

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

GARCH型モデルとRealized Volatilityを用いたTOPIX日次リターンの非線形性の検証

ながくだいすけ わたなべとしあき
長倉大輔・渡部敏明

Discussion Paper No. 2008-J-9

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 東京都中央区日本橋本石町 2-1-1

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい。

備考： 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

GARCH型モデルとRealized Volatilityを用いたTOPIX日次リターンの非線形性の検証

ながくらすけ ながくらすけ わたなべとしあき
長倉大輔*・渡部敏明**

要 旨

金融資産のリターンは2次モーメントであるボラティリティが高い自己相関を持って変動しており、また株式市場のボラティリティは株価が上がった日の翌日より株価が下がった日の翌日の方がより上昇する傾向があることが知られている。本稿はTOPIXの日次リターンにこうしたボラティリティの変動以外にも過去の値との依存関係が存在するかどうか分析を行ったものである。先行研究ではボラティリティをGARCH型モデルによって推定しているが、本稿ではさらに日中リターンの2乗和として計算されるRealized Volatility (RV) も用いる。GARCH型モデルを用いた分析では、ボラティリティの自己相関と非対称性を考慮したGJR、EGARCHモデルを用いた場合に基準化したリターンに過去の値との有意な依存関係が観測されなかった。またRVを用いた分析では、RVの計算に1分ごとあるいは2分ごとのリターンを用い、かつ市場が閉まっている夜間と昼休みのリターンの2乗を加えなかった場合には基準化したリターンに過去の値との有意な依存関係が観測されなかった。これらの結果はTOPIXの日次リターンにはボラティリティの自己相関と非対称性以外に過去の値との依存関係は存在しないことを示唆している。

キーワード：BDS検定、CCK検定、GARCH、TOPIX、Realized Volatility

JEL classification: C01、C22、G12、G14

* 日本銀行金融研究所 (E-mail: daisuke.nagakura@boj.or.jp)

** 一橋大学経済研究所、日本銀行金融研究所 (E-mail: watanabe@ier.hit-u.ac.jp)

本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。本稿は一橋大学経済研究所21世紀COEプログラム「社会科学の統計分析拠点構築」および著者の渡部が代表を務める科学研究費補助金特別研究促進費「高頻度データを用いた日本の証券市場の計量分析」より助成を受け購入したデータを使用している。

1. はじめに

株式や為替レートなどの金融資産のリターンは、2 次のモーメントであるボラティリティが過去のリターンに依存して変動していることが知られている。具体的には、ボラティリティが上昇(低下) するとしばらくボラティリティの高い(低い) 期間が続く。この現象はボラティリティ・クラスタリングと呼ばれる。また株式市場のボラティリティは、株価が上がった日の翌日よりも株価が下がった日の翌日の方がより上昇する傾向があることが知られている(こうしたボラティリティの変動特性について詳しくは、渡部(2000) 参照)。リターンの過去の値との依存関係が、こうしたボラティリティ・クラスタリングやボラティリティ変動の非対称性だけなのか、それ以外にも存在するのかを分析することは、リターンの変動をモデル化する上で重要である。そこで、本稿では、TOPIX の日次リターンを用いて、こうしたボラティリティの変動以外にも過去の値との依存関係が存在するかどうか分析を行った。具体的には、TOPIX の日次リターンをボラティリティの推定値で割って基準化する事によりボラティリティの変動を除去したものに過去の値との依存関係がないかどうか分析を行った。

同様の研究は、Brock-Hsieh-LeBaron (1991), Hsieh (1991), Chen-Kuan (2002), 渡部(2000) らによって既に行われているが、ここではボラティリティを GARCH 型モデルを使って推定している。しかし、GARCH 型モデルにはさまざまなモデルがあり(渡部(2000, 2007) 参照)、どのモデルを用いるかによってボラティリティの推定値が異なる。そこで、近年では、モデルに依存しないボラティリティの推定量である Realized Volatility (RV) に注目が集まっている(RV について詳しくは、渡部(2007) 参照)。GARCH 型モデルに加え、RV を用いているのが本稿の特徴である。

RV とは日中リターンの 2 乗を 1 日分足し合わせたもので、リターンにノイズがなければ、日中リターンの時間間隔が短いほど、真のボラティリティの精度の高い推定量となる。しかし、実際には日中リターンはマイクロストラクチャ・ノイズを含む(マイクロストラクチャ・ノイズについて詳しくは、Campbell-Lo-MacKinlay (1997) Chapter 3 参照)。日中リターンの時間間隔を短くすると、このノイズの影響が大きくなるので、時間間隔を短くし過ぎるのは望ましくない。また株式市場では、夜間や昼休みといった市場が閉まっている時間があるので、その間は短い時間間隔のリターンを計算することができない。前日の終値から始値までの夜間のリターンや前場の終値から後場の始値までの昼休みのリターンは計算できるが、時間間隔が長いので、それらの 2 乗をそのまま加えると、時間の離散化による誤差が大きくなる可能性がある。そこで、Hansen-Lunde (2005a) は夜間や昼休みのリターンを除いて RV を計算し、それに日次リターンの標本分散と RV の標本平均とが等しくなるように調整係数を掛けるという方法を提案してい

る。日中リターンの時間間隔や夜間と昼休みのリターンの取り扱いによって結果に差が生じるかどうかは興味深い。そこで、本稿では、日中リターンの時間間隔を1分、2分、 \dots 、5分、および10分とし、それぞれについて夜間と昼休みのリターンの2乗をそのまま加えたものと、それらを加えないで Hansen-Lunde (2005a) の方法によって調整したものを計算し、これら計12個のRVそれぞれについて分析を行った。

Brock-Hsieh-LeBaron (1991), Hsieh (1991), 渡部 (2000) らは、過去の値との依存関係がないかどうかを分析するための検定統計量に、Brock-Dechert-Scheinkman-LeBaron (1996) によって提案された統計量 (以下、BDS 統計量と呼ぶ) を用いている。この統計量は、分布の独立同一性 (independently and identically distributed; i.i.d.) を帰無仮説とし、そうでないという仮説を対立仮説とする。ある変数が、現在の値がわかれば将来の値がすべてわかるという確定的 (deterministic) なプロセスに従うのに、そのプロセスが非線形であるために確率的に変動しているように見える現象をカオスと呼ぶが (カオスについて詳しくは、Brock-Hsieh-LeBaron (1991), Hsieh (1991), 渡部 (2000) 第2.3.4節参照), BDS 統計量の対立仮説はカオスを含むので、もし帰無仮説が受容された場合には TOPIX の日次リターンの変動がカオスであるという証拠も見つからなかったことになる。しかし、BDS 統計量はボラティリティ変動の非対称性に対して検出力が弱いことが知られており (Hsieh (1991), 渡部 (2000) 第2.3.4節), Chen-Chou-Kuan (2000) はボラティリティ変動の非対称性に対しても検出力の高い統計量 (以下、CCK 統計量と呼ぶ) を提案している。この統計量は i.i.d. の検定ではなく、時間に関する可逆性 (time reversibility) を検定する統計量であるが、時間に関する可逆性が満たされなければ i.i.d. も成り立たない。そこで、本稿では BDS 統計量と CCK 統計量を両方用いている。

GARCH 型モデルとしては、GARCH, GJR, EGARCH モデルという3つの代表的なモデルを用いている。このうち、GARCH モデルがボラティリティの自己相関だけしか考慮していないのに対して、GJR, EGARCH モデルはボラティリティ変動の非対称性も考慮している。ボラティリティ変動の非対称性を考慮しない GARCH モデルを用いた場合には、基準化したリターンに過去の値との有意な依存関係が観測されたのに対して、ボラティリティ変動の非対称性を考慮した GJR, EGARCH モデルを用いた場合には基準化したリターンに有意な依存関係は観測されなかった。RV を用いた分析では、RV の計算に1分ごとまたは2分ごとのリターンを用い、かつ夜間と昼休みのリターンの2乗を加えなかった場合には、基準化したリターンに過去の値との有意な依存関係は観測されなかった。これらの結果は、TOPIX の日次リターンには、ボラティリティの自己相関と非対称性以外に、過去の値との依存関係は存在しないことを示唆している。3分以上の時間間隔の日中リターンを用いて RV を計算した場合や夜間と昼休みのリターンの2乗を加えた場合には、基準化したリターンに過去の値との有意な依存関係が観測さ

れたが、これは時間の離散化による誤差により、RV が真のボラティリティから乖離したためと考えられる。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、第 2 節でボラティリティの推定方法や検定統計量を中心に分析方法について説明する。次に、第 3 節で、分析に用いた TOPIX の日次、日中データ、および RV の計算方法について説明する。続く第 4 節で、分析結果を説明する。最後に第 5 節で、本稿の分析結果をまとめ、今後の課題を述べる。

2. 分析方法

2.1. 概略

リターン R_t は、1 次のモーメント (平均) μ_t と 2 次のモーメント (分散) σ_t^2 だけが過去の値に依存しているとする、以下のように表せる。

$$R_t = \mu_t + \epsilon_t, \quad (1)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}, \quad E(z_t) = 0, \quad \text{Var}(z_t) = 1. \quad (2)$$

以下、 σ_t もしくは σ_t^2 のことをボラティリティと呼ぶ。また z_t は誤差項 ϵ_t をボラティリティ σ_t で割って基準化した誤差項であり、これは平均 0、分散 1 の独立同一分布に従う (i.i.d.)。

そこで、過去の値に依存しているのが 1 次と 2 次のモーメントだけなのか、それとももっと高次のモーメントまで過去の値に依存しているかどうかは、 μ_t と σ_t の推定値 $\hat{\mu}_t, \hat{\sigma}_t$ を使って基準化したリターン

$$\hat{z}_t = \frac{R_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t} \quad (3)$$

を計算し、それを使って z_t が i.i.d. であるかどうかを検定すればよい。ここで重要なのは、日々変動するボラティリティ σ_t をいかに推定するかと z_t が i.i.d. であるかどうかを検定するためにどのような統計量を用いるかである。

