

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

強制転換条項付き優先株式の
2項ツリー法によるプライシング

やまだ たけし
山田 健

Discussion Paper No. 2006-J-17

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい

備考： 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

強制転換条項付き優先株式の2項ツリー法によるプライシング

やまだ たけし
山田 健*

要 旨

本稿では、普通株式への強制転換条項が付された優先株式（強制転換優先株）を対象に、その理論価格を求める（プライシング）ための1つの手法を示す。

強制転換優先株は、一般的には、(1)予め定められた期間後に普通株に強制的に転換され、(2)強制的に普通株に転換されるまでは、保有者に一定の条件で普通株へ転換する権利が付与されている株式である。この意味で、強制転換優先株は、普通株を原資産とするオプションであり、そのオプションは、一定期間内の任意時点で転換可能であることから、アメリカン・オプションに分類される。また、普通株への転換条件は、転換時点までの普通株の価格水準に依存する条件となっており、その点から、強制転換優先株は経路依存性を持つ金融商品である。

経路依存性を持つアメリカン・オプションの価格は、一般的には解析的に求めることができず、必ずしも、確立した評価手法がないのが現状である。また、強制転換優先株の価格評価に当たっては、発行体のデフォルトを考慮する必要もある。

本稿では、発行体のデフォルトをジャンプ過程で表現したうえで、2項ツリー法を用いて、強制転換優先株の価格を算出する数値計算アルゴリズムを具体的に構成する。また、いくつかの数値計算例を基に、強制転換優先株の特性を考察する。

キーワード： 強制転換優先株、経路依存性、アメリカン・オプション、
2項ツリー法、深さ優先探索

JEL classification: G13

* 日本銀行金融研究所（現 金融機構局、E-mail: takeshi.yamada@boj.or.jp）

本稿は、2006年3月に日本銀行で開催された「金融商品の価格付け手法とリスク管理技術の新潮流」をテーマとする研究報告会（FE テクニカル・ミーティング）への提出論文に加筆・修正を施したものである。楠岡成雄教授（東京大学）、長山いづみ助教授（一橋大学）、川合淳志氏（みずほ証券）をはじめ同テクニカル・ミーティング参加者からは、貴重なコメントを多数頂戴した。記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

目 次

1．はじめに	1
2．強制転換優先株の商品性	2
3．強制転換優先株のプライシング手法	3
(1) 本稿で対象とする強制転換優先株の商品性	4
(2) 転換社債のプライシング手法	4
(3) 強制転換優先株のプライシング手法	6
(4) 2項ツリー法による実装	9
4．数値計算例	16
(1) 強制転換優先株の転換価値	17
(2) 当初転換価格決定方式の強制転換優先株の価格への影響	19
(3) 配当が普通株価に依存する場合の強制転換優先株価格への影響	20
(4) 転換価格に上限・下限がある場合の強制転換優先株価格への影響	21
5．おわりに	23
参考文献	25

1. はじめに

本稿では、普通株式への強制転換条項が付された優先株式（強制転換優先株）を対象に、その理論価格（価格）を求める（プライシング）ための1つの数値計算手法を提示する。

強制転換優先株は、近年本邦企業による発行実績がある金融商品であり、一般的には、予め定められた期間後に普通株に強制的に転換され、強制的に普通株に転換されるまでは、強制転換優先株の保有者に一定の条件で普通株へ転換する権利が付与されている株式である。この意味で、強制転換優先株は、普通株を原資産とする派生商品（オプション）である。このオプションは、一定期間内の任意時点での転換権なので、アメリカン・オプションに分類される。この点、単純なアメリカン・オプションであれば、比較的簡単な数値計算手法を用いることでプライシングを行える。しかし、普通株への転換の基準となる価格（転換価格）は、満期までの期間に、予め定められた方法で、普通株の価格水準に応じて変更され得る扱いとなっている。この点、強制転換優先株の価値は、普通株価が辿る経路に依存するため、経路依存性を持つ金融商品である。また、強制転換優先株の発行体（企業）のデフォルトの可能性も考慮する必要がある。したがって、強制転換優先株は単純なアメリカン・オプションではなく、そのプライシングには複雑な数値計算手法を必要とする。

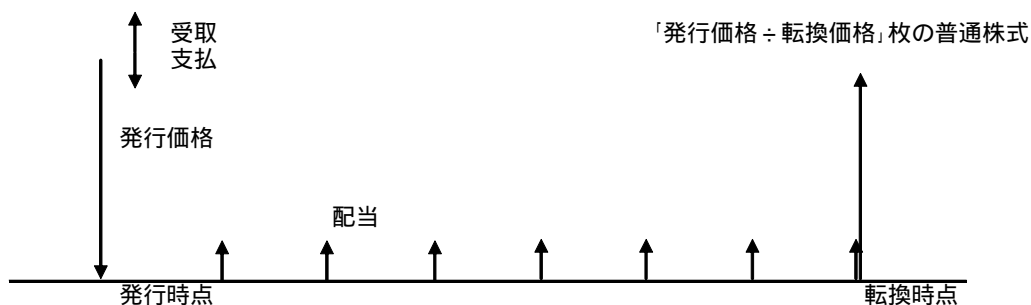
本稿では、こうした問題意識から、発行体のデフォルトをジャンプ過程で表現し、普通株を原資産とする経路依存性を持つアメリカン・オプションとして、強制転換優先株のプライシングを数値計算によって行う方法を示す。経路依存性を持つアメリカン・オプションの評価として、深さ優先探索のアルゴリズムを用いる。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、2節で、強制転換優先株の商品性を説明する。次に、3節では、強制転換優先株のプライシングの考え方を説明したうえで、2項ツリーによるプライシング手法の具体的なアルゴリズムを解説する。4節では、3節の手法を用いたプライシング事例を示し、強制転換優先株の特徴をみる。最後に、5節で、結論を述べる。

2．強制転換優先株の商品性

強制転換優先株とは、一般的には、予め定められた期間後に普通株に強制的に転換され、強制的に普通株に転換されるまでは、保有者に転換する権利が付与されている株式である¹（図1）。強制転換優先株1株は「発行価格÷転換価格」枚の普通株へ転換される。強制転換優先株には、多くの種類があることから、以下ではこれまで発行された強制転換優先株でみられている基本的な商品性に焦点を当てて説明し、その他の細かな商品性は脚注で補足する。

図1：強制転換優先株のペイオフ



強制転換優先株の保有者は、年1回または2回配当を得る。配当は、予め一定額とされている場合と、各配当时点の市場金利（変動金利）に依存する場合がある^{2, 3}。また、強制転換優先株には、普通株とは異なり、議決権が基本的に付与されない⁴。優先株は、普通株に対して優先劣後構造で上位に位置し、配当支払、残余財産の分配で優先的な地位を持つ。

転換価格は、強制的に普通株への転換が行われる時点までの間に、定期的に修正される。まず、最初に設定される転換価格（当初転換価格）は、強制転換優先株の発行時に決められる場合と、強制転換優先株の発行後、普通株への転換が可能となる期間（転換可能期間）の開始時点前の普通株の株価（普通株価）

¹ 強制転換優先株には、主として、上場企業が発行するものと、非上場企業が発行し、上場時に強制的に普通株式へ転換されるものがある。本稿では、この種類の強制転換優先株を対象とする。

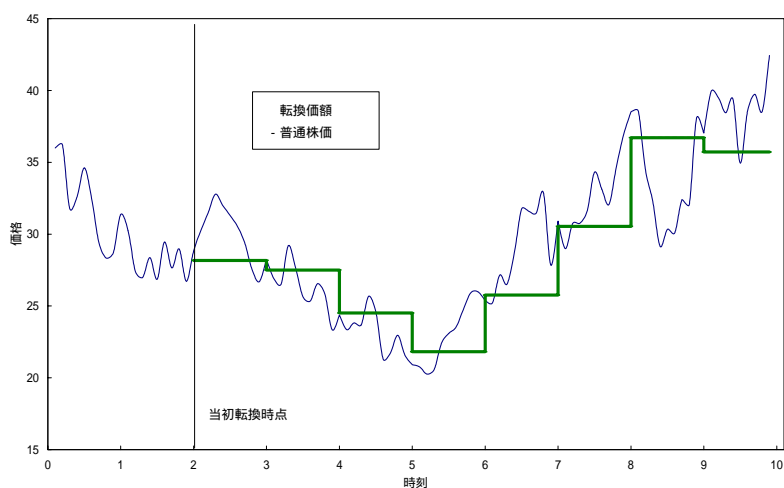
² 配当方法は参加型と非参加型に分類することができる。参加型では、定款で定められた優先配当を得たうえで、配当原資がさらにあれば、普通株と同様に配当を受ける。非参加型では、定款上の優先配当のみを得る。

