IMES DISCUSSION PAPER SERIES

ARCH型モデルとRealized Volatilityによる
ボラティリティ予測とValue-at-Risk

わたなべとしあき　ささきこうじ
渡部敏明*・佐々木浩二**

Discussion Paper No. 2006-J-13

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

IMES Discussion Paper Series 2006-J-13
2006 年 7 月

ARCH型モデルとRealized Volatilityによるボラティリティ予測とValue-at-Risk

渡部敏明(わたなべとしあき)* ・**佐々木浩二**(ささきこうじ)**

要　　旨

本稿は、日次リターンにさまざまな ARCH 型モデルを当てはめた場合と、日中リターンから計算される Realized Volatility (RV) に長期記憶性と非対称性を考慮した ARFIMAX モデルを当てはめた場合とで、ボラティリティ予測と Value-at-Risk (VaR) のパフォーマンス比較を行ったものである。日経平均の日次リターンと RV を用いて分析を行った結果、RV を真のボラティリティの代理変数としたボラティリティ予測の比較では、RV を ARFIMAX モデルによって定式化した場合が最もパフォーマンスが高いのに対して、VaR による比較では、日次リターンをボラティリティ変動の長期記憶性と非対称性を考慮した FIEGARCH モデルによって定式化した場合が最もパフォーマンスが高いことが明らかになった。また、VaR では、誤差項の分布に、正規分布だけでなく、裾の厚い t 分布や分布に歪みのある skewed-t 分布を用いた分析も行っており、日経平均の日次リターンの分布には有意な歪みがないので、skewed-t 分布を用いるとパフォーマンスが低下することが明らかになっている。

キーワード： ARFIMAX、FIEGARCH、Realized Volatility、Value-at-Risk、Skewed-t
JEL classification: C22、C52、C53、G15

*　一橋大学経済研究所、日本銀行金融研究所（E-mail: watanabe@ier.hit-u.ac.jp）
**　大東文化大学経済学部

本稿は、渡部が日本銀行金融研究所シニアフェロー、佐々木が日本銀行金融研究所リサーチアソシエイトの期間に行った研究をまとめたものである。本稿を作成するに当たっては、日本銀行金融研究所のセミナー参加者、同研究所 FE (Financial Engineering) 班、東京大学の大森裕浩、同大学大学院修士課程の高橋慎、一橋大学大学院博士課程の山口圭子各氏から貴重なコメントを頂いた。ただし、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。本稿では一部、東京都立大学 COE プログラム「金融市場のミクロ構造と制度設計」で購入したデータを用いているが、これは渡部が東京都立大学経済学部非常勤講師であったために利用を許可された。

目 次

1　はじめに 1
2　ARCH 型モデル 4
　2.1　ボラティリティ・クラスタリング 4
　2.2　ボラティリティ変動の非対称性 5
　2.3　ボラティリティ変動の長期記憶性 8
　2.4　誤差項の分布 9
3　Realized Volatility 10
4　データと各モデルの推定結果 12
5　ボラティリティ予測 14
6　Value-at-Risk 17
7　まとめと今後の発展 20
補論 A. GARCH、GJR、EGARCH、APGARCH モデルの推定法 21
補論 B. FIEGARCH モデルの推定法 22
補論 C. RV-ARFIMAX モデルの推定法 23
参考文献 25
表 1: 日経平均日次変化率と RV の基本統計量 31
表 2: ARCH 型モデルの推定結果 32
表 3: RV-ARFIMAX モデルの推定結果 37
表 4: ボラティリティ予測 38
表 5: w_t の分布の推定結果 40
表 6: Value-at-Risk 41

1. はじめに

資産価格変化率もしくは収益率 (以後、リターンと呼ぶ) の 2 次のモーメントを表すボラティリティは、ファイナンスの理論、実務両方で無視できない重要な変数である。ファイナンスの計量分析では、ボラティリティは Black and Scholes [1973] モデルが仮定するように一定ではなく、時間を通じて確率的に変動するとの考えが一般的になっており、その変動を明示的に定式化するさまざまな時系列モデルが提案されてきた。そうしたモデルの代表的なものに、Engle [1982] によって提案された ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) モデルやそれを一般化した Bollerslev [1986] の GARCH (generalized ARCH) モデル、さらにそれらを拡張したモデルがある (本稿ではそうしたモデルを総称して ARCH 型モデルと呼ぶ)[1]。これらのモデルでは、ボラティリティを観測されない潜在変数と考え、リターンデータを使ってモデルのパラメータを推定することにより、ボラティリティの推定値や予測値を計算する。そこで、どのモデルを使うかでボラティリティの推定値や予測値は異なる。

それに対して、モデルに依存しないボラティリティの推定量に Realized Volatility (RV) がある。これは日中の例えば 5 分ごとのリターンの 2 乗を足し合わせたもので、資産価格の日中データが利用可能になるにつれ、注目が集まっている。資産価格の日中データが利用可能で RV を計算することができるなら、まず日次ボラティリティの推定値として RV を計算し、次に計算された RV に何らかの時系列モデルを当てはめることによってボラティリティの予測を行うことができる。このように RV に時系列モデルを当てはめた場合と、従来のように日次リターンを用いて ARCH 型モデルを推定した場合とで、どちらがボラティリティの予測パフォーマンスが高いのかを比較することは、学術的な観点からだけでなく、金融実務においても重要である。そこで、本稿では、日経平均の日次リターンと RV を用いて、日次リターンにさまざまな ARCH 型モデルを当てはめた場合と RV に時系列モデルを当てはめた場合とで、ボラティリティの予測パフォーマンスの比較を行った。

同様の研究はこれまでにも行われており、そこでは RV を用いた方が、ARCH 型モデルを用いるよりも、パフォーマンスが高いとの結果が得られている (Andersen et al. [2003]、Koopman et al. [2005]、Watanabe and Yamaguchi [2005])。しかし、そうした先行研究では、ARCH 型モデルとして GARCH モデルのような簡単なモデルしか用いておらず、GARCH モデルにはその後さまざまな改良が加えられているので、RV を用いた方がパフォーマンスが高いと結論付けるためには、そうした他の ARCH 型モデルも含めた上で比較を行う必要がある。そこで、本稿では、最近の改良された ARCH 型モデルも取り上げて分析を行っている。具体的には、GARCH モ

[1] ARCH 型モデルについて詳しくは、Bollerslev et al. [1994]、渡部 [2000, 2006] を参照のこと。

デルに加えて、Glosten et al. [1993] の GJR モデル、Nelson [1991] の EGARCH (exponential GARCH) モデル、Ding et al. [1993] の APGARCH (asymmetric power GARCH) モデル、Bollerslev and Mikkelsen [1996] の FIEGARCH (fractionally integrated EGARCH) モデルを用いている。株式市場では、価格が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がよりボラティリティが上昇する傾向があることが知られており、GARCH モデルではそうしたボラティリティ変動の非対称性を捉えられないのに対して、GJR、EGARCH、APGARCH、FIEGARCH モデルはすべてそれを捉えることができる。また、GARCH、GJR モデルがリターンの分散の変動を定式化するのに対して、EGARCH、FIEGARCH モデルではその対数値の変動を定式化する。さらに、APGARCH モデルではリターンの標準偏差のべき乗の変動を定式化し、そのべき乗も未知パラメータとして推定する。FIEGARCH モデルは EGARCH モデルをボラティリティが長期記憶過程に従う可能性を考慮して発展させたものである。これに対して、RV は長期記憶過程に従っていることが知られているので、その変動を表すモデルとしてよく用いられるのは、ARFIMA (autoregressive fractionally integrated moving average) モデルである[2]。本稿では、ボラティリティ変動の非対称性を捉えるために、それに前日のリターンを加えた ARFIMAX モデルを用いている。

