g \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}).$$

証明. (1) ここでは、 $w = 1$ の場合のみ証明する。以下の展開と補題 4.1 より明らか。

$$\begin{aligned} (H_s[x'] - R_s[\epsilon])H_t[x']g(y) &= \int_0^s \int_0^{s_1} \frac{\partial^2}{\partial s_0^2} H_{t+s_0}[x']g(y) \mathbf{d}s_0 \mathbf{d}s_1 \\ &\quad - \frac{s}{4\epsilon^2} \sum_{\theta=\pm 1} \int_0^{\epsilon} \int_0^{\epsilon_3} \int_0^{\epsilon_2} \int_0^{\epsilon_1} \frac{\partial^4}{\partial y^4} H_{t+s}[x']g(y + \theta\epsilon_0) \mathbf{d}\epsilon_0 \mathbf{d}\epsilon_1 \mathbf{d}\epsilon_2 \mathbf{d}\epsilon_3 \end{aligned}$$

□

定義 4.4. (1) $m+1$ 次単位行列を I_m と定め、上三角成分 $J_m(i, j)$, $0 \leq i \leq j \leq m$ が以下で定義される $m+1$ 次対称行列を J_m と定める。

$$J_m(i, j) := \begin{cases} -2, & i = j, \\ 1, & i = j + 1, \\ 0, & i \neq j, j + 1. \end{cases}$$

(2) 対称行列 J_m の固有値を $\lambda_j(m)$, $j = 0, \dots, m$ とし、対応する固有ベクトルを以下で表す。

$$v_i(m) := {}^t(v_{i0}(m), \dots, v_{im}(m)) \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad i = 0, \dots, m.$$

また、 $m+1$ 次正方行列 $V(m) := (v_{ij}(m))_{i,j=0,\dots,m}$ を定義する。

(3) 正数 t, ϵ 、自然数 m, n に対し、以下の行列を定義する。

$$\mathcal{Q}_t^{(m,n)}(\epsilon) := \left(I_m + \frac{t}{2n\epsilon^2} J_m \right)^n.$$

(4) 正数 t, ϵ 、自然数 m に対し、以下の行列を定義する。

$$\mathcal{Q}_t^{(m)}(\epsilon) := {}^t V(m) \text{diag} \left[\exp\left(\frac{t\lambda_0(m)}{2\epsilon^2}\right), \dots, \exp\left(\frac{t\lambda_m(m)}{2\epsilon^2}\right) \right] V(m).$$

注意 4.1. 行列 $Q_t^{(m)}(\epsilon)$ は行列 $Q_t^{(m,n)}(\epsilon)$ の n に関する極限である。

$$Q_t^{(m)}(\epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_t^{(m,n)}(\epsilon).$$

注意 4.2. $\lambda_i(m), v_{ij}(m)$ は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \lambda_i(m) &= -4 \sin^2 \left(\frac{(i+1)\pi}{2(m+2)} \right), \quad i = 0, 1, \dots, m, \\ v_{ij}(m) &= \sin \left(\frac{(i+1)(j+1)\pi}{m+2} \right), \quad i, j = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

特に、固有値が負であるから、 $\|Q_t^{(m)}(\epsilon)x\| \leq \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ が成り立つ。

定義 4.5. (1) 実数列 $x_0 < \dots < x_m$ と自然数 w に対して、以下を満たす $2w$ 階連続微分可能な関数 s を $(x_i)_{i=0, \dots, m} \in \mathbb{R}^{m+1}$ を節点とする $2w+1$ 次の自然スプライン関数と呼ぶ。

- (i) 区間 $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, m-1$ 上で高々 $2w+1$ 次の多項式で表される。
- (ii) 端点 $x = x_0, x_m$ で以下を満たす。

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} s(x) = 0, \quad w+1 \leq k \leq 2w.$$

(2) 実数列 $x_0 < \dots < x_m, y_0 < \dots < y_m$ と自然数 w に対して、 $(x_i)_{i=0, \dots, m}$ を節点とする $2w+1$ 次の自然スプライン関数が

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, m,$$

を満たすとき、 $\{(x_i, y_i)\}_{i=0, \dots, m}$ に対する $2w+1$ 次の自然スプライン補間関数と呼び、この関数を以下で表す。

$$\Lambda(\mathbf{x})\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} := {}^t(x_i)_{i=0, \dots, m}, \quad \mathbf{y} := {}^t(y_i)_{i=0, \dots, m} \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

注意 4.3. $\{(x_i, y_i)\}_{i=0, \dots, m}$ に対する $2w+1$ 次の自然スプライン補間関数は一意に存在することが知られている。

注意 4.4. 定義 4.5 (2) により $\Lambda(\mathbf{x})$ は \mathbb{R}^{m+1} から自然スプライン関数全体への作用素と考えることができる。以降、 $\Lambda(\mathbf{x})$ をスプライン補間作用素と呼ぶ。

定義 4.6. (1) 点 $x' \in \text{IM}[i]$, 自然数 m に対して、以下を定める。

$$\begin{aligned} \epsilon(x', m) &:= \frac{K_2(x') - K_1(x')}{m} \in \mathbb{R}, \\ z_j(x', m) &:= K_1(x') + \epsilon(x', m)j \in \mathbb{R}, \quad j = 0, \dots, m. \end{aligned}$$

(2) 点 $x' \in \text{IM}[\bar{i}]$, 自然数 m に対し、以下の作用素を定める。

$$\begin{aligned} I_m[x']g &:= {}^t(g(y_j(x', m)))_{j=0, \dots, m} \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad g \in C_b(\mathbb{R}), \\ I'_m[x']g &:= {}^t(g(z_j(x', m)))_{j=0, \dots, m} \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad g \in C_b(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

