

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

高頻度データによるボラティリティの推定：
Realized Volatilityのサーベイと日本の株価指数
および株価指数先物の実証分析

しばた まい
柴田 舞

Discussion Paper No. 2007-J-14

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい

備考： 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

高頻度データによるボラティリティの推定：
Realized Volatilityのサーベイと日本の株価指数
および株価指数先物の実証分析

しばた まい
柴田 舞*

要 旨

Realized Volatility (RV) は日中に高頻度で観測されたリターンの2乗値の和として計算され、ボラティリティの推定値として近年注目を集めている。RVに関する研究は欧米を中心に数多く行われているが、日本のデータによる実証分析は今のところ少ない。本稿では、RVに関する研究について各種理論モデルや実証分析のサーベイを行うとともに、日本の株価指数および株価指数先物データによる実証分析を行うことで、欧米市場データを用いた先行研究との比較を試みた。その結果、RVは将来のボラティリティを予測するうえで有益な情報を有していること、RVには長期記憶性が存在していること、高頻度データでみてもリターンの分布の裾が厚く、ジャンプ拡散過程などを前提としたボラティリティ推定が必要なこと、ボラティリティの変動には価格の変化方向に関して非対称性が存在していることなどが判明した。こうした実証結果は、欧米の先行研究と概ね一致するものであった。

キーワード：高頻度データ、Realized Volatility、長期記憶性、ジャンプ
拡散過程

JEL classification: C52,C53

* 日本銀行金融研究所リサーチアソシエイト（現 首都大学東京都市教養学部、
E-mail: mai@center.tmu.ac.jp）

本稿は、筆者が日本銀行金融研究所リサーチアソシエイトの期間に行った研究をまとめたものである。本稿で利用したティックデータは東京都立大学（あるいは首都大学東京）に帰属する。本稿の作成にあたっては、渡部敏明教授（一橋大学）、大森裕浩助教授（東京大学）、および金融研究所スタッフから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

目次

1	はじめに	1
2	RV を用いた研究のサーベイ	2
2.1	RV の理論的背景	2
2.2	RV および RV で基準化した日次リターンの正規性	4
2.3	RV を用いたボラティリティ変動モデル	6
2.3.1	RV 時系列モデル	6
2.3.2	GARCH+RV モデル	13
2.4	ボラティリティの予測力	16
2.4.1	σ_t^2 予測力の比較方法	16
2.4.2	RV を用いたボラティリティ変動モデルの予測力比較	17
2.4.3	ボラティリティ予測に有用な RV 以外の変数	18
2.5	多変量 Realized Volatility への拡張	19
2.6	ジャンプ拡散過程への RV の応用	21
3	実証分析上のデータの問題	24
4	実証分析	26
4.1	データ	26
4.2	各モデルの推定結果	28
4.3	ボラティリティ予測力のモデル間比較	32
4.4	多変量 RV の推定結果	34
4.5	ジャンプモデルの推定結果	34
5	まとめと今後の研究課題	36
	補論 A ARFIMA モデル推定法	54
	補論 B UC モデル推定法	55

1 はじめに

リスク管理あるいは派生商品の価格付けにおいて、ボラティリティは欠かせない変数である。ボラティリティとは、資産価格の変化率であるリターンの変動の大きさを表わし、その値は日々変化すると考えられる。こうしたボラティリティの時間変化を表現するモデルとして Engle(1982) の ARCH(Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) モデルや Bollerslev(1986) の GARCH(Generalized ARCH) モデルをはじめ多様なモデルが考案されてきた。これらのモデルで想定されるボラティリティは、リターンの時系列データを用いてモデルが推定されて初めて、推定値として観測可能となる。そのため、どのモデルや推定法を用いるかによって、同じリターンのデータに対して推定されるボラティリティが異なることがある。

これに対し、理論モデルに依存しないボラティリティとして Andersen and Bollerslev(1998) により RV(Realized Volatility) が提唱された。RV は 1 日といったある特定の期間内の高頻度データから計算されるリターンの 2 乗値を合計して得られるボラティリティの推定値である。RV の研究が数多く行われている背景には、RV の推定方法が容易であることだけでなく、RV がボラティリティの推定値と考えられる理論的裏づけが存在すること、また、高頻度データの入手が容易になったことが挙げられる。

RV の推定においては、あらゆる時間帯においてリターンが観測されることが望ましいため、取引頻度が高く、かつ市場がクローズすることがない為替レート
のボラティリティに関する研究から始められた。その一例として Andersen and Bollerslev(1998) を始め、Martens(2001)、Andersen *et al.*(2003)、Corsi(2004) などが挙げられる。その後、株価指数の分析 (Blair, Poon and Taylor(2001)、Ghysels, Santa-Clara and Valkanov(2006)、Koopman, Jungbacker and Hol(2005)) や、先物取引の分析 (Martens(2002)、Thomakos and Wang(2003)) など、取引時間が限定されており、終値から翌始値にかけて高頻度リターンが観察できない資産についても、応用分析が進められた。

日本の市場データを用いた RV の実証分析は、今のところ、渡部・佐々木 (2006) など一部の研究に限られている。本稿では、RV を用いた研究のサーベイを行った上で、日経平均株価指数、東証株価指数 (TOPIX)、さらに日経平均先物価格といった、日本の株式市場データに対し、RV の応用分析を行うことを目的とする。

RV 以前のボラティリティを潜在変数とした時系列モデルは、ARCH モデルをはじめ、ボラティリティ変動の特性を拡張していったモデル群によるものが主流で

あった (Bollerslev, Engle and Nelson(1994)、 Ghysels, Harvey and Renault(1996) を参照)。これらはボラティリティ変動モデルと総称される。ボラティリティ変動モデルと RV についての研究は、いずれも以下の 2 つに大別される。(1) ボラティリティの予測およびそのパフォーマンスのモデル間比較といったボラティリティ推定に関する基礎研究、(2) リスク管理、あるいは派生商品の価格付けといったボラティリティを用いた応用研究である。後者の応用研究においては、リターンの分布あるいはその確率過程を特定化する必要がある、そのためにボラティリティが必要とされる。RV はボラティリティ変動モデルの拡張ではなく、ボラティリティの推定に関する新しい方法であるため、まず、上記 (1) に該当する基礎研究が必要とされる。そこで、本稿では、RV の特性分析および RV を用いたモデルのボラティリティ予測力に焦点を当てた。

本稿の構成は以下のとおりである。第 2 節では、RV を用いた先行研究をサーベイする。はじめに RV がボラティリティの推定値となりうる理論的背景を説明した後、RV を用いたモデルをサーベイする。その際、モデルの推定法やボラティリティ予測力の評価法を解説する。さらに拡張モデルとして、多変量 RV とジャンプモデルを紹介する。第 3 節では、高頻度データを扱う際の問題とその対処法について解説する。第 4 節では、本邦株式市場データに対し、様々な RV モデルを適用した実証分析の結果を示す。第 5 節では、まとめと今後の研究課題を述べる。

2 RV を用いた研究のサーベイ

2.1 RV の理論的背景

はじめに RV について解説する¹。以下では、第 i 日の日次リターンを、対数価格 $p^*(t), 0 \leq t \leq T$ を用いて

$$r_i = p^*(i) - p^*(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, T \quad (1)$$

と表わし、さらに第 i 日内の観測時点 j におけるリターン (日中リターンと呼ぶ) を

$$r_{j,i} = p^*(i-1 + j/M) - p^*(i-1 + (j-1)/M), \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (2)$$

と表わす²。ここで M は日中リターンの 1 日あたりの観測回数である。

¹より詳細な解説は Andersen *et al.*(2003)、Barndorff-Nielsen and Shephard(2004b) を参照。

²本稿では高頻度データから計算されるリターンを日中リターンと呼び、日中リターンから求めた RV_i を日次ボラティリティと呼ぶ。なお、日次リターンは終値から求めたリターンであり、日次ボラティリティとは元データの観察頻度が異なる。

第 i 日の RV (RV_i と表わす) は、日中に観測されるリターンの 2 乗値を 1 日にわたって観測回数分足し合わせたもの、すなわち、

$$RV_i \equiv \sum_{j=1}^M r_{j,i}^2 \quad (3)$$

で定義される^{3,4}。

RV は一見すると単純なボラティリティ推定手法であるが、理論的な裏付けが存在する。ファイナンス理論モデルで用いられる確率過程では、その連続時間表現において、ボラティリティを瞬間的ボラティリティとして与える。このもとで、ある一定の期間のボラティリティは瞬間的ボラティリティの「累積値」として与えられる。RV は観測回数を高頻度にしていくと累積ボラティリティに確率収束するという優れた性質を持つ。以下では、対数価格 p^* がセミ・マルチンゲールであるという一般的な仮定のもとで、RV のこうした性質を説明する。

まず上記仮定のもとで、 $p^*(t)$ は、有界変分を持つ $\alpha^*(t)$ とマルチンゲール $m^*(t)$ の和で表わされる。また、2 次変分 $[p^*](t)$ は、 $M \rightarrow \infty$ とすると $\sup_j \{t_j - t_{j-1}\} \rightarrow 0$ となる $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M = t$ に対して、

$$[p^*](t) = \text{plim}_{M \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^M \{p^*(t_j) - p^*(t_{j-1})\}^2 \quad (4)$$

として定義される。このとき、 $[p^*](t) = [m^*](t)$ となる。 $[m^*](t)$ はマルチンゲール成分の 2 次変分を表わす。

こうした p^* のセミ・マルチンゲール性の仮定のもとで $M \rightarrow \infty$ とするとき、RV は以下のように確率収束する。

$$\sum_{j=1}^M r_{j,i}^2 \xrightarrow{P} [p^*](i) - [p^*](i-1) \quad (5)$$

次に、 p^* の確率過程をより特定化して伊藤過程

$$dp^*(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) \quad (6)$$

³Realized Volatility を提唱した Andersen and Bollerslev(1998) とは別に、(3) 式を Realized Variance と呼ぶ研究もある。例えば Bandorff-Nielsen and Shephard(2004b)。本稿では提唱者の呼称に従う。

⁴多くの実証分析は日次ボラティリティの分析に RV を用いるが、週次や月次などのボラティリティ分析に RV を用いることも可能である。詳しくは Barndorff-Nielsen and Shephard(2004b) を参照。

に従うと仮定する。ここで、 $\sigma^2(t)$ は瞬間的ボラティリティ⁵、 $\mu(t)$ はドリフト、 $dW(t)$ はブラウン運動を表わす。また、

$$\sigma^{2*}(t) \equiv \int_0^t \sigma^2(u) du \quad (7)$$

として、瞬間的ボラティリティ $\sigma^2(t)$ の累積ボラティリティを定義する（ここではすべての $t < \infty$ に対して $\sigma^{2*}(t) < \infty$ が成り立つとする）。伊藤過程のもとでは、(4) 式で定義された 2 次変分は累積ボラティリティとなる。すなわち、

$$[p^*](t) = \sigma^{2*}(t) \quad (8)$$

が成立する。さらに、(8) 式を (5) 式に代入すると、RV が第 i 日までの累積ボラティリティと第 $i - 1$ 日までの累積ボラティリティの階差で表わされた i 日中の累積ボラティリティ σ_i^2 に確率収束することがわかる。すなわち、

$$\sum_{j=1}^M r_{j,i}^2 \xrightarrow{P} \sigma_i^2, \quad \sigma_i^2 = \sigma^{2*}(i) - \sigma^{2*}(i-1) \quad (9)$$

として、RV が累積ボラティリティの一致推定量となることが示される。

2.2 RV および RV で基準化した日次リターンの正規性

Andersen *et al.*(2001a,b) や Thomakos and Wang(2003) は、RV、lnRV、および RV により基準化された日次リターンの無条件分布を分析して、以下の 2 点を指摘している。

第 1 点は、RV（もしくは \sqrt{RV} ）は正規分布には従わず、一方、lnRV（もしくは $\ln \sqrt{RV}$ ）は正規分布に従う点であり、この結果に基づいて、実証分析ではしばしば lnRV が使用されている。これは、次節で紹介するようにボラティリティ変動モデルの攪乱項に正規分布を仮定するものが多く、モデル設定において RV の非正規性を表現できない場合にモデルが正しく推定できなくなることを避けるためである。

第 2 点は、RV により基準化された日次リターン

$$r_i / \sqrt{RV_i}, \quad i = 1, 2, \dots, T,$$

⁵確率過程の表現上は $\sigma(t)$ が瞬間的ボラティリティに相当するが、以下では表記を容易にするため $\sigma^2(t)$ をそう呼ぶ。

が正規分布に従う点である。日次リターンが正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることは、Mandelbrot(1963) や Fama(1965) の指摘により、早くから広く知られていた。これに対し、Clark(1973) は以下のような仮説を考えている。日次リターン r_i は平均 0 で自己相関がないものと仮定すると、日々変動するボラティリティ σ_i^2 と、平均 0、分散 1 の過去と独立な確率変数 z_i によって、日次リターンを

$$r_i = \sigma_i z_i \quad (10)$$

と表わすことができる。Clark(1973) は、 z_i の分布は標準正規分布に従うが、ボラティリティ σ_i^2 が日々変動するため、 r_i が裾の厚い分布になると考えた⁶。この仮定のもとでは、 r_i の分布は i 日毎に分散が異なる正規分布の混合分布になることから、上記仮説は「分布混合仮説」と呼ばれており、ボラティリティ変動モデルで広く活用されている。分布混合仮説では z_i が標準正規分布に従うことが仮定されているものの、 σ_i^2 を GARCH モデルや SV(Stochastic Volatility) モデルで推定した実証分析では、 σ_i^2 を可変としてもなお z_i が正規分布よりも裾の厚い分布に従っているという結果が得られることが多かった⁷。このように、GARCH モデルや SV モデルにおいて分布混合仮説が成立しないことは、これらモデルの定式化に何らかの問題がある可能性を示唆している。一方、前述のように、 σ_i^2 の推定値に RV_i を用いて $\hat{z}_i = r_i / \sqrt{RV_i}$ と基準化して得られる z_i の推定値については、正規性の仮説が棄却されないという結果が得られている。これは Clark(1973) の分布混合仮説を支持するものである。

正規性の検定には、尖度と歪度を用いた Jarque-Bera 検定（以下 JB 検定）が使われることが多いが、Thomakos and Wang(2003) は RV の実証分析に同検定を用いる場合、次のような問題があることを指摘している。すなわち、RV もしくは $\ln RV$ は長期記憶過程（次節参照）に従い、自己相関を有する傾向が強いため、JB 検定およびその他の正規性の検定方法⁸では正規性の仮説を棄却しすぎることで、なかでも JB 検定はその程度が大きいことを、シミュレーションによって示している⁹。したがって、JB 検定の解釈は慎重に行う必要がある。

⁶証明は、渡部(2000)の第1.4節や和合編著(2005)の第9章を参照。

⁷SV モデル（確率的ボラティリティ変動モデル）は、ボラティリティを潜在変数とする時系列モデルの一つであり、GARCH モデルと並んで多くの実証分析に用いられている。GARCH モデルでは $t-1$ 期までの情報を所与とした t 期のボラティリティは確定的になる一方、SV モデルでは確率変数として与えられる。SV モデルの詳細は、渡部(2000)の第3節を参照。また、 z_i の分布については、渡部(2000)の第2.4.2節や和合編著(2005)の第9章を参照。

⁸具体的には、Anderson-Darling 検定、Crámer-Von Misses 検定、QQ 検定、Kolmogorov-Smirnov 検定。

⁹Jarque and Bera(1980) が提案した JB 検定は、変数に系列相関がないこと (I)、分散が均一で

2.3 RV を用いたボラティリティ変動モデル

本節では、RV を用いた様々なモデルを紹介する。大別すると、(1) RV を被説明変数としてモデル化した RV 時系列モデル、(2) GARCH などのボラティリティ変動モデルに新たな説明変数として RV を組み入れた GARCH+RV モデル、という 2 タイプに分類できる。前者はボラティリティ推定値としての RV の変動過程を直接モデル化するという観点に、後者は GARCH 等のモデル内で想定されたボラティリティの推定式において RV が有益な付加情報を持つという観点に立ったものである。前者の RV モデルでは、RV が「長期記憶性」と呼ばれる時系列特性を有している点を考慮したモデル化がなされている。以下では、RV 時系列モデル、GARCH+RV モデルについて、順に紹介する。

2.3.1 RV 時系列モデル

自己相関を持つ時系列は多くあるが、なかには自己相関が極めて緩やかにしか減衰せず、非常に長く離れた期にも自己相関が残る系列がある。このようなデータの特性は長期記憶性と呼称される。RV は長期記憶性を持つことが指摘されているため、RV を被説明変数とするモデルではこれを考慮に入れたモデル化が行なわれる。

定常過程には長期記憶過程と短期記憶過程がある。ある定常な時系列 $X_i, i = 1, 2, \dots$ について、 h 次の自己相関関数 $\rho(h) = Cov(X_i, X_{i+h})/Var(X_i)$ を計測した場合、

$$\sum_{h=0}^{\infty} |\rho(h)| < \infty \quad (11)$$

を満たすものは短期記憶定常過程であり、

$$\sum_{h=0}^{\infty} |\rho(h)| = \infty \quad (12)$$

を満たすものは長期記憶定常過程である（詳しくは矢島 (2003) を参照）。

あること (H)、変数が正規分布に従うこと (N) を同時にラグランジェ乗数検定する方法である。この正規性検定は、(I)(H)(N) が全て満たされることを帰無仮説として、(I) および (H) は満たされるが (N) のみが満たされないことを対立仮説として行われる検定であるため、(I) と (H) の一方あるいは両方が満たされない場合に JB 検定を行うことは不適切である。JB 検定の条件を緩めた拡張として、(H) が満たされるものの (I) が満たされない場合の正規性の検定法を考案した Bai and Ng(2005) がある。なお、不均一分散の場合において、GARCH-M モデルに限っては JB 検定を行えることを Fiorentini, Sentana and Calzolari(2004) が示している。

こうした長期記憶性を表現するモデルの一つに ARFIMA(Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average) モデルがあり、RV の推定にしばしば用いられる。また、ボラティリティ変動には非対称性が存在することが指摘されているが(後述)、これを表現するために ARFIMA モデルを拡張した ARFIMAX モデルが用いられることがある。この他、短期記憶過程ではあるが、パラメータ次第では自己相関が長期にわたりゼロになりにくいモデルとして、HAR(Heterogeneous Autoregressive) モデルや UC(Unobserved Component) モデルがあり、これらも RV の推定に用いられる。また、長いラグを伴う説明変数を取り込む MIDAS(Mixed Data Sampling) モデルが RV の推定に使用されることもある。以下では、これらのモデルを順に解説する。

ARFIMA モデル

RV に ARFIMA モデルを適用した分析では Giot and Laurent(2004) が ARFIMA $(0,d,1)$ モデルを、Koopman, Jungbacker and Hol(2005) が ARFIMA $(1,d,0)$ モデルを用いている。4.2 節で後述する実証分析では、情報量基準 SIC により AR タームのない ARFIMA $(0,d,1)$ モデルが選択された。このため、本節においてもこのモデルを示す¹⁰。

$$(1 - L)^d(\ln RV_i - \mu) = (1 + \theta L)\epsilon_i \quad (13)$$

ただし d, μ, θ はパラメータであり、 ϵ_i は攪乱項、 L はラグ・オペレータである¹¹。 $d = 0$ ならば ARMA $(0,1)$ モデルとなるので、 $\ln RV_i$ は短期記憶過程に従う。 $0 < d < 0.5$ ならば長期記憶定常過程であり、 $d \geq 0.5$ ならば長期記憶非定常過程である。ARFIMA モデルにおいて $d = 0.5$ が定常過程と非定常過程の境界点となることは次のようにして示される。