ボラティリティの予測パフォーマンスを分析する場合、ボラティリティの真の値が必要になる。しかし、ボラティリティの真の値は観測できないので、これまで代理変数としてリターンの 2 乗を用いることが多かった (渡部 [2000] 2.3.3 節参照)。しかし、Andersen and Bollerslev [1998] は、リターンの 2 乗はボラティリティ以外の変動を含んでいるため、それをボラティリティの真の値の代理変数として用いると ARCH 型モデルのボラティリティの予測パフォーマンスを過小評価してしまうことを指摘し、代わりにリターンの 2 乗よりも精度の高いボラティリティの推定量である RV を代理変数として用いることを提案している。また、Hansen and Lunde [2006] は、代理変数にリターンの 2 乗を用いてボラティリティの予測パフォーマンスの比較を行うと、予測パフォーマンスの低いモデルを予測パフォーマンスの高いモデルとして選択してしまう可能性があることを示しており、彼らも RV を代理変数に用いることを提案している。そこで、最近では、日中データが利用可能で RV が計算できる場合には、RV を代理変数としてボラティリティの予測パフォーマンスの比較を行うようになってきており、本稿もそれに従っている。

ただし、RV はあくまでもボラティリティの推定値であり、真のボラティリティではないので、

[2] 長期記憶過程や ARFIMA モデルについて詳しくは、Beran [1994]、Bhardwaj and Swanson [2006]、矢島 [2003] 等を参照のこと。特にボラティリティの長期記憶性については、白石・高山 [1998]、矢島 [2003] 6.6 節を参照のこと。

RV に何らかのバイアスがある場合には、RV を代理変数としたボラティリティ予測の比較が正しい結果を導くとは限らない。そこで、本稿では、ボラティリティ予測だけでなく、Value-at-Risk (VaR) による比較も行っている[3] 。VaR を用いた比較では、各モデルから計算された VaR の値を超えたリターンの比率と VaR の信頼水準とを比較するだけなので、代理変数は必要ない。ただし、VaR では、ボラティリティだけでなく、リターンの分布も重要なので、本稿では、リターンの分布として、標準正規分布だけでなく、裾の厚いスチューデントの t 分布や Fernández and Steel [1998] によって提案された左右に歪みのある skewed-t 分布を用いた分析も行っている。 同様に VaR を使って ARCH 型モデルと RV の時系列モデルとを比較している研究に、Giot and Laurent [2004] があり、そこでは、リターンの分布に skewed-t 分布を用いると、日次リターンに APGARCH モデルを当てはめた場合と RV に ARFIMAX モデルを当てはめた場合とで同等のパフォーマンスが得られている。しかし、そこで用いられている ARCH 型モデルは APGARCH モデルだけなので、上記のような他の ARCH 型モデルを用いた場合の VaR のパフォーマンスがどうなるかは興味深い。

日経平均の日次リターンと RV を用いて分析を行った結果、RV を真のボラティリティの代理変数としたボラティリティ予測の比較では、先行研究同様、RV に ARFIMAX モデルを当てはめた場合が最もパフォーマンスが高いのに対して、VaR の比較では、日次リターンにボラティリティ変動の非対称性と長期記憶性の両方を考慮した FIEGARCH モデルを当てはめた場合が最もパフォーマンスが高いことが明らかになった。VaR において FIEGARCH モデルのパフォーマンスが高いことを示したのは、本稿が初めてである。また、日経平均の日次リターンは分布の歪みの有意性が高くないため[4]、skewed-t 分布を用いると VaR のパフォーマンスが却って低下することも明らかになった。

本稿の以下の構成は次のようになっている。まず、次の第 2 節で、本稿で用いる ARCH 型モデルについて解説を行う。続く第 3 節で、RV およびその変動を表す ARFIMAX モデルについて説明する。第 4 節で、データについて説明した後、各モデルの推定結果について説明する。第 5、6 節では、それぞれ、ボラティリティの予測パフォーマンスと VaR のパフォーマンスに関して比較を行う。最後に第 7 節で、本稿の結果をまとめるとともに今後の課題について述べる。

[3]真のボラティリティを必要としない比較の方法として、他にオプション価格による比較が考えられるが、その場合、危険中立測度をどう定義するかという問題が生じる。投資家の危険中立性を仮定した上で、オプション価格を用いて、RV と ARCH 型モデルの比較を行っているものに、Ubukata and Watanabe [2005] がある。

[4]具体的には、分布の歪みは有意水準 5%では有意であるが、1%では有意でない。詳しくは、第 4 節を参照のこと。

2.　ARCH 型モデル

2.1.　ボラティリティ・クラスタリング

本節では、本稿で分析に用いる ARCH 型モデルについて簡単に説明を行う。以下、ある資産の t 期のリターン R_t を、次のように、$t-1$ 期に予測可能な変動 $E\left(R_t | \boldsymbol{I}_{t-1}\right)$ と予測不可能な変動 ϵ_t に分割する。

$$R_t = E\left(R_t | \boldsymbol{I}_{t-1}\right) + \epsilon_t \tag{1}$$

ここで、$\boldsymbol{I}_{t-1}$ は $t-1$ 期に利用可能な情報集合を表す。ボラティリティ変動モデルでは、この予測不可能な変動 ϵ_t を、正の値をとる σ_t と期待値 0、分散 1 で過去と独立かつ同一な分布に従う (independently and identically distributed; i.i.d.) 確率変数 z_t との積として表す。

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t,\ \sigma_t > 0,\ z_t \sim \text{i.i.d.},\ E(z_t) = 0,\ Var(z_t) = 1 \tag{2}$$

この σ_t もしくは σ_t^2 をボラティリティと呼び、ボラティリティ変動モデルでは、その変動を明示的に定式化する。ファイナンス理論では σ_t をボラティリティと呼ぶことが多いが、本稿では以下 σ_t^2 のことをボラティリティと呼ぶ。

代表的なボラティリティ変動モデルである ARCH 型モデルでは、t 期のボラティリティ σ_t^2 を $t-1$ 期に既に値がわかっている変数だけの（撹乱項を含まないという意味で) 確定的な関数として定式化する。このように定式化すると、尤度を解析的に求めることができるので、パラメータを (疑似) 最尤法によって簡単に推定することができる。そのため、ARCH 型モデルは資産価格の実証分析に幅広く用いられており、同時にさまざまな改良が行われている。

資産価格のボラティリティは一旦上昇 (低下) すると、その後しばらくの間ボラティリティの高い (低い) 日が続くことが知られている。こうした現象はボラティリティ・クラスタリング (volatility clustering) と呼ばれ、あらゆる資産価格で観測される[5]。こうした現象を捉えるために、Engle [1982] は次のような ARCH モデルを提案した[6]。

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2,\ \omega > 0,\ \alpha \geq 0 \tag{3}$$

ここで、パラメータに非負制約を課すのは、σ_t^2 の非負性を保証するためである。

[5] ボラティリティ・クラスタリングの原因については、Granger and Machina [2006] を参照のこと。

[6] これは最も簡単な ARCH(1) モデルであり、一般的な ARCH(q) モデルは次のように表される。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \epsilon_{t-j}^2,\ \omega > 0,\ \alpha_j \geq 0\ (j = 1, 2, \ldots, q)$$

その後、Bollerslev [1986] が、(3) 式の右辺に σ_{t-1}^2 を加えた GARCH モデルを提案した[7]。

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2,\ \omega > 0,\ \beta, \alpha \geq 0 \tag{4}$$

このモデルでも σ_t^2 の非負性を保証するために、パラメータに非負制約を課す。

2.2. ボラティリティ変動の非対称性

株式市場では、株価が上がった日の翌日と下がった日の翌日を比べると後者の方がボラティリティがより上昇する傾向があることが知られており[8]、こうした前日に株価が上がったか下がったかによるボラティリティ変動の非対称性は ARCH モデルや GARCH モデルでは捉えることができない。ボラティリティ変動の非対称性を考慮したモデルには、Glosten et al. [1993] によって提案された GJR モデル、Nelson [1991] によって提案された EGARCH モデル、 Ding et al. [1993] によって提案された APGARCH モデルなどがある。

GJR モデルでは、以下のように、ϵ_{t-1} が負であれば 1、それ以外では 0 になるダミー変数 D_{t-1}^- を用いることによって、ボラティリティ変動の非対称性を捉える[9]。

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^-\epsilon_{t-1}^2,\ \omega > 0,\ \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \tag{5}$$

このモデルでも、σ_t^2 の値が負にならないように、パラメータに非負制約が必要となる。(5) 式は、$\epsilon_{t-1} > 0$ であれば、$D_{t-1}^- = 0$ なので、

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 \tag{6}$$

となり、$\epsilon_{t-1} < 0$ であれば、$D_{t-1}^- = 1$ なので、

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + (\alpha + \gamma)\epsilon_{t-1}^2 \tag{7}$$