2.2. ボラティリティの推定

2.2.1. GARCH 型モデル

第 1 節で既に述べたように、先行研究ではボラティリティを GARCH 型モデルを用いて推定している。本稿では、GARCH 型モデルとして、代表的な GARCH モデル、GJR モデル、EGARCH

モデルを用いる。Bollerslev (1986) によって提案された GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) モデルは、ボラティリティの変動を以下のように定式化する。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^2, \quad (4)$$

$$\omega > 0, \beta_i, \alpha_j \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, q).$$

ここで、パラメータに非負制約を課しているのは、 σ_t^2 の非負性を保証するためである。このモデルでは、 σ_t^2 をその過去の値 ($\sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{t-p}^2$) と ϵ_t^2 の過去の値 ($\epsilon_{t-1}^2, \dots, \epsilon_{t-q}^2$) の線形関数としているので、ボラティリティの自己相関を捉えることができる。

ボラティリティの高い自己相関に加え、株式市場では、株価が上がった日の翌日と下がった日の翌日を比べると後者の方がボラティリティがより上昇する傾向があることが知られている。こうした前日に株価が上がったか下がったかによるボラティリティ変動の非対称性は GARCH モデルでは捉えることができない。Glosten-Jagannathan-Runkle (1993) によって提案された GJR モデル、Nelson (1991) によって提案された EGARCH (Exponential GARCH) モデルはボラティリティ変動の非対称性を考慮して GARCH モデルを改良したものである。

GJR モデルでは、以下のように、 ϵ_{t-j} が負であれば 1、それ以外では 0 になるダミー変数 D_{t-j}^- を用いることによって、ボラティリティ変動の非対称性を捉える。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q (\alpha_j + \gamma_j D_{t-j}^-) \epsilon_{t-j}^2, \quad (5)$$

$$\omega > 0, \beta_i, \alpha_j, \gamma_j \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, q).$$

例えば、(5) 式で $p = q = 1$ とした GJR(1, 1) モデル

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + (\alpha + \gamma D_{t-1}^-) \epsilon_{t-1}^2 \quad (6)$$

では、 $\epsilon_{t-1} \geq 0$ であれば、 $D_{t-1}^- = 0$ なので、

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \epsilon_{t-1}^2 \quad (7)$$

となり、 $\epsilon_{t-1} < 0$ であれば、 $D_{t-1}^- = 1$ なので、

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + (\alpha + \gamma) \epsilon_{t-1}^2 \quad (8)$$

となる。そこで、 $\gamma > 0$ であれば、価格が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方が (厳密に言うと、 R_{t-1} が μ_{t-1} を上回った時よりも下回った時の方が) ボラティリティがより上昇す

ることになる。このモデルでも、 σ_t^2 の値が負にならないように、パラメータに非負制約が必要となる。

EGARCH モデルでは、ボラティリティ σ_t^2 ではなく、その対数値 $\ln(\sigma_t^2)$ の変動を次のように定式化する。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i [\ln(\sigma_{t-i}^2) - \omega] + g(z_{t-1}) + \sum_{j=1}^q \psi_j g(z_{t-j-1}). \quad (9)$$

ただし、

$$g(z_{t-j-1}) = \theta z_{t-j-1} + \gamma [|z_{t-j-1}| - E(|z_{t-j-1}|)]. \quad (10)$$

ここで、 $E(|z_{t-j-1}|)$ ($j = 0, 1, \dots, q$) は $|z_{t-j-1}|$ の期待値を表す。この値は、 z_{t-j-1} の分布に依存し、標準正規分布の場合には、 $E(|z_{t-j-1}|) = \sqrt{2/\pi}$ となる。

このモデルは、 $\ln(\sigma_t^2)$ を被説明変数としているために、パラメータに非負制約を課す必要がない。また負の値をとる変数も説明変数に加えることができる。そこで、 z_{t-j-1} ($j = 0, 1, \dots, q$) を説明変数に加えることにより、ボラティリティ変動の非対称性を考慮している。例えば、(9) 式で、 $p = 1, q = 0$ とした EGARCH(1, 0) モデル

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \phi [\ln(\sigma_{t-1}^2) - \omega] + \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)] \quad (11)$$

では、 $z_{t-1} \geq 0$ であれば、

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta [\ln(\sigma_{t-1}^2) - \omega] + (\gamma + \theta)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|) \quad (12)$$

となるのに対して、 $z_{t-1} < 0$ であれば、

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta [\ln(\sigma_{t-1}^2) - \omega] + (\gamma - \theta)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|) \quad (13)$$

となる。そこで、 $\theta < 0$ であれば、価格が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる。

本稿ではこれら 3 つの GARCH 型モデルのパラメータを擬似最尤推定している (GARCH 型モデルの擬似最尤推定について詳しくは、渡部 (2000) 第 2.2 節参照)。擬似最尤法では z_{t-j-1} ($j = 0, 1, \dots, q$) の分布に標準正規分布を仮定するので、(10) 式の $E(|z_{t-j-1}|)$ はすべて $\sqrt{2/\pi}$ としている。

これら 3 つのモデル以外に、ボラティリティ変動の長期記憶性を考慮して EGARCH モデルを拡張した FIEGARCH モデル (Bollerslev-Mikkelsen (1996)) も推定したが、長期記憶性は有意でなかったため、以下の分析では用いていない。

2.2.2. Realized Volatility

GARCH 型モデルには上記の 3 つ以外にもさまざまなモデルがあり、どのモデルを用いるかでボラティリティの推定値が異なる。そこで、近年、注目を集めているのが、モデルに依存しないボラティリティの推定量である Realized Volatility (RV) である。RV は日中リターンの 2 乗和として計算される。

いま、第 t 日の日中の n 個のリターン・データ $\{r_{t-1+1/n}, r_{t-1+2/n}, \dots, r_t\}$ があるものとする。このとき、それらを 2 乗して足し合わせた

$$RV_t = \sum_{i=1}^n r_{t-1+i/n}^2 \quad (14)$$

を第 t 日の RV という。

また資産価格の対数値 $p(s)$ が拡散過程

$$dp(s) = \mu(s)ds + \sigma(s)dW(s) \quad (15)$$

に従っているものとする。ここで、 $W(s)$ はウィナー過程であり、 $\mu(s)$ は瞬時的なドリフト、 $\sigma(s)$ もしくは $\sigma^2(s)$ は瞬時的なボラティリティと呼ばれる。このとき、第 t 日の真のボラティリティは、

$$\sigma_t^2 = \int_{t-1}^t \sigma^2(s)ds \quad (16)$$

と定義され、これは瞬間的なボラティリティ $\sigma^2(s)$ を積分したものであるため、Integrated Volatility とも呼ばれる。(14) 式で定義される RV_t は、 $n \rightarrow \infty$ とすると、(16) 式で定義される真のボラティリティ σ_t^2 に確率収束するので、 n が十分大きいなら、 RV_t は σ_t^2 の精度の高い推定量となる。

しかし、実際の高頻度データを用いて RV を計算する場合には、以下の 2 つの問題が生じる。まず、高頻度の資産価格はマイクロストラクチャ・ノイズを含むことである。マイクロストラクチャ・ノイズとは市場のミクロ構造に起因するノイズのことで、代表的なものに bid-ask bounce がある。これは、取引が売値 (bid) で成立したり買値 (ask) で成立するために、取引価格が真の価格から乖離し、リターンに負の自己相関が生じるというものである。いま、観測される対数価格を $\tilde{p}(s)$ 、真の対数価格を $p(s)$ 、マイクロストラクチャ・ノイズを $\eta(s)$ とし、

$$\tilde{p}(s) = p(s) + \eta(s), \quad \eta(s) \sim WN(0, \sigma_\eta^2) \quad (17)$$

であるとする。簡単化のため、ここでは、 $\eta(s)$ は平均 0、分散 σ_η^2 のホワイトノイズ ($WN(0, \sigma_\eta^2)$) であり、真の対数価格 $p(s)$ と無相関であるものとする。

このとき, (17) 式を $t - \Delta$ ($\Delta > 0$) から t までのリターンに直し, 分散を計算すると以下のように表示する。

$$\text{Var}(\tilde{p}(t) - \tilde{p}(t - \Delta)) = \text{Var}(p(t) - p(t - \Delta)) + \text{Var}(\eta(t) - \eta(t - \Delta)). \quad (18)$$

ここで, 真の対数価格 $p(s)$ が (15) 式に従っているとすると, 右辺の第 1 項は,

$$\text{Var}(p(t) - p(t - \Delta)) = \int_{t-\Delta}^t \sigma^2(s) ds \quad (19)$$

となり, これは時間間隔 Δ を小さくすると, 0 に近づいていく。それに対して, (18) 式の右辺第 2 項は,

$$\text{Var}(\eta(t) - \eta(t - \Delta)) = 2\sigma_\eta^2 \quad (20)$$

となり, Δ に依存せず, 一定である。

したがって, Δ を小さくすると, 真のリターンの分散に比べてマイクロストラクチャ・ノイズの分散が相対的に大きくなってしまふ。そこで, もしマイクロストラクチャ・ノイズがなければ, RV の計算には可能な限り時間間隔の短い日中リターンを用いるのが望ましいが, マイクロストラクチャ・ノイズがある場合には, 時間間隔を短くすると RV に占めるマイクロストラクチャ・ノイズのウエイトが大きくなってしまふため, ティックデータ (値がつくたびのデータ) があつたとしても, 例えば 5 分ごとのリターンを用いることが多い。

もう一つの問題は, 夜間や昼休みなど取引がない時間のリターンの取り扱いである。以下では, t 日の日次リターンを t 日の終値と $t - 1$ 日の終値の対数階差として定義しているので, それを基準化するためのボラティリティは $t - 1$ 日の終値から t 日の終値までのボラティリティでなければならない。そこで, $t - 1$ 日の終値から t 日の始値までのボラティリティも考慮しなければならないが, その間は取引がないので, 短い時間間隔のリターンを計算することができない。また日本の株式市場では昼休みがあるので, その間も同様である。 $t - 1$ 日の終値から t 日の始値までの夜間のリターンや t 日の前場の終値から後場の始値までの昼休みのリターンは計算できるが, 時間間隔が長いので, それらをそのまま 2 乗して加えると, 時間の離散化による誤差が大きくなる可能性がある。