(3) 点 $x' \in \text{IM}[\bar{i}]$, $t \geq 0$, 自然数 m に対し、以下の $m+1$ 次ベクトルを定める。

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x', t, m) &:= {}^t(\psi[b_{\bar{i}}, V_{\bar{i}}](x', -t/2, y_j(x', m)))_{j=0, \dots, m} \in \mathbb{R}^{m+1}, \\ \mathbf{z}(x', t, m) &:= {}^t(\psi[b_{\bar{i}}, V_{\bar{i}}](x', -t/2, z_j(x', m)))_{j=0, \dots, m} \in \mathbb{R}^{m+1}. \end{aligned}$$

定理 4.2. 自然数 $w \leq 3$ のとき、以下の作用素は、定理 4.1 の条件を満たす。

$$Q_{t,m}[x'] := \sum_{i=1}^w f_i \Lambda(\mathbf{z}(x', t, im)) \mathcal{Q}_t^{(im)}(\epsilon(x', im)) I'_m[x'] \Lambda(\mathbf{y}(x', t, m)) I_m[x'] g.$$

証明. $w = 1$ の場合のみ示す。条件 1 については、スプライン補間作用素の有界性と、注意 4.2 により明らか。条件 2 を示す。まず、以下のように、 $(l[m](x')$ 上の関数として) 変形する。

$$\begin{aligned} & \left(\text{Ad}[x', t/2] H_t \text{Ad}[x', t/2] - \Lambda(\mathbf{z}(x', t, m)) \mathcal{Q}_t^{(m)}(\epsilon(x', m)) I'_m[x'] \Lambda(\mathbf{y}(x', t, m)) I_m[x'] \right) g \\ &= \text{Ad}[x', t/2] H_t (\text{Ad}[x', t/2] - \Lambda(\mathbf{y}(x', t, m)) I_m[x']) g \\ & \quad + (\text{Ad}[x', t/2] - \Lambda(\mathbf{z}(x', t, m)) I'_m[x']) H_t[x'] \Lambda(\mathbf{y}(x', t, m)) I_m[x'] g \\ & \quad + \Lambda(\mathbf{z}(x', t, m)) \left(I'_m H_t[x'] - \mathcal{Q}_t^{(m)}(\epsilon(x', m)) I'_m[x'] \right) \Lambda(\mathbf{y}(x', t, m)) I_m[x'] g. \end{aligned}$$

右辺のそれぞれの項について評価を行えばよい。第一項、第二項のオーダーについては、条件 3.1, 注意 3.2, およびスプライン補間作用素の性質より、明らかである。ここでは、第三項についてのみ評価を行う。

$$\begin{aligned} & \left\| \Lambda(\mathbf{z}(x', t, m)) \left(I'_m[x'] H_t[x'] - \mathcal{Q}_t^{(m)}(\epsilon(x', m)) I'_m[x'] \right) \Lambda(\mathbf{y}(x', t, m)) I_m[x'] g \right\|_{l[m](x')} \\ & \leq \left\| \left(I'_m[x'] H_t[x'] - \mathcal{Q}_t^{(m)}(\epsilon(x', m)) I'_m[x'] \right) \Lambda(\mathbf{y}(x', t, m)) I_m[x'] g \right\| \\ & \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \left(\mathcal{Q}_{t/n}^{(m,n)}(\epsilon(x', m)) \right)^{n-k} \left(I'_m[x'] H_{t/n}[x'] - R_{t/n}[\epsilon(x', m)](\epsilon, w) \right) \right. \\ & \quad \left. \times H_{kt/n}[x'] \Lambda(\mathbf{z}) I'_m[x'] g \right\| \\ & \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \left(I'_m[x'] H_{t/n}[x'] - R_{t/n}[\epsilon(x', m)](\epsilon, w) \right) H_{kt/n}[x'] \Lambda(\mathbf{z}) I'_m[x'] g \right\| \\ & \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} C''' \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n\sqrt{kn}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{kn}} \epsilon^{2w} \right) \|\Lambda(\mathbf{z}) I'_m[x'] g\|_{(2w+1)} = C \epsilon^{2w} \|g\|_{(2w+1)}. \end{aligned}$$

□

注意 4.5. 通常、スプライン関数の係数は、行列計算により求める。補間の次数が高くなる場合は、行列が複雑化するため、反復法を用いて近似計算する方が効率的な場合がある。

5 派生証券の価格計算への応用

本節では、前節で提案した方法をヘストン・モデルにおけるヨーロピアン・プット・オプションのプライシングに適用し、その効率性を確認する。有限差分法は早期行使条項の付くアメリカン・オプションや転換社債、優先株等の評価に優れているが、本稿では実装法を具体的に示すため、より簡便な事例を用いる。

5.1 ヘストン・モデル

本節では、確率ボラティリティ・モデルの一種であるヘストン・モデルを用いる。また、ヘストン・モデルにおけるヨーロピアン・プット・オプションの理論価格の期待値表現を求める。

ヘストン・モデルは株価 $S(t, x)$ とその分散 $V(t, x)$ を以下の確率微分方程式 (SDE) により表現するモデルである。

$$\begin{aligned} \frac{dS(t, x)}{S(t, x)} &= \mu dt + \sqrt{V(t, x)} dW^1(t), \\ dV(t, x) &= \kappa(\theta - V(t, x))dt + \sigma\sqrt{V(t, x)}dW^2(t), \\ {}^t(S(0, x), V(0, x)) &= x, \\ d\langle W^1, W^2 \rangle_t &= \rho dt. \end{aligned} \tag{5.1}$$