³ 配当方法を累積型と非累積型に分けることも可能である。累積型では、ある期に定款で定められた優先配当に相当する配当が受けられなくても、次期以降に当該分の配当も得ることができる。非累積型では、各期に受け取る配当はその期の配当のみとなる。

⁴ 無配となったときに議決権が付与される条項を持つ強制転換優先株もある。

の平均値⁵とする場合に大別される。次に、転換可能期間内では、転換価格は定期的に修正される⁶。その修正方法は大きく分けて2つある。1つは、新しい転換価格が修正日前の普通株価の平均値⁷となるものである。このケースでは、転換価格は上方にも下方にも修正され得る（上方・下方修正条項）。もう1つは、修正日の普通株価の平均値⁸がそれまでの転換価格を下回る場合にのみ、普通株価を新しい転換価格とするものである。このケースでは、転換価格は下方にのみ修正される（下方修正条項）。転換可能期間内に転換しない場合、満期時点で強制的に、普通株に一齐転換される⁹。図2は、転換価格が上方・下方に修正され得る強制転換優先株で、普通株価とそれに対応する転換価格のサンプル・パスを示したものである。

図2：転換価格の上方・下方修正条項がある強制転換優先株：普通株価と転換価格



3．強制転換優先株のプライシング手法

本節では、強制転換優先株のプライシング手法を説明する。まず、本稿で対象とする強制転換優先株の商品性を示す。次に、強制転換優先株に類似の商品性を有する転換社債のプライシング手法に関する既存研究を概説する。そのうえで、本稿で用いる強制転換優先株のプライシング手法の考え方と具体的な実

⁵ 通常は、転換可能期間の開始時点前の一定期間（数日から1ヵ月程度）の普通株価（終値）の平均値である。

⁶ 転換価格には、予め上限値と下限値が設定されることがある。

⁷ 修正日前の一定期間（数日から1ヵ月程度）の普通株価（終値）の平均値であることが多い。

⁸ 脚注6と同様。

⁹ 満期時点の転換価格は満期時点前の一定期間の普通株価の平均値とされる場合が多い。

装方法を説明する。

(1) 本稿で対象とする強制転換優先株の商品性

上述のように強制転換優先株には多くの種類があるが、本稿でプライシングの対象とする強制転換優先株は、発行後、普通株への転換可能期間を経て、満期では普通株に強制的に転換されるという基本的な商品性を前提に、そのほか以下の表1の商品性を持つと仮定する¹⁰。

表1：本稿で扱う強制転換優先株の各種商品性

当初転換価格	予め固定、または転換可能期間の開始時点(当初転換時点)前の一定期間の普通株価の平均値(以下、当初平均株価)
転換価格の修正	<ul style="list-style-type: none">・ 上方・下方修正条項付き、または下方修正条項付き・ 修正は、修正日前の一定期間の普通株価の平均値(以下、平均株価)とその時点での転換価格を比較して行われる・ 転換価格に上下限値が付いている場合がある
満期での転換	満期時点前の普通株価の平均値を転換価格として、強制的に普通株に転換
配当	発行価格に対して定率で連続的に支払

(2) 転換社債のプライシング手法

強制転換優先株に類似の性質を持つ金融商品に転換社債がある。転換社債は、企業が発行する社債の一種であり、予め定められた条件(転換条件)に従って同一発行体の普通株に転換することができる権利を具備したものである。典型的な転換条件の形態としては、社債の満期以前に一定の転換可能期間が定められており、この期間内であれば、投資家は、転換社債1枚当たり「転換社債額面÷転換価格」枚の普通株に交換することができる。これまで発行された転換社債には、強制転換優先株で付される転換価格下方修正条項や満期強制転換条項といった、強制転換優先株と類似の条項が付されるケースも存在する。

転換社債のプライシング手法はこれまでいくつか考案されているが、ここでは、その代表例を概説する。

¹⁰ ここでは、簡単化のため、配当形態(参加型・非参加型、累積型・非累積型)は区別しない、強制転換優先株の消却はない、普通株の新規発行・消却はない、議決権の有無は価格に影響しない、普通株の配当は捨象する、とする。

まず、Ingersoll [1977]、Brennan and Schwartz [1977, 1980]等は、いわゆる“構造モデル”の枠組みを用いて、転換社債が企業資産を原資産とするオプションであるとして評価を行った。しかし、構造モデルの枠組みは、原資産である企業資産が市場で取引されていないため、モデルの各種パラメータ推定が困難であること等、実務的には扱いが容易ではないという問題点がある。

一方、Goldman Sachs [1994]では、数値計算手法の1つである2項ツリー法を用いて転換社債の評価を試みている。具体的には、2項ツリーの各ノード上で、1時点後のノードの状態が株式ならば、無リスク金利を、それが債券ならば、無リスク金利に信用スプレッドを加えた金利を、それぞれ使うと考え、ノード間の遷移確率で平均した割引率を用いて、転換社債の価値を算出する。これを評価時点までバックワードに繰り返し行うことで、転換社債の現在価値が得られる。また、Tsiveriotis and Fernandes [1998]では、有限差分法で転換社債を評価している。そこでは、転換社債の価値が社債の価値と株式オプションの価値の和で表されるとして、転換社債の価値と株式オプションの価値を2つの偏微分方程式で定式化したうえで、有限差分法で数値的にこの偏微分方程式を解いている。この際、株式オプションの部分は無リスク金利に基づく割引率で、また社債の部分は無リスク金利に信用スプレッドを加えた割引率で、それぞれ評価している。しかし、Goldman Sachs [1994]や Tsiveriotis and Fernandes [1998]は、普通株のデフォルトの可能性を明示的には勘案していない等の問題を有している。

これに対して、近年では、信用リスクの評価手法の研究の進展に伴い、その手法を応用して転換社債の評価を試みる研究が複数なされている。具体的には、Ayache, Forsyth and Vetzal [2003]、Andersen and Buffum [2003]、Hung and Wang [2002]、Takahashi, Kobayashi and Nakagawa [2001]、Davis and Lischka [1999]等であるが、これらは、信用リスクの評価に誘導モデルを用いている。誘導モデルは、デフォルトを外生的にジャンプ過程で与えるモデルであるが、一般に企業のデフォルト事象を扱ううえで、実務的に使いやすいという利点を有している。

(3) 強制転換優先株のプライシング手法

本稿では、誘導モデル¹¹を用いて、転換社債のプライシングと同様の枠組みにより強制転換優先株のプライシングを行う。以下では、強制転換優先株の発行による普通株の希薄化は無視することができると仮定する¹²。各種記号を以下のように定義する。

$t \in [0, T]$: 0 は発行時点で $T (< \infty)$ は満期、 T_0 : 当初転換時点、 $T_i (i = 1, \dots, n-1)$: 転換価格修正日、 $T_n = T$: 満期、 P : 発行価格、 S_t : 普通株価、 r_t : 無リスク金利、 σ : 普通株価のボラティリティ、 W_t : 標準ブラウン運動、 N_t : ポアソン過程、 λ_t : ポアソン過程の強度(確定的な連続関数)、 D_t : 強制転換優先株の時点 t での優先配当、 Z_t : 転換により得られる価値、 h_t : 転換価格、 Y_t : 強制転換優先株の価値

同値マルチンゲール測度が存在すると仮定し、期待値はリスク中立確率測度の下で計算するとする。普通株価の変動は Andersen and Buffum [2003]、Davis and Lischka [1999]と同様に、(1)式のジャンプ拡散過程で表現されると仮定する¹³。

$$dS_t = (r_t + \lambda_t)S_t dt + \sigma S_t dW_t - S_{t-} dN_t. \quad (1)$$

時点 t までにデフォルトが起きなかったとき S_t は、(2)式で表される。

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t (r_s + \lambda_s) ds - \frac{1}{2} \sigma^2 t + \sigma W_t\right). \quad (2)$$