そこで, Hansen-Lunde (2005a) は, 以下のように, 夜間と昼休みを除いて計算した RV (以下, $RV_t^{(o)}$ と表す) に日次リターンの標本分散と $RV_t^{(o)}$ の標本平均の比を掛けるという方法を提案している。

$$RV_t = cRV_t^{(o)}, \quad c = \frac{\sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2}{\sum_{t=1}^T RV_t^{(o)}}. \quad (21)$$

ここで, T は日次リターンのサンプル数, \bar{R} は日次リターンの標本平均を表す。この方法を用いると, RV の標本平均と日次リターンの標本分散が等しくなる。他に, RV_t を $RV_t^{(o)}$, 夜間の

リターンの2乗, 昼休みのリターンの2乗の加重和とし, 最適なウエイトを求めるという方法も提案されている (Hansen-Lunde (2005b))¹⁾。

本稿の以下の分析では, RV の計算に用いる日中リターンの時間間隔や夜間と昼休みのリターンの取り扱い方によって結果に差が出るかどうかを分析するため, 日中リターンの時間間隔を1分, 2分, ..., 5分, および10分とし, それぞれについて夜間と昼休みのリターンの2乗をそのまま加えたものとそれらを加えずに Hansen-Lunde (2005a) の方法によって調整したものを計算し, それら計12個のRV それぞれについて分析を行っている。

2.3. 検定統計量

2.3.1. BDS 統計量

ある確率変数 X_t が i.i.d. であるかどうかを直接検定する統計量に, Brock-Dechert-Scheinkman-LeBaron (1996) によって提案された BDS 統計量がある。この統計量を用いた BDS 検定では, 帰無仮説, 対立仮説をそれぞれ次のように設定する。

$$\begin{aligned} H_0: & X_t \text{ が i.i.d.} \\ H_1: & X_t \text{ は i.i.d. でない.} \end{aligned}$$

この検定に用いる標本を (x_1, \dots, x_T) とする。またその中の $t - n + 1$ 期から t 期までの標本を $x_t^{(n)} = (x_{t-n+1}, x_{t-n}, \dots, x_t)$ と表し, $x_t^{(n)}$ と $x_s^{(n)}$ の最大ノルム $\|x_t^{(n)} - x_s^{(n)}\|$ を以下のように定義する。

$$\|x_t^{(n)} - x_s^{(n)}\| = \max(|x_{t-n+1} - x_{s-n+1}|, |x_{t-n} - x_{s-n}|, \dots, |x_t - x_s|). \quad (22)$$

ここで, 右辺は $(|x_{t-n+1} - x_{s-n+1}|, |x_{t-n} - x_{s-n}|, \dots, |x_t - x_s|)$ の中で最も大きい値を表している。

また e をある正の定数として, (22) 式の最大ノルムが e を下回れば 1, そうでなければ 0 となる指示関数 (indicator function) を $I(\|x_t^{(n)} - x_s^{(n)}\| < e)$ で表す。さらに, この指示関数を用いて相関次元 (correlation dimension) を以下のように定義する。

$$C_{n,T}(e) = \frac{2}{(T-n+1)(T-n)} \sum_{t=n}^{T-1} \sum_{s=t+1}^T I(\|x_t^{(n)} - x_s^{(n)}\| < e). \quad (23)$$

これは, $(x_t^{(n)}, x_s^{(n)})$ ($t = n, n+1, \dots, T-1; s = t+1, t+2, \dots, T$) の $(T-n+1)(T-n)/2$ 個の組み合わせの内, $\|x_t^{(n)} - x_s^{(n)}\| < e$ を満たす組み合わせの割合を表している。

¹⁾この方法も試してみたが, 昼休みのリターンの2乗のウエイトが最も高いという直観に反する結果が得られたので, 以下の分析には用いていない。

BDS 統計量は相関次元を用いて以下の式で定義される。

$$W_{n,T(e)} = \frac{\sqrt{T}[C_{n,T}(e) - C_{1,T}(e)^n]}{\sigma_{n,T}(e)}. \quad (24)$$

ここで、分母の $\sigma_{n,T}(e)$ は分子の漸近的な標準偏差で、その計算方法については、Brock-Dechert-Scheinkman-LeBaron (1996), Brock-Hsieh-LeBaron (1991) を参照されたい。Brock-Dechert-Scheinkman-LeBaron (1996) は、帰無仮説の下で、この統計量が標準正規分布に従うことを証明している。

しかし、有限標本の場合に $\sigma_{n,T}(e)$ に漸近的な標準偏差を用いるとバイアスが大きいことが知られているので、Chen-Kuwan (2002), Racine-Maasoumi (2007) などに従い、本稿ではそれをブートストラップ法によって計算している。具体的には、標本 (x_1, \dots, x_T) をランダムに並べ替えて BDS 統計量 (24) 式の分子を 1000 回計算し、その標準偏差を $\sigma_{n,T}(e)$ とした。また Chen-Kuwan (2002) に従い、以下の分析では、 $e = 0.75\hat{\sigma}, \hat{\sigma}$, $n = 2, 3, \dots, 5$ としている。ただし、 $\hat{\sigma}$ は標本 (x_1, \dots, x_T) の標準偏差である。

2.3.2. CCK 統計量

既に述べたように、株式市場ではボラティリティの変動に前日に株価が上がったか下がったかによる非対称性があることが知られているが、BDS 統計量はこうしたボラティリティ変動の非対称性に関して検出力が低いことが知られている (Hsieh (1991))。そのため、株価のボラティリティを非対称性を考慮していない GARCH モデルで推定し、それで基準化したリターンに対して BDS 検定を行った場合に、i.i.d. であるとの帰無仮説が棄却されないことがある (Chen-Kuan (2002), 渡部 (2000) 第 2.3.4 節)。これに対して、Chen-Chou-Kuan (2000) (以下、CCK と略す) によって提案された CCK 統計量はボラティリティ変動の非対称性に関しても高い検出力を持つ。そこで、本稿では、この統計量も用いている。

CCK 統計量はある変数 Y_t が i.i.d. であるかどうかを検定するのではなく、時間に関する可逆性 (time reversibility) を検定する統計量である。時間に関する可逆性は次のように定義される。

定義 (時間に関する可逆性): ある (強) 定常な時系列 $\{Y_t\}$ が時間に関して可逆であるとは、 $\{Y_t\}$ の有限次元の (同時) 分布関数がどんな $t_1 < \dots < t_n$ の組み合わせに対しても

$$F_{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}} = F_{Y_{t_n}, \dots, Y_{t_1}}$$

を満たすことである。ここで, $F_{Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n}}$ は確率変数 $(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n})$ の同時分布関数を表す。

CCK はもし $\{Y_t\}$ が時間に関して可逆であれば, どんな $k = 1, 2, \dots$, に対しても $X_{t,k} = Y_t - Y_{t-k}$ が原点に対して対称な分布を持つことを証明した²⁾。CCK はこの性質を利用して時間に関する可逆性を検定する方法を提案した。明らかに, i.i.d. であるならば時間に関して可逆であり, 時間に関して可逆でなければ i.i.d. でない。したがって, $X_{t,k}$ の対称性が棄却されれば時間に関する可逆性も棄却され, i.i.d. も棄却される。

確率変数 $X_{t,k}$ は原点で対称な分布をもつ時(およびその時に限り), $h_k(\omega) \equiv E[\sin(\omega X_{t,k})] = 0$ が全ての $\omega \geq 0$ に対して満たされることを簡単に示すことができる。この時, $\int_0^\infty g(\omega)d\omega < \infty$ であるような関数 g で各 ω に積分によって重み付けをしたものを考えよう。明らかに

$$\int_0^\infty h_k(\omega)g(\omega)d\omega = 0 \quad (25)$$

が全ての k について成り立つ。ここで積分順序を入れ替えると, (25) 式は

$$\int_{-\infty}^\infty \psi(x)dF_{X_{t,k}}(x) = E[\psi(x)] = 0 \quad (26)$$

と書ける。ここで, $\psi(x) \equiv \int_0^\infty \sin(\omega x)g(\omega)d\omega$ である。

いま, 検定に用いる標本を (y_1, \dots, y_T) とし, その k 次の階差を $x_{t,k} = y_t - y_{t-k}$ としよう。CCK 統計量は (26) 式を帰無仮説とし, 期待値を標本平均で置き換え $\sqrt{T-k}$ をかけたものを用いて, 以下の式で定義される。

$$CCK = \psi_k / \hat{\sigma}_\psi. \quad (27)$$

ここで,

$$\psi_k \equiv \frac{1}{\sqrt{T-k}} \sum_{t=k+1}^T \psi(x_{t,k}) \quad (28)$$

であり, $\hat{\sigma}_\psi$ は ψ_k の標準偏差の推定量である。この統計量は帰無仮説の下で標準正規分布に従うことが CCK によって示されている。厳密に言うと, この統計量は $X_{t,k}$ の分布の対称性を検定するためのものであり, Y_t の時間に関する可逆性が直接の帰無仮説ではないが, この検定統計量を k 次の階差に用いることにより時間に関する可逆性を検定できる。

CCK は簡単なシミュレーションにより, 関数 g として単調減少関数を用いるのが適しているとし, さらに ψ の積分が明示的に解けるような関数 g として指数分布の確率密度関数, すなわち, $g(\omega) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{\omega}{\beta}\right)$ を用いることを提案した。この時, ψ の積分は明示的に

$$\psi_\beta(x) = \frac{\beta x}{1 + (\beta x)^2} \quad (29)$$

²⁾ $X_{t,k}$ の対称性は必ずしも時間に関する可逆性を意味しない。

と書ける。本稿では、 ψ としてこの ψ_β を用い、(28) 式の ψ_k の定義の ψ を ψ_β で置き換えたものを $\psi_{\beta,k}$ と定義する。CCK は他にも g として半正規分布の確率密度関数を用いることを提案しているが、CCK のモンテカルロ実験によると、どちらを用いてもあまり差がないことが示されているので、本稿では g として指数関数の確率密度関数のみ、すなわち ψ として式 (29) で定義される ψ_β のみを用いている。