ただし、 $W^1(t)$, $W^2(t)$ は標準ブラウン運動とする。また、 $\kappa, \theta, \sigma > 0$, $4\kappa\theta > \sigma^2$ を仮定する。

このとき満期を T 、行使価格を K 、ディスカウントファクターを D とすると、求めるオプションの価格は $DE[(K - S(T, x))_+]$ となる。また、無リスク金利を r 、配当を q とすると、 $\mu = r - q$, $D = e^{-rT}$ となる。

5.2 計算の準備

本稿で提案する方法を適用するためには、(1) 偏微分方程式の生成作用素のベクトル場による表現、(2) 各ベクトル場の積分曲線、(3) 積分曲線の交点、(4) 有限差分法を用いる際の格子点、(5) 移流項の影響を考慮した格子点、を求める必要がある。本節では、これらについて順に求めていく。

まず、偏微分方程式とその生成作用素のベクトル場による表現を導出する。

定義 5.1. 関数 $V_i, i = 0, 1, 2$ 及び微分作用素 \mathcal{L} を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} V_0(t(s, v)) &:= {}^t\left(s\left(\mu - \frac{1}{2}v - \frac{1}{4}\rho\sigma\right), \kappa(\theta - v) - \frac{1}{4}\sigma^2\right), \\ V_1(t(s, v)) &:= {}^t(s\sqrt{v}, \rho\sigma\sqrt{v}), \\ V_2(t(s, v)) &:= {}^t\left(0, \sigma\sqrt{1 - \rho^2}\sqrt{v}\right), \\ \mathcal{L} &:= \hat{V}_0 + \frac{1}{2}\hat{V}_1^2 + \frac{1}{2}\hat{V}_2^2. \end{aligned}$$

Feynman-Kac の定理より、 $u(t, x) := \mathbf{E}[(\mathcal{K} - S(t, x))_+]$ は以下の PDE に従う。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \mathcal{L}u(t, x), \\ u(0, x) = g(x) := (\mathcal{K} - S(0, x))_+. \end{cases}$$

生成作用素のベクトル場による表現は、以下の注意のとおり、ストラトノビッチ型確率積分を経由して導出できる。

注意 5.1. 確率過程 $X(t, x) := (S(t, x), V(t, x))$ は以下のストラトノビッチ型 SDE に従う。

$$\begin{cases} dX(t, x) = V_0(X(t, x))dt + \sum_{i=1,2} V_i(X(t, x)) \circ dB^i(t), \\ X(0, x) = x. \end{cases}$$

確率過程 $B^1(t), B^2(t)$ は無相関な 2 次元ブラウン運動とする。記号 \circ はストラトノビッチ確率積分を表す。

次に、ドリフト項に関する係数関数 V_0 を $V_i, i = 1, 2$ のそれぞれに従属的なものと、それらと可換なものに分解する。これ以降、相関 $\rho \neq 0$ と仮定する。無相関 ($\rho = 0$) の場合も、同様に (より簡単に) 計算できる。

定義 5.2. 定数を以下のとおり定める。

$$\eta_1 := \rho\sigma, \quad \eta_2 := \sqrt{1 - \rho^2}\sigma, \quad \alpha := \theta - \frac{\sigma^2}{4\kappa}, \quad \kappa' := \kappa - \frac{\eta_1}{2}, \quad \theta' := \frac{\kappa\alpha}{\eta_1}.$$

また、以下の関数を定める。

$$\begin{aligned} b_1(t(s, v)) &:= -\frac{\sqrt{v}}{2}, \\ b_2(t(s, v)) &:= \frac{\kappa(\alpha - v) + \frac{\eta_1 v}{2}}{\eta_2\sqrt{v}}. \end{aligned}$$

このとき、関数 V_0 を以下の3つの関数に分解する。

$$\begin{aligned} V_0 &= \sum_{i=0,1,2} V_{0i}, \\ V_{00}(t(s, v)) &:= {}^t \left(s \left(\mu - \frac{1}{4} \eta_1 \right), 0 \right), \\ V_{01}(t(s, v)) &:= b_1(t(s, v)) V_1(t(s, v)) = {}^t \left(-\frac{sv}{2}, -\frac{\eta_1 v}{2} \right), \\ V_{02}(t(s, v)) &:= b_2(t(s, v)) V_2(t(s, v)) = {}^t \left(0, \kappa(\alpha - v) + \frac{\eta_1 v}{2} \right). \end{aligned}$$

注意 5.2. このとき、ベクトル場 \hat{V}_{00} とベクトル場 \hat{V}_i , $i = 1, 2$ は可換である。

$$[\hat{V}_{00}, \hat{V}_i] := \hat{V}_{00} \hat{V}_i - \hat{V}_i \hat{V}_{00} = 0, \quad i = 1, 2.$$

次に、ベクトル場 $\hat{V}_{00}, \hat{V}_{0i}, \hat{V}_i$, $i = 1, 2$ に関する常微分方程式を解き積分曲線を導出する。

$$\begin{aligned} \text{Exp}(t, V_{00})(t(s, v)) &= {}^t \left(s \exp \left(t \left(\mu - \frac{1}{4} \eta_1 \right) \right), v \right), \\ \text{Exp}(t, V_{01})(t(s, v)) &= {}^t \left(s \exp \left(\frac{v}{\eta_1} \left(\exp \left(-\frac{\eta_1 t}{2} \right) - 1 \right) \right), v \exp \left(-\frac{\eta_1 t}{2} \right) \right), \\ \text{Exp}(t, V_{02})(t(s, v)) &= {}^t \left(s, v + (v - \theta')(e^{-\kappa t} - 1) \right), \\ \text{Exp}(t, V_1)(t(s, v)) &= {}^t \left(s \exp \left(\frac{1}{4} \eta_1 t^2 + t\sqrt{v} \right), \left(\frac{1}{2} \eta_1 t + \sqrt{v} \right)^2 \right), \\ \text{Exp}(t, V_2)(t(s, v)) &= {}^t \left(s, \left(\frac{1}{2} \eta_2 t + \sqrt{v} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