[7] これは最も簡単な GARCH(1,1) モデルであり、一般的な GARCH(p, q) モデルは次のように表せる。

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q}\alpha_j\epsilon_{t-j}^2, \\ &\quad \omega > 0,\ \beta_i, \alpha_j \geq 0\ (i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q) \end{aligned}$$

[8] 株式市場のボラティリティ変動に非対称性が存在することを最初に指摘したのは Black [1976] である。株式市場のボラティリティ変動に非対称性が存在する原因については、Christie [1982] や Wu [2001] を参照のこと。

[9] これは最も簡単な GJR$(1, 1)$ モデルであり、一般的な、 GJR(p, q) モデルは次のように表される。

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q}(\alpha_j + \gamma_j D_{t-j}^-)\epsilon_{t-j}^2, \\ &\quad \omega > 0,\ \beta_i, \alpha_j, \gamma_j \geq 0\ (i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q) \end{aligned}$$

ここで、D_{t-j}^- は ϵ_{t-j} が負であれば 1、それ以外では 0 になるダミー変数。

となる。そこで、$\gamma > 0$ であれば、予期せず価格が上がった日の翌日よりも予期せず価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる。

Nelson [1991] の提案した EGARCH モデルでは、ボラティリティ σ_t^2 ではなく、その対数値 $\ln(\sigma_t^2)$ の変動を次のように定式化する[10]。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta\left\{\ln(\sigma_{t-1}^2) - \omega\right\} + \theta z_{t-1} + \gamma\left\{|z_{t-1}| - E\left(|z_{t-1}|\right)\right\} \tag{8}$$

ここで、$E\left(|z_{t-1}|\right)$ は $|z_{t-1}|$ の期待値を表す。このモデルは、$\ln(\sigma_t^2)$ を被説明変数としているために、パラメータに非負制約を課す必要がない。また、負の値をとるような変数でも説明変数に加えることができる。そこで、z_{t-1} を説明変数に加えることにより、ボラティリティ変動の非対称性を考慮している。(8) 式は、$z_{t-1} > 0$ であれば、

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta\left\{\ln(\sigma_{t-1}^2) - \omega\right\} + (\gamma + \theta)|z_{t-1}| - \gamma E\left(|z_{t-1}|\right) \tag{9}$$

となるのに対して、$z_{t-1} < 0$ であれば、

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta\left\{\ln(\sigma_{t-1}^2) - \omega\right\} + (\gamma - \theta)|z_{t-1}| - \gamma E\left(|z_{t-1}|\right) \tag{10}$$

となる。そこで、$\theta < 0$ であれば、予期せず価格が上がった日の翌日よりも予期せず価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる。

ボラティリティ変動の非対称性を表すモデルとしてはこれまで GJR、EGARCH モデルを用いることが多かったが、近年よく用いられるようになってきたモデルに、Ding et al. [1993] によって提案された APGARCH モデルがある[11]。このモデルは次のように表される[12]。

$$\begin{aligned} \sigma_t^\delta &= \omega + \beta\sigma_{t-1}^\delta + \alpha\left(|\epsilon_{t-1}| - \gamma\epsilon_{t-1}\right)^\delta, \qquad (11) \\ &\omega, \delta > 0,\ \alpha, \beta \geq 0,\ -1 < \gamma < 1 \end{aligned}$$

[10] これは最も簡単な EGARCH(1,0) モデルであり、一般的な EGARCH(p,q) モデルは次のように表される。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\left\{\ln(\sigma_{t-i}^2) - \omega\right\} + g(z_{t-1}) + \sum_{j=1}^{q}\psi_j g(z_{t-j-1})$$

ただし、

$$g(z_{t-j-1}) = \theta z_{t-j-1} + \gamma\left\{|z_{t-j-1}| - E\left(|z_{t-j-1}|\right)\right\}$$

[11] APGARCH モデルの統計的性質については、Karanasos and Kim [2006] を参照のこと。

[12] これは最も簡単な APGARCH(1,1) モデルであり、一般的な APGARCH(p, q) モデルは次のように表される。

$$\begin{aligned} \sigma_t^\delta &= \omega + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\sigma_{t-i}^\delta + \sum_{j=1}^{q}\alpha_j\left(|\epsilon_{t-j}| - \gamma_j\epsilon_{t-j}\right)^\delta, \\ &\omega, \delta > 0,\ \alpha_j, \beta_i \geq 0,\ -1 < \gamma_j < 1\ (i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, q) \end{aligned}$$

ARCH、GARCH モデルでは σ_t^2、EGARCH モデルでは $\ln(\sigma_t^2)$ の変動を定式化していたのに対して、このモデルでは σ_t^δ の変動を定式化しており、δ も未知パラメータとして推定するのが特徴である。(11) 式は、$\epsilon_{t-1} > 0$ であれば、

$$\sigma_t^\delta = \omega + \beta\sigma_{t-1}^\delta + \alpha(1-\gamma)^\delta|\epsilon_{t-1}|^\delta \tag{12}$$

となり、$\epsilon_{t-1} < 0$ であれば、

$$\sigma_t^\delta = \omega + \beta\sigma_{t-1}^\delta + \alpha(1+\gamma)^\delta|\epsilon_{t-1}|^\delta \tag{13}$$

となる。そこで、$\gamma > 0$ であれば、予期せず価格が上がった日の翌日よりも予期せず価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる。

このモデルは、以下のように他の多くの ARCH 型モデルを特殊ケースとして含んでいる[13]。

- $\delta = 2$、$\beta = 0$、$\gamma = 0$: ARCH モデル
- $\delta = 2$、$\gamma = 0$: GARCH モデル
- $\delta = 2$: GJR モデル
- $\delta = 1$、$\gamma = 0$: Absolute value GARCH モデル (Taylor [1986]、Schwert [1989, 1990])

$$\sigma_t = \omega + \beta\sigma_{t-1} + \alpha|\epsilon_{t-1}| \tag{14}$$

- $\delta = 1$: TGARCH (Threshold GARCH) モデル (Zakoian [1994])

$$\sigma_t = \omega + \beta\sigma_{t-1} + (\alpha^+ D_{t-1}^+|\epsilon_{t-1}| + \alpha^- D_{t-1}^-|\epsilon_{t-1}|) \tag{15}$$

  ここで、D_{t-1}^+ は ϵ_{t-1} が正であれば 1、それ以外では 0 であるダミー変数。D_{t-1}^- は、これまで通り、ϵ_{t-1} が負であれば 1、それ以外では 0 であるダミー変数である。

- $\gamma = 0$: NGARCH (Nonlinear GARCH) モデル (Higgins and Bera [1992])

$$\sigma_t^\delta = \omega + \beta\sigma_{t-1}^\delta + \alpha|\epsilon_{t-1}|^\delta \tag{16}$$

- $\delta \to 0$、$\gamma = 0$: Log-GARCH モデル (Geweke [1986]、 Pantula [1986])

$$\ln(\sigma_t) = \omega + \beta\ln(\sigma_{t-1}) + \alpha\ln(|\epsilon_{t-1}|) \tag{17}$$

[13] 詳細は、 Ding et al. [1993] Appendix A を参照のこと。

2.3. ボラティリティ変動の長期記憶性

ある変数の k 次の自己相関係数を $\rho(k)$ とすると、

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| < \infty \tag{18}$$

となるとき、この変数は短期記憶 (short memory) 過程に従うといい、

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| = \infty \tag{19}$$

となるとき、この変数は長期記憶 (long memory) 過程に従うという。

これまでに説明した ARCH 型モデルでは、パラメータが定常性を満たす限り、ボラティリティは短期記憶過程に従い、ボラティリティのショックは指数的に減衰する。例えば、GARCH モデルの場合に、0 期に起きた 1 単位のショックは t 期には $(\alpha+\beta)^t$ になり、ボラティリティの定常性の条件 $\alpha+\beta<1$ が満たされると、これは時間とともに指数的に減衰する[14]。しかし、ボラティリティの代理変数であるリターンの 2 乗の自己相関を計測すると、通常、ショックの減衰のスピードはそれよりも遅いことから、ボラティリティは長期記憶過程に従っている可能性がある[15]。このことを考慮に入れて、Bollerslev and Mikkelsen [1996] は EGARCH モデルを次のような FIEGARCH モデルに拡張している[16]。

$$(1-\beta L)(1-L)^d \left\{\ln(\sigma_t^2)-\omega\right\} = g(z_{t-1}) \tag{20}$$