一般に、長期記憶過程のパラメトリック・モデルにおける h 次の自己相関関数 $\rho(h)$ は (12) 式を満たし、かつ

$$\rho(h) \sim h^{-\alpha}, \quad h \rightarrow \infty \quad (14)$$

¹⁰ARFIMA モデルは長期記憶モデルであるのに対して、FI 項を含まない ARMA モデルは短期記憶モデルである。しかし、ARMA モデルに従う短期記憶過程であっても、パラメータの設定次第では、自己相関係数が長い期間にわたってゼロになりにくい性質をもつことがある。このため、実証分析では、AR 項か MA 項のどちらかをゼロとして推定されることが多い(詳しくは Bos, Franses and Ooms(2002) を参照)。

¹¹モデルを推定する際には、 ϵ_i は平均 0、分散 σ_ϵ^2 の正規分布に従うことを仮定する。ラグ・オペレータは、 $L^k \ln RV_i = \ln RV_{i-k}$ のように時刻を遅らせるオペレータである。また、反転可能性条件 $|\theta| < 1$ が課される。

を満たす $0 < \alpha < 1$ が存在することが知られている。ARFIMA モデルの自己相関関数は

$$\rho(h) \sim h^{2d-1}, h \rightarrow \infty \quad (15)$$

と表わされることから、 $0 < d < 0.5$ のときに長期記憶定常過程となることがわかる¹²。

ところで、 $-0.5 < d \leq 0$ のとき、ARFIMA モデルはもはや長期記憶性を持たないものの、 $|\theta| < 1$ が満たされているのであれば MA 部分が反転可能であり、モデル推定が可能となる。したがって、 $-0.5 < d < 0.5$ という制約のもとで推定される。推定には最尤法が用いられる。詳しくは補論 A を参照。

ARFIMAX モデル

ARFIMAX モデルは、ボラティリティ変動の非対称性を扱うモデルである。ボラティリティ変動の非対称性とは、価格が上昇した日の翌日より下落した日の翌日のほうがボラティリティが高くなる傾向があることを指す。こうした価格の変化方向に関するボラティリティ変動の非対称性については ARFIMAX モデル以前に様々なボラティリティ変動モデルを用いた分析が数多く行われているが、同モデルは外生変数 r_{i-1} を用いた点が特徴となっている。

ARFIMAX(0,d,1) モデルは以下のとおりである。

$$(1 - L)^d (\ln RV_i - \mu_0 - \mu_1 r_{i-1} - \mu_2 D_{i-1} r_{i-1}) = (1 + \theta L) \epsilon_i \quad (16)$$

ただし $d, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \theta$ はパラメータであり、 ϵ_i は攪乱項である。また、 D_{i-1} はリターン r_{i-1} が負値、すなわち価格が直前に下落していれば 1、そうでなければゼロとなるダミー変数である。今期 RV の期待値 $\mu_0 + \mu_1 r_{i-1} + \mu_2 D_{i-1} r_{i-1}$ は、

$$\begin{aligned} r_{i-1} \geq 0 \text{ ならば } & \mu_0 + \mu_1 |r_{i-1}| \\ r_{i-1} < 0 \text{ ならば } & \mu_0 - \mu_1 |r_{i-1}| - \mu_2 |r_{i-1}| \end{aligned}$$

であるため、後者が前者より大きい、すなわち $2\mu_1 + \mu_2 < 0$ であれば、ボラティリティ変動の非対称性と整合的な結果である¹³。

¹²(14) 式と (15) 式は、 h を ∞ に近づけたときに、左辺と右辺の比が 0 ではない有限の確定値に収束することを示している。

¹³Giot and Laurent(2004) は、 μ_2 の推定値が負値であり、統計的に有意であることから、ボラティリティ変動の非対称性が存在すると指摘している。

HAR モデル

HAR(Heterogeneous Autoregressive) モデルは、不均一市場仮説 (Heterogeneous Market Hypothesis) を基にして ARCH モデルを拡張させた HARCH モデル (Heterogeneous interval ARCH、Müller *et al.*(1997)、Dacorogna *et al.*(1998)) を RV のモデルへと拡張したものである。この仮説は、市場参加者は市場の先行きに対する予測や、情報入手の程度など、様々な面において異なっているという仮説である。Corsi(2004) は、投資する期間の長さが異なれば、それに比例して情報に反応を示す時間の長さも異なることを仮定し、HAR モデルを考案した。

HAR モデルは、将来の一定期間の日次 RV の平均値を、過去の日次 RV、1 週間の日次 RV の平均値、そして1ヵ月間の日次 RV の平均値の3本の短期記憶過程が組み合わされたモデルで捉えようとするものである。このように複数の短期記憶モデルが組み合わされたモデルは、変数の自己相関が長い期間にわたってゼロになりにくい性質を有している¹⁴。

Corsi(2004) が考案した HAR モデルは

$$\ln RV_{i,i+h} = \beta_0 + \beta_D \ln RV_i + \beta_W \ln RV_{i-5,i} + \beta_M \ln RV_{i-22,i} + \epsilon_i \quad (17)$$

で与えられる。ただし、 $\beta_0, \beta_D, \beta_W, \beta_M$ はそれぞれパラメータであり、 ϵ_i は攪乱項である。説明変数は $i - h + 1$ 日から i 日までの h 日間の日次 RV の平均値が使われる。 $h = 5$ とすると、 $RV_{i-5,i} = \frac{1}{5}(RV_{i-4} + RV_{i-3} + \dots + RV_i)$ は営業日でみたときの過去1週間の日次 RV の平均値となる。同様に $h = 22$ とすると、 $RV_{i-22,i}$ は過去1ヵ月間の日次 RV の平均値となる。被説明変数は $i + 1$ 日から先行き h 日間にわたる日次 RV の平均値であり、翌日の日次 $RV_i(h=1)$ や先行き1週間の日次 RV の平均値、先行き1ヵ月間の日次 RV の平均値などが用いられる。Andersen, Bollerslev and Diebold(2005) は、RV、 $\ln RV$ または \sqrt{RV} の HAR モデルを決定係数により比較したところ、 $\ln RV$ を用いたモデルの決定係数が最も高いことを示している。

HAR モデルは最小2乗法で推定可能であるが、推定値の標準誤差を計算する際には注意が必要である。被説明変数に日次 RV の平均値が用いられるため、(17) 式において、攪乱項に $h - 1$ 次までの自己相関が存在する可能性がある。この問題に対し、Andersen, Bollerslev and Diebold(2005) は、Newey-West による標準誤差を用いており、その際、ラグの長さは $5(h=1), 10(h=5), 44(h=22)$ としている。

¹⁴Granger(1980) は、短期記憶過程が組み合わされたものが、長期記憶性を表わすことがあることを示している。

UC モデル

UC(Unobserved Component) モデルは、ARMA(1,1) 過程に従う複数の観測不能な要素 $\tau_i^k, (k = 1, 2, \dots, K)$ の和で RV を表現したものである。すなわち、RV を

$$RV_i = \sum_{k=1}^K \tau_i^k + u_i, \quad \tau_i^k \sim \text{ARMA}(1,1), \quad E[u_i] = 0, \quad \text{Var}[u_i] = \sigma_u^2 \quad (18)$$

とモデル化する。RV の推定誤差 u_i は平均がゼロ、分散 σ_u^2 と仮定する¹⁵。

UC モデルは、HAR モデルと同様に、 K 個の短期記憶過程 τ_i^k を組み合わせることによって RV の自己相関がゼロに減衰しにくい特性を表わしている。ただし、HAR モデルは市場参加者の不均一性という経済学的な背景があったのに対し、UC モデルは OU(Ornstein-Uhlenbeck) 過程¹⁶に従う短期記憶モデルの組み合わせという連続時間モデル上での工学的工夫から考案された。

UC モデルは以下のように導出される¹⁷。まず、

$$RV_i = \sigma_i^2 + u_i \quad (19)$$

として、RV の観測頻度を表わす M が有限であるときには RV_i と σ_i^2 の間に誤差 u_i が生じるとする。 RV_i は観測頻度 $M \rightarrow \infty$ のときに σ_i^2 に確率収束することが示されているものの ((5) 式および (9) 式を参照)、実際に観測される RV_i は M を有限としているため σ_i^2 に収束せず、このため誤差 u_i が必要となる。UC モデルでは、RV に観察される複雑な自己相関の変動を表わすため、OU 過程に従う複数の $\tau^k(t)$ の和として、瞬間的ボラティリティ $\sigma^2(t)$ を表わす。すなわち、

$$\sigma^2(t) = \sum_{k=1}^K \tau^k(t), \quad d\tau^k(t) = -\lambda_k \tau^k(t)dt + dz_k(\lambda_k t) \quad (20)$$

と仮定する。 $z(t)$ は非負の増分を持つレヴィ過程である。ここで $\tau^k(t)$ について

$$E[\tau^k(t)] = w_k \xi, \quad \text{Var}[\tau^k(t)] = w_k \omega^2 \quad (21)$$

を仮定する。ただし $w_k \geq 0, \sum_{k=1}^K w_k = 1$ である。これらの仮定のもとで、連続時間で表現された $\tau^k(t)$ の積分によって i 期の τ_i^k を次のように定義する。

$$\tau_i^k = \int_{i-1}^i \tau^k(u) du \quad (22)$$

¹⁵必ずしも正規分布である必要はない、後述の推定方法を参照。

¹⁶OU 過程の他に Constant Elasticity of Variance(CEV) 過程を用いることも可能である。

¹⁷本節の内容は Barndorff-Nielsen and Shephard(2001,2002)、Koopman, Jungbacker and Hol(2005)、Meddahi(2003) を参考にしており、詳細はこれらの論文を参照。

この仮定のもとでは、 τ_i^k の自己相関関数が

$$\text{corr}(\tau_i^k, \tau_{i+n}^k) = \frac{(1 - e^{-\lambda_k})^2}{2(e^{-\lambda_k} - 1 + \lambda_k)} e^{-\lambda_k(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

であることが示される。

(23) 式の自己相関関数から、 τ_i^k が ARMA(1,1) モデルで表わされることがわかる。すなわち、 $n = 1$ の場合、

$$\text{corr}(\tau_i^k, \tau_{i+1}^k) = \frac{(1 - e^{-\lambda_k})^2}{2(e^{-\lambda_k} - 1 + \lambda_k)} \quad (24)$$

となることを用いて、(23) 式を

$$\text{corr}(\tau_i^k, \tau_{i+n}^k) = \text{corr}(\tau_i^k, \tau_{i+1}^k) \times e^{-\lambda_k(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

と書き換える。一般に、ARMA(1,1) モデル $y_i = \mu + \phi(y_{i-1} - \mu) + \theta u_{i-1} + u_i$ の n 次の自己相関関数 $\text{corr}(y_i, y_{i+n})$ は¹⁸

$$\text{corr}(y_i, y_{i+n}) = \text{corr}(y_i, y_{i+1}) \times \phi^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

と表わされるため (山本 (1988) の第 3.2 節を参照) (25) 式と (26) 式を比較すると $\exp(-\lambda_k)$ を AR パートの係数とする ARMA(1,1) モデルで τ_i^k が表現できることがわかる。これを、

$$\tau_i^k = w_k \xi + \phi_k (\tau_{i-1}^k - w_k \xi) + \theta_k \eta_{i-1}^k + \eta_i^k, \quad E[\eta_i^k] = 0, \quad \text{Var}[\eta_i^k] = \sigma_{\eta^k}^2 \quad (27)$$

で与える。ここで、 $\text{Cov}[\eta_i^k, \eta_{i+n}^k] = 0, (n \neq 0)$ とする。このモデルのパラメータは、

$$\begin{aligned} \phi_k &= e^{-\lambda_k} \\ \theta_k &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4\vartheta_k^2}}{2\vartheta_k} \\ \vartheta_k &= \frac{\text{corr}(\tau_i^k, \tau_{i+1}^k) - \phi_k}{(1 + \phi_k^2) - 2\phi_k \text{corr}(\tau_i^k, \tau_{i+1}^k)} \\ \sigma_{\eta^k}^2 &= \frac{(1 + \phi_k^2) \text{Var}(\tau_i^k) - 2\phi_k \text{Cov}(\tau_{i+1}^k, \tau_i^k)}{1 + \theta_k^2} \end{aligned} \quad (28)$$

として、 $\tau_i^k(t)$ に関する連続時間モデルのパラメータの関数として表わすことができる。ただし、 $\text{Var}(\tau_i^k) = 2 \frac{w_k \omega^2}{\lambda_k^2} (e^{-\lambda_k} - 1 + \lambda_k)$ 、 $\text{Cov}(\tau_i^k, \tau_{i+1}^k) = w_k \omega^2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k})^2}{\lambda_k^2}$ である。

¹⁸ここで、 $y_i, i = 1, 2, \dots, T$ であり、パラメータ ϕ, θ について $|\phi| < 1, |\theta| < 1$ が満たされるとする。また、 μ はパラメータ、 u_i は攪乱項とする。

また、(18) 式の推定誤差の分散 σ_u^2 は、

$$\sigma_u^2 = 2M \left(\left(\frac{\xi}{M} \right)^2 + \sum_{k=1}^K \frac{2w_k \omega^2}{\lambda_k^2} \left(e^{-\lambda_k/M} - 1 + \frac{\lambda_k}{M} \right) \right) \quad (29)$$

と表わされる。 M は各 i 日に観測されるリターンの個数を表わす。

Barndorff-Nielsen and Shephard(2002) によると、 $M \rightarrow \infty$ とすると $\text{Var}[u_i \sqrt{M}]$ は $2(\omega^2 + \xi^2)$ へ収束することが示されている。このことから、 σ_u^2 は、 $M \rightarrow \infty$ とすると 0 に近づいていくこと、すなわち価格の観測頻度を高めることで RV の推定誤差が減少していくことがわかる。

UC モデルに含まれる複数のパラメータのうち、 $\xi, \omega, \lambda_k, w_k$ が推定すべきパラメータである。 $\phi_k, \theta_k, \sigma_u^2, \sigma_{\eta^k}^2$ は、(28) 式と (29) 式のように $\xi, \omega, \lambda_k, w_k$ の関数として表わせる。UC モデルは状態空間モデルとして表現され、カルマン・フィルターを用いた擬似最尤法で推定可能である。詳しくは補論 B を参照。

MIDAS モデル

MIDAS(Mixed Data Sampling) モデルは Ghysels, Santa-Clara and Valkanov(2004, 2006) によって考案された。これは、ボラティリティの予測にどのような変数が有効か、どのような頻度で観測された変数が有効か（高頻度データが優れているのか）を比較検証するために考えられたモデルである。予測対象であるボラティリティを h 期間の RV（もしくは対数 RV）の和 $V_{i,i+h} = \text{RV}_{i+1} + \text{RV}_{i+2} + \dots + \text{RV}_{i+h}$ とし¹⁹、その推定式を

$$V_{i,i+h} = \varphi_0 + \varphi_1 \sum_{k=1}^{k^{max}} b_H(k, \xi_1, \xi_2) X_{i-k+1} + \epsilon_i \quad (30)$$

で与える。 $\varphi_0, \varphi_1, \xi_1, \xi_2$ はパラメータであり、 ϵ_t は攪乱項である。 X_{i-k} は、説明力を比較する変数であり、Ghysels, Santa-Clara and Valkanov(2006) では日次リターンの 2 乗、同絶対値、日次 RV、日次 Realized Power（高頻度データによる日中絶対リターンの和）、日中高値安値のレンジ幅、あるいはこれらの対数値を用いている。MIDAS モデルは、上記のような説明変数のタイプのみならず、どのような観測頻度で説明変数を計測した場合に予測力が向上するかを検証する目的にも使用できる。また、被説明変数と説明変数の観測頻度が異なる場合にも適用可能と

¹⁹これは、結局 h 期間中の高頻度で観測した日中リターン全ての二乗和になる。こうしたモデル設定の背景には、ボラティリティの変化が必ずしも日次単位でないとすれば、RV の計測にも様々なタイムホライズンがありうるという考えがあることが指摘できる。

いう特徴もある。この他、RV に様々なタイムホライズン h が想定されており、タイムホライズン別に説明変数の予測力を比較検証することも意図されている。このような多様な設定が可能な MIDAS モデルであるが、本稿の実証分析では、他の RV 時系列モデルと比較するため、被説明変数には日次 RV を、説明変数には日次 RV のラグ値を用いた。

ラグ係数に相当する $b_H(k; \xi_1, \xi_2)$ については、

$$b_H(k; \xi_1, \xi_2) = \frac{f\left(\frac{k}{k^{max}}, \xi_1, \xi_2\right)}{\sum_{j=1}^{k^{max}} f\left(\frac{j}{k^{max}}, \xi_1, \xi_2\right)}$$

として与えられており、データに最もよく当てはまるよう、ラグ構造を決める 3 つのパラメータが推定される。ここで、 $f(z, a, b)$ はベータ分布の密度関数であり、 $f(z, a, b) = z^{a-1}(1-z)^{b-1}/\beta(a, b)$ で与えられる。 $\beta(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ であり、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数とする。Ghysels, Santa-Clara and Valkanov(2006) では、 $\xi_1 = 1, \xi_2 > 0, k^{max} = 50$ の制約が課されている。 $\xi_1 = 1$ は、説明変数とのラグが短いほど係数の値が高く、長いほど係数の値が低くなることを仮定したものであり、RV の自己相関がこうした傾向をもつことに基づいたものである。なお、 $\xi_2 > 0$ はガンマ関数の引数として必要な仮定である。上記研究の推定結果によると、25 日から 30 日ほどでラグ係数 b_H はほぼゼロとなっている。なお、MIDAS モデルは非線形最小 2 乗法、最尤法、一般化積率法により推定可能である²⁰。

2.3.2 GARCH+RV モデル

GARCH モデルのボラティリティの説明変数に RV を含めたものを GARCH+RV モデルと呼ぶ。先行研究では GARCH(1,1)+RV モデルと GARCH(2,2)+RV モデルが検証されている。これら 2 つのモデルが選択された理由を示すため、ボラティリティ変動モデルのうち最も基本的な ARCH モデルの説明から始める。

まず、第 i 日の日次リターン r_i が、第 $i-1$ 日における期待値 $E_{i-1}[r_i]$ と予想されない変動 ϵ_i に分けられるとする。ARCH モデルでは、確率変数 ϵ_i を時期によって変動するボラティリティ σ_i^2 の平方根と標準正規分布に従う確率変数 z_i の積で与え、このうち σ_i^2 を ϵ_i^2 のラグ値で説明する。 p 次のラグを持つ ARCH(p) モデルは、

$$r_i = E_{i-1}[r_i] + \epsilon_i,$$

²⁰推定方法の詳細は Ghysels, Santa-Clara and Valkanov(2004) を参照。実証分析(第 4 節)では、 $\xi_1 = 1, \xi_2 > 0, k^{max} = 50$ の制約の下でモデルを推定した。

$$\begin{aligned}\epsilon_i &= \sigma_i z_i, \quad (\sigma_i > 0), \\ \sigma_i^2 &= \alpha_0 + \sum_{i_p=1}^p \alpha_{i_p} \epsilon_{i-i_p}^2, \quad i_p = 1, 2, \dots, p,\end{aligned}\quad (31)$$

と表わせる。 α_0, α_{i_p} はボラティリティの変動を表わす式のパラメータである。 σ_i^2 の非負性を保証するため、パラメータには制約が課される。こうしたモデル化により、多くの資産価格のリターンで観測される、いったんボラティリティが上昇（安定）すると、高い（低い）状態が連続して起こりやすいという「ボラティリティ・クラスタリング」と呼ばれる現象を表現している。