CCK では $\hat{\sigma}_\psi$ として ψ_k の漸近的な標準偏差のカーネル推定量を用いることを提案したが、本稿では Chen-Kuan (2002) に従い、それを BDS 統計量と同様のブートストラップ法を用いて計算した。また Chen-Kuan (2002) に従い、以下の分析では、 $\beta = 0.5, 1$, $k = 1, 2, 3$ としている。

3. データ

本稿の分析に用いた日次リターンは 1998 年 1 月 6 日から 2003 年 12 月 29 日まで TOPIX の日次変化率 (%) である。TOPIX のボラティリティは 2004 年に急激に低下しその後上昇に転じており、BDS 検定は過去の値との依存関係がなくとも構造変化があると帰無仮説を棄却するので、2004 年以降のデータは用いなかった。日次変化率は各営業日の終値の対数階差を 100 倍することにより算出した。

表 1 には、その基本統計量が示されている。平均は 0 から有意に乖離していない。LB(10) は 1 次から 10 次までの自己相関がすべて 0 であるという帰無仮説を検定するための Ljung-Box (1978) 統計量であり、分散不均一性がある場合にこの統計量をそのまま使うと帰無仮説を過剰に棄却してしまうので (Diebold-Lopez (1995) 参照), Diebold (1988) の方法により分散不均一性を調整している (渡部 (2000) 第 1.5.1 節参照)。この統計量によると、日次リターンに自己相関がないという帰無仮説は有意水準 5% では棄却されるものの、有意水準 1% では棄却されない。そこで、以下の分析では、TOPIX 日次リターンは平均 0 で自己相関はないものとして分析を行う。すなわち、(3) 式の $\hat{\mu}_t$ は 0 とする。LB2(10) はリターンの 2 乗の LB 統計量である。この値によると、リターンの 2 乗には有意水準 1% でも有意な自己相関が観測される。これはボラティリティ・クラスタリングと整合的である。分布については、歪度は 0 から有意に乖離していないが、尖度は 3 を有意に超えている。このことは日次リターンは分布の裾が正規分布よりも厚いことを示している。JB は歪度と尖度を合わせて正規性の検定を行う Jarque-Bera (1987) 統計量であり、有意水準 1% でも正規性を棄却する。リターンの分布の裾が厚いことはよく知られた事実である。しかし、これは必ずしも (2) 式の z_t の分布の裾が厚いことを意味しない。 z_t の分布が標準正規分布であっても、ボラティリティ σ_t が変動するのであれば、 ϵ_t もし

くは R_t の尖度は 3 を超える (証明は、渡部 (2000) 第 1.4 節参照)。 z_t の分布については以下で分析する。

表 2 には日次リターンの BDS 統計量の値が示されている。これによると、TOPIX の日次リターンが i.i.d. であるという帰無仮説は棄却される。ボラティリティの変動を除去していない日次リターンに対して直接 BDS 検定を行うと、ボラティリティに高い自己相関があるので、帰無仮説が棄却されるのは当然である。

RV の計算は、同じく 1998 年 1 月 6 日から 2003 年 12 月 29 日までの TOPIX の日中の価格を用いて行った³⁾。我々の利用したデータベースには、前場は 9:01 から 11:00 (もしくは 11:00 過ぎ) まで、後場は 12:31 から 15:00 (もしくは 15:00 過ぎ) までの 1 分ごとの TOPIX の価格が記録されている⁴⁾。既に述べたように、RV の計算に用いる日中リターンの時間間隔を短くするとマイクロストラクチャ・ノイズの影響が大きくなり、逆に長くすると時間の離散化による誤差が大きくなる。そこで、本稿では時間間隔による結果の違いを比較するため、時間間隔を 1 分、2 分、...、5 分、および 10 分として RV を計算した。例えば、5 分ごとのリターンを用いる場合には、前場については、9:01, 9:06, 9:11, ..., 10:56 の価格と前場の終値を、後場については 12:31, 12:36, 12:41, ..., 14:56 の価格と後場の終値を 5 分ごとの価格として抽出した。ただし、大納会、大発会は前場しか取引がないので、除外した。また 2005 年 11 月 1 日は東証のシステム障害により 13:30 から取引が開始されたので、その日も除外した。これらの日は上記の日次リターンの計算でも除外した。

$\Delta (= 1, 2, \dots, 5, 10)$ 分ごとの価格の対数階差を 100 倍することにより前場と後場の日中リターンを計算し、それらをすべて 2 乗して足し合わせたものを $RV_t^{(o)}(\Delta)$ とする。ここで問題になるのは、前日の終値から始値までの夜間のリターンと前場の終値から後場の始値までの昼休みのリターンの処理である。ここでは 2 通りの処理をした。まず、 $RV_t^{(o)}(\Delta)$ に夜間のリターンの 2 乗と昼休みのリターンの 2 乗をそのまま加えた。しかし、夜間と昼休みのリターンは時間間隔が長いので、それらを 2 乗したものをそのまま加えると、時間の離散化による誤差が大きくなる可能性がある。

そこで、もう一つの RV は、Hansen-Lunde (2005a) に従い、夜間と昼休みのリターンの 2 乗は加えず、(21) 式によって計算した。(21) 式の調整係数 c の値は 2.03 であった。大納会、大発会以外の営業日の市場が開いている時間は 4.5 時間であり、もし昼休みや夜間など市場が閉

³⁾具体的には、一橋大学 COE プログラム「社会科学の統計分析拠点構築」および文部科学省特別研究促進費「高頻度データを用いた日本の証券市場の計量分析」で購入した NEEDS-TICK データを用いた。

⁴⁾東京証券取引所の取引は前場は 11:00 まで、後場は 15:00 までであるが、NEEDS-TICK データでは実際に取引があった時刻ではなく TOPIX が算出された時刻が入力されているため、東京証券取引所が電子化される前には 11:00 や 15:00 を超えることがあった。

まっている間のボラティリティの上昇のスピードが市場が開いている間と同じであれば、 c は $24/4.5 \approx 5.33$ となるはずである。ところが、それよりかなり小さい 2.03 ということは、市場が閉まっている間のボラティリティの上昇のスピードが市場が開いている間より遅いということで、先行研究と整合的である（渡部（2000）第 2.4.1 節参照）。

以上のように計算した 12 個の RV が図 1 に描かれている。また表 3 にはそれらの基本統計量が計算されている。図 1 の “Naive” は夜間と昼休みのリターンの 2 乗をそのまま加えた RV, “HL” は夜間と昼休みのリターンの 2 乗を除いて計算した RV を Hansen-Lunde (2005a) の方法で調整したものであり、表 3 の 1 列目の RV の後の括弧内の数値は、RV を計算するために用いた日中リターンの時間間隔 (分) を表している。図 1 によると、すべての時間間隔で両者は似通った動きをしているが、HL の RV の方が全体的に高く、変動が大きいくちが見取れる。また時間間隔が長くなるほど RV の値が高く、変動が大きくなっている。これらのことは、表 3 に示されている RV とその対数値の平均と標準偏差の値からも確認できる。さらに、表 3 の LB(10) 統計量の値から、RV とその対数値に強い自己相関があることがわかる。RV の分布に関しては、歪度、尖度、JB 統計量の値とも RV そのものよりも対数値を取った方がはるかに小さな値を示しており、対数をとった RV の分布は正規分布に近いことがわかる。JB 統計量によると、RV の対数値でも正規性は棄却されるが、RV は長期記憶過程に従うとの結果が数多く得られており（渡部（2007）参照）、長期記憶過程に従う系列の場合、JB 統計量は過剰に正規性を棄却することが知られているので（Thomakos-Wang（2003）参照）、ここでは結論は下せない。Thomakos-Wang（2003）では長期記憶系列に対しても頑強な正規性の検定統計量がいくつか提案されているが、RV の正規性の検定は本稿の目的ではないので、これ以上の分析は行わない。

4. 分析結果

4.1. GARCH 型モデルを用いた分析

まず最初に、GARCH 型モデルによって推定したボラティリティで基準化した日次リターンを用いて、BDS 検定と CCK 検定を行う。モデルの次数 p, q に関しては SIC (Schwarz' (1978) Information Criterion) によって選択した結果、GARCH, GJR モデルでは $p = q = 1$, EGARCH モデルでは $p = 1, q = 0$ が選ばれたので、これらの次数の下で各モデルのパラメータを擬似最尤推定した。推定結果は表 4 に示されている。括弧内の数値は擬似最尤法の標準誤差である（詳しくは、渡部（2000）第 2.2.3 節参照）。ボラティリティの持続性は、GARCH(1,1) は $\beta + \alpha$, GJR(1,1) モデルでは、 z_t の分布が左右対称であるとする $\beta + \alpha + 0.5\gamma$, EGARCH(1,0) モデ

ルでは ϕ で表わされるが、それらの推定値はすべて 1 に近く、TOPIX 日次リターンのボラティリティにも高い持続性があることがわかる。

図 2 には、各 GARCH 型モデルによって推定されたボラティリティが描かれている。GARCH, GJR, EGARCH モデルによって推定されたボラティリティはそれぞれ似通った動きをしており、図 1 の RV と比べると、変動は小さくスムーズである。