ただし、

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma\left\{|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)\right\} \tag{21}$$

ここで、L はラグオペレータを表し、$L^i x_t = x_{t-i}$ $(i=0,1,\dots)$ である。$(1-L)^d$ は次のように表せる。

$$(1-L)^d = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\cdots(d-k+1)}{k!}(-L)^k \tag{22}$$

[14] EGARCH モデルの定常性の条件は、$|\beta| < 1$。また、誤差項 z_t の分布が左右対称であるとすると、GJR、APGARCH モデルの定常性の条件は、それぞれ以下の通り。GJR: $\alpha+\beta+\gamma/2 < 1$、APGARCH: $\beta + \alpha\left\{(1-\gamma)^\delta + (1+\gamma)^\delta\right\}/2 < 1$。詳しくは、渡部 [2006] を参照のこと。

[15] 例えば、 白石・高山 [1998] の図 6-1 参照。

[16] これは、FIEGARCH(1,d,0) モデルであり、一般的な FIEGARCH(p,d,q) モデルは次のように表される。

$$(1-\sum_{i=1}^{p}\beta_i L_i)(1-L)^d \left\{\ln(\sigma_t^2)-\omega\right\} = g(z_{t-1}) + \sum_{j=1}^{q}\psi_j g(z_{t-j-1})$$

ただし、

$$g(z_{t-j-1}) = \theta z_{t-j-1} + \gamma\left\{|z_{t-j-1}| - E\left(|z_{t-j-1}|\right)\right\}$$

$d=0$ であれば、(20) 式は EGARCH モデル (8) になり、$d=1$ であれば、ボラティリティは単位根を持ち、非定常になる。$|\beta|<1$ であるとすると、$0<d<1$ であれば、ボラティリティは長期記憶性を持ち、$d<0.5$ であれば定常、$d\geq 0.5$ であれば非定常である。

ボラティリティの長期記憶性を考慮したモデルには、他にも、GARCH モデルを拡張した FIGARCH モデル (Baillie et al. [1996]) や APGARCH モデルを拡張した FIAPGARCH モデル (Tse [1998]) があるが、これらのモデルは、$0<d<0.5$ であってもリターンの分散が無限大になるという問題点があり[17]、また、ボラティリティの非負性を保証するためのパラメータの制約が複雑なので (Baillie et al. [1996]、Chung [1999])、本稿では扱わない。

2.4. 誤差項の分布

これまで誤差項 z_t の分布については何も仮定しなかったが、パラメータを最尤推定する場合には分布を仮定する必要がある。また、VaR に応用する場合には、ボラティリティの定式化だけでなく、z_t の分布も重要になる。ARCH 型モデルを推定する場合、誤差項 z_t の分布には標準正規分布を用いることが多い。リターンの分布は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることが古くから知られているが (Fama [1965], Mandelbrot [1963])、誤差項 z_t が正規分布に従っていても、ボラティリティが変動するなら、リターンの尖度は 3 を上回る[18]。しかし、リターンの尖度の高さがボラティリティの変動だけで説明できるとは限らず、実際、先行研究では、z_t の分布に正規分布よりも尖度の高い分布を当てはめた方が当てはまりが良いとの結果が得られている。z_t の分布として正規分布以外で良く用いられるものに、スチューデントの t 分布 (Bollerslev [1987]) や一般化誤差分布 (generalized error distribution) (Nelson [1991]) があるが、Bollerslev et al. [1994] や Watanabe [2000] らは両者の比較を行い、スチューデントの t 分布の方が当てはまりが良いことを示している。

しかし、スチューデントの t 分布は (一般化誤差分布も) 尖度の高さは捉えられるが、左右対称であるため、分布の歪みについては捉えることができない。そこで、その後、Lambert and Laurent [2001]、Giot and Laurent [2004] らは Fernández and Steel [1998] の提案した skewed-t 分布を用いている。分散を 1 に基準化した skewed-t 分布の確率密度関数は以下のように与えられる。

$$f(z_t|\xi,\upsilon)=\begin{cases}\frac{2}{\xi+\frac{1}{\xi}}sg\left(\xi(sz_t+m)|\upsilon\right) & z_t<-\frac{m}{s}\\ \frac{2}{\xi+\frac{1}{\xi}}sg\left((sz_t+m)/\xi|\upsilon\right) & z_t\geq -\frac{m}{s}\end{cases} \tag{23}$$

[17] 詳しくは、Schoffer [2003] 参照。

[18] 証明は、 渡部 [2000] 1.4 節 を参照。

ここで、$g(\cdot|\upsilon)$ は分散を 1 に基準化した自由度 υ の t 分布の確率密度関数であり、m と s はそれぞれ以下のように定義される。

$$m = \frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon-1}{2}\right)\sqrt{\upsilon-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right), \quad s = \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1 - m^2}$$

ただし、$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数をあらわす。この確率密度関数は ξ と υ の 2 つのパラメータに依存する。ξ は分布の歪みを表し、$\xi = 1$ であれば分布は左右対称、$\xi > 1$ ($\xi < 1$) であれば分布の右 (左) 裾が厚い。υ は分布の裾の厚さを表し、υ が低いほど分布の裾は厚い。

本稿では、z_t の分布として、標準正規分布、t 分布、skewed-t 分布の 3 つを用いる。

3. Realized Volatility

次に、Realized Volatility (RV) およびその変動のモデル化について説明する。いま、第 t 日の日中の n 個のリターンデータ $\left\{r_t, r_{t+1/n}, \ldots, r_{t+(n-1)/n}\right\}$ が与えられているものとする。このとき、それらを 2 乗して足し合わせた

$$RV_t = \sum_{i=0}^{n-1} r_{t+i/n}^2 \tag{24}$$

を第 t 日の Realized Volatility (RV) という。

ここで、資産価格の対数値 $\ln P(s)$ が伊藤過程

$$d\ln P(s) = \mu(s)ds + \sigma(s)dW(s) \tag{25}$$

に従っているものとしよう[19]。そうすると、第 t 日の真のボラティリティは、

$$IV_t = \int_t^{t+1} \sigma(s)^2 ds \tag{26}$$

と定義され、これは瞬間的なボラティリティ$\sigma(s)^2$ を積分したものなので、Integrated volatility (IV) と呼ばれる。

(24) 式で定義される RV_t は、$n \to \infty$ とすると、IV_t に確率収束するので、n が十分大きいなら、RV_t は IV_t の精度の高い推定量となる。ただし、n を大きくすると RV に含まれる市場のミクロ構造に起因するノイズが大きくなることが知られている。そこで、RV の計算には、ティックデータ (値がつくたびのデータ) ではなく、5 分ごとの価格を使うことが多い[20]。そこで、本稿でも、RV での計算に 5 分刻みの価格を用いている。また、第 t 日のボラティリティを

[19] $W(s)$ はウイナー過程である。

[20] ミクロ構造ノイズを考慮した RV の計算方法や最適な時間間隔の選択方法も提案されている (Aït-Sahalia et al. [2005]、Bandi and Russell [2004, 2005]。

$t-1$ 日の終値から t 日の終値までのボラティリティと定義すると、$t-1$ 日の終値から t 日の始値までの間も考慮に入れなければならないが、その間は取引がないので、5 分ごとのリターンを計算することができない。また、日本の株式市場では昼休みがあるので、その間も同様である。そこで、それら取引のない時間帯に関しては、本稿では単純に $t-1$ 日の終値から t 日の始値までのリターンと t 日の前場の終値から後場の始値までの昼休みのリターンを計算し、それらをそのまま 2 乗して加えることにより RV を計算した[21]。

RV は長期記憶過程に従っていることが知られているので、その変動の定式化には、ARFIMA モデルを用いることが多い (Andersen et al. [2003]、Giot and Laurent [2004]、Koopman et al. [2005]、Ubukata and Watanabe [2005]、Watanabe and Yamaguchi [2005])[22]。本稿では、こうした長期記憶性に加えて、ボラティリティ変動の非対称性を考慮するため、Giot and Laurent [2004] に従い[23]、次のような ARFIMAX(0,d,1) モデルを用いる[24]。

$$(1-L)^d\left\{\ln(RV_t)-\mu_0-\mu_1|R_{t-1}|-\mu_2D^-_{t-1}|R_{t-1}|\right\}=(1+\theta L)u_t,\ u_t\sim \text{i.i.d.}N(0,\sigma_u^2) \tag{27}$$