ARCHモデルのボラティリティの説明変数は ϵ_i^2 のラグ値だけであったが、GARCHモデルの説明変数にはさらに σ_i^2 ラグ値が加わる。GARCH(p, q)モデルは、

$$\begin{aligned}r_i &= E_{i-1}[r_i] + \epsilon_i, \\ \epsilon_i &= \sigma_i z_i, \quad (\sigma_i > 0), \\ \sigma_i^2 &= \alpha_0 + \sum_{i_p=1}^p \alpha_{i_p} \epsilon_{i-i_p}^2 + \sum_{i_q=1}^q \beta_{i_q} \sigma_{i-i_q}^2, \quad i_p = 1, 2, \dots, p, i_q = 1, 2, \dots, q\end{aligned}\quad (32)$$

によって与えられる。ただし、 $\alpha_0, \alpha_{i_p}, \beta_{i_q}$ はボラティリティの変動を表わす式のパラメータである。ボラティリティが非負の値をとるために、パラメータに非負制約が課される。

ラグ・オペレータ L を用いて GARCH(1,1) モデルのボラティリティの式を書き換えると、 $\beta_1 < 1$ であるならば、

$$\begin{aligned}\sigma_i^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{i-1}^2 + \beta_1 \sigma_{i-1}^2 \\ &= \frac{\alpha_0}{1 - \beta_1} + (1 + \beta_1 L + \beta_1^2 L^2 + \dots) \alpha_1 \epsilon_{i-1}^2\end{aligned}\quad (33)$$

となり、これは ARCH(∞) モデルに相当する。一般に ARCH モデルの推定においては次数 p は高次になりやすく、また次数決定にも何らかの判断基準が必要となるため、多くの実証分析において GARCH(1,1) モデルが用いられている。

この GARCH(1,1) モデルについて、Martens(2002)、Koopman, Jungbacker and Hol(2005) は説明変数に RV を含めたモデル

$$\begin{aligned}r_i &= E_{i-1}[r_i] + \epsilon_i, \\ \epsilon_i &= \sigma_i z_i, \quad (\sigma_i > 0), \\ \sigma_i^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{i-1}^2 + \beta_1 \sigma_{i-1}^2 + \gamma \text{RV}_{i-1}\end{aligned}\quad (34)$$

を考えた。

これは、RV がボラティリティ推定において有益な情報を持つという考えに基づくものである。こうした GARCH(1,1)+RV モデルは、最尤法で推定される。

これに対し、Blair, Poon and Taylor (2001) は別のモデル

$$\begin{aligned} r_i &= E_{i-1}[r_i] + \epsilon_i, \\ \epsilon_i &= \sigma_i z_i, \quad (\sigma_i > 0) \\ \sigma_i^2 &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{i-1}^2}{1 - \beta_1 L} + \frac{\gamma \text{RV}_{i-1}}{1 - \beta_2 L} \end{aligned} \quad (35)$$

を考えた。

両モデルを比較するため、(34) 式をラグオペレータを用いて表現すると、

$$\sigma_i^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \beta_1} + (1 + \beta_1 L + \beta_1^2 L^2 + \dots)(\alpha_1 \epsilon_{i-1}^2 + \gamma \text{RV}_{i-1}) \quad (36)$$

となり、 $\{\epsilon_{i-l}^2\}$ と $\{\text{RV}_{i-l}\}$ のパラメータが同じ割合 β_1 で減衰していくことを示している。一方 (35) 式は、

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \frac{\alpha_0}{1 - \beta_1} + (1 + \beta_1 L + \beta_1^2 L^2 + \dots)\alpha_1 \epsilon_{i-1}^2 \\ &\quad + (1 + \beta_2 L + \beta_2^2 L^2 + \dots)\gamma \text{RV}_{i-1} \end{aligned} \quad (37)$$

であり、 $\{\epsilon_{i-l}^2\}$ と $\{\text{RV}_{i-l}\}$ の係数の減衰が異なることを許す定式化となっていることがわかる。

このように (35) 式は (34) 式よりも表現力が高いが、(35) 式の両辺に $(1 - \beta_1 L)(1 - \beta_2 L)$ を乗じて整理すると、以下のとおり、GARCH(2,2) モデルの右辺に RV が追加されたモデルとなっていることがわかる。

$$\begin{aligned} r_i &= E_{i-1}[r_i] + \epsilon_i, \\ \epsilon_i &= \sigma_i z_i, \quad (\sigma_i > 0), \\ \sigma_i^2 &= \alpha^* + \alpha_1 \epsilon_{i-1}^2 - \beta_2 \alpha_1 \epsilon_{i-2}^2 \\ &\quad + (\beta_1 + \beta_2) \sigma_{i-1}^2 - \beta_1 \beta_2 \sigma_{i-2}^2 + \gamma \text{RV}_{i-1} - \gamma \beta_1 \text{RV}_{i-2} \end{aligned} \quad (38)$$

ただし $\alpha^* = (1 - \beta_2) \alpha_0$ である。このため、GARCH+RV モデルでは GARCH(1,1) か GARCH(2,2) が推定モデルとして選択されることが多い。いずれのモデルも最尤法で推定される。

2.4 ボラティリティの予測力

2.4.1 σ_i^2 予測力の比較方法

前節でサーベイされたモデルを用いて、ボラティリティの予測力を比較する。まず各モデルのパラメータを推定し、次にパラメータの推定値を用いて σ_i^2 の予測値 $\hat{\sigma}_i^2$ を得る。最後に、 $\hat{\sigma}_i^2$ の σ_i^2 に対する精度を比較することで、各モデルのボラティリティ予測力を測る。

ただし、 σ_i^2 は未知であるため、その代わりに変数に対する予測力の分析を行う。かつては r_i^2 を σ_i^2 の代理変数としたが (Pagan and Schwert (1990)、West and Cho (1995))、前述したように Andersen and Bollerslev(1998) が $M \rightarrow \infty$ とするとき RV_i が σ_i^2 へ確率収束することを示して以来、 RV_i を σ_i^2 の代理変数として用いるようになった。Hansen and Lunde(2006) は、ボラティリティの代理変数として様々な候補を採り上げ、ARCH モデルや ARCH モデルから派生したモデル群のボラティリティ予測力を比較した。その結果、 RV を σ_i^2 の代理変数とした場合、モデルごとの予測パフォーマンスのばらつきが最も小さくなったことから、 RV を σ_i^2 として用いるほうがモデルリスクに対してより頑健であると評価している。なお、 RV を σ_i^2 の代理変数とする妥当性に関連した他の先行研究としては Andersen and Bollerslev(1998)、Andersen, Bollerslev and Lange(1999)、Koopman, Jungbacker and Hol(2005)、Martens(2002) が挙げられる。本稿でも、真のボラティリティの代理変数として RV を用いることとする。

将来の RV に対する予測力をモデル間で比較するには、予測誤差と Mincer-Zarnowitz 回帰が用いられている。予測誤差は、MSE(Mean Squared Error、平均平方誤差)、HMSE(Heteroskedastic MSE、不均一分散平均平方誤差)、MAE(Mean Absolute Error、平均絶対値誤差)、HMAE(Heteroskedastic MAE、不均一分散平均絶対値誤差) で測られ、これらは以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}MSE &\equiv \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (RV_i - \hat{\sigma}_i^2)^2 \\HMSE &\equiv \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left(1 - \frac{\hat{\sigma}_i^2}{RV_i}\right)^2 \\MAE &\equiv \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T |RV_i - \hat{\sigma}_i^2| \\HMAE &\equiv \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left|1 - \frac{\hat{\sigma}_i^2}{RV_i}\right|\end{aligned}$$

MSE と MAE には RV が高い日の予測誤差の影響が大きく現れやすい一方、HMSE と HMAE ではこうした影響が弱められる。バリューアットリスクの推定などリスク計測に応用する場合には、ボラティリティの低い時期よりも高い時期について精度の高い予測が必要とされるため、MSE あるいは MAE が適している。なお、lnRV のモデルで推定されるのはボラティリティの対数値の期待値であるため、モデルの攪乱項の分散を σ^2 と表わすと、正規性の仮定のもとで $E[\hat{\sigma}_i^2] = \exp(E[\ln \hat{\sigma}_i^2] + \frac{\sigma^2}{2})$ が成立することから、 $E[\ln \hat{\sigma}_i^2]$ を $E[\hat{\sigma}_i^2]$ へ変換したうえで予測値や予測誤差を求める。

Mincer-Zarnowitz 回帰では、RV を定数項および各モデルで推定された $\hat{\sigma}_i^2$ へ回帰する。

$$RV_i = \beta_{mz,0} + \beta_{mz,1}\hat{\sigma}_i^2 + \epsilon_{mz,i} \quad (39)$$

ただし、 $\beta_{mz,0}, \beta_{mz,1}$ はパラメータ、 $\epsilon_{mz,i}$ は攪乱項である。(39) 式の回帰を各モデル毎に行い、その決定係数によって各モデルのボラティリティの予測力を比較することができる。

Mincer-Zarnowitz 回帰の推定値を用いると、各モデルで推定されたボラティリティにバイアスが含まれないことを検定することができる。バイアスがないときには $E[\hat{\sigma}_i^2]$ が RV に等しくなること、(39) 式の両辺の期待値をとると $E[RV_i] = \beta_{mz,0} + \beta_{mz,1}E[\hat{\sigma}_i^2]$ であることから、推定されたボラティリティにバイアスが含まれないための条件は $\beta_{mz,0} = 0$ かつ $\beta_{mz,1} = 1$ であることがわかる。そこで、これを帰無仮説とした F 検定を行えばよい。

2.4.2 RV を用いたボラティリティ変動モデルの予測力比較

Koopman, Jungbacker and Hol(2005) は S&P500 のデータを用いて、ARFIMA モデル、UC モデル、GARCH+RV モデルによる一日先のボラティリティ予測力が、GARCH モデルよりも高いことを示した^{21, 22}。

²¹この他に SV モデルとの比較も行われている。SV モデルおよび SV+RV モデルは、予測誤差、Mincer-Zarnowitz 回帰の決定係数のどちらで比較しても、UC モデルや ARFIMA モデルよりも予測力が劣っていた。

²²GARCH モデルよりさらに複雑な ARCH 型モデルとの比較も行われている。Giot and Laurent(2004) は Ding, Granger and Engle(1993) の APARCH モデルと RV の ARFIMA モデルを比較した。APARCH モデルは ARCH 型モデルの Box-Cox 変換を行ったものであり、ARCH モデルや GARCH モデルをはじめとして 7 種類の ARCH 型モデルを内包している。Giot and Laurent(2004) は、バリュー・アット・リスクのバックテストの精度で比較したところ、両モデルの精度はほぼ同等であり、RV を用いなくとも ARCH 型モデルを発展させることでボラティリティの分布の裾の精度を高められることを示している。なお、GARCH モデルや APARCH モデルはいずれも長期記

もっとも、モデル間の予測力順位では、比較方法によって異なる結果が得られている。予測誤差を用いると ARFIMA モデルと UC モデル ($K = 2$) の予測力が高く、Mincer-Zarnowitz 回帰の決定係数を用いると GARCH+RV モデルの予測力が最も高くなった。このように結果が異なる理由としては、Mincer-Zarnowitz 回帰では回帰式中の定数項によって $\hat{\sigma}_i^2$ の推定バイアスが調整されるため、予測値と実現値の間に平均的にみて水準のズレがあったとしても、両者の変動が似通っていると高い決定係数が得られることが指摘されている。したがって、RV モデルで推定されたボラティリティは、GARCH+RV モデルに比べて推定バイアスは小さいものの、その変動をうまく捉えていないという可能性も考えられる。

この他、Martens(2002) は GARCH(1,1)+RV モデルを、Blair, Poon and Taylor (2001) は GARCH(2,2)+RV モデルを GARCH モデルと比較し、RV を追加したモデルのボラティリティ予測力が高いことを示している。これらの推定結果では、RV の係数 γ が有意であると同時に σ_{i-1}^2 の係数 β_1 も有意となっている。これは、(36)、(37) 式が示すように、 $\{RV_{i-l}\}$ のラグ値がモデルに含まれていることを示しており、RV の長期記憶性と整合的な結果になっている。

2.4.3 ボラティリティ予測に有用な RV 以外の変数

RV のラグ値以外にも σ_i^2 の予測に有用な変数は存在する。両者の比較を行った実証研究を紹介する。

代表的なものとして、インプライド・ボラティリティと RV の比較がある。Blair, Poon and Taylor(2001) は GARCH+RV モデルのボラティリティ推定式の説明変数に VIX (権利行使価格が異なるオプションのインプライド・ボラティリティを合成した指数) を追加したモデルで σ_i^2 の予測力の比較を行い、VIX に含まれる情報の他に RV に含まれる追加的な情報はほとんどないことを示した。Martens and Zein(2004) は、RV を被説明変数とした場合、ARFIMAX モデルや GARCH モデルによるボラティリティ予測値と VIX の説明力を比較した。その結果、GARCH モデルの予測値が VIX に比べて低い説明力しかなかったのに対し、ARFIMAX モデルの予測値は VIX に劣らない説明力を有していることがわかった。Ghysels, Santa-Clara and

憶性を持たないため、長期記憶性を持つ RV をボラティリティの代理変数とした予測力比較では、RV 時系列モデルに比べて不利になりかねない。こうした問題への対応としては、ARCH 型モデルで長期記憶性を含む FIEGARCH モデル (Bollerslev and Mikkelsen(1996)) を用いた比較が考えられよう。

Valkanov(2006) では、

$$RP_i \equiv \sum_{j=1}^M |r_{j,i}| \quad (40)$$

で定義される RP(Realized Power) が、 σ_i^2 の予測に RV のラグ値よりも適切である可能性が示されている。すなわち、MIDAS モデルの被説明変数を RV とし、説明変数として RV や RP、日次リターンの 2 乗、インプライド・ボラティリティのラグ値を用いた結果、RP を用いたときに最も予測誤差が小さくなることが示されている。

2.5 多変量 Realized Volatility への拡張

前節までは単変量の RV を紹介したが、多変量に拡張した RV モデルも考案されている。多変量 RV では RC(Realized Correlation) という概念を考慮する必要がある。

まず、 N 個の金融資産について、第 i 日の観測頻度 M で測られたリターン $r_{j,i}$ から成る $N \times 1$ ベクトル $\mathbf{r}_{j,i}$ を考える。このとき、多変量 RV は

$$\mathbf{RV}_i \equiv \sum_{j=1}^M \mathbf{r}_{j,i} \mathbf{r}'_{j,i} \quad (41)$$

として計算される $N \times N$ 行列で定義される。この行列の対角要素は各資産の単変量 RV であり、非対角要素は Realized Covariance と呼ばれる。 \mathbf{RV}_i の第 n 対角要素を $v_{i,n}^2$ ($n = 1, 2, \dots, N$) と表わすとき、 $\mathbf{V}_i = \text{diag}(v_{i,1}^2, v_{i,2}^2, \dots, v_{i,N}^2)$ とすると、RC(Realized Correlation) は

$$\mathbf{RC}_i = \mathbf{V}_i^{-1/2} \mathbf{RV}_i \mathbf{V}_i^{-1/2} \quad (42)$$

として得られる。

多変量 RV は、GARCH+RV のような潜在変数モデルとの組み合わせでなく、RV を直接、多変量時系列モデル化する方向に発展している。例えば、Andersen *et al.*(2003) は長期記憶性を取り入れたベクトル自己回帰モデル VAR-RV モデルを用いて実証分析を行っている。Barndorff-Nielsen and Shephard (2004a) は、2.1 節で紹介した単変量 RV の特性検証のように、Realized Covariance が真の累積コ

バリエーション（累積ボラティリティ）に確率収束すること²³や、RCが漸近的に正規分布に従うことを示した。また、第*i*日の高頻度リターン2変数を使うと第*i*日の回帰係数を求めることができるが、このように各*i*日毎に日々変化する回帰係数は Realized Covariance を使って表わされること、さらにその漸近分布を Realized Covariance で表現できることを示した²⁴。そのうえで、日次で変動する真のパラメータに基づいて発生させた高頻度シミュレーションデータから、多変量 RV や RC、回帰係数を日次で計算し、漸近理論に基づいて求めた特性が得られること、すなわち真のパラメータと多変量 RV 等との乖離が正規分布に従い、その分散も一定の信頼区間内に収まっていることを示した。

Thomakos and Wang(2003) は、CME、CBOT で取引されているユーロ、マルク、S&P500、T-bond の先物取引価格について4変量 RV の実証分析を行っており、推定された RC 各々の系列について、自己相関が長期にわたって存在し、個別に推定した FI 項の係数 *d* も長期記憶性の存在を示唆することを示している。また、ボラティリティ変動の非対称性と同様、RC の変動にも非対称性が存在すること、いずれの RC の分布も歪んでおり正規分布と異なっていることを検証している。

²³対数価格 $p^*(t)$ ベクトルについて、ある一般的なセミ・マルチンゲール過程（瞬間 co-volatility 行列と多変量ブラウン運動で表わされた多変量 SV でマルチンゲール部分が与えられたもの）を考え、そのもとで多変量 RV が累積コバリエーション行列に確率収束することを示している。なお、瞬間 co-volatility の2乗が瞬間コバリエーションであり、これを第*i*日の区間で積分したものが累積コバリエーションとなる。

²⁴高頻度リターン2変数間の単回帰から回帰係数を求める推計法を Realized Regression と呼んでいる。一般的に、第*i*日の第*j*番目に観測される2個の金融資産の日中リターンを $y_{j,i}$ と $x_{j,i}$ で表わす。ここで、

$$y_{j,i} = \beta_i x_{j,i} + u_{j,i}$$

という単回帰モデルを考える。 β_i はパラメータ、 $u_{j,i}$ は平均0、分散一定、自己共分散0とする。 β_i の最小2乗推定量は $\hat{\beta}_i \equiv \sum_{j=1}^M x_{j,i} y_{j,i} / \sum_{j=1}^M x_{j,i}^2$ と表わされることがわかる。これは、 $x_{j,i}$ と $y_{j,i}$ の RV である、

$$RV_i = \sum_{j=1}^M \begin{pmatrix} x_{j,i}^2 & x_{j,i} y_{j,i} \\ x_{j,i} y_{j,i} & y_{j,i}^2 \end{pmatrix}$$

で表されることがわかる。なお、個別資産の高頻度リターンとマーケットポートフォリオの高頻度リターンの回帰係数を求めると、ボラティリティが日次可変な場合の CAPM のベータが得られる。このように、Realized Regression については様々な用途が考えられる。

2.6 ジャンプ拡散過程へのRVの応用

資産収益率の変動分析では、 p^* の確率過程にジャンプ項が含まれたジャンプ拡散過程

$$dp^*(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) + \kappa(t)dq(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (43)$$

を用いた分析もしばしば行われている。ここで、ジャンプが生じるときには $dq(t) = 1$ 、ジャンプが生じないときには $dq(t) = 0$ であり、 $\kappa(t)$ はジャンプの大きさを表わしている。GARCH モデルや SV モデル²⁵ をジャンプ拡散過程のもとで考案した先行研究に対し、Andersen, Bollerslev and Diebold(2005) や Barndorff-Nielsen and Shephard(2004b) は、同過程のもとでの RV モデルを提案し、ジャンプの検証法や発生頻度の推定法を示した。以下ではその方法を紹介する。

(43) 式のもと、 p^* の 2 次変分は²⁶

$$[p^*](t) = \sigma^{2*}(t) + \sum_{0 < u \leq t} \kappa^2(u)$$

となり、したがって、

$$\sum_{j=1}^M r_{j,i}^2 \xrightarrow{P} \sigma_i^2 + \sum_{i-1 < u \leq i} \kappa^2(u) \quad (44)$$