つづいて、積分曲線の交点を求める。以降 $x_0 = {}^t(s_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, $K > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ を固定する。

定義 5.3. 交点を求める要素を以下のように定める。

$$\begin{aligned} k(i) &:= -K + 2iK/m, \quad i = 0, \dots, m, \\ W(m, K) &:= \left\{ (i, j) \in \{0, \dots, m\}^2 \mid (\eta_1 k(j) + 2\sqrt{v_0})^2 + (\eta_2 k(i) + 2\sqrt{v_0})^2 - 4v_0 \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

ここで、簡単化のため、 K, m について、以下の仮定をおく。

$$\begin{aligned} K &\leq \frac{2\sqrt{v_0}}{|\eta_i|}, \quad i = 1, 2, \\ W(m, K) &= \{0, \dots, m\}^2. \end{aligned}$$

これらの仮定を満たさない場合も、同様に計算可能である。

定義 5.4. 有限差分法の格子点と交点のずれを調節するための関数を定める。

$$t_1(u_1, u_2) := \frac{-(\eta_2 u_2 + 2\sqrt{v_0}) + \sqrt{(\eta_1 u_1 + 2\sqrt{v_0})^2 + (\eta_2 u_2 + 2\sqrt{v_0})^2 - 4v_0}}{\eta_1},$$

$$t_2(u_1, u_2) := \frac{-(\eta_1 u_1 + 2\sqrt{v_0}) + \sqrt{(\eta_1 u_1 + 2\sqrt{v_0})^2 + (\eta_2 u_2 + 2\sqrt{v_0})^2 - 4v_0}}{\eta_2}.$$

この関数について以下が成立する。

$$\text{Exp}(t_1(u_1, u_2), V_1) \circ \text{Exp}(u_2, V_2)(x_0) = \text{Exp}(t_2(u_1, u_2), V_2) \circ \text{Exp}(u_1, V_1)(x_0).$$

定義 5.5. 積分曲線上の交点 x_{ij} を求める。

$$x(u_1, u_2) := \text{Exp}(t_1(u_1, u_2), V_1) \circ \text{Exp}(u_2, V_2)(x_0).$$

$$x_{ij} := x(k(i), k(j)), \quad i, j = 0, \dots, m.$$

さらに、有限差分法を適用する際の格子点を求める。

定義 5.6. (1) 境界値条件を定める。

$$K_1^{(1)}[j] := \min(t_1(-K, k(j)), t_1(K, k(j))), \quad j = 0, \dots, m,$$

$$K_2^{(1)}[j] := \max(t_1(-K, k(j)), t_1(K, k(j))), \quad j = 0, \dots, m,$$

$$K_1^{(2)}[j] := \min(t_2(k(j), -K), t_2(k(j), K)), \quad j = 0, \dots, m,$$

$$K_2^{(2)}[j] := \max(t_2(k(j), -K), t_2(k(j), K)), \quad j = 0, \dots, m.$$

(2) 有限差分法を適用する際の格子点 $z_i^{(k)}[j]$, $k = 1, 2$ を定める。

$$\epsilon^{(k)}[j] := \left(K_2^{(k)}[j] - K_1^{(k)}[j] \right) / m, \quad j = 0, \dots, m, \quad k = 1, 2,$$

$$z_i^{(k)}[j] := K_1^{(k)}[j] + i\epsilon^{(k)}[j], \quad i, j = 0, \dots, m, \quad k = 1, 2.$$

(3) 以下の調整項を定める。

$$y_i^{(1)}[j] := t_1(k(i), k(j)), \quad i, j = 0, \dots, m,$$

$$y_i^{(2)}[j] := t_2(k(j), k(i)), \quad i, j = 0, \dots, m.$$

$K_1^{(k)}[j], K_2^{(k)}[j]$, $k = 1, 2$ は格子点の上限、下限、 $\epsilon^{(k)}[j]$, $k = 1, 2$ が空間分割の幅に相当する。また、 $y_i^{(k)}[j]$, $k = 1, 2$ は有限差分法の格子点と交点のずれを調節するために用いる。

最後に、移流項によるずれを考慮するための格子点を求める。

定義 5.7. (1) 以下の調整項を定める。

$$\begin{aligned}\psi_1(t(s, v), t, y) &:= 2 \frac{-\sqrt{v} + \left(\frac{1}{2}\eta_1 y + \sqrt{v}\right) e^{-\frac{\eta_1 t}{4}}}{\eta_1}, \\ \psi_2(t(s, v), t, y) &:= 2 \frac{-\sqrt{v} + \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}\eta_2 y + \sqrt{v}\right)^2 - \theta'\right) e^{-\kappa' t} + \theta'}}{\eta_2}.\end{aligned}$$

(2) 格子点を定める。

$$\begin{aligned}\tilde{y}_i^{(1)}[j] &:= \psi_1(x_{0j}, -t/2, y_i^{(1)}[j]), \quad i, j = 0, \dots, m, \\ \tilde{y}_i^{(2)}[j] &:= \psi_2(x_{j0}, -t/2, y_i^{(2)}[j]), \quad i, j = 0, \dots, m, \\ \tilde{z}_i^{(1)}[j] &:= \psi_1(x_{0j}, -t/2, z_i^{(1)}[j]), \quad i, j = 0, \dots, m, \\ \tilde{z}_i^{(2)}[j] &:= \psi_2(x_{j0}, -t/2, z_i^{(2)}[j]), \quad i, j = 0, \dots, m.\end{aligned}$$