企業のデフォルトの発生時点は、ポアソン過程 N_t が最初に 1 に到達したとき、つまり(1)式で表される普通株価が 0 になったときとする。デフォルト発生後の普通株価は 0 である。

なお、ポアソン過程の期待値は、(3)式で与えられる。

¹¹ 誘導モデル全般における数学的なセッティングや同値マルチンゲール測度に関する議論は、例えば、Bielecki and Rutkowski [2001]、Jeanblanc and Rutkowski [2003]、Duffie and Singleton [2003]を参照。

¹² 強制転換優先株や転換社債では、転換により発行体から投資家に普通株が発行されるので、普通株の総価値が不変であるとする、普通株の発行量が増えることで 1 株当たりの利益が減少する(希薄化)。この場合、普通株価には希薄化によって下落圧力が生じるため、仮にそれを無視することができないのであれば、希薄化を明示的にモデル化する必要が生じる。

¹³ ボラティリティ (σ) は(1)式で定義される。

$$E[N_t] = \int_0^t \lambda_s ds. \quad (3)$$

以下、時点 T_i の前、 ε 期間における普通株価の平均値を

$$\tilde{S}_{T_i} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{T_i-\varepsilon}^{T_i} S_u du, \quad (4)$$

と表す。当初転換時点の転換価格 h_{T_0} は、(5)式のように、時点 T_0 前の普通株価の平均値 \tilde{S}_{T_0} である場合と、予め固定されている場合がある。

$$h_{T_0} = \begin{cases} \tilde{S}_{T_0} \\ h_{fix} \end{cases}. \quad (5)$$

転換価格は、転換価格の上方・下方修正条項があるときは、

$$h_t = \tilde{S}_{T_i}, \quad t \in [T_i, T_{i+1}), \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (6)$$

であり、下方修正条項のときは、

$$h_t = \begin{cases} \tilde{S}_{T_i} & \tilde{S}_{T_i} \leq h_{T_{i-1}} \\ h_{T_{i-1}} & \tilde{S}_{T_i} > h_{T_{i-1}} \end{cases}, \quad t \in [T_i, T_{i+1}), \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (7)$$

で表現される。

満期では、(8)式のようにその時点前の普通株価の平均値を転換価格として、強制的に普通株に転換される。

$$h_{T_n} = \tilde{S}_{T_n}. \quad (8)$$

このとき、強制転換優先株を普通株に転換した際に得られる価値は、(9)式で表される。

$$Z_t = \frac{PS_t}{h_t}, \quad t \in [T_0, T]. \quad (9)$$

転換により得られる価値(9式)に含まれる h_t は、 t 時点よりも前における普通株価の経路に依存して定まる。よって、強制転換優先株は、経路依存型オプション¹⁴の一種としてとらえることができる。

¹⁴ 経路依存型オプションとは、オプションのペイオフがその変数の最終値のみではなく、変数が辿る経路の関数であるオプションである。

強制転換優先株と、社債や転換社債の商品性の違いの 1 つに、前者は期によって無配当となり得ることがある。社債や転換社債でクーポン支払が行われないことは発行体のデフォルトを意味するが、強制転換優先株では、無配当でもデフォルトにはならない。そこで、本稿では配当の扱いを構造モデルに近い枠組みで考える。具体的には、強制転換優先株の配当は、それまでに普通株への転換が起きておらず、普通株価が予め定められた時点で予め定められた「閾値」を上回っているときにのみ支払われるとする。このとき、配当率を δ とすると、配当の価値は、

$$D_t = 1_{\{S_t > \text{threshold}\}} \delta P, \quad (10)$$

と表わされる¹⁵。配当が市場金利に依存して決められるケースでは、(10)式は市場金利と P の関数となる。

強制転換優先株の転換権を行使するか否かの決定については、保有者が転換したときに受け取るキャッシュ・フローと、転換しなかったときに将来受け取るキャッシュ・フローの期待値とを比較し、前者が大きければ転換権を行使し、そうでなければ転換せずに強制転換優先株として保有し続ける、と考える¹⁶。発行体のデフォルトは普通株価が 0 になったときに起こるとしたが、強制転換優先株は普通株より優先されるので、強制転換優先株はデフォルト時点において普通株価が 0 になった後に、初めて毀損すると考えられる。強制転換優先株における回収の扱いとして、発行価格を無リスク金利で割り引いた値に回収率 ϕ を乗じた額が回収されると仮定する (Jarrow and Turnbull [1995]) とする。以上より、時点 t における強制転換優先株の価値は、 τ を転換時刻、 ξ をデフォルト時刻として定義される停止時刻として、(11)式で表される。

$$Y_t = \sup_{T_0 \leq \tau \leq T} E \left[\left(e^{-\int_t^\tau r_u du} Z_\tau + \int_t^\tau e^{-\int_t^u r_v dv} D_u du \right) 1_{\{\tau < \xi\}} + \left(e^{-\int_t^\tau r_u du} \phi P + \int_t^\xi e^{-\int_t^u r_v dv} D_u du \right) 1_{\{\tau \geq \xi\}} \right]. \quad (11)$$

¹⁵ 1_A は A が満たされたときに 1、そうでないときには 0 となる関数 (定義関数) である。

¹⁶ アメリカン・オプションの評価で用いるスネル包絡線の考え方である (具体的には、例えば、Elliott and Kopp [1999] を参照)。

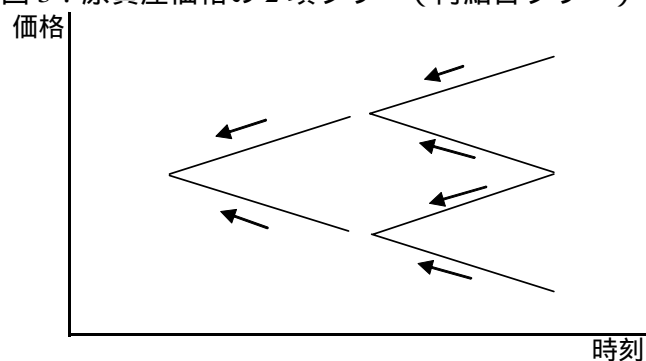
(4) 2項ツリー法による実装

強制転換優先株の価格算出式である(11)式は、一般的には解析的に解けない。このため、ここでは、代表的な数値計算法の1つである2項ツリー法を用いて、強制転換優先株の価格を求める手続きを示す。具体的には、まず、一般的なアメリカン・オプション¹⁷を2項ツリー法で評価する際の考え方を示し、経路依存性を持つアメリカン・オプションを2項ツリー法で評価する場合に「深さ優先探索」のアルゴリズムを用いる方法を説明する。次に、発行体のデフォルト可能性を前提とするときの2項ツリーの作成方法を示す¹⁸。

イ. アメリカン・オプションの評価方法

一般的に、アメリカン・オプションの価格を2項ツリー法により求めるときは、満期時点のオプション価値から、時間軸をさかのぼることで評価を行う。図3は、原資産価格を縦軸に、時間を横軸にとった、再結合する2項ツリー概念図である。印で表示した各ノード上で、オプションを行使しないときの将来のペイオフの期待値、オプションを行使したときのペイオフ、を比較して、ノード上のオプションの価値を決定する (Hull [2002]、Elliott and Kopp [1999])。

図3：原資産価格の2項ツリー（再結合ツリー）



各ノードでのペイオフが、そのノードまでに原資産価格が辿ってきた経路に依存しない場合には、そのノード上で、オプションを行使しなかったときの将来ペイオフの期待値、オプションを行使したときのペイオフのいずれも一意に定まる。一方、各ノードでのペイオフが原資産価格の経路に依存する場合には、

¹⁷ アメリカン・オプションの場合、価格の解析解は求められないため、プライシングでは数値計算法を用いることが一般的である。

¹⁸ デフォルトの可能性を前提とした2項ツリーの作成は、Schönbucher [2002]を参考にした。

一般的に、両者は一意には定まらず、各ノードでとりうる値が複数個存在する。このため、後者の経路依存性を持つアメリカン・オプションの価格を2項ツリー法で求めるときには、その経路依存性に対応するための工夫が必要となる。

一般に、経路依存性を持つ商品の価格を2項ツリーで算出するときには、原資産(ここでは普通株)価格の経路は、再結合しない2項ツリーで表現される。しかし、再結合しない2項ツリーは、再結合する2項ツリーに比べ、ノード数が飛躍的に増大し、格段に多くの計算を必要とするため、実務的には非常に扱いにくいという問題がある¹⁹。