となる。すなわち、ジャンプ拡散過程のもとでは、日中リターンの 2 乗和を計算すると、 σ_i^2 に加え、 $\sum_{i-1 < u \leq i} \kappa^2(u)$ が含まれてしまう。そのため、RV が σ_i^2 の一致推定量とならない。こうした問題に対処し、 σ_i^2 だけを正しく推定するために Bipower Variation (以下 BV)

$$\{p^*\}^{[r,s]}(t) = \text{plim}_{\delta \downarrow 0} \delta^{1-(r+s)/2} \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 1} |p^*(j\delta) - p^*((j-1)\delta)|^r |p^*((j+1)\delta) - p^*(j\delta)|^s, \quad r, s \geq 0 \quad (45)$$

が用いられる。 $p^*(j\delta)$ は δ 間隔で観測される対数価格であり、 $\lfloor t/\delta \rfloor$ は t/δ 未満の最大の整数を表わす。

BV は、 μ 、 σ と W が独立であるとき、 $\max(r, s) < 2$ の条件を満たすならば、

$$\mu_r^{-1} \mu_s^{-1} \{p^*\}^{[r,s]}(t) = \int_0^t \sigma^{r+s}(u) du, \quad (46)$$

²⁵ ジャンプ拡散過程のもとで SV モデルを考えたものには、Berg, Meyer and Yu(2004) や Chib, Nardari and Shephard(2002)、Eraker(2004) がある。これらのモデルでは、通常の SV モデル以上にコンピュータ・インテンシブな推定方法が必要となっているが、RV を用いると簡単かつ計算負荷が少なくモデル推定できる。

²⁶ $\sigma^{2*}(t)$ は (7) 式で定義された累積ボラティリティを表わす。

という関係を満たすことが示されている。ただし、 $\mu_r \equiv 2^{r/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(r+1))}{\Gamma(\frac{1}{2})}$ である²⁷。ここで、 $r = s = 1$ とすると、

$$\mu_1^{-2} \sum_{j=1}^{M-1} |r_{j,i}| |r_{j+1,i}| \xrightarrow{P} \sigma_i^2 \quad (47)$$

のように、 σ_i^2 に確率収束する統計量が定義できる。以下ではこれを BV_i と表わす。これらの結果から、日中リターンの2乗和から BV_i を引いたものについて、

$$\sum_{j=1}^M r_{j,i}^2 - \mu_1^{-2} \sum_{j=1}^{M-1} |r_{j,i}| |r_{j+1,i}| \xrightarrow{P} \sum_{i-1 < u \leq i} \kappa^2(u) \quad (48)$$

であることが導かれることが示されている。

Andersen, Bollerslev and Diebold(2005) の実証分析では、(48) 式から、二次変分のうちジャンプに起因する部分を

$$J_i \equiv RV_i - BV_i \quad (49)$$

で与えている。ただし、同項の非負性から $J_i = \max[RV_i - BV_i, 0]$ と非負制約を課している。Andersen, Bollerslev and Diebold(2005) は、 J_i を HAR モデルの説明変数に含めた HAR-RV-J モデルを、

$$\ln RV_{i,t+h} = \beta_0 + \beta_D \ln RV_i + \beta_W \ln RV_{i-5,i} + \beta_M \ln RV_{i-22,i} + \beta_J \ln(1 + J_i) + \epsilon_i \quad (50)$$

と定式化した。 $\beta_0, \beta_D, \beta_W, \beta_M, \beta_J$ はパラメータ、 ϵ_i は攪乱項である。 $h = 1, 5, 22$ (それぞれ日次、週次、月次を表わす) の3通りの推定を行っており、ジャンプ項の係数 β_J の推定値はいずれのケースでも負値で有意であった²⁸。

ジャンプの存在の検証は、(50) 式の推定に基づくジャンプ項の有意性検証以外にも、BV を用いた統計量で検定可能なことを Barndorff-Nielsen and Shephard(2004b, 2006) が示している。ジャンプが生じないという仮定のもとでは、

$$Z_i \equiv \frac{\ln RV_i - \ln BV_i}{[(\mu_1^{-4} + 2\mu_1^{-2} - 5)TQ_i BV_i^{-2}/M]^{1/2}} \quad (51)$$

とすると、 Z_i が漸近的に標準正規分布に従うことがわかっている。統計量 Z_i の中の TQ_i は Realized Tri-power Quarticity の略称であり、

$$TQ_i = M\mu_{4/3}^{-3} \sum_{j=3}^M |r_{j,i}|^{4/3} |r_{j-1,i}|^{4/3} |r_{j-2,i}|^{4/3} \quad (52)$$

²⁷詳細は Barndorff-Nielsen and Shephard(2004b) を参照。

²⁸ $\ln RV$ の他、 RV, \sqrt{RV} についても推定を試みており、 $\ln RV$ のモデルの決定係数が最も高いという結果を得ている。

によって得られる²⁹。ここで、 $\mu_{4/3} = 2^{2/3}\Gamma(7/6)\Gamma(1/2)^{-1}$ である。 Z_i を用いると、有意水準 $1 - \alpha$ のもとで、 $RV_i - BV_i = 0$ を帰無仮説、 $RV_i - BV_i > 0$ を対立仮説とした検定を行うことができる。このために、 $J_{i,\alpha}$ を

$$J_{i,\alpha} \equiv I[Z_i > \Phi^{-1}(\alpha)] \cdot [RV_i - BV_i] \quad (53)$$

と定義する。

$J_{i,\alpha}$ は、帰無仮説が棄却されれば J_i となり、棄却されなければ 0 となる変数である。ただし $I[\cdot]$ は指示関数であり、 $[\cdot]$ の条件を満たすときに 1、そうではないときに 0 を返す。また、 $\Phi^{-1}(\alpha)$ は標準正規分布の分布関数の値が α となる分位点を返す。有意水準である α の値を大きくすると、 $J_{i,\alpha}$ は小さくなり、ジャンプが有意に発生していると判断される日が少なくなる。Andersen, Bollerslev and Diebold(2005) の実証分析では、 $\alpha = 0.95, 0.99, 0.999, 0.9999$ と複数の有意水準のもとで、ジャンプが有意に生じたと判断された日の割合を求めている³⁰。また、いずれの有意水準についても、 $J_{i,\alpha}$ に正の自己相関が存在すること、および $J_{i,\alpha}$ からゼロを除いた系列にも自己相関が存在すること、すなわち、サイズの大きい（小さい）ジャンプにはサイズの大きい（小さい）ジャンプが続くことを指摘し、ボラティリティの推定においてもジャンプの可能性を考慮に入れたモデルへ拡張する必要性を示唆している。また、Andersen, Bollerslev and Diebold(2005) は

$$C_{i,\alpha} \equiv I[Z_i \leq \Phi^{-1}(\alpha)]RV_i + I[Z_i > \Phi^{-1}(\alpha)]BV_i \quad (54)$$

という変数を考案している。この変数は、ジャンプが生じたときにはジャンプを含まない BV を返し、ジャンプが生じないときには RV を返すため、ジャンプ拡散過程からジャンプ項に起因する部分を取り除いたボラティリティを測るものである。 $C_{i,\alpha}$ と $J_{i,\alpha}$ を前出の HAR-RV モデルに応用した HAR-RV-CJ モデルは

$$\begin{aligned} \ln RV_{i,i+h} = & \beta_0 + \beta_{CD} \ln C_{i,\alpha} + \beta_{CW} \ln C_{i-5,i,\alpha} + \beta_{CM} \ln C_{i-22,i,\alpha} \\ & + \beta_{JD} \ln(J_{i,\alpha} + 1) + \beta_{JW} \ln(J_{i-5,i,\alpha} + 1) \\ & + \beta_{JM} \ln(J_{i-22,i,\alpha} + 1) + \epsilon_i \end{aligned} \quad (55)$$

²⁹これは、Barndorff-Nielsen and Shephard (2004b, 2006) が考案した TQ_i を Andersen, Bollerslev and Diebold(2005) が更に改善したものであり、価格系列にジャンプが含まれる場合において、 $\int_{i-1}^i \sigma^4(u) du$ に対して一貫性を持つという優れた特性を持つ。したがって、本稿でも Andersen, Bollerslev and Diebold(2005) が示した TQ_i を用いた

³⁰ $\alpha = 0.5$ とすると、 Z_i が (51) 式で与えられることから、 $J_{i,\alpha}$ は前述の $J_i = \max[RV_i - BV_i, 0]$ と漸近的に一致する。従って、 $\alpha = 0.5$ としたときの結果を参照することで、ジャンプの検定を行わずに J_i を求めた場合と、検定を行ったうえで $J_{i,\alpha}$ を求めた場合の比較が可能となる。本稿の実証分析でも、先行研究と同様に $\alpha = 0.5$ とした場合の結果を示している。

で与えられる。ただし $\beta_0, \beta_{CD}, \beta_{CW}, \beta_{CM}, \beta_{JD}, \beta_{JW}, \beta_{JM}$ はパラメータであり、 ϵ_i は攪乱項である。被説明変数と同様、 $C_{i,\alpha}$ についても過去の h 期間で測った $C_{i-h,i,\alpha} = \frac{1}{h}(C_{i-h+1,\alpha} + C_{i-h+2,\alpha} + \dots + C_{i,\alpha})$ を説明変数に用いる。 $\alpha = 0.999$ とした Andersen, Bollerslev and Diebold(2005) では、 $J_{i,\alpha}$ の係数には有意ではないものが多いことから、RV の予測には過去の RV そのものではなく、ジャンプの影響を取り除いたボラティリティである C_α が重要であることが示されている。

3 実証分析上のデータの問題

RV は観測頻度 $M \rightarrow \infty$ のもとで σ_i^2 へ確率収束することから、時間間隔を可能な限り短くして取得される日中リターンから計算されることが望ましい。しかし、実際には以下 3 点の問題が存在するため、ある程度の時間間隔をおいて取得された日中リターンが分析に用いられる。(1) リターンには市場制度に起因する様々なノイズ(以下ではマーケット・マイクロストラクチャーによるノイズと呼ぶ)が含まれる。(2) 高頻度で計測された日中リターンには自己相関が存在する。(3) 取引が夜間や昼休みに中断するような場合、リターン計測間隔が伸びる。以下ではこれらの問題を考慮した先行研究を紹介する。

第 1 点目について、Ait-Sahalia, Mykland and Zhang (2005) は次のように説明している。観測される対数価格 p^* を、マーケット・マイクロストラクチャーによるノイズ u^* と、仮にノイズが存在しない状況で実現したであろう効率的価格 \tilde{p}^* の和として捉える。一般に、RV の計測間隔を短くすると、 \tilde{p}^* のボラティリティに関する情報は減少する(仮に p^* がブラウン運動に従うなら時間比例的に減少する)のに比べ、ノイズ u^* は減少しにくく、RV のノイズ・シグナル比率が劣化すると考えられる。一方、継続間隔を長くし過ぎると、高頻度データの情報量を十分に活用できなくなる。したがって、最適な計測間隔が資産市場ごとに存在するはずである。こうした最適な計測間隔を推定する方法が近年、考案されつつある。

Ait-Sahalia, Mykland and Zhang(2005) は、ノイズ u^* が正規分布に従うと仮定したもとで、ノイズを含むリターン p^* の尤度関数を考えることで最適な時間間隔を推定する方法を示した。Bandi and Russell(2005) は、RV の σ_i^2 に対する平均平方誤差を計測間隔の関数として定式化し、この平均平方誤差を最小化させることで最適な計測間隔を推定する方法を提案した。

第 2 点目は日中リターンに自己相関が存在する問題である。市場全体に影響を及ぼすニュースがもたらされたとき、すぐに価格に反映される銘柄もあれば、価

格に反映されるまでに数分かかる銘柄も存在するため、ニュースが株価指数のリターンに自己相関を生じさせることが指摘されている。この問題への対処法として Oomen(2001) は以下の方法を考えた。日中リターン $r_{j,i}$ に自己相関が存在するとき、日次リターンの 2 乗和は、

$$r_i^2 = \left[\sum_{j=1}^M r_{j,i} \right]^2 = \sum_{j=1}^M r_{j,i}^2 + 2 \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=j+1}^M r_{k,i} r_{j,i} \quad (56)$$

と表わされる。自己相関が比較的速く減衰していく場合、リターンが計算される時間間隔を長くすることで (56) 式の右辺第 2 項がゼロとなり、 $E[\sum_{j=1}^M r_{j,i}^2] = E[r_i^2]$ が満たされる。これを基準に、Oomen(2001) は FTSE100 指数の場合、25 分間隔で測った RV が望ましいとした。しかし、仮に日経平均株価指数や TOPIX について 25 分刻みにリターンを取得すると、1 営業日あたり取得される日中リターンは 14 個しか存在しなくなる。また、上述したように、高頻度データの情報を相当量、捨てていることにもなる。したがって、自己相関への対応と情報量確保のバランスを上手く取ることが求められる。

そこで、株価指数および株価指数先物を用いた代表的な先行研究について、日中リターンの観測頻度、自己相関の除去の有無を表 1 にまとめて比較した。上記 (1)、(2) の問題に対して、多くの論文では 5 分間隔でリターンを計測するという選択が採られている。本稿の実証分析でも、先行研究との比較可能性を考慮して 5 分間隔を採用することとした。

第 3 点目は、夜間や昼休みの取引中断の問題である。夜間に取引が中断する市場では、 $r_{1,i} = p(i-1+1/M) - p(i-1)$ は第 i 日の最初の観測価格 $p(i-1+1/M)$ と第 $i-1$ 日の終値 $p(i-1)$ から計算されるリターンであるため、日中の $r_{j,i}, j = 2, 3, \dots, M$ に比べ計測間隔が長い。(6) 式や (43) 式のような連続時間の価格過程を前提としたとき、こうした計測間隔の長いリターンは、短い時間間隔で観測されるリターンと比べて、 $dW(t)$ の累積影響が大きいいため、日中リターンと同じウェイトで RV 算出に用いるのは適切ではないと考えられる。

Hansen and Lunde(2005) は、夜間リターンの 2 乗 $r_{1,i}^2$ と、夜間リターンを含まずに日中リターンのみから計算した RV_i^{intra} の加重和として RV を計算する方法を考案した。この方法によって計算される RV は、

$$RV_i^{HL}(\lambda) = \lambda_1 r_{1,i}^2 + \lambda_2 RV_i^{intra}, \quad \lambda \equiv (\lambda_1, \lambda_2)' \quad (57)$$

と表わされ、パラメータ λ_1^*, λ_2^* は、 $RV_i^{HL}(\lambda)$ の σ_i^2 に対する平均平方誤差を最小に

するものとして求められる。これらのパラメータは、

$$\begin{aligned}\lambda_1^* &= (1 - \varphi) \frac{\mu_{\sigma^2}}{\mu_{r^2}}, \quad \lambda_2^* = \varphi \frac{\mu_{\sigma^2}}{\mu_{RV}} \\ \varphi &= \frac{\mu_{RV}^2 \eta_{r^2}^2 - \mu_{r^2} \mu_{RV} \eta_{r^2, RV}}{\mu_{RV}^2 \eta_{r^2}^2 + \mu_{r^2}^2 \eta_{RV}^2 - 2\mu_{r^2} \mu_{RV} \eta_{r^2, RV}}\end{aligned}\quad (58)$$

によって与えられる。ここで、

$$\begin{aligned}\mu_{\sigma^2} &\equiv E[\sigma_i^2], \mu_{r^2} \equiv E[r_{1,i}^2], \mu_{RV} \equiv E[RV_i^{intra}] \\ \eta_{r^2}^2 &\equiv \text{var}(r_{i,1}^2), \eta_{RV}^2 \equiv \text{var}(RV_i^{intra}), \eta_{r^2, RV} \equiv \text{cov}(r_{i,1}^2, RV_i^{intra})\end{aligned}\quad (59)$$

である。このようにして求められた λ_1^* , λ_2^* は、RV の σ_i^2 に対する不偏性を満たしている。

これらの期待値、分散共分散は観測データから得られるが、 μ_{σ^2} は何らかの推定法が必要となる。Hansen and Lunde(2005) では 30 分間隔で観測される日中リターン $r_{j,i}^{(30m.)}$ から計算した RV である $RV_i^{intra,(30m.)}$ と夜間リターン $r_{1,i}$ を用い、 $\mu_{\sigma^2} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_{1,i} + RV_i^{intra,(30m.)})$ として求めている³¹。また、 RV_i^{intra} を求める際には、日中リターン 2 乗の系列相関を考慮し、Newey-West 法を用いている。

4 実証分析

本節では、これまでサーベイしてきた各種の RV モデルを、本邦市場データに適用した実証分析結果を示す。以下では、各モデルの推定結果、標本期間内における 1 期先 σ_i^2 の予測力比較、多変量 RV の推定、ジャンプ拡散過程のもとでの RV 推定を順に紹介していく。

4.1 データ

本稿では日経平均株価指数、日経平均先物価格、東証株価指数 (TOPIX) を分析対象とした。取引は前場と後場に別かれ、前場が 9 時から 11 時まで、後場が 12 時半から 15 時 (日経平均先物は 15 時 10 分) までである³²。分析期間は 2000 年 1

³¹ σ_i^2 の期待値 μ_{σ^2} の推定値には、 σ_i^2 に対して不偏性を満たすものを使えばよいが、高頻度リターンには自己相関が存在するため、期待値の推定にはむしろ望ましくない。そこで、 μ_{σ^2} を推定する目的のみのために、比較的低頻度のリターン $r_{j,i}^{(30m.)}$ が用いられている。

³² データセットには、11 時から 12 時半まで、および 15 時 (日経平均先物は 15 時 10 分) 以降のデータが散見されたが、これらはすべて対象から除外した。

月5日から2003年12月29日までであるが、大発会と大納会には後場の取引が行われないため、これらの日は推定対象から除外した。また、対象期間初日の2000年1月5日のデータは15時（日経平均先物の場合、15時10分）の価格のみを使用し、2000年1月6日以降についてRVおよび日次リターンを計算した。日次リターンには、各営業日の15時（同15時10分）時点の価格を用いた。

日経平均先物は、大阪証券取引所で取引されており、3月、6月、9月および12月の第2金曜日の前営業日が各限月の最終取引日である。最も取引量が多い中心限月の交代は当月初前後となる場合が多い。そこで、価格系列は、各限月に入る前までは期近限月の価格を、限月には次に限月が近い取引の価格を用いた。

TOPIXは東京証券取引所1部上場全銘柄を対象とした時価総額による加重平均であるのに対して、日経平均株価指数は1部上場銘柄のうちの225銘柄による単純平均である。これらの2系列の価格変動は類似しているが、高頻度データによるRVでは異なった変動特性を有している可能性があること、また、2000年4月24日に日経平均株価指数の構成銘柄が大幅に入れ替えられたことの影響も考えられるため、両系列を分析対象として比較を行う。

RVの計算においては、5分間隔で観測される対数価格差を用いた。このとき、 $M = 54$ （日経平均株価指数、TOPIX）、 $M = 56$ （日経平均先物）、 $T = 977$ である。本稿で使用したデータセットでは、日経平均株価指数およびTOPIXの場合、最短で1分間隔、日経平均先物では更に短い時間間隔で観測される価格が利用可能であるが、第3節で述べたように、過度に高頻度なデータを用いることには問題がある。本稿では、欧米市場と対象とした先行研究との比較が可能になるよう、多くの実証研究と同様に5分間隔で観測されるリターンを用いた。