表 5 には、各 GARCH 型モデルによって推定されたボラティリティで基準化した日次リターンの基本統計量が計算されている。LB2(10) は基準化したリターンの 2 乗の LB 統計量であり、それによると、GARCH モデルで有意水準 10%、GJR, EGARCH モデルでは有意水準 5% で有意な自己相関が観測されているが、GARCH モデルでは有意水準 5%、GJR, EGARCH モデルでは有意水準 1% で有意ではなくなるので、このまま次の分析に進む。また JB 統計量の値から (Kulperger-Yu (2005) は JB 統計量が GARCH 残差にも適用できることを示している)、各 GARCH 型モデルによって推定されたボラティリティで基準化した日次リターンの分布はすべて正規分布から有意に乖離していることがわかる。特に尖度が有意に 3 を上回っている。既に述べたように、(2) 式においてボラティリティ σ_t が変動するなら、 z_t の分布が正規分布であっても、 ϵ_t もしくは R_t の尖度は 3 を上回る。しかし、ボラティリティで割って基準化したリターン \hat{z}_t の尖度が有意に 3 を上回るということは、リターンの尖度の高さはボラティリティの変動だけでは説明できないことを意味する。この結果は GARCH 型モデルを用いた先行研究と整合的である (渡部 (2000) 第 2.4.2 節参照)。しかし、以下の RV を用いた場合の結果はこれと異なる。

表 6 は、各 GARCH 型モデルによって推定したボラティリティで基準化したリターンの BDS 統計量の値を示している。 $e = 0.75\hat{\sigma}$, $n = 5$ の EGARCH モデルにおいて有意水準 10% で棄却される以外は、すべての GARCH 型モデル、またすべての e と n で、i.i.d. であるという帰無仮説は受容される。しかし、既に述べたように、株式市場のボラティリティは株価が上がった日の翌日よりも株価が下がった日の翌日の方がより上昇する傾向があり、GARCH モデルはこうしたボラティリティ変動の非対称性を考慮していない。BDS 統計量はこうした非対称性に対して検出力が低いことが知られており、GARCH モデルで推定したボラティリティで基準化したリターンでも帰無仮説が受容されているのはそのためであると考えられる。

そこで、次にそうした非対称性に関して検出力の高い CCK 統計量を用いて検定を行った。結果は表 7 に示されている。今度は GARCH モデルでは帰無仮説は棄却されており、このことから、BDS 検定で GARCH モデルが受容されたのは、やはりボラティリティ変動の非対称性に対する BDS 統計量の検出力の低さによるものと考えられる。それに対して、ボラティリティ変動の非対称性を考慮した GJR, EGARCH モデルは、表 7 でも、有意水準 10% では棄却される個所があるものの、有意水準を 5% にするとすべてで受容される。ボラティリティの自己相関と

非対称性を両方考慮した GJR, EGARCH モデルでボラティリティを推定した場合, そのボラティリティで基準化したリターンには過去の値との有意な依存関係がないことから, TOPIX の日次リターンにはボラティリティの変動以外, 過去の値との依存関係はないものと考えられる。同じく GARCH 型モデルで推定したボラティリティで基準化したリターンに対して BDS 検定と CCK 検定を行っている。Chen-Kuan (2002) でも同様の結果が得られている。

4.2. Realized Volatility を用いた分析

次に RV で基準化したリターンを用いて分析を行った。表 8 に基準化したリターンの基本統計量が計算されている。表 3 同様, 1 列目の RV の後の括弧内の数値は, RV を計算するために用いた日中リターンの時間間隔 (分) を表している。まず, LB2(10) の値によると, 有意水準 10% では Hansen-Lunde (2005a) の方法で計算した RV(10) 以外すべての RV で基準化したリターンの 2 乗の自己相関が有意であるが, 有意水準 5% ではさらに夜間と昼休みのリターンの 2 乗を加えた RV(2), RV(3), および Hansen-Lunde (2005a) の方法で計算した RV(1), RV(2), RV(3) で自己相関が有意でなくなる。それ以外に表 8 で興味深いのは, GARCH 型モデルの場合, 基準化したリターンは尖度が有意に 3 を上回っていたのに対して, RV では逆に 3 を有意に下回っていることである。また GARCH 型モデルの場合, 基準化したリターンの標準偏差がほぼ 1 であるのに対して, 夜間と昼休みのリターンの 2 乗を加えた RV では 1 を大幅に上回っており, 逆に Hansen-Lunde (2005a) の方法で計算した RV では 1 を下回っている。

表 9 には BDS 統計量の値が示されている。RV で基準化したリターンが i.i.d. であるという帰無仮説は, 有意水準 10% では夜間と昼休みのリターンの 2 乗を加えた場合, Hansen-Lunde (2005a) の方法で計算した場合とも RV(1) で受容され, 有意水準 5% ではさらに両者の RV(2) でも受容される。時間間隔が 3 分以上の日中リターンを用いて RV を計算した場合は, すべて有意水準 5% で棄却される個所がある。これは, RV の計算に用いる日中リターンの時間間隔を 3 分以上にすると, 時間の離散化による誤差が大きくなりボラティリティの推定値の精度が低下したためであると考えられる。逆に 1 分ごとと 2 分ごとの日中リターンを用いて RV を計算した場合に強く棄却されないという結果は, TOPIX の場合, その時間間隔ではマイクロストラクチャ・ノイズの影響がそれほど大きくないことを示唆している。

最後に, 表 10 には CCK 統計量の値が示されている。表 9 の BDS 統計量の結果は日中リターンの時間間隔のみに依存し, 夜間や昼休みのリターンの処理の方法には依存しなかったが, 表 10 の CCK 統計量の結果はむしろ後者に依存する。有意水準を 5% とすると, 夜間と昼休みのリターンの 2 乗をそのまま加えた場合には多くの個所で時間に関する可逆性が棄却されるのに

対して、それらを加えずに Hansen-Lunde (2005a) の方法で調整した場合にはすべての個所で棄却されない。

以上の結果を GARCH 型モデルの結果と合わせると、TOPIX の日次リターンにはボラティリティの変動以外に過去との有意な依存関係はないが、時間間隔 3 分以上の日中リターンを用いて RV を計算した場合と、時間間隔 1, 2 分ごとの日中リターンを用いても、夜間と昼休みのリターンの 2 乗をそのまま加えた場合には、時間の離散化による誤差により、基準化したリターンに有意な依存関係が検出されたものと考えられる。

5. まとめと今後の課題

本稿では、GARCH 型モデルによって推定したボラティリティおよび RV で基準化した TOPIX の日次リターンの BDS 統計量と CCK 統計量を計算することにより、TOPIX の日次リターンにはボラティリティの自己相関と非対称性以外に過去の値との有意な依存関係が存在しないことを明らかにした。先行研究はすべてボラティリティを GARCH 型モデルによって推定しており、RV を用いて分析を行ったのは本稿が初めてである。RV を用いた分析では、日中リターンの時間間隔や夜間と昼休みのリターンの扱い方によって結果が異なることが明らかになった。そこで、本稿の分析は、RV の計算方法の選択に利用できる可能性がある。

本稿ではただ単に時間観間隔と夜間と昼休みのリターンの取り扱い方を変えて RV を計算したが、マイクロストラクチャ・ノイズを考慮した RV の計算方法がいくつか提案されている。具体的には、日中リターンの最適な時間間隔の選択方法 (Ait-Sahalia-Mykland-Zhang (2005), Bandi-Russell (2006)), 複数の時間間隔を用いて RV を計算し組み合わせる方法 (Zhang-Mykland-Ait-Sahalia (2005), Zhang (2006)), カーネル推定量 (Barndorff-Nielsen-Hansen-Lunde-Shephard (2006)) などがある。本稿では利用可能な日中リターンの時間間隔の中で最も短い 1 分でもマイクロストラクチャ・ノイズの影響がみられなかったのでこれらの方法は用いなかったが、マイクロストラクチャ・ノイズの影響が大きい場合にはこれらの方法も用いて結果の比較を行うべきであろう。また図 2 の GARCH 型モデルで推定したボラティリティにはそれほど大きなジャンプは見られないが、図 1 の RV には時々大きなジャンプが見られる。そこで、リターンのジャンプを考慮して RV を計算することも重要である (Barndorff-Nielsen-Shephard (2004) 参照)。

参考文献

- Ait-Sahalia, Y., Mykland, P. A. and Zhang, L. (2005). How often to sample a continuous-time process in the presence of market microstructure noise, Review of Financial Studies,

18, 351–416.

- Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2006). Designing realized kernels to measure the ex-post variation of equity prices in the presence of noise, unpublished manuscript, Oxford University.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard N. (2004). Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps (with discussion), Journal of Financial Econometrics, 2, 1–37.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, Journal of Econometrics, 31, 307–327.
- Bollerslev, T. and Mikkelsen, H. O. (1996). Modeling and pricing long memory in stock market volatility, Journal of Econometrics, 73, 151–184.
- Brock, W. A., Dechert, W. D., Scheinkman, J. A. and LeBaron, B. (1996). A test for independence based on the correlation dimension, Econometric Reviews, 15, 197–235.
- Brock, W. A., Hsieh, D. A. Hsieh, and LeBaron, B. (1991). Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability, MIT Press.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W. and MacKinlay, A. C. (1997). The Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press. (祝迫得夫・大橋和彦・中村信弘・本多俊毅・和田賢治訳 (2003). ファイナンスのための計量分析, 共立出版.)
- Chen, Y.-T., Chou, R. Y. and Kuan, C.-M. (2000). Testing time reversibility without moment restrictions, Journal of Econometrics, 95, 199–218.
- Chen, Y.-T. and Kuan, C.-M. (2002). Time irreversibility and EGARCH effects in US stock index returns, Journal of Applied Econometrics, 17, 565–578.
- Diebold, F. (1988), Empirical Modeling of Exchange Rate Dynamics, Springer-Verlag.
- Diebold, F. X. and Lopez, J. A. (1995). Modeling volatility dynamics, Macroeconomics: Developments, Tensions, and Prospects (K. D. Hoover, ed.), Kluwer Academic Publishers, 427–466.