ロ．深さ優先探索による強制転換優先株の評価方法

強制転換優先株では、転換価格は普通株価の経路に依存するため、ペイオフ、期待値とも一意には定まらない。また、強制転換優先株の転換価格修正条項(上方・下方修正条項、下方修正条項)によっても、各ノードで取り得る値の数が異なる。

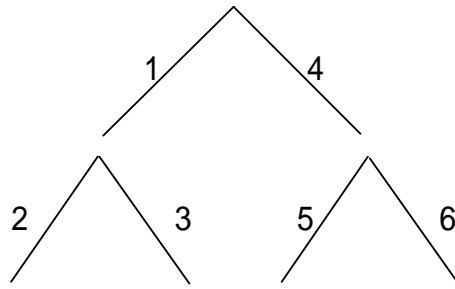
本稿では、経路依存性を持つアメリカン・オプションの一種である強制転換優先株を2項ツリーで評価するに当たり、各ノードで取り得る転換価格の候補が多くなり、問題が複雑になることを避けるため、普通株価の経路を再結合する2項ツリーで表現したうえで、「深さ優先探索」(Depth First Search)と呼ばれるアルゴリズムを用いて、プライシングを行う²⁰。

ここで、深さ優先探索とは、グラフ理論における探索方法の1つである。図4のグラフを例にすると、深さ優先探索では、グラフを上から深い方へ深い方へと下に向かって進み、行き詰まったら上に後戻りして、また深い方へと進みながら、目的物を探索していく(図4の枝に付された数字は、進行の順番である)。

¹⁹ この問題に対して、Hull and White [1993]は、経路依存性を持つ商品であるルック・バック・オプションとアジアン・オプションを対象に、再結合する2項ツリーを用いてプライシングを行う手法を提案している。詳細は、原論文を参照。ただし、同手法をアジアン・オプションのプライシングに適用する際には、同手法が一部に補間を用いているため、数値計算上の誤差の発生の問題を内包している。

²⁰ 深さ優先探索のアルゴリズムは、石畑 [1989]等を参照。

図 4：深さ優先探索



この深さ優先探索を 2 項ツリーによる強制転換優先株のプライシングに応用する。2 項ツリー上での経路例を図 5 に掲げた。

図 5：深さ優先探索による 2 項ツリー上の経路例

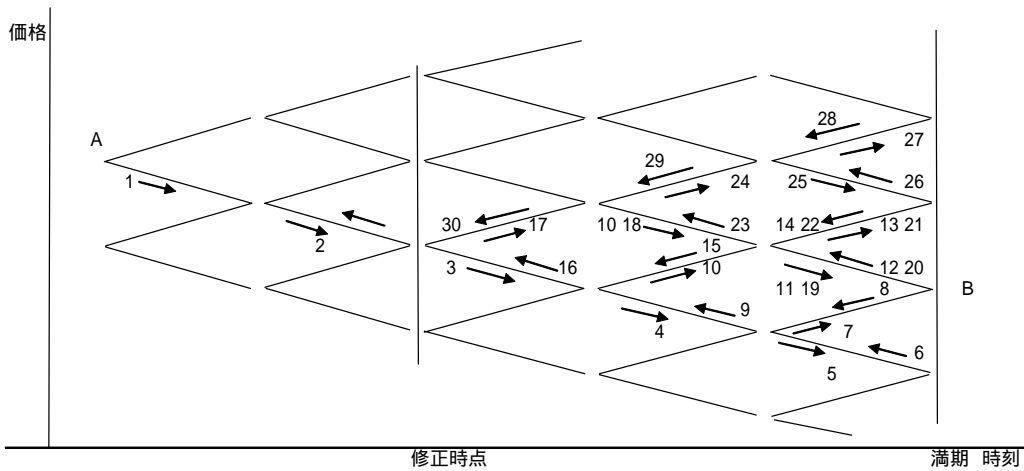


図 5 では、時間を深さの基準としているので、横軸を右に行くほど深くなると考えている（図 5 を時計回りに 90 度回転させるイメージ）。ここでは、理解を容易にするために、2 項ツリーの一部を切り取って図示している。また、本稿の後半で行う数値計算のセッティングに合わせて、普通株価のみが確率変動するとし、無リスク金利、回収率等は定数であるとする²¹。

²¹ 無リスク金利等も確率変数とする場合は、プライシングには多次元の 2 項ツリーが必要となる。

ここでは、まず、上方・下方修正条項付きの強制転換優先株を対象に、満期時点前での転換価格の修正を残り 1 回とするノード A での価値を、深さ優先探索を用いてどのように評価するかを説明する²²、²³。以下では、わかりやすさの観点から、まず、転換価格は、修正時点の普通株価と直前の転換価格の比較によって決まる場合を考えることにする。そのうえで、本稿が対象とする強制転換優先株の商品性にに基づき、転換価格が、平均株価と直前の転換価格の比較によって決まる場合の扱いを説明する。

普通株価がノード A から矢印 1、2 に従って、次のノードの普通株価になったとしよう。このとき、満期時点のノード B を考えると、ノード B に達する経路は 3 通りあることがわかる（矢印 1 2 3 4 7、矢印 1 2 3 10 11、矢印 1 2 17 18 19）。また、ノード B では転換価格の候補を 2 つ持ち、それらは、図 5 の修正時点のノードのうち、下から 2 番目と 3 番目のノードの普通株価に依存して決まることがわかる。ノード B を含め、各ノード上では、それまでに辿ってきた経路に応じて、普通株価や転換価格等の情報を保持しているとする。このとき、ノード B では、普通株価の 3 通りの経路に応じたペイオフを計算することができるので、ノード B から左方向に戻る際にそのペイオフをノード間の推移確率を勘案しながら割り引くことで、ノード A で、ノード B の普通株価が実現したときの強制転換優先株の価値を求めることができる。

深さ優先探索の考え方（図 4 参照）を用いると、ノード A からの進み方は次のようになる。まず、ノード右方の上下に枝分かれしている経路のうち下の経路を進む。この操作を右方に繰り返し（深い方に進み続け）これ以上は右方のノードに進めなくなったら 1 つノードに戻る。そこから今度は、上の経路を右方に進む。具体的には、ノード A から矢印 1 2 …の順番に各ノードを辿る。これによって、上述の、普通株価がノード A から矢印 1 方向に進みノード B に達する 3 通りの経路を、全て辿ることができる（矢印 7、11 および 19 でノード B に達する）。

²² ここでの深さ優先探索を用いる手法は、転換価格の修正が複数回残っている場合にも適用することができる。

²³ 評価時点（現時点）から当初転換時点までは、転換が行われず、経路依存性を持たないので、図 3 の再結合する 2 項ツリーで評価を行うことができる。本稿で深さ優先探索のアルゴリズムを用いるのは、経路依存性が生じる当初転換時点から満期時点までの期間である。

ここまでは上方・下方修正付きの強制転換優先株を対象に考えたが、下方修正条項付きの強制転換優先株も同様に扱うことができる。下方修正条項付きの強制転換優先株の場合、ノード B 上の転換価格の候補は、修正時点の下から 2 番目と 3 番目のノードの普通株価に、それまでに保持していた転換価格が加わる。この点だけが、上方・下方修正付きの強制転換優先株と下方修正条項付きのその違いであり、したがって、後者についても、上述の深さ優先探索のアルゴリズムで評価を行うことが可能である。

このように深さ優先探索のアルゴリズムを用いることで、あるノード上での強制転換優先株の価値の算出が行える。ただし、深さ優先「探索」とはいうものの、上述の例から容易に想像されるように、強制転換優先株の価格算出のためには、基本的に当初転換時点以降の全てのノードを辿るという点で、いわゆる「全探索」を行っていることになる。この全探索の問題点として、2 項ツリーの時間分割数が多くなると、計算回数（各ノードで価格を求める回数）が相当大きくなり得ることがある。具体的には、再結合する 2 項ツリーでの全探索の過程で、各ノード上でその都度価値評価を行うと、2 項ツリー全体での計算回数は、時間分割 n に対し 2^n のオーダーとなる。この 2^n のオーダーの計算回数は、 n が大きくなると、膨大な値になるため、計算負荷が非常に重くなる。