図1はRVおよび $\ln RV$ のグラフである。標本期間内に数回にわたり、非常に高い値のRVが観測されるが、これは以下のような事情によるものと考えられる。

- 2000年4月17日：前週末のアメリカ株式相場の影響を受け、東証1部上場銘柄のうち1236銘柄が下落し、日経平均株価は過去5番目の下げ幅を記録したため、ボラティリティが大きく上昇した（日本経済新聞2000年4月18日朝刊）。
- 2000年4月21日、24日：日経平均株価指数に採用されている銘柄のうち30銘柄の入れ替えに伴い、入れ替え対象銘柄を中心に売買が活発になった。新しい銘柄による指数の算出は4月24日（月曜日）から開始されたため、前週の4月21日（金曜日）にも大幅なボラティリティの上昇が観察されている。

- 2001年9月12日：9月11日に発生したアメリカ同時多発テロの影響によりボラティリティが大きく上昇した。

本稿では、これらも全て分析対象とした。

次に、lnRV と RV で基準化されたリターンの分布を正規分布と比較する。RV の分布は正規分布とは全く異なっており、本稿の分析は lnRV と RV で基準化されたリターンについて行っている。図 2 は lnRV、および RV により基準化された日次リターンの推定された密度関数を、正規分布の密度関数とともに示している。図 3 は図 2 と同じ変数の QQ プロットである³³。密度関数は、正規分布と概ね一致しているが、QQ プロットをみると、分布の両裾において正規分布との乖離が確認される。

4.2 各モデルの推定結果

まず、第 2 節においてサーベイされた各モデルの推定を試みる。分析対象とするモデルは、RV 時系列モデルとして ARFIMA モデル (13) 式、ARFIMAX モデル (16) 式、HAR モデル (17) 式、UC モデル (18) 式、MIDAS モデル (30) 式を、GARCH+RV モデルとして GARCH(1,1)+RV モデル (34) 式、GARCH(2,2)+RV モデル (38) 式を取り上げた。なお、MIDAS の推定では 50 日の初期値が必要とされる。ここでは全てのモデルで、 $i = 1, 2, \dots, 50$ の観測値を推定に必要なラグ項の初期値に用い、 $i = 51, 52, \dots, T$ について推定を行っている。

表 2～表 4 には、ARFIMA モデル、ARFIMAX モデル、HAR モデル、UC モデル、GARCH(1,1)+RV モデル、GARCH(2,2)+RV モデルの推定結果を、それぞれ日経平均株価指数、日経平均先物および TOPIX の順にまとめた³⁴。MIDAS モデルの推定結果は、ラグ係数の推定値を図 4 に示した。以下、各モデルの推定結果を順に述べる。まず、ARFIMA モデルでは、いずれのデータセットにおいても d

³³図 2、3 および本稿の全ての図はプログラミングソフトの Ox を用いて作成された。図 2 は、実データのヒストグラムを Ox の平滑化サブルーティンを用いて滑らかな分布関数として示したものである。

³⁴表には各モデルの推定値と推定値の標準誤差、対数尤度 (HAR モデルについては決定係数) がまとめられている。GARCH(2,2)+RV モデルにおいて $\beta_2 = \beta_1$ とすると GARCH(1,1)+RV モデルが導かれるため、この制約を帰無仮説とした尤度比検定に対数尤度を用いることができる。また、ARFIMAX(0, d , 1) モデルにおいて $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$ と制約を課すと ARFIMA(0, d , 1) モデルが導かれるため、両モデルの対数尤度を用いて尤度比検定を行うことができる。なお、この他のモデルの組み合わせでは、尤度を比較することはできない。

が有意にゼロと異なり、 $\ln RV$ が長期記憶性を持つことがわかった³⁵。定常性を検定するために、 $d = 0.5$ を帰無仮説、 $d < 0.5$ を対立仮説として仮説検定を行うと、TOPIX を用いた場合のみ帰無仮説が棄却された。したがって、TOPIX の $\ln RV$ は長期記憶定常過程であり、他のデータセットの $\ln RV$ は長期記憶非定常過程であると判断される。なお、ARFIMA(0, d , 1) モデルと ARFIMA(1, d , 0) モデルを SIC により比較した結果、全てのデータセットにおいて ARFIMA(0, d , 1) モデルが選択された。

次に、ボラティリティ変動の非対称性を考慮して、ARFIMAX(0, d , 1) モデルを推定した。ボラティリティ変動の非対称性を表わすパラメータ条件は $2\mu_1 + \mu_2 < 0$ であり、日経平均株価指数、日経平均先物、TOPIX の $2\mu_1 + \mu_2$ の推定値（およびデルタ法による標準誤差）は、順に、 -6.373 (1.761)、 -4.100 (2.101)、 -5.589 (2.429) であった。 $2\mu_1 + \mu_2 = 0$ を帰無仮説、 $2\mu_1 + \mu_2 < 0$ を対立仮説として仮説検定を行うと、いずれのデータセットにおいても帰無仮説は棄却された。これより、 $\ln RV$ にはボラティリティ変動の非対称性が存在すると考えられる。ARFIMAX モデルで d について検定を行うと、全ての系列が長期記憶非定常過程であるという結果が得られた³⁶。そこで、こうした長期記憶性の発生要因を考察するため、HAR モデルの推定を試みた。同モデルは、RV を複数の周期が異なる短期記憶過程の合成過程として捉え、これが RV の自己相関が長期にわたってゼロになりにくい性質をもたらしていると考えたものである。推定では、すべての係数が有意になっており、日次ボラティリティは過去の日次ボラティリティだけではなく、過去 1 週間や過去 1 ヶ月間の平均値でみたボラティリティにも依存していることがわかった。この結果は、 $\ln RV$ が長期記憶性を持ち得る理由のひとつとして、不均一市場仮説が成立している可能性を示唆している。

同様の発想で複数の OU 過程の合成過程として RV の変動を捉えようとした UC モデルは、直接観察不能な OU 過程をそれぞれ ARMA(1,1) モデルで表現するものであった。すべてのデータセットについて、SIC 規準により $K = 2$ 、すなわち 2 つの OU 過程の合成モデルが選択された。推定の結果、すべてのデータセットにおいて、AR パートのパラメータ ϕ_1 の推定値が 0.9 を超える値をとっている一方、 ϕ_2 の推定値はほぼゼロであった。また、MA パートの係数 θ_1, θ_2 はともに有意な

³⁵有意水準を 5% とした。以下でパラメータの有意性について言及するときはすべて、有意水準を 5% としている。

³⁶ARFIMAX モデルにおいても、 $0 < d < 0.5$ の場合に長期記憶定常過程となる。

値となった³⁷。このように、RV は異なるパラメータを持つ ARMA 過程が合成されたものと解釈することも可能であることがわかった。

図 4 には MIDAS モデルの $b_H(k; \xi_1, \xi_2), k = 1, \dots, 50$ の推定値が示されている。MIDAS モデルは長期記憶性を表わすモデルではないが、ある程度の長い期間にわたるラグ値を説明変数に含めているため、RV の変動を表わすのに適しているとされる。図によると、全ての系列において、係数がゼロとなるのに約 15 日ほどを要しており、日次の $\ln RV$ が過去の長いラグに影響されていることがわかる。

次に GARCH+RV モデルの推定結果を示す。SIC 基準によるモデル選択の結果、(34) 式の $r_i = E_{i-1}[r_i] + \epsilon_i$ は、日経平均株価指数と日経平均先物では $r_i = \mu_r + \epsilon_i$ 、TOPIX では $r_i = \mu_r + \beta_r r_{i-1} + \epsilon_i$ とした³⁸。GARCH(2,2)+RV モデルにおいても同様である。RV_{*i-1*} の係数 γ の推定値は、0.187 (日経平均株価)、0.124 (日経平均先物)、0.321 (TOPIX) であり、 β_1 は 0.822 (日経平均株価)、0.807 (日経平均先物)、0.787 (TOPIX) である。これらの係数は全て有意であるため、 σ_{i-1}^2 のみならず RV_{*i-1*} が σ_i^2 の予測に役立つことがわかる。また、表には記載していないが、RV_{*i-1*} を含めない GARCH(1,1) モデル³⁹の β_1 の推定値はそれぞれ 0.906 (日経平均株価)、0.882 (日経平均先物)、0.880 (TOPIX) であり、全ての系列において、GARCH モデルに RV_{*i-1*} を追加することで β_1 の値が低下している。これらは先行研究と一致する結果であり、ボラティリティ予測における RV の有用性を示唆している。GARCH(2,2)+RV モデルの推定結果によると、(37) 式で RV_{*i-1*} の係数を構成する β_2 と γ は、全ての系列において有意であった。これらのパラメータは、(36) 式で表わされる GARCH(1,1)+RV モデルにおける β_1 と γ に該当する。そこで、GARCH(1,1)+RV モデルの γ および β_1 を、GARCH(2,2)+RV モデルの γ および β_2 の推定値を比較してみたところ、すべての系列においてほぼ同じであった。

GARCH+RV モデルの推定結果は、以下の 2 点にまとめられる。(1) RV_{*i-1*} は σ_i^2 に対して予測力を持つ。(2) α_1 はほぼゼロであることから、例えば GARCH(1,1)+RV モデルは、

$$\sigma_i^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \beta_1} + (1 + \beta_1 L + \beta_1^2 L^2 + \dots) \gamma RV_{i-1} \quad (60)$$

と表現できる (GARCH(2,2)+RV モデルも同様)。これは σ_i^2 が長いラグを持つ RV により表わされることを示しており、RV の長期記憶性と整合的な結果となってい

³⁷TOPIX に限り、 θ_2 がゼロと有意に異ならないという結果を得ている。

³⁸GARCH(1,1)+RV モデルおよび GARCH(2,2)+RV モデルを推定する際には、 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha^*, \beta_2, \gamma$ に非負制約を課した。

³⁹推定モデルは (32) 式で、 $p = 1, q = 1$ としたものである。

る ((36)、(37) 式を参照)。

次に、推定された各モデルの残差を用いて、モデルの診断を行う。例えば、ARFIMA モデル (13) 式の推定においては、 ϵ_i が互いに独立な正規分布に従うことを仮定し、最尤推定法を用いている⁴⁰。推定パラメータに基づいて得られる ϵ_i の推定値 $\hat{\epsilon}_i$ の系列が自己相関を伴わずに正規分布に従うのであれば、モデル推定上の仮定は満たされていることになる。また、ARFIMA モデルの残差を分析することで、lnRV から ARFIMA モデルで表わされる長期記憶性を取り除いた系列が正規分布に従うかどうかを検定することができるため、2.2 節で指摘した、lnRV には系列相関が存在するために JB 検定を行うことが適切ではないという問題に対する、ひとつの対処法になる。ARFIMAX モデル、HAR モデル、UC モデルおよび MIDAS モデルについても、同様に $\hat{\epsilon}_i$ の正規性検定、自己相関検定により、モデルの診断を行うことができる。GARCH+RV モデルでは (34) 式 (あるいは (35) 式) の z_i について正規性を仮定しているため、その推定値 \hat{z}_i の検定を行う。

モデル診断は、残差に 10 次までの自己相関が存在しないことを帰無仮説とした Ljung-Box 検定 (以下、LB 検定、統計量を LB(10) と表わす) と、残差が正規分布に従っていることを帰無仮説とした Jurque-Bera 検定 (以下、JB 検定) を行った⁴¹。これらの検定結果は、表 5 にまとめた。

検定の結果、残差に自己相関が存在するモデルは、日経平均先物あるいは TOPIX を使った場合の HAR モデルのみであった。HAR モデルと同様に短期記憶モデルを組み合わせた UC モデルの残差に自己相関がないと判断されたことに鑑みれば、日次、週次、月次といった HAR モデルの説明変数の周期性の選択がアド・ホックであった可能性も考えられる。

正規性の検定結果によると、すべてのモデルについて、残差が正規分布に従うという帰無仮説が棄却されている。このため、RV あるいは lnRV のモデルを推定する際には、正規分布ではなく他の分布を仮定する必要がある。これは今後の課題とされる。なお、GARCH モデルでは残差が正規分布に従わないという実証研究が多く報告されている⁴²。GARCH モデルでは σ_i^2 の式に攪乱項が含まれないため、 σ_i^2 が柔軟に変動しないことが原因と考えられる。GARCH+RV モデルの残差

⁴⁰詳しくは補論 A を参照。

⁴¹LB 検定の統計量は自由度 10 のカイ 2 乗分布に従う。JB 検定の統計量は自由度 2 のカイ 2 乗分布に従う。lnRV の自己相関がモデルで表現されず、残差に含まれている場合、JB 検定は正規性の帰無仮説を棄却し過ぎるため、自己相関の検定結果の解釈から行うほうが望ましい (2.2 節を参照)。

⁴²詳しくは渡部 (2000) を参照。

が正規分布に従わないのも同様の原因によるものと推察される。

4.3 ボラティリティ予測力のモデル間比較

次に、推定された各モデルについて標本内の1期先予測力を比較する。比較には4つの予測誤差(MSE, HMSE, MAE, HMAE)とMincer-Zarnowitz回帰の決定係数を用いた。

表6の予測誤差からは、以下の点が確認できる。(1) GARCH+RVモデルは、RV時系列モデルと比較して、予測力が明らかに低い。(2) ARFIMA、HAR、UC、MIDASの各モデルの予測誤差には大きな差はない。(3) GARCH(1,1)モデルよりもGARCH+RVモデルの予測力が高く、 RV_{i-1} が σ_i^2 の予測に有益である(ただしTOPIXを用いた推定結果においては、GARCH(1,1)のMSEがGARCH(1,1)+RVあるいはGARCH(2,2)+RVのMSEよりも低かった)。

表7のMincer-Zarnowitz回帰の決定係数 R^2 による予測力比較においても、RV時系列モデルがGARCH+RVモデルよりも全体的に優れていた。もっとも、TOPIXを用いた推定結果では、RV時系列モデルの優位性はさほど明確ではなくなっている。2.4節で述べたように、GARCH+RVモデルで予測されたボラティリティには、RV時系列モデルよりも推定バイアスが多く含まれている可能性があるものの、ボラティリティの変動をよく捉えることができているため、 R^2 で比較したときに、GARCH+RVモデルの順位が高くなったと考えられる。同様の結果がKoopman, Jungbacker and Hol(2005)でも得られている。

以上はモデル別の予測力比較であったが、株価指数別に予測パフォーマンスをみってみる。まず、表6の予測誤差をみると、いずれのモデルにおいても日経平均先物のMSE、MAEが大きく、とりわけMSEにその傾向が顕著である。また、表7の決定係数についても、日経平均先物が最も低い。後述するようにジャンプに関する実証分析では、ジャンプが発生していると判断された日の割合は日経平均先物が突出して高かった。同指数にはこのような不連続な変動がより多く含まれるために、リターンにジャンプを想定しない確率過程に基づくボラティリティ変動モデルの当てはまりが悪くなっていることが考えられる⁴³。なお、各RVの標本標

⁴³HMAEおよびHMAEで評価すると日経平均先物は概ね他と同じ水準になっている。これは予測誤差の計算方法に原因があると考えられる。MSEおよびMAEは、モデルで推定されたボラティリティと RV_i との差を評価しているため、ボラティリティが高い値をとる日にはその差も大きくなりやすく、その影響が予測誤差に大きく現れる。一方、HMSEおよびHMAEはRVに対する比率で評価しているため、仮に差の絶対水準が大きかったとしても強く影響を及ぼすとは限らない。

準偏差をみると、 1.23×10^{-4} (日経平均株価指数)、 4.34×10^{-4} (日経平均先物)、 0.738×10^{-4} (TOPIX) と日経平均先物の RV のばらつきが大きいことが確認できる。

表 7 の F 検定をみると、GARCH+RV モデルや GARCH モデルで推定された TOPIX および日経平均株価指数は、帰無仮説 $\beta_{mz,0} = 0$ かつ $\beta_{mz,1} = 1$ が有意に棄却されている。両指数の Mincer-Zarnowitz 回帰結果の個別項をみると、GARCH+RV モデルでは $\beta_{mz,0} = 0$ は棄却されていないものの、 $\beta_{mz,1}$ が 1 より有意に小さくなっており、このため F 検定の仮説が棄却されたものと考えられる。したがって、TOPIX や日経平均株価指数の GARCH+RV モデルによるボラティリティ推定値には、RV (真のボラティリティの代理変数) に対して下方バイアスが存在していることがわかる (ただし、回帰係数が低いためバイアスの出方は大まかな傾向程度のものである)。これに対し、GARCH モデルでは $\beta_{mz,0}$ が有意に負となる傾向がある一方、 $\beta_{mz,1}$ が TOPIX を除き有意に 1 より大きくなっているため、ボラティリティが小さい (大きい) ときにはバイアスが低め (高め) に出る傾向があると考えられる。

次に、ARFIMA モデルと ARFIMAX モデルの予測力を比較する。ARFIMAX モデルの外生変数には r_{i-1} に 0、1 ダミーを乗じたものを用い、価格が下落したときにボラティリティが増大しやすいという非対称性を考慮している。表 8 と表 9 の予測力の比較結果によると、ARFIMA モデルよりも ARFIMAX モデルの予測力が高い。4.2 節のモデル推定と同様、予測力比較の結果もボラティリティ変動の非対称性を加味したモデル化の必要性を示唆している。

最後に、MIDAS モデルで、RV のラグ値の代わりに RP のラグ値あるいは日次リターン 2 乗のラグ値を用いた場合の予測力を分析する。Ghysels, Santa-Clara and Valkanov(2006) と同様に、被説明変数を $\ln RV_i$ 、説明変数を $\ln RV_{i-50}, \dots, \ln RV_{i-1}$ 、または $\ln RP_{i-50}, \dots, \ln RP_{i-1}$ 、または $\ln(r_{i-50} - \mu)^2, \dots, \ln(r_{i-1} - \mu)^2$ として、3 本のモデルを $i = 51, \dots, T$ について推定し、各モデルの予測力比較を行った。ただし、 μ は r_i の標本平均とする。 $\ln(r_{i-50} - \mu)^2$ は、日次リターンと高頻度データで推定したボラティリティの説明力を比較するために取り上げている。

表 10、11 に予測誤差と Mincer-Zarnowitz 回帰の結果をまとめた。全てのデータセットについて、 $\ln(r_i - \mu)^2$ の予測力はやはり最も低いこと、RP はデータによっては RV 以上の予測力を有していることがわかった。Ghysels, Santa-Clara and Valkanov(2006) も RP の有用性を支持する推定結果を示しており、本稿の分析でも同じことが確認された。

4.4 多変量 RV の推定結果

本節では、3つの変数から2つを取り上げ、多変量 RV モデルを推定した結果を示す。日経平均株価指数と TOPIX の組み合わせをモデル A、日経平均株価指数と日経平均先物の組み合わせをモデル B と呼ぶ。図 5 はモデル A、B の RC である。モデル A では対象銘柄と指数作成方法が異なるが、同一市場の指数であるため、指数の水準のみならず RV でみても両指数の相関は高いと考えられる。実際、モデル A の RC は 1 に近い。もっとも、詳細にみると、2000 年 1 - 3 月期には他の期間と比較して RC の水準が低くなっている。2000 年 4 月には日経平均株価指数の構成銘柄の大幅な入れ替えが行われており、その後の RC が昇しているため、同年の銘柄入れ替えが両指数の変動の類似性を高めたものと考えられる。一方、モデル B の RC はゼロ近くまで低下する日もあり、変動幅もモデル A に比べて格段に大きい。これは、高頻度データでみると現物と先物の価格変動は必ずしも同調的ではないことを示唆している。