- Glosten, L. R., Jagannathan, R. and Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of nominal excess returns on stocks, Journal of Finance, 48, 1779–1801.
- Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005a). A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1)? Journal of Applied Econometrics, 20, 873–889.
- Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005b). A realized variance for the whole day based on intermittent high-frequency data, Journal of Financial Econometrics, 3, 525–554.
- Hsieh, D. (1991). Chaos and nonlinear dynamics: application to financial markets, Journal of Finance, 46, 1839–1878.
- Jarque, C. M. and Bera, A. K. (1987). Test for normality of observations and regression residuals, International Statistical Review, 55, 163–172.
- Kulperger, R. and Yu, H. (2005). High moment partial sum processes of residuals in GARCH models and their applications, Annals of Statistics, 33, 2395–2422.
- Ljung, G. M. and Box, G. E. P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models, Biometrika, 65, 297–303.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach, Econometrica, 59, 347–370.
- Racine, J. S. and Maasoumi, E. (2007). A versatile and robust metric entropy test of time-reversibility, and other hypotheses, Journal of Econometrics, 138, 547–567.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model, Annals of Statistics, 6, 461–464.
- Thomakos, D. D. and Wang, T. (2003). Realized volatility in the futures markets, Journal of Empirical Finance, 10, 321–353.
- 渡部敏明 (2000). ボラティリティ変動モデル, 朝倉書店.
- 渡部敏明 (2007). Realized Volatility-サーベイと日本の株式市場への応用, 経済研究, 58, 352–373.

- Zhang, L. (2006). Efficient estimation of stochastic volatility using noisy observations: a multi-scale approach, Bernoulli, 12, 1019–1043.
- Zhang, L., Mykland, P. A. and Aït-Sahalia, Y. (2005). A tale of two time scales: determining integrated volatility with noisy high-frequency data, Journal of the American Statistical Association, 100, 1394–1411.

表 1: 日次リターン (%) の基本統計量

サンプル数	平均	標準偏差	歪度	尖度	JB	LB(10)	LB2(10)
1465	-0.0076 (0.0358)	1.3684	-0.0604 (0.0640)	4.2479 (0.1280)	95.95***	20.48**	46.07***

注: サンプル期間は 1998 年 1 月 6 日から 2003 年 12 月 29 日まで。括弧内の数値は標準偏差。JB は正規性を検定するための Jarque-Bera (1987) 統計量である。JB 統計量の臨界値は 4.61 (10%), 5.99 (5%), 9.21 (1%)。LB(10) と LB2(10) はそれぞれ日次リターンおよびその 2 乗の 1 次から 10 次までの自己相関がすべて 0 であるという帰無仮説を検定するための Ljung-Box (1978) 統計量で, Diebold (1988) の方法により分散不均一性を調整している。LB(10) と LB2(10) の臨界値は 15.99 (10%), 18.31 (5%), 23.21 (1%)。*, **, *** はそれらがそれぞれ有意水準 10%, 5%, 1% で有意であることを示す。

表 2: 日次リターンのの BDS 統計量

$e = 0.75\hat{\sigma}$				$e = \hat{\sigma}$			
$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
1.16	2.28*	3.07***	2.79**	1.41	2.55**	3.33***	3.29***

注: *, **, *** はそれぞれ有意水準 10%, 5%, 1% で有意であることを示す。

表 3: RV およびその対数値の基本統計量

(a) RV

	平均	標準偏差	歪度	尖度	JB	LB(10)
夜間と昼休みのリターンの 2 乗を加えた場合 (Naive)						
RV(1)	0.7506 (0.0173)	0.6616	7.6092 (0.0640)	123.8183 (0.1280)	905166.20***	549.47***
RV(2)	0.8058 (0.0182)	0.6955	6.6188 (0.0640)	99.3398 (0.1280)	577245.49***	586.46***
RV(3)	0.8617 (0.0191)	0.7312	6.0166 (0.0640)	83.3267 (0.1280)	402702.37***	612.29***
RV(4)	0.9062 (0.0199)	0.7628	5.5328 (0.0640)	70.8408 (0.1280)	288411.05***	598.73***
RV(5)	0.9769 (0.0213)	0.8164	5.0532 (0.0640)	58.5677 (0.1280)	194717.11***	533.66***
RV(10)	1.1683 (0.0284)	1.0854	5.0389 (0.0640)	50.6549 (0.1280)	144824.71***	323.24***
Hansen-Lunde (2005a) の方法を用いた場合 (HL)						
RV(1)	1.8712 (0.0315)	1.2071	5.1794 (0.0640)	72.2309 (0.1280)	299117.61***	612.27***
RV(2)	1.8712 (0.0333)	1.2758	3.9662 (0.0640)	39.9517 (0.1280)	87188.78***	574.87***
RV(3)	1.8712 (0.0346)	1.3251	3.8644 (0.0640)	36.0591 (0.1280)	70359.00***	578.50***
RV(4)	1.8712 (0.0361)	1.3809	3.9542 (0.0640)	36.2495 (0.1280)	71301.16***	547.17***
RV(5)	1.8712 (0.0373)	1.4272	4.1332 (0.0640)	39.2301 (0.1280)	84295.70***	499.62***
RV(10)	1.8712 (0.0467)	1.7880	5.6538 (0.0640)	64.7501 (0.1280)	240561.48***	320.34***

注: 第 1 列の RV の後の括弧内の数値は RV の計算に用いた日中リターンの時間間隔 (分) を表す。それ以外の括弧内の数値は標準誤差である。JB は正規性を検定するための Jarque-Bera (1987) 統計量である。JB 統計量の臨界値は 4.61 (10%), 5.99 (5%), 9.21 (1%)。ただし, RV は長期記憶過程に従うとの結果が数多く得られており (渡部 (2007)), 長期記憶過程に従う系列の場合, JB 統計量は過剰に正規性を棄却するので注意が必要 (Thomakos-Wang (2003))。LB(10) は RV の 1 次から 10 次までの自己相関がすべて 0 であるという帰無仮説を検定するための Ljung-Box (1978) 統計量で Diebold(1988) の方法により分散不均一性を調整したものである。LB(10) の臨界値は 15.99 (10%), 18.31 (5%), 23.21 (1%)。*, **, *** はそれらがそれぞれ有意水準 10%, 5%, 1% で有意であることを示す。

(b) RV の対数値

	平均	標準偏差	歪度	尖度	JB	LB(10)
夜間と昼休みのリターンの2乗を加えた場合 (Naive)						
RV(1)	-0.5021 (0.0165)	0.6301	0.3004 (0.0640)	3.4396 (0.1280)	33.83***	1766.19***
RV(2)	-0.4377 (0.0169)	0.6451	0.2483 (0.0640)	3.2286 (0.1280)	18.24***	1709.14***
RV(3)	-0.3710 (0.0169)	0.6480	0.2209 (0.0640)	3.1600 (0.1280)	13.47***	1704.81***
RV(4)	-0.3224 (0.0170)	0.6519	0.2044 (0.0640)	3.1483 (0.1280)	11.54***	1686.88***
RV(5)	-0.2495 (0.0171)	0.6563	0.1949 (0.0640)	3.1082 (0.1280)	9.99***	1501.10***
RV(10)	-0.1069 (0.0184)	0.7025	0.2313 (0.0640)	3.1786 (0.1280)	15.01***	1175.57***
Hansen-Lunde (2005a) の方法を用いた場合 (HL)						
RV(1)	0.4829 (0.0137)	0.5260	0.1153 (0.0640)	3.6838 (0.1280)	31.79***	2073.02***
RV(2)	0.4620 (0.0147)	0.5608	0.1953 (0.0640)	3.3445 (0.1280)	16.56***	1819.44***
RV(3)	0.4500 (0.0152)	0.5801	0.2138 (0.0640)	3.2298 (0.1280)	14.38***	1718.50***
RV(4)	0.4396 (0.0156)	0.5956	0.2258 (0.0640)	3.2890 (0.1280)	17.55***	1636.66***
RV(5)	0.4298 (0.0160)	0.6107	0.2261 (0.0640)	3.2507 (0.1280)	16.31***	1489.87***
RV(10)	0.3676 (0.0180)	0.6890	0.3243 (0.0640)	3.3655 (0.1280)	33.83***	1224.21***

注: 第1列のRVの後の括弧内の数値はRVの計算に用いた日中リターンの時間間隔(分)を表す。それ以外の括弧内の数値は標準誤差である。JBは正規性を検定するためのJarque-Bera(1987)統計量である。JB統計量の臨界値は4.61(10%), 5.99(5%), 9.21(1%)。ただし、RVは長期記憶過程に従うとの結果が数多く得られており(渡部(2007)), 長期記憶過程に従う系列の場合、JB統計量は過剰に正規性を棄却するので注意が必要(Thomakos-Wang(2003))。LB(10)はRVの対数値の1次から10次までの自己相関がすべて0であるという帰無仮説を検定するためのLjung-Box(1978)統計量でDiebold(1988)の方法により分散不均一性を調整したものである。LB(10)の臨界値は15.99(10%), 18.31(5%), 23.21(1%)。*, **, ***はそれらがそれぞれ有意水準10%, 5%, 1%で有意であることを示す。

表 4: GARCH 型モデルの推定結果

(a) GARCH(1, 1)

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2, \quad \omega > 0, \beta, \alpha \geq 0$$

ω	β	α	対数尤度
0.1179	0.8701	0.0672	-2511.75
(0.0323)	(0.0218)	(0.0157)	

注: 推定は擬似最尤法によって行った。括弧内は擬似最尤法の標準誤差である。

(b) GJR(1, 1)

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \epsilon_{t-1}^2, \quad \omega > 0, \beta, \alpha, \gamma \geq 0$$

ω	β	α	γ	対数尤度
0.1056	0.8788	0.0262	0.0768	-2505.3
(0.0284)	(0.0219)	(0.0158)	(0.0253)	

注: 推定は擬似最尤法によって行った。括弧内は擬似最尤法の標準誤差である。

(c) EGARCH(1, 0)

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \phi[\ln(\sigma_{t-1}^2) - \omega] + \theta z_{t-1} + \gamma[|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)]$$

ω	ϕ	θ	γ	対数尤度
0.6289	0.9423	-0.0579	0.1343	-2504.44
(0.0874)	(0.0165)	(0.0181)	(0.0310)	