しかし、強制転換優先株の転換価格修正条項の存在に着目すると、計算回数を削減可能であることがわかる。例えば、図 5 の矢印 2 の次のノードを考えてみる。当該ノードで転換価格の修正が行われ、ある転換価格 h となったとする。このとき、満期時点の下から 4 番目までのノードを矢印 30 まで順次辿ることで、当該ノード上での強制転換優先株の価値を得る。この価値を保持しておけば、当該ノードに異なる経路から到達して、転換価格が上記同様に h となったときには、単に、保持していた強制転換優先株の価値を用いればよく、それより先の探索を打ち切ることができる。この事実を用いれば、計算回数を減らすことができる。

転換価格の修正が平均株価（修正日前の一定期間の株価の平均値）を基に行われるときは、通常は、株価の経路に応じて平均株価が異なるため、新たな転換価格となる平均株価の候補は複数存在することになる。基本的には、平均株価ごとに転換価格を再計算し、それに対応する強制転換優先株の価値を計算する。ただし、再計算された転換価格が、既に別の平均株価で再計算したそれと同一であれば、新たに強制転換優先株の価値を計算する必要はない。

また、隣接する 2 つの修正日の間では、転換価格は不変であることに着目すると、各ノード上での強制転換優先株の価値を 1 度だけ計算しておけばよいので、計算回数を減らすことができる。例えば、図 5 で、矢印 18 の次のノード上での強制転換優先株の価値は、矢印 14 まで辿ることで既に求まっており、矢印 19 より先を辿る必要はない。

簡単な例として、2 項ツリー上の全ての時点で転換価格の修正が行われる上方・下方修正条項の付いた強制転換優先株を考えてみよう。このケースでは、各ノードを 1 回辿れば強制転換優先株の価格が求まるので、時間分割数 n に対し、計算回数は n^2 のオーダーとなる²⁴。

これに対して、実際の強制転換優先株では、転換価格の修正は 2 項ツリー上の転換価格修正時点でのみ行われる。また、下方修正条項付きのときには、修正時点で転換価格の修正が必ず行われるわけでない。よって、強制転換優先株を時間分割数 n の 2 項ツリーで評価するときの計算回数は、 n^2 と 2^n の間のオーダーとなることがわかる²⁵。

八．発行体のデフォルト可能性を前提とした 2 項ツリー作成方法

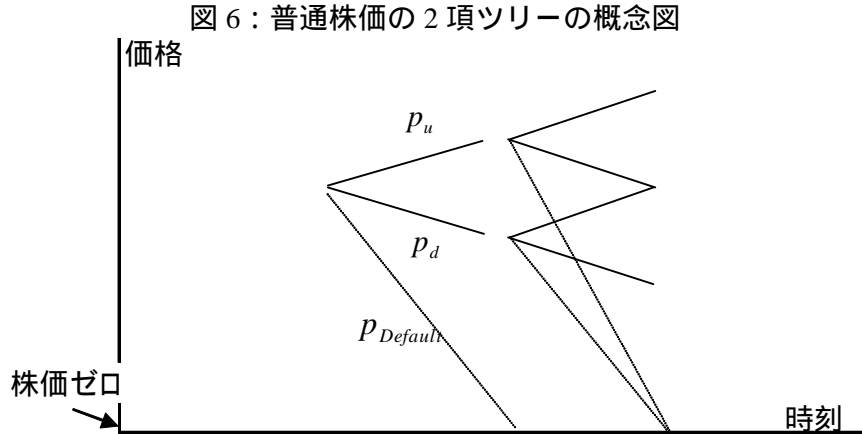
普通株価 S_t が Δt 後に取り得る状態は、株価の上昇 ($S_t \rightarrow uS_t$, $1 < u$)、株価の下落 ($S_t \rightarrow dS_t$, $0 < d < 1$) および デフォルト ($S_t \rightarrow 0$) の 3 つであるとする。生存確率は強度の定義より $e^{-\lambda_t \Delta t}$ で与えられるので、あるパラメータ p ($0 < p < 1$) を用いて、それぞれの状態への遷移確率を(12)式のように定義することができる。なお、確率の定義より、 $p_u + p_d + p_{Default} = 1$ である。

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} uS_t, & \text{確率 } p_u = p \exp(-\lambda_t \Delta t) \\ dS_t, & \text{確率 } p_d = (1-p) \exp(-\lambda_t \Delta t) \\ 0, & \text{確率 } p_{Default} = 1 - \exp(-\lambda_t \Delta t) \end{cases} \quad (12)$$

²⁴ n が大きくなると、 2^n のオーダーの計算量は n^2 のそれに比べて非常に大きくなる。

²⁵ 深さ優先探索のアルゴリズムを用いて経路依存型アメリカン・オプションを評価するときには、計算回数は経路依存性の強さに依存する。例えば、アジアン・オプションのような経路依存性が強い商品では、計算回数のオーダーは 2^n に近くなる。

この関係を 2 項ツリーの概念図で示すと図 6 のようになる。



普通株価の変動過程は、リスク中立確率の下で考えるので、

$$E[S_{t+\Delta t}] = S_t \exp(r_t \Delta t) = u S_t p_u + d S_t p_d + 0 \cdot p_{Default}, \quad (13)$$

であり、(14)、(15)式の関係を得る。

$$\exp((r_t + \lambda_t) \Delta t) = up + d(1 - p), \quad (14)$$

$$p = \frac{\exp((r_t + \lambda_t) \Delta t) - d}{u - d}. \quad (15)$$

ここで、 u, d は $u = 1/d$ とすることで、2 項ツリーを再結合ツリーとし、以下の(16)式で表されると仮定する。

$$\begin{aligned} u &= \exp(\sigma \sqrt{\Delta t}), \\ d &= 1/u. \end{aligned} \quad (16)$$

以上のセッティングで、強制転換優先株の現在価格の算出を満期時点から時間軸を後方に進むことで行う。まず、満期時点 ($t = T$) では転換が必ず行われるので、強制転換優先株の価値 Y_T には、(17)式の関係が成り立つ。

$$Y_T = Z_T + D_T. \quad (17)$$

当初転換時点から満期までの期間 ($T_0 \leq t < T$) の強制転換優先株の価値は、転換した場合に受け取るペイオフ、転換しなかった場合に 1 時点先の価値の期待値を割り引いた値、の大きい方である。強制転換優先株の保有者は、前者が大きければ、普通株に転換し、そうでなければ転換せずに強制転換優先株のまま保有する。したがって、強制転換優先株の価値 Y_t は次の(18)式で表される。

$$Y_t = \max\left(Z_t, \exp(-r_t \Delta t) \left(\exp(-\lambda_t \Delta t) V_{t+1} + (1 - \exp(-\lambda_t \Delta t)) \phi P \exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \right) + D_t \right), \quad (18)$$

$$V_{t+1} = p Y_{t+1}^u + (1 - p) Y_{t+1}^d.$$

ここで、 u と d の添え字は、あるノードから枝分かれしている、それぞれ上側のノードと下側のノードを指している。(18)式は、時点 t で、上述の Y_t より Z_t が大きい場合には、以下の(19)式となる。

$$Y_t = \exp(-r_t \Delta t) \left(\exp(-\lambda_t \Delta t) V_{t+1} + (1 - \exp(-\lambda_t \Delta t)) \phi P \exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \right) + D_t, \quad (19)$$

$$V_{t+1} = p Y_{t+1}^u + (1 - p) Y_{t+1}^d.$$

また、上述の Y_t より Z_t が大きい場合には、(18)式は(20)式となる。

$$Y_t = Z_t. \quad (20)$$

発行時点から転換開始時点の間 ($0 \leq t < T_0$) の強制転換優先株の価値は、転換権が付与されていないため、 T_0 時点の強制転換優先株を評価時点まで割り引いた価値と、 $0 \leq t < T_0$ 期間の配当を評価時点まで割り引いた値との和になる。具体的には、強制転換優先株の価値 Y_t は、以下の(21)式で与えられる。

$$Y_t = \exp(-r_t \Delta t) \left(\exp(-\lambda_t \Delta t) V_{t+1} + (1 - \exp(-\lambda_t \Delta t)) \phi P \exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \right) + D_t, \quad (21)$$

$$V_{t+1} = p Y_{t+1}^u + (1 - p) Y_{t+1}^d.$$

4 . 数値計算例

本節では、上述の各種パラメータに適当な数値を与えて、3節で説明した2項ツリーによって、強制転換優先株の価格算出を行い、その特徴をみていくことにする。ここで扱う強制転換優先株の商品性は、3節(1)で説明したとおりである。