4.5 ジャンプモデルの推定結果

表 12 は (50) 式の HAR-RV-J モデルの推定結果である。日経平均株価指数および TOPIX では、 $h = 1, 5$ のとき、ジャンプの係数が負値で有意となっている。これは、Andersen, Bollerslev and Diebold(2005) と同様な結果であり、ボラティリティ変動モデルの設定においては価格変動にジャンプが含まれる可能性を考慮すべきことを示している。一方、日経平均株価指数では、ジャンプの係数は $h = 1, 5, 22$ の全ての場合において有意ではなく、この場合、前出のジャンプを含まないモデル群が適用可能である。

次に (53) 式を用いて、ジャンプ項の有意性を検証する。ここでは上記研究と同様に有意水準を $\alpha = 0.5, 0.95, 0.99, 0.999, 0.9999$ と設定した。表 13 が統計量 $J_{i,\alpha}$ による分析結果である。上記研究と比較すると、本稿の分析ではジャンプが生じる確率が高く推定されている。たとえば $\alpha = 0.95$ としたとき、いずれの株価指数においても、少なくとも約 2 日に 1 日の割合でジャンプが生じている。 $\alpha = 0.9999$ としたとき、ジャンプが生じる割合は、日経平均株価指数、日経平均先物、TOPIX の順に 0.185、0.408、0.251 であり、上記研究のうち S&P500 を推定した場合の 0.054 と比較して、ジャンプが生じる割合が高く推定されている。

次に、ジャンプ系列、およびジャンプ系列からゼロを除いた系列について、自己

相関の検定を行った。ジャンプ系列は、(49)式で定義される J_i を $i = 1$ から T まで並べたものであり、ジャンプが発生した日には J_i が、ジャンプが発生しなかった日には 0 が含まれる系列である。この系列に自己相関が存在すると、いったんジャンプが発生すると翌期にもジャンプが発生しやすいことになる。また、0 を除いた系列に自己相関が存在するのであれば、大きな（小さな）ジャンプが発生すると、大きな（小さな）ジャンプが続いて発生しやすい傾向があることになる。

10 次までの全ての自己相関係数がゼロであることを帰無仮説として、LB 検定を行った。検定の結果を表 13 の LB(10) および LB(10)J>0 の列に示した。前者が 0 を含む J_i 系列に対する、後者が 0 を除いた J_i 系列に対する統計量である。まず、LB(10) 統計量によると、日経平均株価指数および TOPIX については、先行研究と同様にジャンプ系列の自己相関が確認された。次に、LB(10)J>0 統計量の結果をみると、ジャンプ系列からゼロを除いた系列についても自己相関が存在することがわかった⁴⁴。この結果は、サイズの大きい（小さい）ジャンプにはサイズの大きい（小さい）ジャンプが続くことを示唆しており、Andersen, Bollerslev and Diebold(2005)の先行研究と同様の結果となった。したがって、Andersen, Bollerslev and Diebold(2005)が指摘するように、ジャンプの自己相関に対応したモデルへの拡張が今後、求められよう。

ただし、日経平均先物については、ジャンプ系列に自己相関が存在しない。日経平均先物は、日経平均株価指数および TOPIX と比較して、ジャンプが生じる割合が高いことが示されていたことを考慮すると、ジャンプの割合が実際よりも高く推定されている可能性も考えられる。すなわち、ジャンプ系列として分析した対象には、本来ならばジャンプとされないものも含まれていた可能性があり、その結果として、ジャンプ系列の分析結果が他の系列と異なるものになったとも考えられる。

最後に、(54)式のもとでジャンプ拡散過程の RV からジャンプの影響を取り除いた $C_{i,\alpha}$ を求め、これとジャンプ項に起因する変数 J_i に RV を回帰した。上記先行研究と同様に $\alpha = 0.999$ として $J_{i,i+h,\alpha}$ と $C_{i,i+h,\alpha}$ を回帰分析に用いている。表 14 をみると、日経平均株価指数あるいは TOPIX を用いた場合、日次や週次のジャンプ項の係数 β_{JD}, β_{JW} は有意ではないものがほとんどである。しかし β_{JM} は有意であるものが多い。この結果は、1 日や 1 週間という比較的短い直前の期間のジャンプ

⁴⁴このうち日経平均株価指数については、 $\alpha = 0.5$ 、すなわちジャンプの有無の検定を行わないで J_i を定義した場合のみ、Ljung-Box 検定の有意水準を 5% とすると自己相関は存在しないが、有意水準を 10% とすると自己相関が存在するという結果になった。

ンプよりも、過去1ヵ月間の平均的なジャンプの発生状況がRVに対してより強く影響するものと解釈される。

一方、日経平均先物を用いた場合、 β_{JW} や一部の β_{JD} が有意となっている。この様に日経平均株価指数あるいはTOPIXと推定結果が異なる理由としては、日経平均先物についてはジャンプの発生頻度が高く、このため日次平均や週次平均という直近のジャンプの発生がRVに影響していることが考えられる。

5 まとめと今後の研究課題

本稿では、RVモデルのサーベイと本邦の株価指数による実証分析を行った。実証分析によると、RVの統計的性質やモデル推定、予測パフォーマンスのモデル間比較などは、概ね欧米の先行研究と一致するものであったが、ジャンプモデルの実証研究などでは、先行研究と異なる結果が得られた。実証分析の主な結果は以下のとおりである。(1) RVを用いることで、既存のモデルと比較して、より精度の高いボラティリティの予測が可能となる。(2) 本稿の対象データでは、GARCH+RVモデルよりもRV時系列モデルの予測力が高かった。(3) RVの他にRPもボラティリティの予測に有益である。(4) RVには長期記憶性が存在する。(5) ボラティリティの変動には価格の変化方向に関して非対称性が存在している。(6) 株価指数のリターンは裾が厚い分布となっており、その原因として、リターンの変動には非連続的なジャンプが存在している可能性が指摘されたが、そもそも正規分布に基づくブラウン運動では表現できないような変動に従っている可能性も残されている。

最後に、本稿のサーベイおよび実証分析を通して得られた今後の研究課題についてまとめる。(1) RVが長期記憶性を持つことを考慮に入れて、RVあるいはRVにより基準化された日次リターンの正規性の検定を行う。(2) GARCH+RVモデルの予測力は、Mincer-Zernowitz回帰の決定係数ではRV時系列モデルと比較して大きく劣るものではないため、予測値のバイアスを何かしらの方法で修正することができれば、GARCH+RVモデルの予測力が高まる可能性が残されている。(3) RV時系列モデルでは長期記憶性を表わすようにモデルが考案されている一方で、比較対象としたGARCHモデルでは長期記憶性を表わすことができない。ARCH型の長期記憶モデル(たとえばBollerslev and Mikkelsen(1996)が提案したFIEGARCHモデル)を用いた実証分析も重要であろう。(4) ジャンプモデルでは、正規分布で説明されないリターンの大きな変化をジャンプとして捉えることを仮定した。分

析結果によるとジャンプが発生していると判断される日の割合が非常に高かったが、リターンが t 分布などのように裾の厚い分布に従っている可能性もあり、これに対応したモデルによる検証も求められる。(5) 本稿や先行研究ではRV計測を5分間隔のリターンで行っているが、日中リターンの自己相関性に対応するといった計量分析上の理由以外にも、各市場の価格変動の相違やその背景となっている市場参加者、制度等の相違という観点からみても、ボラティリティの適切な計測頻度の選択は興味深い論点である。(6) ARFIMAXの推定結果によると、ボラティリティ変動の非対称性を含めることで、ボラティリティの予測力が高くなる。このようなモデルの拡張は、ARFIMAモデルに限らず、今回、分析対象としたモデルについても行っていく余地がある。

参考文献

- [1] 日本経済新聞、2000年4月18日朝刊
- [2] 矢島 美寛 (2003)、「長期記憶をもつ時系列モデル」、刈谷武昭、矢島美寛、田中勝人、竹内啓著『経済時系列の統計』、第2部、岩波書店
- [3] 山本 拓 (1988)、『経済の時系列分析』、創文社
- [4] 和合 肇編著 (2005)、『ベイズ計量経済分析』、東洋経済新報社
- [5] 渡部 敏明 (2000)、『ボラティリティ変動モデル』、朝倉書店
- [6] 渡部 敏明・佐々木浩二 (2006)、「ARCH型モデルと“Realized Volatility”によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク」、『金融研究』第25巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、10月、34-79頁
- [7] Ait-Sahalia, Y., Mykland, P.A., and Zhang, L. (2005), “How Often to Sample a Continuous-Time Process in the Presence of Market Microstructure Noise,” *Review of Financial Studies*, **18**, 2, 351-416.
- [8] Andersen, T.G., and Bollerslev, T. (1998), “Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts,” *International Economic Review*, **39**, 4, November, 885-905.
- [9] Andersen, T.G., Bollerslev, T., and Diebold, F.X. (2005), “Some Like it Smooth, and Some Like it Rough: Untangling Continuous and Jump Components in Measuring, Modeling and Forecasting Asset Return Volatility,” NBER Summer Institute.
- [10] Andersen, T.G., Bollerslev, T., and Lange, S. (1999), “Forecasting Financial Market Volatility: Sample Frequency Vis-À-Vis Forecast Horizon,” *Journal of Empirical Finance*, **6**, 457-477.
- [11] Andersen, T.G., Bollerslev, T., Diebold, F.X., and Ebens, H. (2001a), “The Distribution of Realized Stock Return Volatility,” *Journal of Financial Economics*, **61**, 43-76.
- [12] Andersen, T.G., Bollerslev, T., Diebold, F.X., and Labys, P. (2001b), “The Distribution of Exchange Rate Volatility,” *Journal of American Statistical Association*, **96**, 42-55.
- [13] Andersen, T.G., Bollerslev, T., Diebold, F.X., and Labys, P. (2003), “Modeling and Forecasting Realized Volatility,” *Econometrica*, **71**, 579-625.
- [14] Bai, J., and Ng, S. (2005), “Tests for Skewness, Kurtosis, and Normality for Time Series Data,” *Journal of Business & Economic Statistics*, **23**, 1, 49-60.
- [15] Bandi, F.M., and Russell, J.R. (2005), “Microstructure Noise, Realized Variance, and Optimal Sampling,” Manuscript.

- [16] Barndorff-Nielsen, O.E., and Shephard, N. (2001), “Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-Based Models and Some of Their Uses in Financial Economics,” *Journal of Royal Statistical Society, B*, **63**, 2, 167-241.
- [17] Barndorff-Nielsen, O.E., and Shephard, N. (2002), “Econometric Analysis of Realized Volatility and Its Use in Estimating Stochastic Volatility Models,” *Journal of Royal Statistical Society, B*, **64**, 2, 253-280.
- [18] Barndorff-Nielsen, O.E., and Shephard, N. (2004a), “Econometric Analysis of Realized Covariation: High Frequency Based Covariance, Regression, and Correlation in Financial Economics,” *Econometrica*, **72**, 885-925.
- [19] Barndorff-Nielsen, O.E., and Shephard, N. (2004b), “Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps,” *Journal of Financial Econometrics*, **2**, 1-48.
- [20] Barndorff-Nielsen, O.E., and Shephard, N. (2006), “Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation,” *Journal of Financial Econometrics*, **4**, 1-30.
- [21] Berg, A., Meyer, R., and Yu, J. (2004), “Deviance Information Criterion for Comparing Stochastic Volatility Models,” *Journal of Business & Economic Statistics*, **22**, 107-20.
- [22] Blair, B.J., Poon, S.-H., and Taylor, S.J. (2001), “Forecasting S&P 100 Volatility: the Incremental Information Content of Implied Volatilities and High-Frequency Index Returns,” *Journal of Econometrics*, **105**, 5-26.
- [23] Bollerslev, T. (1986), “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
- [24] Bollerslev, T., Engle, R.F., and Nelson, D.B. (1994), “ARCH Models,” in *The Handbook of Econometrics*, **4**, 2959-3038, edited by Engle, R. F., and McFadden, D..
- [25] Bollerslev, T., and Mikkelsen, H.O. (1996), “Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility,” *Journal of Econometrics*, **73**, 151-184.
- [26] Bollerslev, T., and Wooldridge, J.M. (1992), “Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances,” *Econometric Reviews*, **11**, 143-172.
- [27] Bos, C.S., Franses, P.H., and Ooms, M. (2002), “Inflation, Forecast Intervals and Long Memory Regression Models,” *International Journal of Forecasting*, **18**, 243-264.
- [28] Chib, S., Nardari, F., and Shephard, N. (2002), “Markov Chain Monte Carlo Methods for Generalized Stochastic Volatility Models,” *Journal of Econometrics*, **108**, 281-316.
- [29] Clark, P.K. (1973), “A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices,” *Econometrica*, **41**, 135-155.

- [30] Corsi, F. (2004), “A Simple Long Memory Model of Realized Volatility,” Manuscript, University of Southern Switzerland.
- [31] Dacorogna, M.M., Müller, U.A., Dav, R.D., Olsen, R.B., and Pictet, O.V. (1998), “Modelling Short-Term Volatility with GARCH and HARMA Models,” in *Nonlinear Modelling of High Frequency Financial Time Series*, 161-176, edited by Dunis, C. and Zhou, B..
- [32] Ding, Z., Granger, C.W.J., and Engle, R.F. (1993), “A Long Memory Property of Stock Market Returns and A New Model,” *Journal of Empirical Finance*, **1**, 83-106.
- [33] Doornik, J.A., and Ooms, M. (2006), “A Package for Estimating, Forecasting and Simulating ARFIMA Models: ARFIMA Package 1.04 for Ox,” Working Paper, Nuffield College, Oxford.
- [34] Engle, R.F. (1982), “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation,” *Econometrica*, **50**, 987-1007.
- [35] Eraker, B. (2004), “Do Stock Prices and Volatility Jump? Reconciling Evidence from Spot and Option Prices,” *Journal of Finance*, **59**, 3, 1367-1403.
- [36] Fama, E.F. (1965), “The Behavior of Stock Market Prices,” *Journal of Business*, **38**, 34-105.
- [37] Fiorentini, G., Sentana, E., and Calzolari, G. (2004), “On the Validity of the Jarque-Bera Normality Test in Conditionally Heteroskedastic Dynamic Regression Models,” *Economics Letters*, **83**, 307-312.
- [38] Ghysels, E., Harvey, A.C., and Renault, E. (1996), “Stochastic Volatility,” in *Statistical Methods in Finance*, 119-191, edited by Maddala, G. S., and Rao, C. R., Elsevier Science.
- [39] Ghysels, E., Santa-Clara, P., and Valkanov, R. (2004), “The MIDAS touch: Mixed Data Sampling Regression,” Discussion Paper, UCLA and UNC.
- [40] Ghysels, E., Santa-Clara, P., and Valkanov, R. (2006), “Predicting Volatility: Getting the Most Out of Return Data Sampled at Different Frequencies,” *Journal of Econometrics*, **131**, 59-95.
- [41] Giot, P., and Laurent, S. (2004), “Modeling Daily Value-at-Risk Using Realized Volatility and ARCH type Models,” *Journal of Empirical Finance*, **11**, 379-398.
- [42] Granger, C.W.J. (1980), “Long Memory Relations and the Aggregation of Dynamic Models,” *Journal of Econometrics*, **14**, 227-238.
- [43] Hansen, P.R., and Lunde, A. (2005), “A Realized Variance for the Whole Day Based on Intermittent High-Frequency Data,” *Journal of Financial Econometrics*, **3**, 525-554.

- [44] Hansen, P.R., and Lunde, A. (2006), “Consistent ranking of volatility models,” *Journal of Econometrics*, **131**, 97-121.
- [45] Harvey, A. C. (1981), *Time Series Models*, Philip Allan. 国友 直人・山本拓訳、『時系列モデル入門』、東京大学出版会
- [46] Jarque, C.M., and Bera, A.K. (1980), “Efficient Tests for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals,” *Economics Letters*, **6**, 255-259.
- [47] Koopman, S.J., Jungbacker, B., and Hol, E. (2005), “Forecasting Daily Variability of the S&P 100 Stock Index Using Historical, Realized and Implied Volatility Measurements,” *Journal of Empirical Finance*, **12**, 445-475.
- [48] Mandelbrot, B. (1963), “The Variation of Certain Speculative Prices,” *Journal of Business*, **36**, 394-419.
- [49] Martens, M. (2001), “Forecasting Daily Exchange Rate Volatility Using Intraday Returns,” *Journal of International Money and Finance*, **20**, 1-23.
- [50] Martens, M. (2002), “Measuring and Forecasting S&P 500 Index-futures Volatility Using High-frequency Data,” *Journal of Futures Markets*, **22**, 6, 497-518.
- [51] Martens, M., and Zein, J. (2004), “Predicting Financial Volatility: High-Frequency Time-Series Forecasts Vis-À-Vis Implied Volatility,” *Journal of Futures Markets*, **24**, 11, 1005-1028.
- [52] Meddahi, N. (2003), “ARMA Representation of Integrated and Realized Variances,” *Econometrics Journal*, **6**, 335-356.
- [53] Müller, U.A., Dacoronga, M.M., Dave, R.D., Olsen, R.B., and Pictet, O.V. (1997), “Volatilities of Different Time Resolution - Analyzing the Dynamics of Market Components,” *Journal of Empirical Finance*, **4**, 213-239.
- [54] Oomen, R.C.A. (2001), “Using High Frequency Stock Market Index Data to Calculate, Model & Forecast Realized Volatility,” manuscript.
- [55] Pagan, A.R., and Schwert, G.W. (1990), “Alternative Models for Conditional Stock Volatility,” *Journal of Econometrics*, **45**, 267-290.
- [56] Sowell, F. (1992), “Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Times Series Models,” *Journal of Econometrics*, **53**, 165-188.
- [57] Thomakos, D.D., and Wang, T. (2003), “Realized Volatility in the Futures Market,” *Journal of Empirical Finance*, **10**, 321-353.
- [58] West, K.D., and Cho, D. (1995), “Predictive Ability of Several Models of Exchange Rate Volatility,” *Journal of Econometrics*, **69**, 367-391.