注意 5.3. 3 節との対応を以下に示す。

$$\begin{aligned}t_i[i, \tau](u_1, u_2) &= t_i(u_1, u_2), \quad i = 1, 2, \\ p_1[i](x(u_1, u_2)) &= t_i(u_1, u_2), \quad i = 1, 2, \\ p_2[1](x(u_1, u_2)) &= x(0, u_2), \\ p_2[2](x(u_1, u_2)) &= x(u_1, 0), \\ \varphi[1](u, x(0, u_2)) &= t_1(u_1, u_2), \\ \varphi[2](u, x(u_1, 0)) &= t_2(u_1, u_2), \\ \psi_i(t(s, v), t, y) &= \psi[b_i, V_i](t(s, v), t, y), \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

ただし、 $\tau \in S_2$ は $\tau(1) = 2, \tau(2) = 1$ と定める。

5.3 計算の手順

前小節までの準備のもと、ヘストン・モデルにおけるヨーロピアン・プット・オプションに対して、本稿で提案した方法を具体的に適用する手順を説明する。

ここでは、以下の作用素の近似計算を行う。

$$\begin{aligned}& e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_1} e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{01}} \left(e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{02}} e^{\frac{T}{n}\hat{V}_2} e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{02}} e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{01}} e^{\frac{T}{n}\hat{V}_1} e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{01}} \right)^{n-1} \\ & \times e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{02}} e^{\frac{T}{n}\hat{V}_2} e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{02}} e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{01}} e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_1} e^{T\hat{V}_{00}} g(x_0).\end{aligned}$$

時間の分割数 n に関する近似オーダーが 2 である。また、空間の分割数 m に関して近似オーダーが 2 となるように近似計算を行う。より高次の場合も同様に近似可能である。

1. 作用素 $e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{02}}e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{01}}e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_1}e^{T\hat{V}_{00}}$ の近似
以下を数値積分により計算する。

$$\begin{aligned} g_{ij}[0] &:= e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{02}}e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{01}}e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_1}e^{T\hat{V}_{00}}g(\text{Exp}(z_j^{(2)}[i], V_2)(x_0)), \\ &= \mathbf{E}^0 \left[g \circ \text{Exp}(T, V_{00}) \circ \text{Exp}(B_{T/2n}, V_1) \circ \text{Exp}(T/2n, V_{01}) \right. \\ &\quad \left. \circ \text{Exp}(T/2n, V_{02}) \circ \text{Exp}(z_j^{(2)}[i], V_2)(x_0) \right], \quad i, j = 0, \dots, m. \end{aligned}$$

2. 作用素 $e^{\frac{T}{n}\hat{V}_2}$ の近似
定義 4.4 で定めた行列 $Q_t^m(\epsilon)$ を用いて、以下を計算する。

$$(g_{ij}[1])_{j=0, \dots, m} := Q_t^{(m)}(\epsilon^{(2)}[i]) (g_{ij}[0])_{j=0, \dots, m}, \quad i = 0, \dots, m.$$

3. 作用素 $e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{02}}$ の近似
 $\{(x_i, y_i)\}_{i=0, \dots, m}$ に対する 3 次の自然スプライン補間関数を $\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ で表す。ここでは、以下を計算する。

$$g_{ij}[2] := \Lambda \left(\left(\tilde{z}_{j'}^{(2)}[i] \right)_{j'=0, \dots, m}, (g_{ij'}[1])_{j'=0, \dots, m} \right) \left(y_j^{(2)}[i] \right), \quad i, j = 0, \dots, m.$$

4. 作用素 $\left(e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{02}}e^{\frac{T}{n}\hat{V}_2}e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{02}}e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{01}}e^{\frac{T}{n}\hat{V}_1}e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{01}} \right)^{n-1}$ の近似
以下の計算 (a), (b) を $n-1$ 回行う。

- (a) 作用素 $e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{01}}e^{\frac{T}{n}\hat{V}_1}e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{01}}$ の近似

- i. 作用素 $e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{01}}$ の近似
以下を計算する。

$$g_{ij}[3] := \Lambda \left(\left(\tilde{y}_{i'}^{(1)}[j] \right)_{i'=0, \dots, m}, (g_{i'j}[2])_{i'=0, \dots, m} \right) \left(\tilde{z}_i^{(1)}[j] \right), \quad i, j = 0, \dots, m.$$

- ii. 作用素 $e^{\frac{T}{n}\hat{V}_1}$ の近似
計算 2 と同様。

- iii. 作用素 $e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{01}}$ の近似
計算 3 と同様。

- (b) 作用素 $e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{02}}e^{\frac{T}{n}\hat{V}_2}e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{02}}$ の近似
(a) と同様。

5. 作用素 $e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_1}e^{\frac{T}{2n}\hat{V}_{01}}$ の近似
計算 4(a)i, 4(a)ii と同様。

5.4 数値実験による評価

本節では数値実験により、本手法の効率性を確かめる。効率性を保証するには、有限差分法の前処理として数値積分法による平滑化（5.3 節参照）を行う必要があるが、本数値実験では、この前処理は用いないこととする。