ここで、μ_0、μ_1、μ_2、θ は未知パラメーターである。また、D^-_{t-1} は $R_{t-1}\ \geq\ 0$ であれば 0、$R_{t-1}\ <\ 0$ であれば 1 となるダミー変数である。そこで、$\ln(RV_t)$ の R_{t-1} を条件とする期待値は、

$$E\left[\ln(RV_t)|R_{t-1}\right]=\begin{cases}\mu_0+\mu_1|R_{t-1}| & R_{t-1}\geq 0\\ \mu_0+(\mu_1+\mu_2)|R_{t-1}| & R_{t-1}<0\end{cases} \tag{28}$$

となる。そこで、$\mu_2>0$ であれば、価格が上がった日の翌日よりも価格が下がった日の翌日の方がより RV が上昇する。以下、(27) 式を RV-ARFIMAX モデルと呼ぶ。

---

[21]他に、夜間や昼休みのリターンの 2 乗は除いて RV を計算し (それを $RV_t^{(o)}$ と表す)、それに日次リターンの分散と $RV_t^{(o)}$ の平均との比率 $\sum_{t=1}^{T}(R_t-\overline{R})^2/\sum_{t=1}^{T}RV_t^{(o)}$ を掛けるという方法や、RV_t を $RV_t^{(o)}$、夜間のリターンの 2 乗、昼休みのリターンの 2 乗の加重平均とし、最適なウエイトを求めるという方法もある。これらの方法については、Hansen and Lunde [2005a, b] を参照のこと。これらの比率やウエイトはサンプル期間によって変わるため、以下で行っている out-of-sample のボラティリティ予測や VaR の計算ではこれらの方法は扱いにくい。そこで、本稿では RV の計算にこれらの方法は用いなかった。

[22]その他のモデルには、HAR (Heterogeneous Autoregressive) モデル (Corsi [2004]) や UC (unobserved component) モデル (Barndorff-Nielsen and Shephard [2002]) などがある。

[23]正確に言うと、Giot and Laurent [2004] は、

$$(1-L)^d\left\{\ln(RV_t)-\mu_0-\mu_1R_{t-1}-\mu_2D^-_{t-1}R_{t-1}\right\}=(1+\theta L)u_t,\ u_t\sim \text{i.i.d.}N(0,\sigma_u^2)$$

と定式化しているが、(27) 式は本質的にこの式と変わらない。ただし、(27) 式を用いた方が、非対称性の有無を調べるのに μ_2 の推定値だけで見ればよいので、便利である。

[24]次節で説明する最初の 1,000 個の標本を使って、SIC によって ARFIMAX(p,d,q) モデルの次数選択を行った結果、$p=0$、$q=1$ が選択された。

4.　データと各モデルの推定結果

本稿の分析に用いた日次リターンは 2000 年 1 月 4 日から 2005 年 12 月 19 日までの日経平均 (日経 225) 株価指数の日次変化率 (%) である。これらは各営業日の終値の対数階差を 100 倍することにより算出した。

RV の計算は 2000 年 1 月 4 日から 2005 年 12 月 19 日までの日経平均の 5 分ごとの価格を用いて行った[25]。我々の利用したデータベースには、前場は 9:01 から 11:00 (もしくは 11:00 過ぎ) まで、後場は 12:31 から 15:00 (もしくは 15:00 過ぎ) までの 1 分ごとの日経平均の価格が記録されており[26]、その中から前場については、9:01、9:05、9:10、. . .、10:55 の価格と前場の終値を、後場については 12:31、12:35、12:40、. . .、14:55 の価格と後場の終値を 5 分ごとの価格として抽出した。大納会、大発会は前場しか取引がないので、同様に前場の価格だけ抽出した。これらの 5 分ごとの価格の対数階差を 100 倍することにより、5 分ごとのリターンを計算し、それらの 2 乗を足し合わせることにより RV を計算した。前日の後場の終値から次の日の前場の最初の 9:01 までの夜間のリターンや前場の終値から後場の最初の 12:31 の間の昼休みのリターンは 5 分間のリターンではないが、既に述べたように、本稿ではそのまま 2 乗して加えた。

表 1(a) に 2000 年 1 月 4 日から 2005 年 12 月 19 日までのすべての標本を使った場合の日経平均日次変化率の基本統計量が計算されている。平均は有意に 0 から乖離していないので、以後、0 であるものとして分析を行う。LB(10) は 1 次から 10 次までの自己相関がすべて 0 であるという帰無仮説を検定するための Ljung and Box [1978] 統計量であり、分散不均一性がある場合にこの統計量をそのまま使うと帰無仮説を過剰に棄却してしまうので、Diebold [1988] の方法により分散不均一性を調整している[27]。この統計量によると、日経平均日次変化率では有意水準 10% でも帰無仮説は受容される。そこで、以後、自己相関はないものとして分析を行う。平均 0 で自己相関がないということは、リターンの式 (1) において、$E\left(R_t | \boldsymbol{I}_{t-1}\right) = 0$ ということである。それに対して、日経平均日次変化率の 2 乗では有意水準 1% でも帰無仮説は棄却される。変化率の 2 乗 $R_t^2(=\sigma_t^2 z_t^2)$ はボラティリティσ_t^2 の代理変数であると考えられるので、このことはボラティリティに有意な自己相関があることを示している。これは 2.1 節で説明したボラティリティ・クラスタリングと呼ばれる現象と整合的である。歪度は有意水準 5% では 0 から有意に乖離しているが、有意水準 1% では有意でない。これに対して、尖度は有意水準 1% でも 3 を有意に超えている。このことは日経平均日次変化率の分布の裾が正規分布よりも

[25] これらは東京都立大学 COE プログラム「金融市場のミクロ構造と制度設計」で購入したデータと日本銀行金融研究所で購入したデータ（いずれも NEEDS-TICK データ) とを合わせて用いた。

[26] 東京証券取引所の取引は前場は 11:00 まで、後場は 15:00 までであるが、NEEDS-TICK データでは実際に取引があった時刻ではなく日経平均が算出された時刻が入力されているため、11:00 や 15:00 を超えることがある。

[27] 渡部 [2000] 1.5.1 節参照。

厚いことを示している。2.4 節で述べたように、リターンの分布の裾が厚いことは、よく知られた事実である。JB は歪度と尖度を合わせて正規性の検定を行う Jarque and Bera [1987] 統計量であり、有意水準 1% でも正規性を棄却する。

表 1(b) には RV およびその対数値の基本統計量が計算されている。長期記憶過程に従う変数の場合、JB 統計量は過剰に正規性を棄却してしまうので (Thomakos and Wang [2003])、ここでは JB 統計量および歪度、尖度は計算していない[28]。LB(10) の値は RV が 951.42、その対数値が 2599.51 といずれも高く、単に自己相関がないという帰無仮説が棄却されるだけでなく、非常に高い自己相関を持っていることがわかる。これは、RV が長期記憶過程に従っているという先行研究の結果と整合的である。

本稿では、ボラティリティの予測および VaR の計算については、out-of-sample の 1 期先のみを考え、以下のように行う。日経平均日次変化率、RV ともサンプル数は $1,468$ であり、この内、まず、最初の 1 期から 1,000 期までの日経平均日次変化率と RV を使って各 ARCH 型モデルと RV-ARFIMAX モデルのパラメータを推定し、その下で 1,001 期のボラティリティの予測値と VaR を計算する。次に、2 期から 1,001 期までの日経平均日次変化率を使って各モデルのパラメータを推定し、その下で 1,002 期のボラティリティの予測値と VaR を計算する。以上を繰り返し、最後に 468 期から 1,467 期までの日経平均日次変化率を使って各モデルのパラメータを推定し、その下で 1,468 期のボラティリティの予測値と VaR を計算する。これによって得られた 1,001 期から 1,468 期までのボラティリティの予測値と VaR を使ってモデルの比較を行う。

表 2 には、最初の $1,000$ 個のデータを使った各モデルの推定結果がまとめられている。各モデルのパラメータの推定には最尤法を用いた。詳しくは、補論 A-C を参照のこと。表 2 の結果からわかることは以下の通りである。