表 1: 日中リターンの観測頻度と自己相関の除去

論文	データ	間隔	自己相関除去
Blair, Poon and Taylor (2001)	S&P 100	5 分	
Ghysels, Santa-Clara and Valkanov (2006)	ダウ工業株価指数	5 分	
Koopman, Jungbacker and Hol (2005)	S&P 100	5 分	
Martens (2002)	S&P 500 先物	5 分	
Thomakos and Wang (2003)	為替、T-bond、S&P500 先物	5 分	MA(1)
Andersen <i>et al.</i> (2001a)	個別株	5 分	MA(1)
Oomen (2001)	FTSE100	25 分	

注：MA(1) は次数 1 の移動平均モデルによって自己相関が除去されたリターンを用いた分析であることを表わす。

表 2: 日経平均株価指数の推定結果

ARFIMA	d	θ	μ					対数尤度
	0.439	-0.135	-8.826					-586.062
	(0.043)	(0.056)	(0.444)					
ARFIMAX	d	θ	μ_0	μ_1	μ_2			対数尤度
	0.447	-0.165	-8.859	-0.702	-4.969			-577.651
	(0.042)	(0.057)	(0.479)	(1.685)	(2.745)			
HAR	β_0	β_D	β_W	β_M				決定係数
	-1.822	0.227	0.406	0.164				0.322
	(0.390)	(0.045)	(0.081)	(0.071)				
UC	ϕ_1	ϕ_2	θ_1	θ_2^\dagger	σ_u^\dagger	$\sigma_{\eta_1}^\dagger$	$\sigma_{\eta_2}^\dagger$	対数尤度
	0.913	0.000	0.268	1.021	0.644	0.534	0.779	7188.174
	(0.030)	(0.000)	(0.000 [‡])	(0.329)	(0.061)	(0.045)	(0.055)	
GARCH(1,1) +RV	α_0^\dagger	α_1	β_1		γ	μ_r^\dagger		対数尤度
	0.102	0.000	0.822		0.187	-7.970		2545.116
	(0.085)	(0.000)	(0.043)		(0.055)	(4.996)		
GARCH(2,2) +RV	$\alpha^{*,\dagger}$	α_1	β_1	β_2	γ	μ_r^\dagger		対数尤度
	0.032	0.000	0.701	0.817	0.192	-7.875		2545.246
	(0.043)	(0.000)	(0.197)	(0.046)	(0.058)	(5.011)		

注: 肩に † が記載されているパラメータの推定値と標準誤差については、次の通りに定数倍された値を報告している。 $\alpha_0, \alpha^*, \mu_r, \sigma_u$ の推定値と標準誤差は 10^4 倍された値、 $\theta_2, \sigma_{\eta_1}, \sigma_{\eta_2}$ の推定値と標準誤差は 10^2 倍された値である。UC モデルのパラメータ θ_1 の標準誤差は 0.932×10^{-4} である。各モデルの上段が推定値、下段の () 内が標準誤差である。UC モデルについては、推定されたパラメータをモデル解釈上重要となるパラメーター群に計算し直したものを示した。詳細は 2.3 節の UC モデルの説明を参照。GARCH(2,2)+RV モデルにおいて $\beta_2 = \beta_1$ の制約を課すと GARCH(1,1)+RV モデルになるため、これを帰無仮説として尤度比検定を行うことが可能である。また、ARFIMAX(0, d , 1) モデルにおいて $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$ の制約を課すと ARFIMA(0, d , 1) モデルになるため、これを帰無仮説として尤度比検定を行うことが可能である。この他の組み合わせで尤度を比較することはできない。

表 3: 日経平均先物の推定結果

ARFIMA	d	θ	μ					対数尤度
	0.433	-0.214	-8.578					-791.091
	(0.048)	(0.064)	(0.459)					
ARFIMAX	d	θ	μ_0	μ_1	μ_2			対数尤度
	0.446	-0.265	-8.628	1.604	-7.306			-786.981
	(0.046)	(0.064)	(0.519)	(2.078)	(3.363)			
HAR	β_0	β_D	β_W	β_M				決定係数
	-2.623	0.132	0.410	0.158				0.248
	(0.389)	(0.045)	(0.077)	(0.065)				
UC	ϕ_1	ϕ_2	θ_1	θ_2^\dagger	σ_u^\dagger	$\sigma_{\eta^1}^\dagger$	$\sigma_{\eta^2}^\dagger$	対数尤度
	0.911	0.000	0.268	0.013	3.275	0.794	1.513	5878.318
	(0.025)	(0.000)	(0.000 [‡])	(0.004)	(1.265)	(0.183)	(0.295)	
GARCH(1,1) +RV	α_0^\dagger	α_1	β_1		γ	μ_r^\dagger		対数尤度
	0.224	0.000	0.807		0.124	-8.873		2488.250
	(0.124)	(0.000)	(0.046)		(0.050)	(5.299)		
GARCH(2,2) +RV	$\alpha^{*,\dagger}$	α_1	β_1	β_2	γ	μ_r^\dagger		対数尤度
	0.224	0.000	0.000	0.807	0.124	-8.873		2488.250
	(0.126)	(0.000)	(0.000)	(0.046)	(0.050)	(5.300)		

注: 肩に † が記載されているパラメータの推定値と標準誤差については、次の通りに定数倍された値を報告している。 $\alpha_0, \alpha^*, \mu_r, \sigma_u$ の推定値と標準誤差は 10^4 倍された値、 $\theta_2, \sigma_{\eta^1}, \sigma_{\eta^2}$ の推定値と標準誤差は 10^2 倍された値である。UC モデルのパラメータ θ_1 の標準誤差は 0.802×10^{-4} である。各モデルの上段が推定値、下段の () 内が標準誤差である。UC モデルについては、推定されたパラメータをモデル解釈上重要となるパラメーター群に計算し直したものを示した。詳細は 2.3 節の UC モデルの説明を参照。GARCH(2,2)+RV モデルにおいて $\beta_2 = \beta_1$ の制約を課すと GARCH(1,1)+RV モデルになるため、これを帰無仮説として尤度比検定を行うことが可能である。また、ARFIMAX(0, d , 1) モデルにおいて $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$ の制約を課すと ARFIMA(0, d , 1) モデルになるため、これを帰無仮説として尤度比検定を行うことが可能である。この他の組み合わせで尤度を比較することはできない。

表 4: TOPIX の推定結果

ARFIMA	d	θ	μ					対数尤度
	0.410	-0.155	-9.412					-723.742
	(0.046)	(0.058)	(0.349)					
ARFIMAX	d	θ	μ_0	μ_1	μ_2			対数尤度
	0.432	-0.240	-9.496	4.878	-15.344			-714.693
	(0.046)	(0.063)	(0.405)	(2.384)	(3.911)			
HAR	β_0	β_D	β_W	β_M				決定係数
	-2.257	0.188	0.366	0.212				0.255
	(0.411)	(0.045)	(0.081)	(0.076)				
UC	ϕ_1	ϕ_2	θ_1	θ_2^\dagger	σ_u^\dagger	$\sigma_{\eta_1}^\dagger$	$\sigma_{\eta_2}^\dagger$	対数尤度
	0.928	0.000	0.268	7.341	0.298	0.360	0.723	7603.409
	(0.022)	(0.003)	(0.000)	(8.736)	(0.060)	(0.042)	(0.039)	
GARCH(1,1) +RV	α_0^\dagger	α_1	β_1		γ	μ_r^\dagger	β_r	対数尤度
	0.066	0.000	0.787		0.321	-7.374	0.122	2696.027
	(0.053)	(0.000)	(0.043)		(0.079)	(4.237)	(0.032)	
GARCH(2,2) +RV	$\alpha^{*,\dagger}$	α_1	β_1	β_2	γ	μ_r^\dagger	β_r	対数尤度
	0.035	0.000	0.488	0.782	0.328	-7.353	0.123	2696.097
	(0.040)	(0.000)	(0.394)	(0.044)	(0.085)	(4.237)	(0.031)	

注: 肩に \dagger が記載されているパラメータの推定値と標準誤差については、次の通りに定数倍された値を報告している。 $\alpha_0, \alpha^*, \mu_r, \sigma_u$ の推定値と標準誤差は 10^4 倍された値、 $\theta_2, \sigma_{\eta_1}, \sigma_{\eta_2}$ の推定値と標準誤差は 10^2 倍された値である。各モデルの上段が推定値、下段の () 内が標準誤差である。UC モデルについては、推定されたパラメータをモデル解釈上重要となるパラメーター群に計算し直したものを示した。詳細は 2.3 節の UC モデルの説明を参照。GARCH(2,2)+RV モデルにおいて $\beta_2 = \beta_1$ の制約を課すと GARCH(1,1)+RV モデルになるため、これを帰無仮説として尤度比検定を行うことが可能である。また、ARFIMAX(0, d , 1) モデルにおいて $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$ の制約を課すと ARFIMA(0, d , 1) モデルになるため、これを帰無仮説として尤度比検定を行うことが可能である。この他の組み合わせで尤度を比較することはできない。

表 5: 残差系列によるモデル診断

	ARFIMA	ARFIMAX	HAR	UC	MIDAS	GARCH(1,1) +RV	GARCH(2,2) +RV
日経平均株価指数							
LB(10)	8.623	8.064	15.317	3.880	8.496	4.382	4.397
JB	18.843	24.198	12.227	68188	11.407	49.162	49.926
日経平均先物							
LB(10)	12.879	10.174	18.424	9.568	9.520	10.000	10.174
JB	322.260	366.800	329.967	1.258×10^7	308.398	128.717	366.800
TOPIX							
LB(10)	15.361	15.578	25.034	9.546	16.175	9.175	9.235
JB	9.783	10.723	9.652	30260	8.351	18.343	18.120

注: LB(10) は自由度 10 のカイ 2 乗分布に、JB は自由度 2 のカイ 2 乗分布にそれぞれ従う。

表 6: 1 期先予測力の比較結果 (予測誤差)

	HMSE	MSE	HMAE	MAE
日経平均株価指数				
GARCH	1.507	1.713	0.878	1.051
GARCH(1,1)+RV	1.171	1.609	0.777	0.978
GARCH(2,2)+RV	1.169	1.609	0.777	0.978
ARFIMA	0.364	1.099	0.432	0.673
HAR	0.380	1.091	0.438	0.674
UC	0.388	1.077	0.440	0.672
MIDAS	0.380	1.080	0.438	0.673
日経平均先物				
GARCH	1.136	18.479	0.757	1.477
GARCH(1,1)+RV	1.073	18.231	0.722	1.438
GARCH(2,2)+RV	1.073	18.231	0.722	1.438
ARFIMA	0.658	18.113	0.567	1.315
HAR	0.722	18.102	0.582	1.313
UC	0.870	18.177	0.647	1.361
MIDAS	0.690	18.049	0.575	1.308
TOPIX				
GARCH	4.151	1.169	1.516	0.940
GARCH(1,1)+RV	3.577	1.235	1.419	0.932
GARCH(2,2)+RV	3.580	1.237	1.418	0.932
ARFIMA	0.581	0.444	0.542	0.439
HAR	0.597	0.444	0.544	0.436
UC	0.615	0.440	0.551	0.436
MIDAS	0.583	0.441	0.540	0.436

注: MSE は 10^8 倍、MAE は 10^4 倍された値を示した。GARCH は説明変数に RV を含まない GARCH(1,1) モデルを表わす。

表 7: 1 期先予測力の比較結果 (Mincer-Zarnowitz 回帰)

	$\beta_{mz,0} \times 10^4$		$\beta_{mz,1}$		F	R ²
日経平均株価指数						
GARCH	-2.141	(0.255)	1.583	(0.100)	188.055	0.213
GARCH(1,1)+RV	-0.160	(0.112)	0.795	(0.042)	201.481	0.276
GARCH(2,2)+RV	-0.158	(0.112)	0.793	(0.042)	203.741	0.278
ARFIMA	-0.051	(0.104)	1.036	(0.053)	0.344	0.290
HAR	-0.090	(0.104)	1.054	(0.053)	0.552	0.296
UC	0.003	(0.098)	1.000	(0.050)	0.004	0.304
MIDAS	-0.101	(0.103)	1.060	(0.053)	0.698	0.303
日経平均先物						
GARCH	-1.375	(0.520)	1.421	(0.175)	3.626	0.067
GARCH(1,1)+RV	0.077	(0.334)	0.906	(0.105)	1.367	0.075
GARCH(2,2)+RV	0.077	(0.334)	0.906	(0.105)	1.367	0.075
ARFIMA	-0.430	(0.370)	1.238	(0.136)	2.267	0.082
HAR	-0.222	(0.352)	1.141	(0.127)	1.101	0.081
UC	0.001	(0.342)	1.002	(0.116)	0.001	0.075
MIDAS	-0.523	(0.372)	1.262	(0.135)	2.410	0.086
TOPIX						
GARCH	-0.163	(0.088)	0.641	(0.046)	716.699	0.172
GARCH(1,1)+RV	0.093	(0.064)	0.502	(0.033)	829.161	0.201
GARCH(2,2)+RV	0.096	(0.064)	0.500	(0.033)	832.584	0.202
ARFIMA	0.026	(0.069)	0.978	(0.065)	0.073	0.198
HAR	0.010	(0.070)	0.996	(0.066)	0.037	0.197
UC	-0.002	(0.070)	1.003	(0.065)	0.001	0.206
MIDAS	0.010	(0.069)	0.997	(0.065)	0.046	0.203

注: $\beta_{mz,0}$ は 10^4 倍された値を示した。各推定値の () 内の数値は標準誤差である。 R^2 は Mincer-Zarnowitz 回帰の決定係数である。GARCH は、説明変数に RV を含まない GARCH(1,1) モデルを表わす。F は $\beta_{mz,0} = 0, \beta_{mz,1} = 1$ を帰無仮説、そうではないことを対立仮説とした F 検定統計量の値である。有意水準 5% の臨界値は 3.005 である。

表 8: 1 期先予測力の比較結果 (予測誤差、ARFIMAX モデル)

	HMSE	MSE	HMAE	MAE
日経平均株価指数	0.351	1.095	0.425	0.665
日経平均先物	0.635	18.119	0.562	1.305
TOPIX	0.566	0.437	0.533	0.431

注:MSE は 10^8 倍、MAE は 10^4 倍された値を示した。

表 9: 標本内予測力の比較結果 (Mincer-Zarnowitz 回帰、ARFIMAX モデル)

	$\beta_{mz,0} \times 10^4$	$\beta_{mz,1}$	F	R ²
日経平均株価指数	-0.020 (0.101)	1.020 (0.052)	0.205	0.293
日経平均先物	-0.334 (0.362)	1.201 (0.133)	1.905	0.081
TOPIX	0.034 (0.066)	0.971 (0.062)	0.129	0.211

注: $\beta_{mz,0}$ は 10^4 倍された値を示した。各推定値の () 内の数値は標準誤差である。R² は Mincer-Zarnowitz 回帰の決定係数である。GARCH は、説明変数に RV を含まない GARCH(1,1) モデルを表わす。F は $\beta_{mz,0} = 0, \beta_{mz,1} = 1$ を帰無仮説、そうではないことを対立仮説とした F 検定統計量の値である。有意水準 5% の臨界値は 3.005 である。

表 10: MIDAS モデルの予測誤差

	説明変数	HSME	MSE	HMAE	MAE
日経平均株価指数	$\ln RV_i$	0.380	1.080	0.438	0.673
	$\ln RP_i$	0.354	1.056	0.429	0.665
	$\ln(r_i - \mu)^2$	0.588	1.421	0.527	0.772
日経平均先物	$\ln RV_i$	0.690	18.049	0.575	1.308
	$\ln RP_i$	0.608	18.180	0.566	1.316
	$\ln(r_i - \mu)^2$	0.872	19.080	0.661	1.438
TOPIX	$\ln RV_i$	0.583	0.441	0.540	0.436
	$\ln RP_i$	0.537	0.431	0.523	0.426
	$\ln(r_i - \mu)^2$	0.810	0.488	0.614	0.468

注: MSE は 10^8 倍、MAE は 10^4 倍された値を示した。

表 11: MIDAS モデルの予測誤差 (Mincer-Zarnowitz 回帰)

	説明変数	$\beta_{mz,0} \times 10^4$	$\beta_{mz,1}$	F	R ²
日経平均株価指数	$\ln RV$	-0.101 (0.103)	1.060 (0.053)	0.698	0.303
	$\ln RP$	-0.113 (0.100)	1.067 (0.051)	0.915	0.319
	$\ln(r - \mu)^2$	-0.089 (0.216)	1.057 (0.116)	0.200	0.082
日経平均先物	$\ln RV$	-0.523 (0.372)	1.262 (0.135)	2.410	0.086
	$\ln RP$	-0.694 (0.401)	1.334 (0.148)	3.137	0.081
	$\ln(r - \mu)^2$	-0.929 (0.661)	1.430 (0.255)	2.037	0.033
TOPIX	$\ln RV$	0.010 (0.069)	0.997 (0.065)	0.046	0.203
	$\ln RP$	0.018 (0.065)	0.989 (0.061)	0.060	0.222
	$\ln(r - \mu)^2$	-0.111 (0.103)	1.117 (0.099)	0.751	0.120

注: $\beta_{mz,0}$ は 10^4 倍された値を示した。各推定値の () 内の数値は標準誤差である。R² は Mincer-Zarnowitz 回帰の決定係数である。GARCH は、説明変数に RV を含まない GARCH(1,1) モデルを表わす。F は $\beta_{mz,0} = 0, \beta_{mz,1} = 1$ を帰無仮説、そうではないことを対立仮説とした F 検定統計量の値である。有意水準 5% の臨界値は 3.005 である。

表 12: HAR-RV-J モデル推定結果 (lnRV)

	β_0	β_D	β_W	β_M	β_J	決定係数
日経平均株価指数						
h=1	-1.267 (0.396)	0.314 (0.050)	0.380 (0.079)	0.159 (0.067)	-1530.3 (328.4)	0.334
h=5	-2.586 (0.549)	0.191 (0.040)	0.420 (0.092)	0.086 (0.084)	-994.6 (299.6)	0.402
h=22	-6.033 (0.763)	0.111 (0.026)	0.385 (0.093)	-0.198 (0.122)	-388.8 (348.1)	0.225
日経平均先物						
h=1	-2.426 (0.394)	0.154 (0.049)	0.413 (0.077)	0.155 (0.064)	-75.5 (52.4)	0.249
h=5	-3.093 (0.611)	0.099 (0.032)	0.409 (0.082)	0.123 (0.082)	-16.9 (28.4)	0.334
h=22	-5.826 (0.803)	0.079 (0.030)	0.345 (0.088)	-0.129 (0.096)	-16.2 (30.0)	0.175
TOPIX						
h=1	-1.328 (0.421)	0.321 (0.053)	0.337 (0.078)	0.198 (0.074)	-2933.2 (578.3)	0.272
h=5	-2.686 (0.553)	0.176 (0.036)	0.405 (0.081)	0.124 (0.092)	-1703.0 (490.7)	0.367
h=22	-6.054 (0.750)	0.104 (0.032)	0.343 (0.077)	-0.106 (0.142)	-563.0 (638.6)	0.221

注: 上段が推定値、下段の () 内为标准誤差である。

表 13: ジャンプの検定 : J_i 系列の統計量と正規性検定

α	割合	平均	標準偏差	LB(10)	LB(10)J>0
日経平均株価指数					
0.5000	0.837	0.382	0.479	53.61	16.87
0.9500	0.489	0.330	0.498	57.81	43.19
0.9900	0.353	0.276	0.500	56.90	35.76
0.9990	0.253	0.227	0.489	58.71	44.35
0.9999	0.185	0.183	0.469	49.34	22.59
日経平均先物					
0.5000	0.915	1.145	3.972	0.432	7.053
0.9500	0.685	1.107	3.981	0.437	17.46
0.9900	0.582	1.069	3.989	0.442	27.06
0.9990	0.480	1.018	3.998	0.450	16.36
0.9999	0.408	0.971	4.004	0.458	19.55
TOPIX					
0.5000	0.840	0.276	0.362	40.58	50.33
0.9500	0.528	0.251	0.373	42.74	82.41
0.9900	0.414	0.223	0.370	30.39	67.96
0.9990	0.315	0.190	0.366	28.15	51.03
0.9999	0.251	0.164	0.352	29.76	24.47