特に指定がない限り、パラメータ等には表2の数値を与える。また、配当が普通株価に依存する場合は(4)で検討し、それ以外では、普通株価に依らず有配であると仮定する。また、断りがなく限り、上方・下方修正条項が付されているとする。無リスク金利、ハザード・レートは定数とし、普通株価のみを確率

変数とする²⁶。なお、本節（１）以降は、普通株価初期値（評価時点＜時点 0＞の株価）を株価初期値と呼ぶ。

表 2：各種パラメータ等の設定

強制転換優先株の発行時点	0（現時点）
強制転換優先株の満期（ T ）	10 年
強制転換優先株の当初転換時点（ T_0 ）	5 年
強制転換優先株の転換価格の修正	1 年毎
強制転換優先株の発行価格（ P ）	100
当初転換価格（ h_{fix} ）	100
普通株価初期値（ S_0 ）	100
普通株価のボラティリティ（ σ ）	0.3
ハザード・レート（ λ ）	0.05
無リスク金利（ r ）	0.03
強制転換優先株の配当率（ δ ）	0.06
デフォルト時の回収率（ ϕ ）	0
時間分割数 ²⁷	600
転換価格計算期間 ²⁸	1/15 年

（１）強制転換優先株の転換価値

ここでは、転換価格の修正が与える、転換時点の強制転換優先株の転換価値への影響を考える。図 7 は、表 2 のパラメータ値を使って、転換価格の修正条項なし、上方・下方修正条項付き、下方修正条項付き、の 3 種類について、当初転換価格を当初平均株価として、満期直前時点での転換価値の確率密度関数を求めたものである。

²⁶ 実際に発行されている強制転換優先株は、一般的に満期までの期間が長いことが少なくないため、プライシングに当たっては、無リスク金利やハザード・レート等の変数を定数とおかない（例えば、確率変数とする）という扱いの方が現実に近いと考えられる。しかし、本稿では、強制転換優先株のプライシング手法の 1 つの考え方を示すことを目的としていること、確率変数の数を増やすと数値計算が複雑化することから、これらの変数を定数とおくことにした。

²⁷ 強制転換優先株の価格算出の所要計算時間は、時間分割数 600 では、最長で約 20 分であった。所要計算時間は、転換価格の修正をそれまでの一定期間の普通株価の平均値によって行う場合のその期間の長さ強く依存している。実際、転換価格の修正をその時点の普通株価で行う場合には、所要計算時間は、全てのケースで 1 分以内となった。

²⁸ 上記の設定では、1 年を 60 に分割し、最後の 4 つの分割期間で平均値を算出している。

図 7：満期直前時点の転換価値の確率密度関数

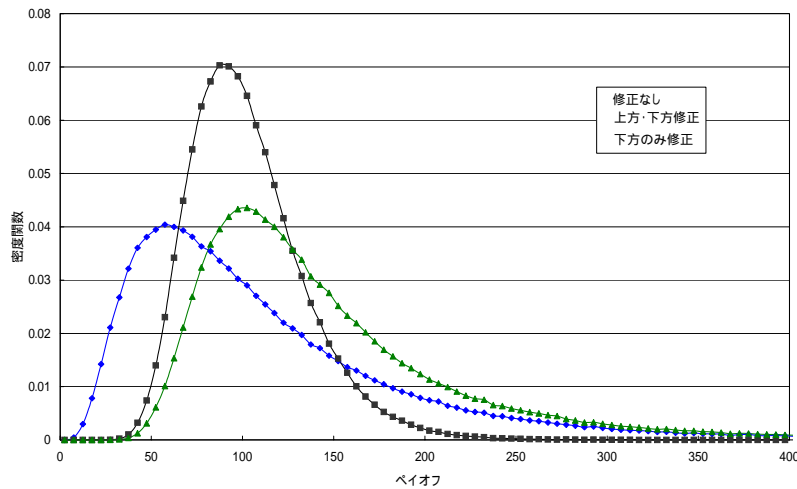


図 7 のような確率密度関数の形状が得られる背景を以下に説明しよう。

まず、上方・下方修正条項が付されている場合には、修正日では、(6)、(8)式より $h_t = \tilde{S}_t$ となる。このため、満期直前の時点で取り得る転換価値は、その時点で保持している転換価格、および 満期時点の 1 つ前の修正日から満期直前までの限られた期間の普通株価の変動にのみ依存する。

一方、下方修正条項が付されている場合あるいは修正条項がない場合には、修正日に、平均株価が転換価格を上回っていると、転換価格の修正は行われなない。このときは、強制転換優先株の転換価値 Z_t は発行価格 P を上回る。したがって、例えば、普通株価が満期まで上昇し続けた結果、平均株価が相対的に高くなり、転換価格の修正が行われなかったとすると、満期直前での転換価値は相当大きくなり得る。このため、下方修正条項が付されているときや修正条項がないときは、上方・下方修正条項が付されているときと比べ、確率密度関数の分散は大きく、右側の裾は厚いのである。

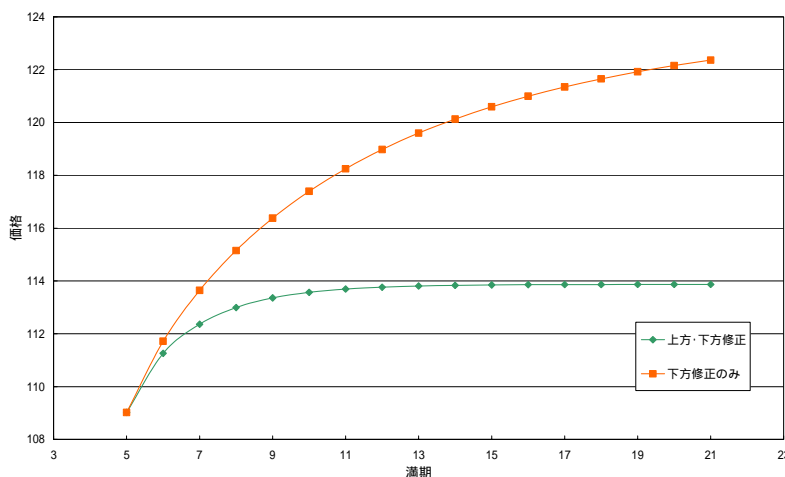
また、下方修正条項がある場合と修正条項がない場合とを比べると、前者の方が、転換価格以下に平均株価が下がっても転換価格が修正される、つまり強制転換優先株の保有者に有利な形でオプションの条件が変更されるので、その分だけ高い転換価値を有する。このため図 7 では、前者の確率密度関数の方が、相対的に右側に偏っている。また、強制転換優先株の価格は、前者の方が高いことになる。

このような転換価格の修正条項の違いが転換価値の確率密度関数あるいは価格に与える影響の違いは、強制転換優先株の満期と転換可能期間が長くなると

顕著になる。この点を、当初転換価格を固定値、配当を0としてみてみよう。

上方・下方修正条項が付されている場合と下方修正条項が付されている場合とを比較すると、満期と転換可能期間が長くなると、後者の方が、転換可能期間内で転換により得られる価値が上昇し得る範囲が広がるので、前者よりも価格は上昇する。この関係を示したものが図8である。