注: 推定は擬似最尤法によって行った。括弧内は擬似最尤法の標準誤差である。

表 5: GARCH 型モデルで推定したボラティリティで基準化した日次リターンの基本統計量

	平均	標準偏差	歪度	尖度	JB	LB2(10)
GARCH(1,1)	-0.0132 (0.0262)	1.0011	-0.1009 (0.0640)	3.9536 (0.1280)	57.99***	17.53*
GJR(1,1)	-0.0144 (0.0262)	1.0012	-0.0830 (0.0640)	3.8528 (0.1280)	46.08***	18.45**
EGARCH(1,0)	-0.0110 (0.0261)	0.9991	-0.0518 (0.0640)	3.8139 (0.1280)	41.09***	22.33**

注: 括弧内の数値は標準誤差である。JB は正規性を検定するための Jarque-Bera (1987) 統計量である。JB 統計量の臨界値は 4.61 (10%), 5.99 (5%), 9.21 (1%)。LB2(10) は基準化したリターンの 2 乗の 1 次から 10 次までの自己相関がすべて 0 であるという帰無仮説を検定するための Ljung-Box (1978) 統計量。LB2(10) の臨界値は 15.99 (10%), 18.31 (5%), 23.21 (1%)。*, **, *** はそれらがそれぞれ有意水準 10%, 5%, 1% で有意であることを示す。

表 6: GARCH 型モデルで推定したボラティリティで基準化した日次リターンの BDS 統計量

	$e = 0.75\hat{\sigma}$				$e = \hat{\sigma}$			
	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
GARCH(1, 1)	-1.35	-0.95	-0.69	-1.32	-1.37	-0.92	-0.64	-1.18
GJR(1, 1)	-1.45	-1.20	-1.00	-1.50	-1.37	-1.04	-0.84	-1.30
EGARCH(1, 0)	-1.42	-1.24	-1.12	-1.65*	-1.45	-1.17	-0.99	-1.53

注: *, **, *** はそれぞれ有意水準 10%, 5%, 1% で有意であることを示す。

表 7: GARCH 型モデルで推定したボラティリティで基準化した日次リターンの CCK 統計量

	$\beta = 0.5$			$\beta = 1$		
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
GARCH(1, 1)	0.97	2.95***	2.61***	0.99	2.88***	2.56**
GJR(1, 1)	0.06	1.76*	1.60	0.07	1.75*	1.61
EGARCH(1, 0)	0.06	1.71*	1.53	0.06	1.70*	1.52

注: *, **, *** はそれぞれ有意水準 10%, 5%, 1% で有意であることを示す。

表 8: RV で基準化した日次リターンの基本統計量

	平均	標準偏差	歪度	尖度	JB	LB2(10)
夜間と昼休みのリターンの 2 乗を加えた場合 (Naive)						
RV(1)	-0.0232 (0.0397)	1.5197	-0.0125 (0.0640)	2.6384 (0.1280)	8.02**	22.39**
RV(2)	-0.0184 (0.0380)	1.4558	0.0083 (0.0640)	2.5346 (0.1280)	13.24***	17.88*
RV(3)	-0.0175 (0.0366)	1.3991	0.0204 (0.0640)	2.4580 (0.1280)	18.03***	17.57*
RV(4)	-0.0152 (0.0356)	1.3619	0.02134 (0.0640)	2.4233 (0.1280)	20.41***	19.15**
RV(5)	-0.0186 (0.0341)	1.3062	0.0102 (0.0640)	2.3735 (0.1280)	23.99***	19.67**
RV(10)	-0.0213 (0.0314)	1.2028	-0.0018 (0.0640)	2.2924 (0.1280)	30.57***	24.39***
Hansen-Lunde (2005a) の方法を用いた場合 (HL)						
RV(1)	-0.0084 (0.0248)	0.9476	0.0025 (0.0640)	2.6499 (0.1280)	7.48**	17.78*
RV(2)	-0.0057 (0.0248)	0.9486	0.0258 (0.0640)	2.6163 (0.1280)	9.15**	16.32*
RV(3)	-0.0068 (0.0248)	0.9503	0.0231 (0.0640)	2.5777 (0.1280)	11.02***	17.31*
RV(4)	-0.0042 (0.0250)	0.9556	0.0452 (0.0640)	2.6032 (0.1280)	10.11***	18.52**
RV(5)	-0.0083 (0.0249)	0.9547	0.0270 (0.0640)	2.5559 (0.1280)	12.22**	18.58**
RV(10)	-0.0129 (0.0255)	0.9775	0.0231 (0.0640)	2.6595 (0.1280)	7.21**	15.26

注: 第 1 列の RV の後の括弧内の数値は RV の計算に用いた日中リターンの時間間隔 (分) を表す。それ以外の括弧内の数値は標準誤差である。JB は正規性を検定するための Jarque-Bera (1987) 統計量である。JB 統計量の臨界値は 4.61 (10%), 5.99 (5%), 9.21 (1%)。LB2(10) は基準化したリターンの 2 乗の 1 次から 10 次までの自己相関がすべて 0 であるという帰無仮説を検定するための Ljung-Box (1978) 統計量。LB2(10) の臨界値は 15.99 (10%), 18.31 (5%), 23.21 (1%)。*, **, *** はそれらがそれぞれ有意水準 10%, 5%, 1% で有意であることを示す。

表 9: RV で基準化した日次リターンの BDS 統計量

	$e = 0.75\hat{\sigma}$				$e = \hat{\sigma}$			
	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
夜間と昼休みのリターンの 2 乗を加えた場合 (Naive)								
RV(1)	-0.95	-0.06	0.66	0.36	-1.10	-0.32	0.09	-0.28
RV(2)	-1.39	-0.71	0.02	-0.20	-1.85*	-1.11	-0.71	-1.13
RV(3)	-1.46	-0.80	-0.07	-0.43	-2.14**	-1.55	-1.13	-1.54
RV(4)	-1.57	-0.91	-0.16	-0.47	-2.31**	-1.78*	-1.34	-1.70*
RV(5)	-1.73*	-1.13	-0.30	-0.56	-2.20**	-1.78*	-1.32	-1.68*
RV(10)	-1.99**	-1.47	-0.63	-0.70	-2.51**	-2.23**	-1.73*	-2.06**
Hansen-Lunde (2005a) の方法を用いた場合 (HL)								
RV(1)	-1.11	-0.60	0.14	-0.30	-1.44	-1.25	-0.45	-0.67
RV(2)	-1.40	-1.22	-0.61	-1.02	-1.84*	-1.89*	-1.25	-1.56
RV(3)	-1.87*	-1.64*	-0.90	-1.36	-2.14**	-2.25**	-1.51	-1.84
RV(4)	-1.73*	-1.50	-0.75	-1.05	-2.28**	-2.37**	-1.73*	-2.09**
RV(5)	-1.98**	-1.67*	-0.86	-1.26	-2.23**	-2.31**	-1.56	-1.84*
RV(10)	-2.00**	-1.94*	-0.79	-0.96	-2.19**	-2.33**	-1.51	-1.57

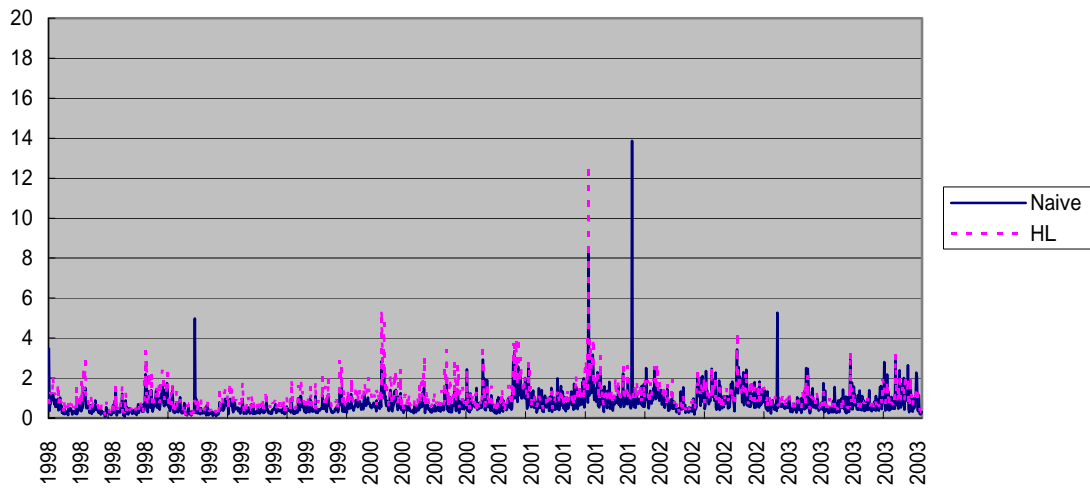
注: 第 1 列の RV の後の括弧内の数値は RV の計算に用いた日中リターンの時間間隔 (分) を表す。*, **, *** はそれぞれ有意水準 10%, 5%, 1% で有意であることを示す。