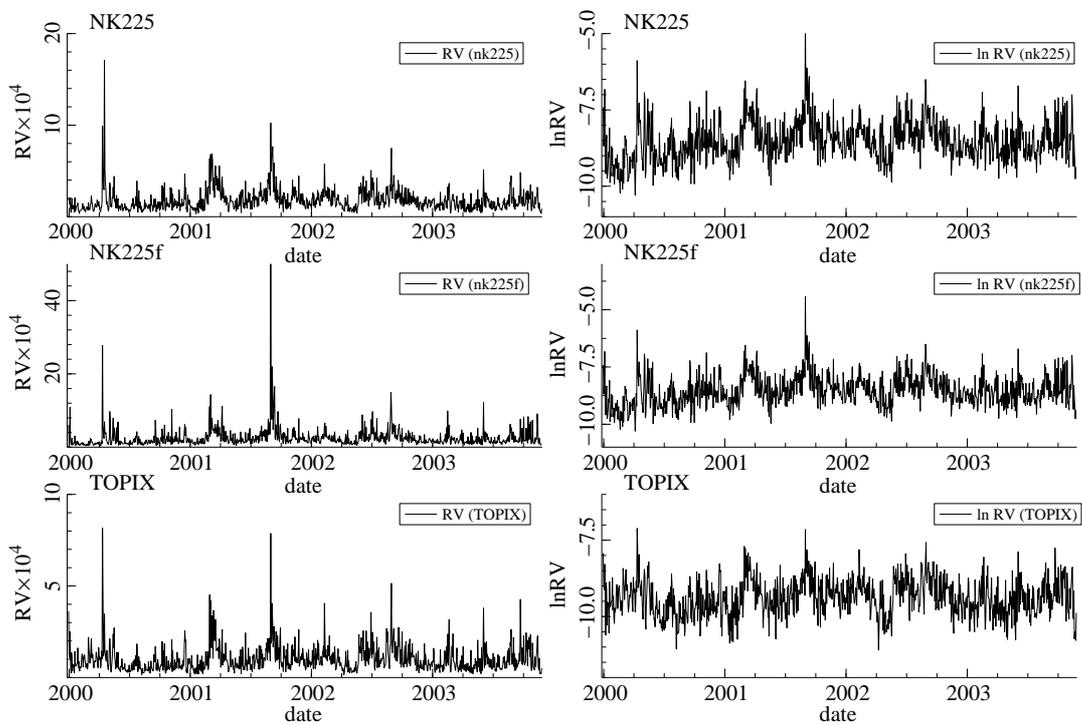
注: 平均と標準偏差はそれぞれ検定統計量を 10^4 倍した値を示す。 α は有意水準、「割合」は日中に有意にジャンプが生じたと判断された日の割合を示す。LB(10) および LB(10)J>0 は、いずれも自由度 10 のカイ 2 乗分布に従う。臨界値は 15.99 (有意水準 10%)、18.31 (同 5%)、23.21 (同 1%) である。

表 14: HAR-RV-CJ モデル推定結果 (lnRV)

	β_0	β_{CD}	β_{CW}	β_{CM}	β_{JD}	β_{JW}	β_{JM}	決定係数
日経平均株価指数								
$h = 1$	-2.696 (0.422)	0.261 (0.043)	0.347 (0.075)	0.088 (0.062)	230.2 (295.4)	414.7 (925.1)	3959.0 (1506.2)	0.338
$h = 5$	-3.956 (0.583)	0.144 (0.032)	0.392 (0.082)	0.011 (0.078)	201.5 (211.8)	260.4 (1049.6)	4604.6 (1650.0)	0.404
$h = 22$	-7.118 (0.722)	0.084 (0.015)	0.338 (0.084)	-0.237 (0.100)	103.0 (91.9)	1427.3 (749.6)	3514.1 (2518.5)	0.243
日経平均先物								
$h = 1$	-2.062 (0.641)	0.211 (0.057)	0.348 (0.099)	0.177 (0.097)	24.2 (35.6)	395.2 (121.8)	115.3 (181.1)	0.270
$h = 5$	-3.204 (0.977)	0.134 (0.035)	0.262 (0.116)	0.199 (0.127)	31.8 (21.7)	494.1 (119.5)	92.1 (152.5)	0.324
$h = 22$	-6.220 (1.345)	0.064 (0.023)	0.326 (0.107)	-0.149 (0.148)	38.1 (10.8)	258.7 (74.0)	33.1 (229.5)	0.160
TOPIX								
$h = 1$	-3.274 (0.442)	0.252 (0.046)	0.313 (0.072)	0.090 (0.065)	365.4 (496.9)	497.5 (1359.3)	6114.8 (1974.9)	0.272
$h = 5$	-4.448 (0.573)	0.126 (0.025)	0.389 (0.074)	0.008 (0.080)	187.8 (267.7)	692.5 (1447.1)	6478.6 (2416.8)	0.366
$h = 22$	-7.377 (0.715)	0.095 (0.014)	0.287 (0.081)	-0.174 (0.118)	203.7 (134.4)	1969.9 (924.1)	4448.8 (3649.7)	0.234

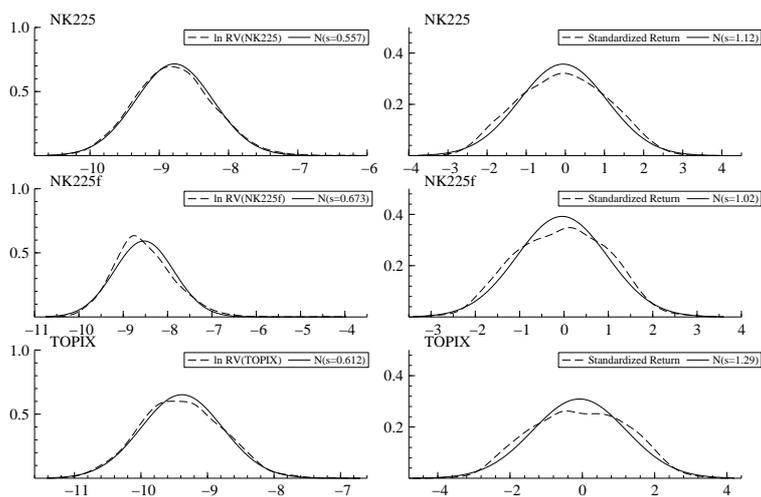
注: 上段が推定値、下段の () 内が標準誤差である。

図 1: RV および lnRV



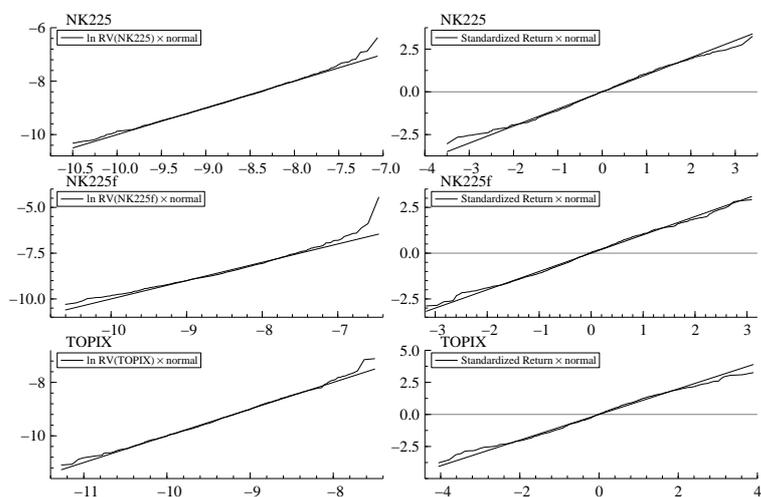
注：上から順に日経平均株価指数、日経平均先物、TOPIX であり、左側が RV、右側が lnRV のグラフである。日経平均先物の 2001 年 9 月 12 日の RV は 0.0119 であるが、グラフ表示上、切断している。

図 2: lnRV および RV で基準化した日次リターンの密度関数



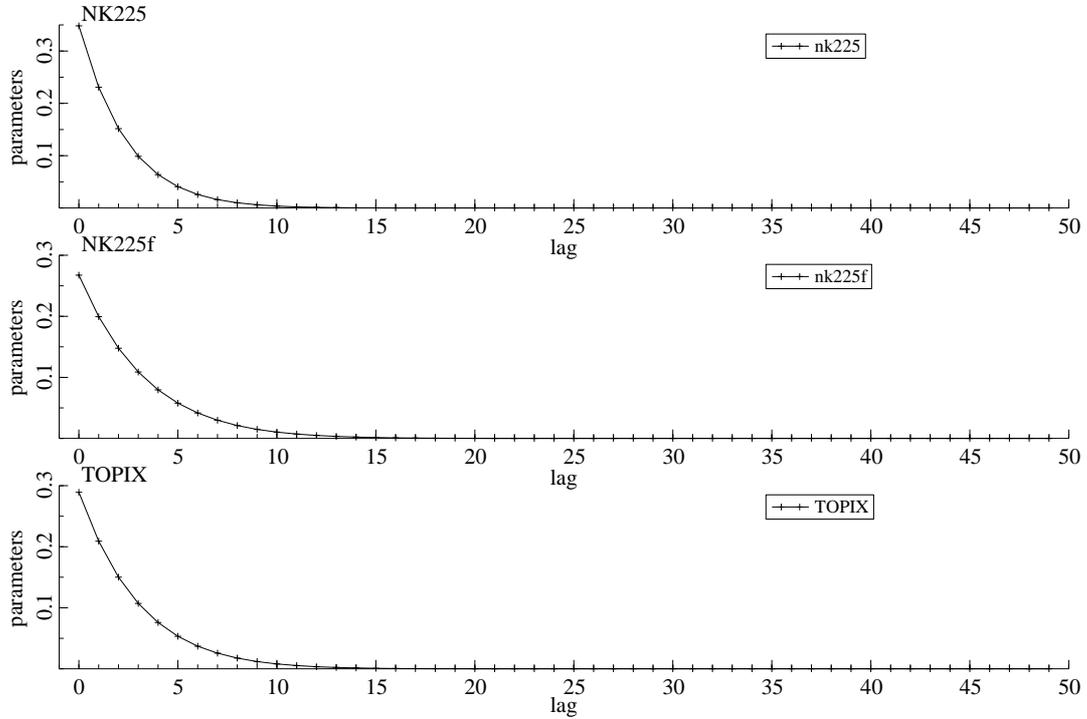
注：上から順に日経平均株価指数、日経平均先物、TOPIX であり、左側が lnRV、右側が RV で基準化した日次リターンである

図 3: lnRV および RV で基準化した日次リターンの QQ プロット



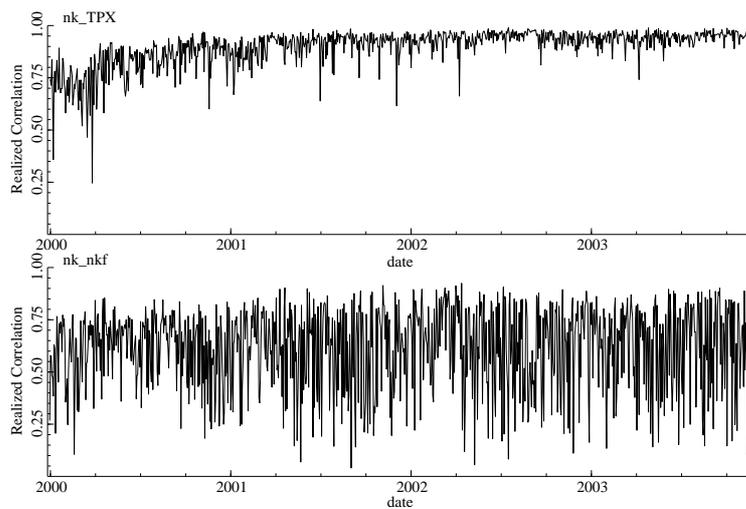
注：上から順に日経平均株価指数、日経平均先物、TOPIX であり、左側が lnRV、右側が RV で基準化した日次リターンである

図 4: MIDAS モデルの係数推定値



注：上段より日経平均株価指数、日経平均先物、TOPIX である。

図 5: Realized Correlation



注：上段は日経平均株価指数と TOPIX、下段は日経平均株価指数と日経平均先物の RC。

補論 A ARFIMA モデル推定法

本稿の ARFIMA モデルおよび ARFIMAX モデルの推定には、以下の最尤推定法を用いた。推定にはプログラミング・ソフト Ox (バージョン 4.00) の ARFIMA パッケージ (バージョン 1.04、Doornik and Ooms(2006)) を用いている。

$\ln RV_i, i = 1, 2, \dots, T$ の ARFIMA(0, d , 1) モデルは

$$(1 - L)^d(\ln RV_i - \mu) = (1 + \theta)\epsilon_t \quad (61)$$

と表わされる。 θ, d, μ はパラメータである。

以下では $\mathbf{y}_T = \{\ln RV_1, \ln RV_2, \dots, \ln RV_T\}'$ として記述する。 $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$ と仮定すると、 $\mathbf{y}_T \sim N(\iota\mu, \Sigma)$ になる。なお、 $\iota = (1, \dots, 1)'$ として T 行のベクトルとする。 Σ は

$$\Sigma = \begin{pmatrix} c(0) & c(1) & c(2) & \dots & c(T-1) \\ c(1) & c(0) & c(1) & \dots & c(T-2) \\ \vdots & & & & \\ c(T-1) & c(T-2) & c(T-3) & \dots & c(0) \end{pmatrix} \quad (62)$$

と表される。

ARFIMA(0, d , 1) モデルを最尤推定するためには、 $c(s), s = 0, 1, \dots, T-1$ が必要とされる。Sowell(1992) によると、

$$c(s) = \sigma_\epsilon^2 \sum_{k=-1}^1 \psi_k \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(d+s-k)}{\Gamma(1-d-s+k)\Gamma(1-d)\Gamma(d)} \quad (63)$$

とすればよい。ただし、 $\psi_{-1} = \theta, \psi_0 = 1 + \theta^2, \psi_1 = \theta$ であり、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数を表わす。

ここで、 $\mathbf{z} = \mathbf{y}_T - \iota\mu$ と表現すると、尤度関数は、

$$L = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \mathbf{z}' \Sigma^{-1} \mathbf{z} \quad (64)$$

で与えられる。さらに、 $\Sigma = R\sigma_\epsilon^2$ を使い、この尤度関数に含まれる μ, σ_ϵ をそれぞれ、 $\hat{\mu} = (\iota' \mathbf{R}^{-1} \iota)^{-1} \iota' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_T, \hat{\sigma}_\epsilon^2 = T^{-1} \mathbf{z}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}$ とすると、尤度関数は、

$$L = -\frac{T}{2} (1 + \ln 2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\mathbf{R}| - \frac{T}{2} \ln [T^{-1} \hat{\mathbf{z}}' \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{z}}]$$

となる。ただし、 $\hat{z} = y - t\hat{\mu}$ である。推定すべきパラメータは θ, d である。プログラミング・ソフト Ox (バージョン 4.00) の ARFIMA パッケージ (バージョン 1.04、Doornik and Ooms(2006)) では、 $d \leq -0.5$ 、 $d > 0.49999$ を除外して、BFGS 法を用いて尤度関数を最大化する。

補論 B UC モデル推定法

以下では $K = 2$ の場合の UC モデルの推定方法を解説する。UC モデルを状態空間モデルとして表わし、カルマン・フィルターを用いた擬似最尤法によりパラメータを推定する。状態空間モデルの推定については Harvey(1981) を参照されたい。

4 行 1 列の状態空間ベクトル α_i を用いて、UC モデルを状態空間モデルとして表現すると、

$$\begin{aligned} RV_i &= \xi + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_i + u_i \\ \alpha_i &= \begin{pmatrix} \phi_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha_{i-1} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_i^1 \\ \eta_i^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (65)$$

となる。ただし、 α_i の第 1、第 3 要素をそれぞれ $\tau_i^1 - w_1\xi$ 、 $\tau_i^2 - (1 - w_1)\xi$ とする。ここで第 2 要素を $\alpha_{i,2}$ とすると、(65) 式より $\tau_i^1 - w_1\xi = \phi_1(\tau_{i-1}^1 - w_1\xi) + \alpha_{i-1,2} + \eta_i^1$ と $\alpha_{i,2} = \theta_1\eta_i^1$ が得られる。1 期ずらした $\alpha_{i-1,2} = \theta_1\eta_{i-1}^1$ を前者の式に代入すると、 $\tau_i^1 - w_1\xi$ の ARMA(1,1) 表現が得られる。第 3 要素についても同様に ARMA(1,1) 表現が得られる。なお、 $\eta_i^1 \sim N(0, \sigma_{\eta^1}^2)$ 、 $\eta_i^2 \sim N(0, \sigma_{\eta^2}^2)$ 、および $u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$ である。

以下では (65) 式を、観測方程式

$$RV_i = \xi + H\alpha_i + u_i, \quad u_i \sim N(0, \sigma_u^2) \quad (66)$$

とし、状態変数の遷移を

$$\alpha_i = G\alpha_{i-1} + R\eta_i, \quad \eta_i \sim N(0, Q), \quad i = 1, 2, \dots, T$$

で表わす。ただし、

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \phi_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix},$$

$$\eta_i = \begin{pmatrix} \eta_i^1 \\ \eta_i^2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \sigma_{\eta^1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\eta^2}^2 \end{pmatrix}$$

である。また、 $\tilde{R}\tilde{V}_{i-1} \equiv \{RV_1, RV_2, \dots, RV_{i-1}\}$ 、 $a_{i|i-1} \equiv E[\alpha_i | \tilde{R}\tilde{V}_{i-1}]$ 、

$P_{i|i-1} \equiv \text{Var}[\alpha_i | \tilde{R}\tilde{V}_{i-1}]$ 、 $a_{i|i} \equiv E[\alpha_i | \tilde{R}\tilde{V}_i]$ 、 $P_{i|i} \equiv \text{Var}[\alpha_i | \tilde{R}\tilde{V}_i]$ とする。尤度関数の計算においては、まず、 $a_{0|0}, P_{0|0}$ を初期値として与え、 $i = 1$ として、予測方程式

$$a_{i|i-1} = Ga_{i-1|i-1}$$

$$P_{i|i-1} = GP_{i-1|i-1}G' + RQR'$$

から $a_{1|0}, P_{1|0}$ を得る。次に、更新方程式

$$a_{i|i} = a_{i|i-1} + P_{i|i-1}H(RV_i - \xi - Ha_{i|i-1})/f_i$$

$$P_{i|i} = P_{i|i-1} - P_{i|i-1}H'HP_{i|i-1}/f_i$$

$$f_i = HP_{i|i-1}H + h \quad (67)$$

から $a_{1|1}, P_{1|1}, f_1$ を得る。これを所与とすると、同様にして、予測方程式から $a_{2|1}, P_{2|1}$ を、更新方程式から $a_{2|2}, P_{2|2}, f_2$ を得ることができる。

この一連の操作を $i = 1, 2, \dots, T$ について繰り返して得られた $a_{i|i-1}, f_i$ を用いると、UC モデルの尤度関数は

$$\ln L = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \left(\ln f_i + (RV_i - \xi - Ha_{i|i-1})^2 / f_i \right) \quad (68)$$

と表わされる。

なお、初期値 $a_{0|0}, P_{0|0}$ は、

$$a_{0|0} = (0, 0, 0, 0)'$$

$$P_{0|0} = \begin{pmatrix} 2\frac{W\omega^2}{\lambda_k^2} (e^{-\lambda_k} - 1 + \lambda_k) & \theta_1\sigma_{\eta^1}^2 & 0 & 0 \\ \theta_1\sigma_{\eta^1}^2 & \theta_1^2\sigma_{\eta^1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{(1-W)\omega^2}{\lambda_k^2} (e^{-\lambda_k} - 1 + \lambda_k) & \theta_2\sigma_{\eta^2}^2 \\ 0 & 0 & \theta_2\sigma_{\eta^2}^2 & \theta_2^2\sigma_{\eta^2}^2 \end{pmatrix}$$

とした。

$\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2, \sigma_u^2, \sigma_{\eta^1}^2, \sigma_{\eta^2}^2$ は、連続時間モデルのパラメータ $\lambda_1, \lambda_2, \xi, \omega, w$ によって与えられる。推定結果の解釈は、前者のパラメータを用いたほうが容易であるため、推定結果の表ではこれらを示した（詳細は2.3節のUCモデルを参照）。なお、表に示した推定値の標準誤差はデルタ法を使って求めている。RVが正規分布に従うかどうかは不明であるため、推定値の標準誤差は Bollerslev and Wooldridge(1992) による擬似最尤法の標準誤差を用いている。