(1) GJR モデルの γ の推定値が統計的に有意な正の値、EGARCH モデルおよび FIEGARCH モデルの θ の推定値が有意な負の値であることから、日経平均でも価格が上がった日の翌日よりも価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があることがわかる。ただし、APGARCH モデルだけはボラティリティ変動の非対称性を表すパラメータ γ が有意でない[29]。

(2) APGARCH モデルの δ は標準誤差が大きく、$\delta = 1$ からも $\delta = 2$ からも有意に乖離しない。

[28] JB 統計量は独立で同一な系列を仮定しているので、厳密に言うと、長期記憶系列でなくても、独立で同一でなければ、漸近分布は自由度 2 のカイ 2 乗分布にならない。

[29] APGARCH モデルの δ は標準誤差が大きく、標本期間によって推定値が大きく変動する。そこで、δ を未知パラメータとすることにより、γ の標準誤差も高くなり、ボラティリティ変動の非対称性が有意に観測されなかったものと思われる。

(3) FIEGARCH モデルの d の推定値は、誤差項を正規分布にした場合以外、有意な正の値が得られており、このことはボラティリティに長期記憶性があることを示唆している。また、d の推定値は 0.5 を有意に下回っていないので、ボラティリティが定常かどうかはわからない。

(4) 帰無仮説を誤差項の分布が標準正規分布である、対立仮説を t 分布であるとして尤度比検定を行うと、すべてのモデルで帰無仮説が棄却されるのに対して、帰無仮説を誤差項の分布が t 分布である、対立仮説を skewed-t 分布であるとして尤度比検定を行うと、すべてのモデルで帰無仮説が受容される。

表 3 には、同じく最初の $1,000$ 個のデータを使った RV-ARFIMAX モデルの推定結果が示されている。(a) に示されている d の推定値は有意に 0 を上回っているので、RV は長期記憶過程に従っていることがわかる。また、d の推定値は 0.5 を有意に下回っていないので、RV が定常かどうかはわからない。この結果は、FIEGARCH モデルの d の推定結果と整合的である。μ_1 が有意でないのに対して μ_2 の推定値が有意な正の値になっていることも注目に値する。これは前日に価格が上がった場合には RV には影響を与えず、下がった場合だけ影響を与え、下がれば下がるほど RV が上昇することを示している。(b) には RV-ARFIMAX モデルの残差の基本統計量が計算されている。LB(10) 統計量の値から、有意な自己相関は残っていないことがわかる。分布に関しては、歪度が有意な正の値であるとともに、尖度も有意に 3 を上回っている。JB 統計量からも正規性は棄却される。したがって、RV-ARFIMAX モデル (27) の誤差項 u_t は正規分布に従っていない可能性が高いが、本稿では、先行研究に従い、以下それを正規分布で近似して分析を行う。

5. ボラティリティ予測

本節では、ボラティリティ予測のパフォーマンス比較を行う。ARCH 型モデルでは、t 期のボラティリティを $t-1$ 期に値のわかる変数だけの (誤差項を含まないという意味で) 確定的な関数として表すので、パラメータの値と $t-1$ 期までの情報が与えられれば t 期のボラティリティの予測値は簡単に計算できる。それに対して、RV-ARFIMAX モデル (27) 式は誤差項 u_t を含み、かつ RV_t ではなくその対数値の変動を定式化しているので、それを用いてボラティリティの予測値を計算するには u_t の分布を仮定する必要がある。前節の結果から u_t は正規分布に従っていない可能性が高いが、本稿では、Giot and Laurent [2003]、Koopman et al. [2005] 等の先行研究に従い、正規分布を仮定する。そうすると、対数正規分布の性質より、$t-1$ 期における t 期のボラティリティの予測値は $t-1$ 期における t 期の RV の予測値 $\widehat{RV}_{t|t-1}$ として次

のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
&\widehat{RV}_{t|t-1} \\
&= \exp\left[\mu_0 + (\mu_1 + \mu_2 D_{t-1}^-)|R_{t-1}| + \sum_{k=1}^{t-1} \frac{d(d-1)\cdots(d-k+1)}{k}(-1)^k\right. \\
&\qquad \left.\left\{\ln RV_{t-k} - \mu_0 - (\mu_1 + \mu_2 D_{t-1}^-)|R_{t-k-1}|\right\} + \theta \hat{u}_{t-1} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_u^2\right]
\end{aligned} \tag{29}
$$

ここで、$\hat{u}_t$ は (27) 式の残差、$\hat{\sigma}_u^2$ は残差分散を表す[30]。

以上のように計算されたボラティリティの予測値のパフォーマンス比較を行うためには、ボラティリティの真の値が必要であるが、ボラティリティの真の値は観測できないので、その代理変数としてこれまでよく用いられていたのは、R_t (もしくはそれから平均と自己相関を除去した $\hat{\epsilon}_t$) の 2 乗であった (渡部 [2000] 2.3.3 節)。本稿のように、(1) 式において $E\left(R_t | \boldsymbol{I}_{t-1}\right) = 0$ と仮定すると、$R_t^2 = \epsilon_t^2 = \sigma_t^2 z_t^2$ となり、R_t^2 (もしくは $\hat{\epsilon}_t^2$) はボラティリティσ_t^2 だけでなく、z_t^2 にも依存する。Andersen and Bollerslev [1998] は、この z_t^2 の変動が大きいため、真のボラティリティの代理変数として R_t^2 (もしくは $\hat{\epsilon}_t^2$) を用いると、ボラティリティの予測パフォーマンスを正しく評価できないことを指摘している。彼らは、R_t^2 (もしくは $\hat{\epsilon}_t^2$) の代わりに RV を用いることを提案しており、RV を用いると ARCH 型モデルの予測パフォーマンスが上昇することを示している。また、Hansen and Lunde [2006] は、真のボラティリティの代理変数として R_t^2 (もしくは $\hat{\epsilon}_t^2$) を用いると、ボラティリティの予測パフォーマンスが悪いモデルを良いモデルとして選択してしまう可能性があることを示しており、彼らも R_t^2 (もしくは $\hat{\epsilon}_t^2$) ではなく、RV を用いることを提案している。そこで、本稿でも真のボラティリティの代理変数に RV を用い

[30] X の対数値 $Y = \ln(X)$ が正規分布に従う場合に、X は対数正規分布に従うという。Y が平均 μ、分散 σ^2 の正規分布に従うとすると、$X = \exp(Y)$ の期待値は次のように表せる。

$$
E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dy = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right]dy
$$

ここで、$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right]$ は平均 $\mu+\sigma^2$、分散 σ^2 の正規分布の確率密度関数なので、最後の積分は 1 である。したがって、

$$
E[X] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)
$$

この式に、

$$
\begin{aligned}
\mu &\approx \mu_0 + (\mu_1 + \mu_2 D_{t-1}^-)|R_{t-1}| + \sum_{k=1}^{t-1}\frac{d(d-1)\cdots(d-k+1)}{k}(-1)^k \\
&\qquad \left\{\ln RV_{t-k} - \mu_0 - (\mu_1 + \mu_2 D_{t-1}^-)|R_{t-k-1}|\right\} + \theta\hat{u}_{t-1}, \\
\sigma^2 &\approx \hat{\sigma}_u^2
\end{aligned}
$$

を代入すると、(29) 式が得られる。

てボラティリティの予測パフォーマンスの比較を行う。

ボラティリティ予測のパフォーマンスを測る指標には、先行研究に従い、以下の RMSE (root mean squared error)、RMSPE (root mean squared parcentage error)、MAE (mean absolute error)、MAPE (mean absolute parcentage error) を用いる。

$$
\begin{aligned}
\text{RMSE} &= \sqrt{\frac{1}{468}\sum_{t=1{,}001}^{1{,}468}\left(RV_t - \hat{\sigma}^2_{t|t-1}\right)^2} \\
\text{RMSPE} &= \sqrt{\frac{1}{468}\sum_{t=1{,}001}^{1{,}468}\left(\frac{RV_t - \hat{\sigma}^2_{t|t-1}}{RV_t}\right)^2} \\
\text{MAE} &= \frac{1}{468}\sum_{t=1{,}001}^{1{,}468}\left|RV_t - \hat{\sigma}^2_{t|t-1}\right| \\
\text{MAPE} &= \frac{1}{468}\sum_{t=1{,}001}^{1{,}468}\left|\frac{RV_t - \hat{\sigma}^2_{t|t-1}}{RV_t}\right|
\end{aligned}
$$