表 10: RV で基準化した日次リターンの CCK 統計量

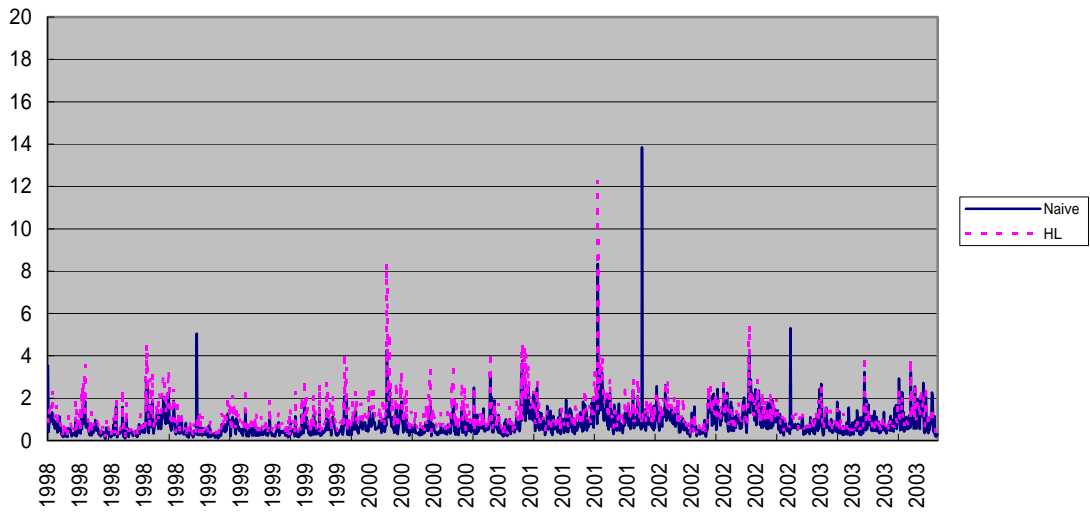
	$\beta = 0.5$			$\beta = 1$		
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
夜間と昼休みのリターンの 2 乗を加えた場合 (Naive)						
RV(1)	0.58	1.79*	2.48**	0.63	1.78*	2.48**
RV(2)	0.31	1.77*	2.23**	0.31	1.80*	2.17**
RV(3)	0.21	1.80*	2.10**	0.22	1.83*	2.05**
RV(4)	0.17	1.90*	2.00**	0.24	1.76*	2.15**
RV(5)	0.23	1.85*	2.09**	0.24	1.85*	2.19**
RV(10)	0.25	1.81*	2.03**	0.29	1.87*	1.91*
Hansen-Lunde (2005a) の方法を用いた場合 (HL)						
RV(1)	0.00	1.83*	1.53	0.00	1.82*	1.51
RV(2)	-0.32	1.64*	1.13	-0.34	1.61	1.05
RV(3)	-0.50	1.67*	1.01	-0.57	1.68*	0.97
RV(4)	-0.52	1.73*	0.61	-0.58	1.73*	0.61
RV(5)	-0.54	1.62	0.95	-0.61	1.60	0.87
RV(10)	-0.71	1.41	0.25	-0.77	1.40	0.24

注: 第 1 列の RV の後の括弧内の数値は RV の計算に用いた日中リターンの時間間隔 (分) を表す。*, **, *** はそれぞれ有意水準 10%, 5%, 1% で有意であることを示す。

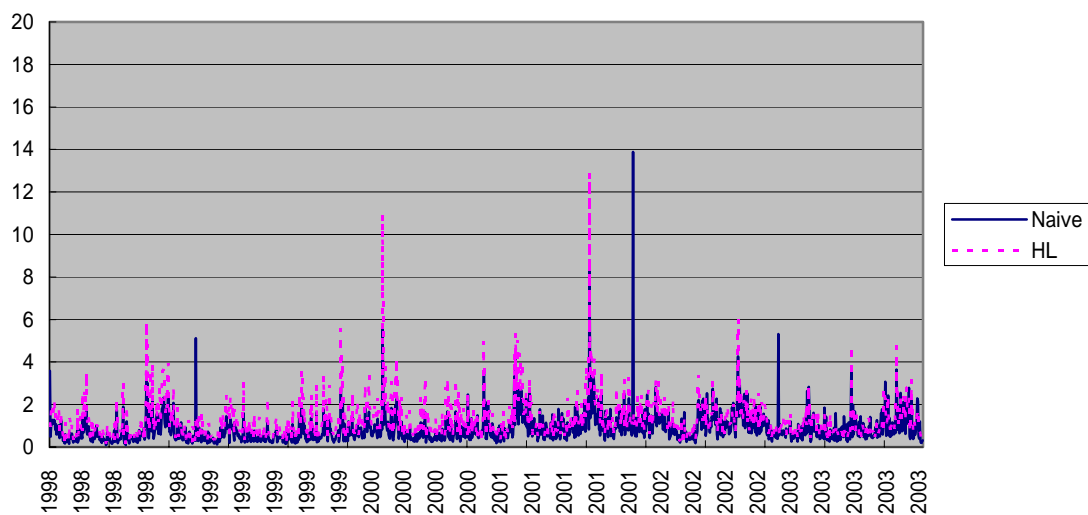
図1: Realized Volatility
(a) 1分ごとの日中リターンを用いた場合



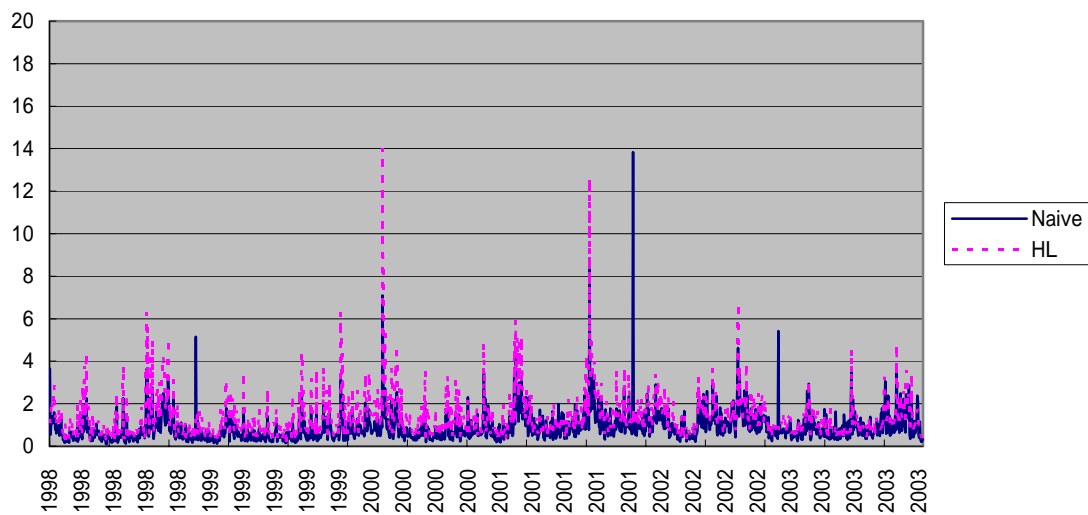
(b) 2分ごと



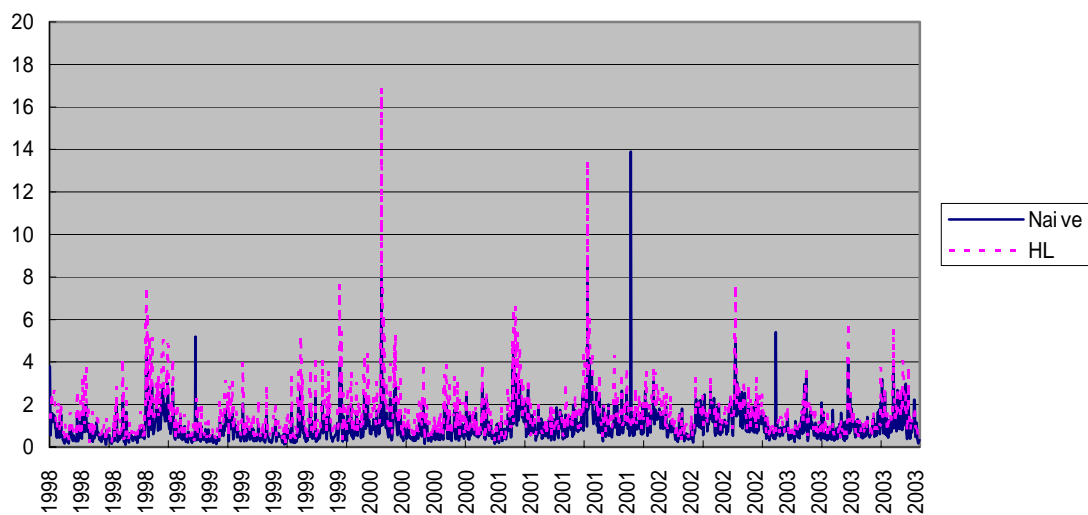
(c) 3分ごと



(d) 4分ごと



(e) 5分ごと



(f) 10分ごと

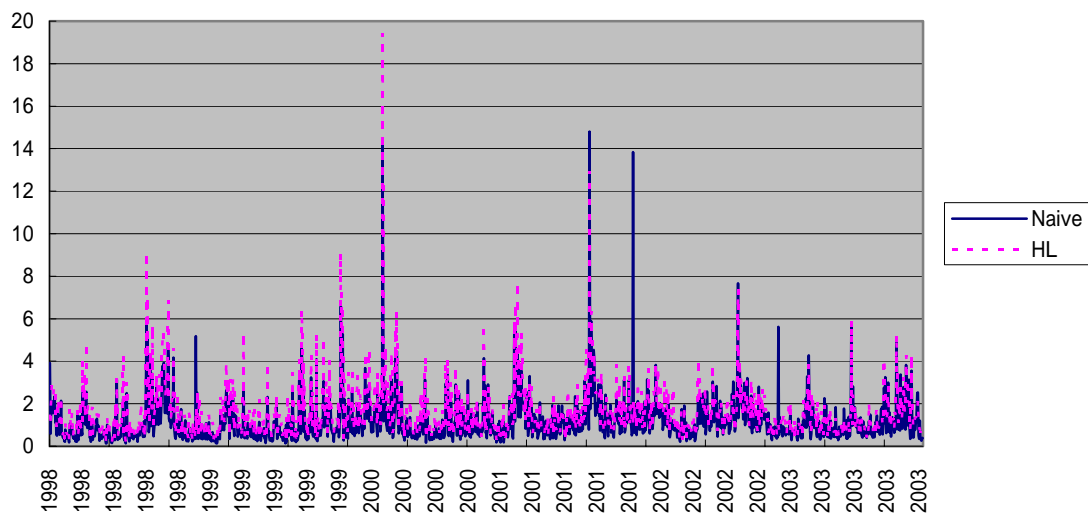


図2： GARCH型モデルで推定したボラティリティ