まず、ADI 法との比較を行う。数値実験には表 2 のパラメータを用いた。

表 2 パラメータ設定

r	q	T	$S(0)$	\mathcal{K}	κ	σ	ρ	θ	v'
0	0	1	100	100	1.8	0.1	-0.3	0.16	0.09

比較結果は表 3 のとおりである。ここで、数値積分で求めた 14.1282 を真値とし、近似値と真値との差が 10^{-3} 程度になるよう分割数を細かくし、分割数の差で近似の効率性を比較している。その際の計算コストについても比較している。近似の効率性、計算時間のいずれの面でも本稿の手法の有効性が確認できる。

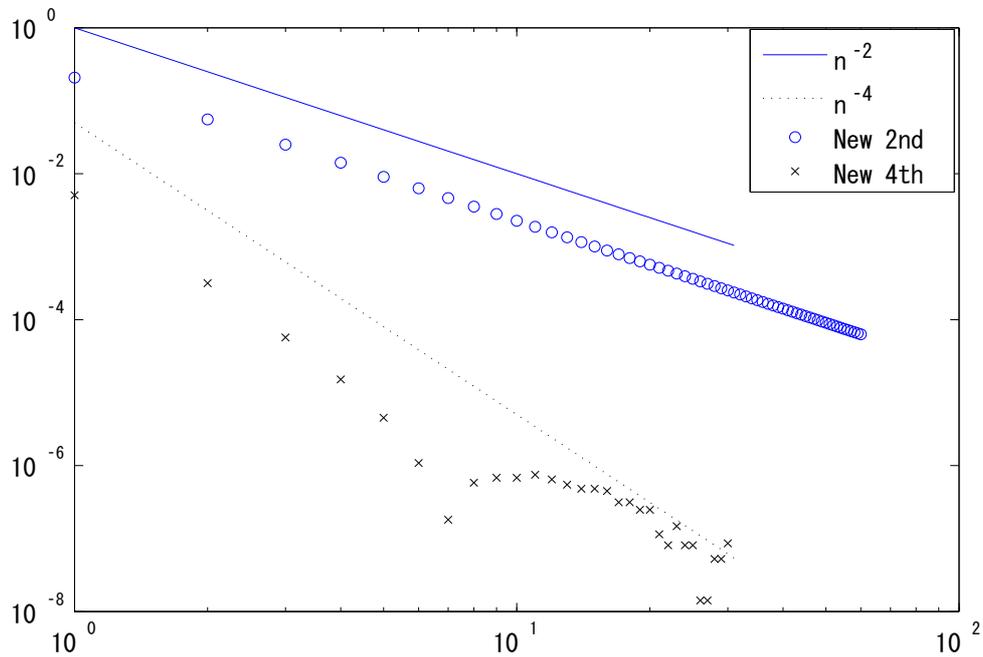
表 3 計算コストの比較

	ADI 法	New 2nd	New 4th	New 6th
時間の分割数 (n)	1400	40	4+2	3+2+1
空間の分割数 (m)	140	100	100	100
誤差	3.1×10^{-3}	2.8×10^{-4}	6.8×10^{-4}	2.5×10^{-4}
計算時間 (sec)	98.9	3.844	0.598	0.594

注: 数値実験では、プログラミング言語は C++、コンパイラーは Microsoft Visual C++ .Net 2003、行列計算には、Intel(R) Math Kernel Library 10.1 を用いた。PC のスペックは、CPU が Intel(R) Celeron(R) 2.66 GHz で、メモリは 512 MB である。

次に時間分割による収束オーダーを図 1 で確認する。モデルに関するパラメータは先ほどと同じものを用いた。空間分割の精度に関するパラメータ w は 1 とし、空間分割数 m は 200、空間の制限に関するパラメータ K は 3.5 とした。図 1 では、時間分割数 n が増加するに従い、2 次もしくは、4 次のオーダーで誤差が減少する場合の理論直線も表示している。図 1 から、本稿の手法は 2 次のオーダーの場合、理論どおりに減少していく様子（理論直線と傾きが等しい）が窺える。4 次の場合にも、 10^{-5} 程度の誤差までは理論どおりに減少していることが確認される。ただし、さらに誤差が小さい領域では、空間分割による誤差が制約となって、理論どおりに減少しなくなることが示されている。

図 1 収束オーダーの理論値との比較



注意 5.4. 本数値実験では、熱伝導方程式に以下の境界値条件を仮定した。

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, y) = 0, \quad y \in (-\infty, K_1(x')] \cup [K_2(x'), \infty).$$

このとき、係数行列は以下のとおりである。

$$J'_m = \left[\begin{array}{cccc} -2 & 0 & & \mathbf{O} \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & \ddots & 1 \\ \mathbf{O} & & & 0 & -2 \end{array} \right] \Bigg\} m+1.$$

注意 5.5. 本稿の手法は時間分割に関する誤差の収束性が高いため、上図の数値実験では、空間の制限 K に関する誤差が支配的となっている。そこで、数値積分により求めた値 14.1282 ではなく、空間の制限を考慮した値 14.128463 からのずれを誤差として用いた。

以上

補論 1 不完全ガンマ関数を用いる方法

本補論では、3、4 節とは異なる方法により近似作用素を構成する。積分曲線上の 1 次元熱移流拡散方程式の問題に帰着するところまでは、同様の議論であるため省略する。本補論で提案する方法の手順は、以下のとおりである。

- (1) 試験関数をスプライン補間により区分的多項式で表現する。
- (2) 試験関数とブラウン運動に関する期待値をとる。
- (3) 期待値を不完全ガンマ関数を用いて表現する。

定義 A.1. 試験関数 $g \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ を以下の熱方程式の解 $u(t, \cdot)$ に対応させる作用素を H_t とおく。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, y) \\ u(0, y) = g(y). \end{cases}$$