ここで、$\hat{\sigma}^2_{t|t-1}$ は各モデルによる $t-1$ 期における t 期のボラティリティσ^2_t の予測値を表し、RV-ARFIMAX モデルの $\hat{\sigma}^2_{t|t-1}$ は (29) 式で計算される $\widehat{RV}_{t|t-1}$ とする。

これらの指標をすべてのモデルについて計算したものが表 4 である。RV-ARFIMAX モデルですべての指標が最小になっており、このことは、RV を真のボラティリティの代理変数とするボラティリティ予測では、日次リターンを用いて ARCH 型モデルを推定するよりも、直接 RV を用いて RV-ARFIMAX モデルを推定した方がパフォーマンスが良いことを示している。これは先行研究の結果と整合的である。ARCH 型モデルの中では、ボラティリティ変動の非対称性を考慮しない GARCH モデルが最もパフォーマンスが悪く、ボラティリティ変動の非対称性と長期記憶性を両方考慮した FIEGARCH モデルが最もパフォーマンスが良い。GJR、EGARCH、APGARCH モデルの間では差は小さいが、GJR モデルが最もパフォーマンスが悪く、EGARCH モデルが最もパフォーマンスが良い。リターンの分布によるパフォーマンスの違いはほとんど観測されない。

表 4(b) では、真のボラティリティの代理変数である RV_t を被説明変数、各モデルによるボラティリティの 1 期先予測値 $\hat{\sigma}^2_{t|t-1}$ を説明変数とした次のような回帰を行っている。

$$RV_t = a + b\hat{\sigma}^2_{t|t-1} + \eta_t \tag{30}$$

ここで、η_t は誤差項を表す。このように、実現値を被説明変数、予測値を説明変数とする回帰は、Mincer-Zarnowitz [1969] 回帰と呼ばれ、$a = 0$、$b = 1$ であれば、この予測値は不偏性を満たす。表 4(b) に示されている F 値は帰無仮説 $H_0 : a = 0$、$b = 1$ を検定するためのもので、そ

れによると、帰無仮説は、RV-ARFIMAX モデルだけが有意水準 5%で棄却されないが、それ以外のモデルではすべて有意水準 1%でも棄却される。このことから、日次リターンに ARCH 型モデルを当てはめてボラティリティを予測すると、有意なバイアスが生じることがわかる。しかし、これはあくまでも RV に対するバイアスであり、RV 自体が真のボラティリティに対してバイアスを持っている可能性もあるので、真のボラティリティに対してバイアスを持っているかどうかはこの結果だけからは判断できない。表 4(a) の RMSE、RMSPE、MAE、MAPE による比較では、RV-ARFIMAX モデルが最もパフォーマンスが良かったが、表 4(b) には回帰式 (30) の決定係数 R^2 が計算されており、それによると、必ずしも RV-ARFIMAX が最もフィットが良いわけではなく、いくつかの ARCH 型モデルの R^2 は RV-ARFIMAX モデルのそれを上回っている。これは、 Mincer-Zarnowitz 回帰によって $a + b\hat{\sigma}^2_{t|t-1}$ といった形でバイアスを修正すると、ARCH 型モデルでも RV の変動を RV-ARFIMAX モデルと同程度かそれ以上に説明できるようになることを示している。Koopman et al. [2005] でも同様の結果が得られている[31]。

RV の対数値 $\ln(RV_t)$ の予測に関しても同様な分析を行ったが、結果は定性的にはほとんど変わらなかったので、省略する[32]。

6. Value-at-Risk

次に、Value-at-Risk (VaR) による比較を行う。ARCH 型モデルの場合、$t-1$ 期における t 期のボラティリティの予測値 $\hat{\sigma}^2_{t|t-1}$ は簡単に計算できる。そこで、基準化した誤差項 $z_t(=\epsilon_t/\sigma_t)$ の累積分布関数 $F(z_t)$ が与えられると、確率 α に対応する VaR を求めるには、long position の場合、

$$F\left(\frac{\mathrm{VaR}_t^{(l)}(\alpha)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{t|t-1}}}\right) = \alpha$$

となる $\mathrm{VaR}_t^{(l)}(\alpha)$ を求めればよく、short position の場合には、

$$F\left(\frac{\mathrm{VaR}_t^{(s)}(\alpha)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{t|t-1}}}\right) = 1-\alpha$$

となる $\mathrm{VaR}_t^{(s)}(\alpha)$ を求めればよい[33]。

[31]Koopman et al. [2005] では、GARCH モデルの R^2 は ARFIMA-RV モデルを下回っているものの、GARCH モデル (4) 式の説明変数に RV_{t-1} を加えた GARCH-RV モデルの R^2 は ARFIMA-RV モデルを上回っている。

[32]ただし、Mincer-Zarnowitz 回帰の決定係数は、RV の予測では、いくつかの ARCH 型モデルが RV-ARFIMAX モデルを上回ったのに対して、RV の対数値の予測では、RV-ARFIMAX モデルが最大になった。

[33]skewed-t 分布の累積分布関数については、Lambert and Laurent [2001] を参照のこと。

これに対して、RV-ARFIMAX モデルを用いて VaR を計算する場合には工夫が必要である。本稿では、Giot and Laurent [2004] に従い、以下のように VaR を計算する。まず、(27) 式の誤差項 u_t の分布に正規分布を仮定することにより、(29) 式より RV の予測値 $\widehat{RV}_{t|t-1}$ を計算する。次に、$v_t = \ln(\sigma_t^2) - \ln(\widehat{RV}_{t|t-1})$ と定義し、平均 0、分散 1 の確率変数 w_t を使って $\exp(v_t/2)z_t = \sigma w_t$ と表すことにより、R_t を次のように表す。

$$R_t = \sigma_t z_t = \sqrt{\widehat{RV}_{t|t-1}}\exp(v_t/2)z_t = \sqrt{\sigma^2\widehat{RV}_{t|t-1}}w_t \tag{31}$$

Giot and Laurent [2004] は、この w_t の分布として標準正規分布と分散を 1 に基準化した skewed-t 分布を用いているが、本稿ではさらに分散を 1 に基準化した t 分布も用いる。w_t の累積分布関数 $F(w_t)$ が与えられれば、long position では、

$$F\left(\frac{\mathrm{VaR}_t^{(l)}(\alpha)}{\sqrt{\sigma^2\widehat{RV}_{t|t-1}}}\right) = \alpha$$

となる $\mathrm{VaR}_t^{(l)}(\alpha)$ を求めればよく、 short position では、

$$F\left(\frac{\mathrm{VaR}_t^{(s)}(\alpha)}{\sqrt{\sigma^2\widehat{RV}_{t|t-1}}}\right) = 1-\alpha$$

となる $\mathrm{VaR}_t^{(s)}(\alpha)$ を求めればよい。ただし、σ および t 分布の自由度 υ、skewed-t 分布の υ と ξ には最尤推定値を用いる。

表 5 には、σ と、t 分布の自由度 υ、skewed-t 分布の υ、ξ の最尤推定値が示されている。w_t に正規分布を当てはめた場合と t 分布を当てはめた場合の対数尤度より、t 分布の方がフィットが良いことがわかる。それに対して、skewed-t 分布の ξ が 1 から有意に乖離していないことと、t 分布と skewed-t 分布の対数尤度から、w_t の分布には有意な歪みはないことがわかる。

以上の方法で、各モデルから long position、short position それぞれで、10%、5%、1% に対応する VaR の値を計算した。表 6(a) の long (short) position には、リターンの実現値が VaR の値を下 (上) 回った回数をサンプル数 468 で割った比率 (failure rate) (%) が示されている。この比率を用いて、Kupiec [1995] の尤度比検定を行った。これは、ある VaR の値の下での真の failure rate を f としたときに、帰無仮説 $H_0 : f = \alpha$ を対立仮説 $H_1 : f \neq \alpha$ の下で尤度比検定するものである。T' 個のリターンの中で N 個が long (short) position の VaR の値を下 (上) 回っていたとすると、尤度比検定統計量は、

$$LR = 2\left\{\ln((N/T')^N(1-N/T')^{T'-N}) - \ln(\alpha^N(1-\alpha)^{T'-N})\right\} \tag{32}$$