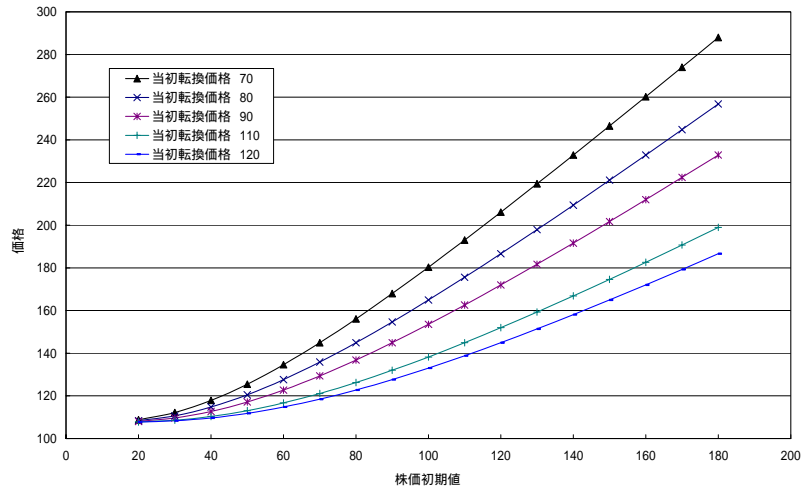
図8：各満期の強制転換優先株の価格（当初転換時点：4年目、配当：0）



(2) 当初転換価格決定方式の強制転換優先株の価格への影響

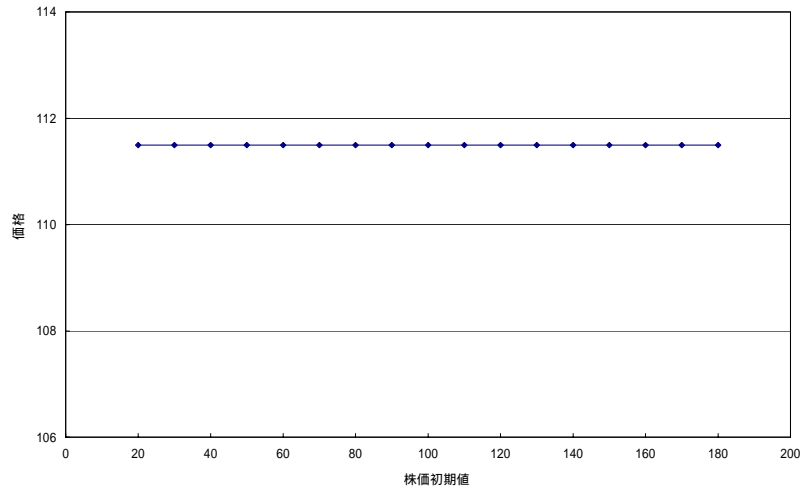
強制転換優先株には、当初転換価格が、予め固定されている場合と、当初平均株価となる場合がある。では、株価初期値が当初転換価格に比べて低いほど転換価値が低いため、強制転換優先株の価格は、当初転換価格の減少関数となる（図9）。これは、当初転換価格が高くなると当初転換時点から1回目の修正日までの間に転換がほとんど発生しないためである。

図 9：当初転換価格が固定値のときの強制転換優先株の価格



一方、では、強制転換優先株の価格は、株価初期値に依らず一定となる（図 10）。

図 10：当初転換価格が当初平均株価のときの強制転換優先株の価格



(3) 配当が普通株価に依存する場合の強制転換優先株価格への影響

次に、(10)式でモデル化した、普通株価が一定の閾値を超えたときにのみ配当が発生する強制転換優先株の価格を考える。上方・下方修正条項付きの強制転換優先株を対象に、数通りの閾値で価格を算出した結果が図 11、12 である。

図 11：当初転換価格が固定値のときの強制転換優先株の価格

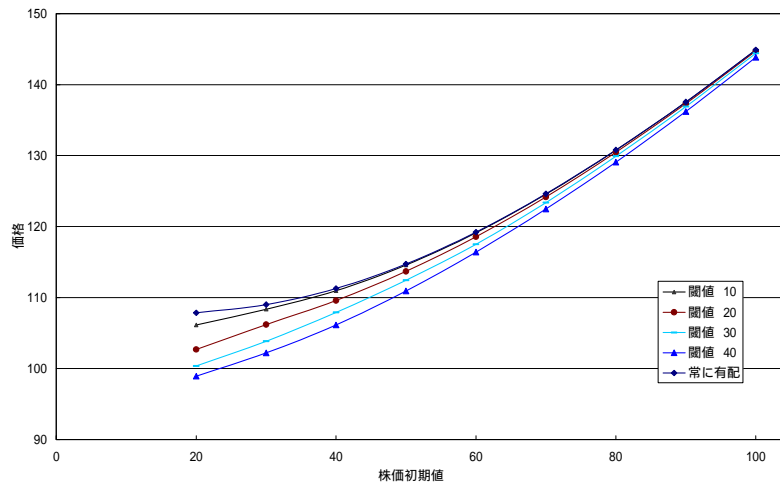


図 12：当初転換価格を当初平均株価とする強制転換優先株の価格

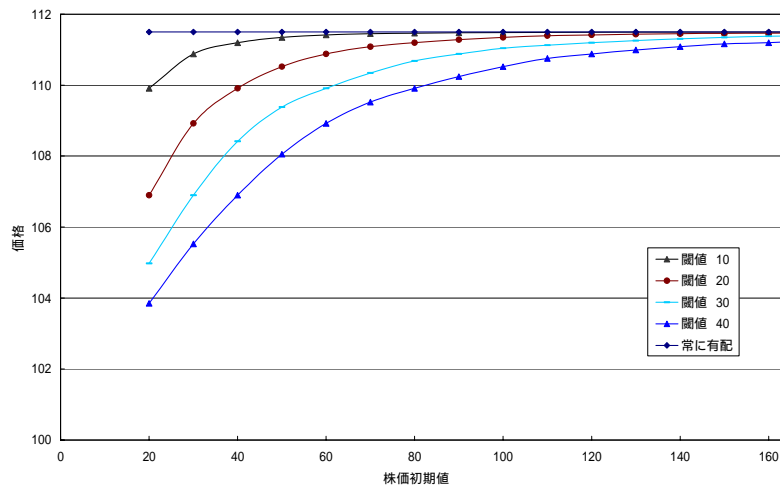


図 11、12 のいずれでも、強制転換優先株の価格は、株価初期値が低く閾値が高いほど、低いこと、株価初期値が高くなると、閾値の水準への依存度合いが低くなること、がみてとれる。

(4) 転換価格に上限・下限がある場合の強制転換優先株価格への影響

転換価格に上限がある強制転換優先株では、平均株価がその上限を上回っても、転換価格は上限値となる。このため、強制転換優先株の価格は、上限が付されていない場合に比べて高くなる。同様に、転換価格に下限がある強制転換優先株では、それが無い場合に比べると、価格は低くなる。

以下では、強制転換優先株について、当初転換額は固定値、配当は定額とし、希薄化を無視することができるかと仮定して、転換価格の上限と下限の存在が、

価格に与える影響をみる。

まず、図 13 に、転換価格に上限のみがある強制転換優先株に関して、上限が当初転換額比で 1、1.1、1.2 倍の 3 ケースにおける価格を上限が付いていないときの価格と合わせて示した。

図 13：転換価格に上限のみがある強制転換優先株の価格

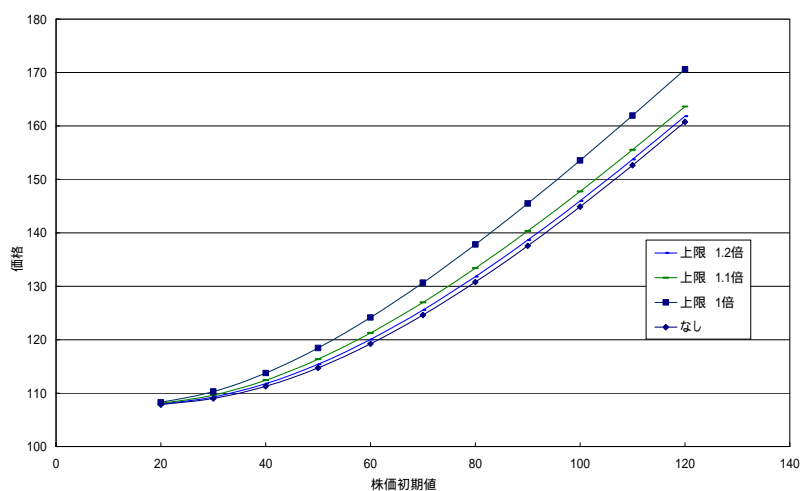


図 13 をみると、 上限値が高いほど、強制転換優先株の価格は低い傾向があること、 の傾向は、株価初期値が高いほど大きいこと、がみてとれる。

次に、図 14 に、転換価格に下限のみがある強制転換優先株に関して、下限が当初転換額比で 0.2、0.4、0.8 倍の 3 ケースにおける価格を下限が付いていないときの価格と合わせて示した。