定義 A.2. 以下の作用素を定める。

$$\begin{aligned} Q_{t,m}^{[G]}[x'] &:= \Lambda(\mathbf{z}(x', t, m)) I'_m[x'] H_t \Lambda(\mathbf{y}(x', t, m)) I_m[x'], \\ \text{In}[x'] Q_{t,m}^{[G(i)]} g(y) &= Q_{t,m}^{[G]}[x'] \text{In}[x'] g(y), \quad g \in F(L[m]), \quad x' \in \text{IML}[x'], \quad y \in l[m](x'), \\ Q_{s,m}^{[G]} &:= Q_{s/2,m}^{[G(1)]} \cdots Q_{s/2,m}^{[G(d-1)]} Q_{s,m}^{[G(d)]} Q_{s/2,m}^{[G(d-1)]} \cdots Q_{s/2,m}^{[G(1)]}. \end{aligned}$$

このとき、以下のオーダーで近似できることが示せる。

$$e^{\tilde{T}\mathcal{L}} g(x_0) = \sum_{j=1}^p f_j(p) \left(Q_{\tilde{T}/jn,m}^{[G]} \right)^{jn} e^{\tilde{T}\hat{V}_{00}} g(x_0) + O(m^{-2w}) + O\left(\frac{e^{-CK^2}}{K}\right) + O(n^{-2p}),$$

$g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N).$

注意 A.1. 定理 3.4 についても同様のことが示せる。

ここで、 $H_t \Lambda(\mathbf{y}(x', t, m)) I_m[x'] g(z_j)$ の計算手順を示す。

定義 A.3. 以下を定める。

$$\begin{aligned} \Gamma(j, a, b) &:= \int_a^b x^j e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbf{d}x, \\ y_j &:= \psi[b_{\bar{i}}, V_{\bar{i}}](x', -t/2, y_j(x', m)), \quad j = 0, \dots, m, \\ z_j &:= \psi[b_{\bar{i}}, V_{\bar{i}}](x', -t/2, z_j(x', m)), \quad j = 0, \dots, m. \end{aligned}$$

自然スプライン関数の定義より、以下を満たす $\{a_{ij}\}_{i=0,\dots,m-1,j=0,\dots,2w+1} \subset \mathbb{R}$ が存在する。

$$g_i(y) := \sum_{j=0}^{2w+1} a_{ij} y^j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i = 0, \dots, m-1,$$

$$\Lambda(\mathbf{y}(x', t, m)) I_m[x'] g(y) 1_{[y_0, y_m]}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i(y) 1_{[y_i, y_{i+1})}(y).$$

この事実より以下が導かれる。

$$\begin{aligned} & H_t \Lambda(\mathbf{y}(x', t, m)) I_m[x'] g(z_j(x', m)) \\ &= \mathbf{E}^{z_j(x', m)} [\Lambda(\mathbf{y}(x', t, m)) I_m[x'] g(B_t) 1_{[y_0, y_m]}(B_t)], \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=0}^{2w+1} a_{ik} \Gamma(k, \sqrt{t}(z_j(x', m) + y_i), \sqrt{t}(z_j(x', m) + y_{i+1})). \end{aligned}$$

注意 A.2. 関数 $\Gamma(j, a, b)$ は第一種不完全ガンマ関数の和となる。第一種不完全ガンマ関数は高精度な近似式が知られている。

注意 A.3. 以下の手順により、不完全ガンマ関数の計算回数は減らすことができる。まず、エルミート補間を用い、点 $z_i(x', m)$, $i = 0, \dots, m$ を節点とする区分的多項式により関数 $\Lambda(\mathbf{y}(x', t, m)) I_m[x'] g(y) 1_{[y_0, y_m]}(x)$ を近似する。

$$\tilde{g}_i(y) := \sum_{j=0}^{2w+1} \tilde{a}_{ij} y^j, \quad \tilde{a}_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i = 0, \dots, m-1,$$

$$\Lambda(\mathbf{y}(x', t, m)) I_m[x'] g(y) 1_{[y_0, y_m]}(x) \approx \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{g}_i(y) 1_{[z_i(x', m), z_{i+1}(x', m))}(y).$$

このとき、以下が成立する。

$$\begin{aligned} & H_t \Lambda(\mathbf{y}(x', t, m)) I_m[x'] g(z_j(x', m)) \\ & \approx \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=0}^{2w+1} \tilde{a}_{ik} \Gamma(k, \sqrt{t}(z_0(x', m) + z_{i+j}(x', m)), \sqrt{t}(z_0(x', m) + z_{i+j+1}(x', m))). \end{aligned}$$

これにより、関数 $\Gamma(j, a, b)$ は $2m(2w+1)$ とおり計算すればよいことがわかる。

注意 A.4. この方法では、試験関数にリプシッツ連続性があれば、空間の分割数に対する収束オーダーが $O(m^{-1})$ となり、 $2w$ 階微分可能であれば、 $O(m^{-2w})$ となる。

注意 A.5. 有限差分法との、計算コストの定数に関する比較は以下のとおりである。空間分割に関する近似精度 w が低いときは、有限差分法と比べ相対的に大きく、近似精度 w が高くなるに従って、相対的に小さくなる。

補論 2 非可換代数に関する諸結果

本補論では、3 節の定理の証明に用いる非可換代数の概念と諸定理を示す。

不定元 A_0, A_1, \dots, A_d に対して、 $A := A(d) := \{A_0, A_1, \dots, A_d\}$ と定め、 A^* を A に対する自由半群、 $\mathbb{R}\langle A \rangle$, $\mathbb{R}\llbracket A \rrbracket$ をそれぞれ A に対する \mathbb{R} 上の非可換多項式環、非可換冪級数環、 $L(A)$, $L(\llbracket A \rrbracket)$ を A に対する \mathbb{R} 上の自由リー環と自由リー冪級数環とする。また、 $M_l(A)$ を l 次の斉次元全体、

$$M_{\leq l}(A) := \bigoplus_{k=0}^l M_k(A)$$

とし、 $j_l, j_{\leq l}$ を $\mathbb{R}\langle A \rangle$ から $M_l, M_{\leq l}$ への標準射影とする。 $j_{\leq l}(x - y) = 0$ のとき、 $x \stackrel{l}{=} y$ で表す。

さらに、 $x, y \in \mathbb{R}\langle A \rangle$, $\langle x, 1 \rangle, \langle y, 1 \rangle = 0$ に対して、以下を定める。

$$\begin{aligned} \exp(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \\ \log(1+x) &:= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} x^k, \\ x \natural y &:= \log(\exp(x) \exp(y)). \end{aligned}$$

次に、非可換代数の元 $P := \exp\left(\sum_{i=0}^d A_i\right)$ を非可換代数の元 $\exp(aA_i)$, $i \in \{0, \dots, d\}$, $a \in \mathbb{R}$ を用いて近似する問題を考える。このとき、以下が成立する。

$$A_d \natural \dots \natural A_0 = -(-A_0) \natural \dots \natural (-A_d).$$

これより以下の補題が示せる。

補題 A.1 (Fujiwara [2006]). 任意の自然数 k に対して、以下が成立する。

$$j_k(A_d \natural \dots \natural A_0) = (-1)^{k+1} j_k(A_0 \natural \dots \natural A_d).$$

ここで、自然数 θ に対して、非可換環の元を以下のとおり定める。

$$Q^{[\theta]} := \frac{1}{2} \left(\prod_{i=0}^d \exp\left(\frac{A_i}{\theta}\right) \right)^{\theta} + \frac{1}{2} \left(\prod_{i=0}^d \exp\left(\frac{A_i}{\theta}\right) \right)^{\theta}.$$

このとき、以下の定理が示せる。

定理 A.1 (Fujiwara [2006]). 以下を満たすような非可換環の元 c_i , $i \in \mathbb{N}$ が存在する。

$$\begin{aligned} j_{2i}(c_i) &= 0, \quad i \in \mathbb{N}, \\ Q^{[\theta]} &= \exp\left(\sum_{i=0}^d A_i\right) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{\theta^{2i}}. \end{aligned}$$

証明. 自然数 i に対して、非可換環の元 $j_i(A_0 \# \cdots \# A_d)$ を τ_i とおくと、以下が成立する。

$$\log \left(\prod_{i=0}^{\widehat{d}} \exp \left(\frac{A_i}{\theta} \right) \right)^\theta = \theta \sum_{i=1} j_i \left(\frac{A_0}{\theta} \# \cdots \# \frac{A_d}{\theta} \right) = \sum_{i=1} \frac{1}{\theta^{i-1}} \tau_i.$$

また、補題 A.1 より以下が成立する。

$$\log \left(\prod_{i=0}^{\widehat{d}} \exp \left(\frac{A_i}{\theta} \right) \right)^\theta = \theta \sum_{i=1} j_i \left(\frac{A_d}{\theta} \# \cdots \# \frac{A_0}{\theta} \right) = \sum_{i=1} \frac{1}{(-\theta)^{i-1}} \tau_i.$$

故に、

$$Q^{[\theta]} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\theta^{i-1}} \tau_i \right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(-\theta)^{i-1}} \tau_i \right)^k \right).$$

が成り立つ。また、 $\tau_1 = \sum_{i=0}^d A_i$ であることに注意すれば、補題が示される。 \square

ここで、 $\theta \in \mathbb{N}$, $\alpha \subset \mathbb{N}$ に対して以下の定数を定める。

$$f_\theta(\alpha) := \prod_{i \in \alpha \setminus \{\theta\}} \frac{\theta^2}{\theta^2 - i^2}.$$

このとき、以下の定理が示される。

定理 A.2 自然数の集合 α に対して、以下が成立する。

$$\sum_{i \in \alpha} f_i(\alpha) Q^{[i]} \stackrel{2\# \alpha}{=} \exp \left(\sum_{i=0}^d A_i \right).$$

参考文献

- Fujiwara, T., “Sixth order methods of Kusuoka approximation,” UTMS preprint series 2006-7, 2006.
<http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/users/preprint/pdf/2006-7.pdf>.
- Jacod, J., T. G. Kurtz, S. Meleard, and P. Protter, “The approximate Euler method for Levy driven stochastic differential equations,” *Ann. I. H.*, 41(3), pp. 523–558, 2005.
- Kusuoka, S., “Approximation of expectation of diffusion processes and mathematical finance,” *Taniguchi Conf. on Math Nara '98, Advanced Studies in Pure Mathematics*, 31, pp. 147–165, 2001.
- “Malliavin Calculus Revisited,” *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 10, pp. 261–277, 2003.
- “Kusuoka Scheme and Gaussian type approximation,” Presentation at Mathematical Finance Seminar in Graduate School of Mathematical Sciences, 2006.
- Lyons, T. and N. Victoir, “Cubature on Wiener space,” *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, pp. 169–198, 2004.
- Ninomiya, S. and N. Victoir, “Weak Approximation of stochastic differential equations and application to derivative pricing,” *Applied Mathematical Finance*, 15(1-2), pp. 107–121, 2008.
- 藤原武弘、「楠岡近似の拡張とその応用について」、ワークショップ「金融工学・数理・計量ファイナンスの諸問題」2006年12月大阪大学中之島センター発表資料、2006年。