図 14：転換価格に下限のみがある強制転換優先株の価格

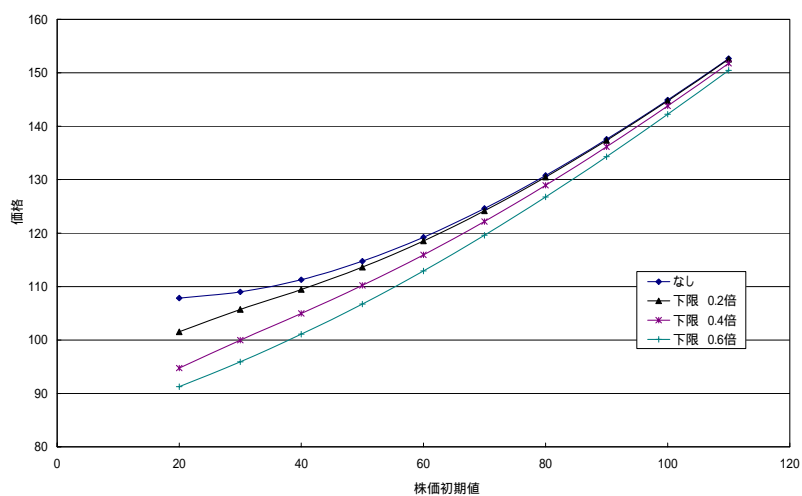


図 14 からは、 下限値が高いほど、強制転換優先株の価格は低い傾向があること、 の傾向は、株価初期値が高いほど小さいこと、がわかる。

5. おわりに

本稿では、普通株への転換権が付いた強制転換優先株について、発行体のデフォルトをジャンプ過程で表現し、普通株を原資産とする経路依存性を持つアメリカン・オプションとして、プライシングを数値計算によって行う方法を示した。具体的には、数値計算法として2項ツリー法を採用し、それに、深さ優先探索のアルゴリズムを応用することで、強制転換優先株のプライシングを行うための手続きを提示した。また、この手法を使って、各種パラメータに値を与えて、強制転換優先株の価格の計算事例をいくつか示した。

本稿が示した強制転換優先株のプライシング手法は、理論価格を求めるためのものである。一般に金融商品の理論価格は、その客観的な商品性から求められるが、実際に市場で取引される価格（取引価格）は、客観的な商品性だけでなく市場の需給といった別の要因で形成される。このため、理論価格と取引価格は常に一致するわけではない。しかし、取引価格を決めるうえで、理論価格は重要な参考情報となる。したがって、強制転換優先株のみならず、金融商品を保有する場合には、自ら理論価格を求めることができるようにしておくことが必須であると考えられる。

本稿では、比較的簡単な商品性を持った強制転換優先株を念頭に、数値分析を行った。しかし、現存する強制転換優先株には、より複雑な商品性を持っているものも存在する。より複雑な商品性を持つ強制転換優先株のプライシングを行うには、商品性にあわせて、本稿で提示した手法を拡張することが必要である。本稿で示したプライシング手法の拡張の方向性としては、次の諸点を挙げる事ができる²⁹。

まず、本稿では、普通株価のみを確率変数とし、その他の無リスク金利やハザード・レート等の変数を定数としたが、強制転換優先株が一般的に満期の長い商品であることを踏まえると、これらを定数としない（例えば、確定的な

²⁹ 近年、経路依存性を持つアメリカン・オプションをモンテカルロ法で評価する手法が提案されている（Longstaff and Schwartz [2001]等）。そこで、Longstaff and Schwartz [2001]の手法（以下、LS法）を、本稿の強制転換優先株の評価に用いてみた。その結果、LS法は、本稿の手法による計算時間と同等の計算時間を要する一方で、LS法で用いられる説明変数や多項式の選択に恣意性が入るほか、安定解を得るためには多くの試行を必要とする等の点で、少なくとも各種の条項を持つ複雑な強制転換優先株の評価に限ってみれば、本稿の手法よりも効率的な手法であるとは必ずしもいえないことが判明した。

関数や確率変数とする) という扱いにすることが課題となる。

次に、本稿では、配当は、普通株価が予め定められた閾値に達した場合に無配となるとした。しかし、実際には、強制転換優先株の配当条項はより複雑であるため、その条項をできるだけ反映したモデル化を検討することも課題となる。

さらに、脚注 12 でも指摘したように、強制転換優先株では、普通株の総価値が不変であるとする、転換により普通株の発行量が増えることで 1 株当たりの利益が減少する(希薄化)。この場合、普通株価には希薄化によって下落圧力が生じるため、仮にそれを無視することができないのであれば、希薄化を明示的にモデル化する必要が生じる。直観的には、希薄化を引き起こし得る将来の投資家行動を明示的に勘案したうえで、普通株価の変動過程を導出することが考えられる。この場合には、数学的に複雑な道具立てを必要とすると思われるが、この点は今後の課題とすることにしたい。

以上

参考文献

- 石畑 清、『アルゴリズムとデータ構造』 岩波講座 ソフトウェア科学 岩波書店、1989年
- 久田祥史、「ジャンプ拡散過程を用いたオプション価格付けモデルについて」、『金融研究』第22巻別冊1号、日本銀行金融研究所、2003年、51～86頁
- Andersen, L and D. Buffum, “Calibration and Implementation of Convertible Bond Models,” *Journal of Computational Finance*, 7(2), Winter, 2003.
- Ayache, E., P. A. Forsyth, and K. R. Vetzal, “The Valuation of Convertible Bonds with Credit Risk,” *Journal of Derivatives*, pp. 9-29, Fall, 2003.
- Bielecki, T. R., and M. Rutkowski, *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*, Springer-Verlag, 2002.
- Brennan, M. J., and E. S. Schwartz, “Analyzing Convertible Bonds,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, 1980, pp. 907-929.
- Brennan, M. J., and E. S. Schwartz, “Convertible bonds: Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion,” *The Journal of Finance*, 32(5), 1977, pp. 1699-1715.
- Davis, M. H. A., and F. Lischka, “Convertible bonds with market risk and credit risk,” Working Paper, Tokyo-Mitsubishi International plc., October, 1999.
- Duffie, D., and K. Singleton, *Credit Risk: Pricing, Measurement, and Management*, Princeton University Press, 2003.
- Elliott, R. J. and P. E. Kopp, *Mathematics of Financial Markets*, Springer-Verlag, 1999.
- Galai, D., and M. Schneller, “Pricing of warrants and the value of the firm,” *The Journal of Finance*, 33(5), 1978, pp. 1333-1342.
- Goldman Sachs, “Valuing convertible bonds as derivatives,” *Quantitative Strategies Research Notes*, Goldman Sachs, New York, November, 1994.
- Hull, J., and A. White, “Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options,” *Journal of Derivatives*, Fall, 1993, pp. 21-31.
- Hull, J., *Options, Futures, and Other Derivatives. 5th edition*, Prentice-Hall, 2002.

- Hung, M.-W., and Jr.-Y. Wang, "Pricing Convertible Bonds subject to Default Risk." *The Journal of Derivatives*, Winter, 2002, pp. 75-87.
- Ingersoll, J. E., Jr. "A Contingent-Claims Valuation of Convertible Securities," *Journal of Financial Economics*, **4**, 1978, pp. 289-322.
- Jarrow, R. A., and S. M. Turnbull "Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk," *The Journal of Finance*, **50**(1), 1995, pp. 53-85.
- Jeanblanc, M. and M. Rutkowski, "Modelling and hedging of default risk. In: *Credit Derivatives: The Definitive Guide*, J. Gregory, editor, Risk Books, London, 2003, pp. 385-416.
- Lauterbach, B., and P. Schultz, "Pricing warrants: An empirical study of the Black-Scholes model and its alternatives," *The Journal of Finance*, **45**(4), 1990, pp. 1181-1209.
- Longstaff, F. A., and E. S. Schwartz, "Valuing American Options by Simulations: A Simple Least-Squares Approach" *Review of Financial Studies*, **14**(1), 2001, pp. 113-147.
- Merton, R., "Option Pricing When Underlying Stock Return Are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, **3**, 1976, pp. 125-144.
- Takahashi, A., T. Kobayashi, and N. Nakagawa, "Pricing Convertible Bonds with Default Risk," *The Journal of Fixed Income*, **11**, December, 2001, pp. 20-29.
- Tsiveriotis, K., and C. Fernandes, "Valuing Convertible Bonds with Credit Risk," *The Journal of Fixed Income*, **8**, September, 1998, pp. 95-102.
- Schönbucher, P., "A Tree Implementation of a Credit Spread Model for Credit Derivatives," *Journal of Computational Finance*, **6**(2), Winter, 2002.