となり、帰無仮説が正しいとすると、これは漸近的に自由度 1 のカイ 2 乗分布に従う[34]。

表 6(b) にはこの尤度比検定統計量の p 値が示されており、例えば、それが 0.05 を超えていれば、有意水準 5% で帰無仮説は受容される。GARCH、GJR、EGARCH、APGARCH モデルでは誤差項 z_t の分布を標準正規分布、t 分布、skewed-t 分布のいずれにした場合も、p 値が 0.05 を下回る箇所があり、VaR が正しく計算されていないことがわかる。RV-ARFIMAX モデルでも、同様に、(31) 式の w_t の分布をいずれにした場合も、p 値が 0.05 を下回る箇所がある。それに対して、FIEGARCH モデルでは、z_t の分布を標準正規分布もしくは t 分布にすると、long position、short position、またすべての確率で、p 値が 0.05 を超えている。FIEGARCH モデルでも、w_t の分布を skewed-t 分布にすると、p 値が 0.05 を下回る箇所が出てくるが、これは誤差項 z_t の分布に有意な歪みがないにもかかわらず、歪みを表すパラメータ ξ を導入して推定しているためであると考えられる。

Engle and Manganelli [2004] は VaR が正しく計算されているかどうかを検定するための dynamic quantile 検定と呼ばれる別の方法を提案している。$I(\cdot)$ を括弧の中の条件が満たされれば 1、そうでなければ 0 となる指示関数 (indicator function) とし、$\mathrm{Hit}_t^{(l)}(\alpha) = I(R_t < \mathrm{VaR}_t^{(l)}(\alpha)) - \alpha$、$\mathrm{Hit}_t^{(s)}(\alpha) = I(R_t > \mathrm{VaR}_t^{(s)}(\alpha)) - \alpha$ と定義する。このとき、long position の VaR が正しく計算されているなら、次の 2 つの性質が満たされるはずである。

- A1: $E(\mathrm{Hit}_t^{(l)}(\alpha)) = 0$
- A2: $\mathrm{Hit}_t^{(l)}(\alpha)$ が $t-1$ 期の情報集合と無相関。

short position の VaR についても同様である。Engle and Manganelli [1999] の dynamic quantile 検定では、これら 2 つの仮説を同時に検定する。以下、$\mathrm{Hit}_t^{(l)}(\alpha)$ あるいは $\mathrm{Hit}_t^{(s)}(\alpha)$ のサンプル数を T' とし、long position の場合には、$\mathrm{Hit}_{m,n} = [\mathrm{Hit}_m^{(l)}(\alpha), \ldots, \mathrm{Hit}_n^{(l)}(\alpha)]'$、short position の場合には、$\mathrm{Hit}_{m,n} = [\mathrm{Hit}_m^{(s)}(\alpha), \ldots, \mathrm{Hit}_n^{(s)}(\alpha)]'$ $(1 \leq m \leq n \leq T')$ として以下の回帰を行う。

$$\mathrm{Hit}_{q+1,T'} = X\lambda + \nu \tag{33}$$

ここで、X は $(T'-q) \times k$ の説明変数行列で、第 1 列はすべて 1 であり、第 2 列から第 $q+1$ 列までにはそれぞれ $\mathrm{Hit}_{q,T'-1}, \ldots, \mathrm{Hit}_{1,T'-q}$、残りの列には他の説明変数が入る。また、$\nu$ は $(T'-q) \times 1$ の誤差ベクトルである。このとき、上記 A1、A2 の帰無仮説がどちらも正しいとすると、dynamic quantile 統計量

$$DQ = \frac{\hat{\lambda}' X' X \hat{\lambda}}{\alpha(1-\alpha)} \tag{34}$$

[34] ただし、そのためには、VaR の値を超える確率が各期各期独立であるという仮定が必要で、そうでない場合には、LR 統計量の漸近分布は自由度 1 のカイ 2 乗分布にならない。

は漸近的に自由度kのχ^2分布に従う。ただし、$\hat{\lambda}$は、回帰式(33)のλの最小2乗推定量である。本稿では、Giot and Laurent [2004] に従い、$k=7$、$q=5$とし、Xの最後の1列は、long positionの場合は、$[\mathrm{VaR}_{q+1}^{(l)}(\alpha),\ldots,\mathrm{VaR}_{T'}^{(l)}(\alpha)]'$、short positionの場合は、$[\mathrm{VaR}_{q+1}^{(s)}(\alpha),\ldots,\mathrm{VaR}_{T'}^{(s)}(\alpha)]'$とした。

表6(c) には dynamic quantile 統計量 (34) のp値が示されている。それによると、今度は、FIEGARCH-n、FIEGARCH-t モデルでも short position の 10%と 5%で、p値が 0.05 を下回っている[35]。しかし、short position の 10%と 5%では、他のモデルでもp値が 0.05 を下回っている。唯一、RV-ARFIMA-t モデルで、short position の 10%においてp値が 0.05 を上回っているが、short position の 1%においてp値が 0.05 を下回っているので、FIEGARCH-n、FIEGARCH-t モデルと比べてパフォーマンスが上回っているとは言えない。FIEGARCH-st モデルでは、short position の 10%と 5%に加え、1%でもp値が 0.05 を下回っており、FIEGARCH-n、FIEGARCH-t モデルと比べてやはりパフォーマンスは低下している。

7. まとめと今後の発展

本稿では、RV を ARFIMAX モデルで定式化した場合と日次リターンをさまざまな ARCH 型モデルで定式化した場合とで、ボラティリティの予測パフォーマンスと VaR のパフォーマンスを比較した。主な結論は以下の通りである。RV を真のボラティリティの代理変数としたボラティリティ予測の比較では、ARCH 型モデルの中では、ボラティリティ変動を考慮しない GARCH モデルが最もパフォーマンスが低く、ボラティリティ変動の非対称性と長期記憶性を考慮した FIEGARCH モデルが最もパフォーマンスが高い。しかし、RV-ARFIMAX モデルと比べるといずれの ARCH 型もパフォーマンスは低い。それに対して、VaR による比較では、FIEGARCH モデルが最もパフォーマンスが高く、RV-ARFIMAX をも上回る。また、日経平均の日次リターンの分布には有意な歪みが観測されないため、skewed-t 分布を用いると VaR のパフォーマンスが低下する。

ボラティリティ予測で RV を使ったモデルのパフォーマンスが高いことは他の研究でも示されているが、VaR で FIEGARCH モデルのパフォーマンスが高いことを示したのは本研究が初めてである[36]。そこで、他のサンプル期間や他の資産でも同様な結果が得られるかどうか分析する必要がある。また、本稿では、RV の変動を表すモデルとして ARFIMAX モデルだけを取

[35] 尤度比検定では受容されるのに、dynamic quantile 検定では棄却されるということは、帰無仮説 A2 に原因がある可能性が高い。

[36] 大塚 [2006] は TOPIX を用いて FIEGARCH モデルを推定し、ボラティリティの予測パフォーマンスが高いことを示している。ただし、そこではボラティリティの代理変数として RV ではなく、リターンの 2 乗を用いている。

り上げたが、他にもいくつかモデルが提案されているので、そうしたモデルを用いた分析も必要である。本稿では簡単化のため、$\sigma_t^2 = \widehat{RV}_{t|t-1}$ として R_t (z_t) の予測分布を推定しているが、R_t と RV_t を同時にモデル化することにより、σ_t^2 の予測誤差も考慮に入れて R_t の予測分布を推定することは今後の重要な研究課題である。さらに、ボラティリティ変動モデルには ARCH 型モデルの他に確率的ボラティリティ変動モデルがある[37]。このモデルは推定に最尤法以外の方法が必要になるので、本稿では取り上げなかったが、このモデルも含めた比較は重要である。最後に、ボラティリティは VaR だけでなく、オプション価格においても重要な変数なので、オプション価格を用いた比較[38]やオプション価格から計算される Implied Volatility との比較も重要である[39]。

補論 A. GARCH、GJR、EGARCH、APGARCH モデルの推定法

GARCH、GJR、EGARCH、APGARCH モデルのパラメータは、最尤法により簡単に推定することができる[40]。ここでは、(1) 式で $E\left(R_t | \boldsymbol{I}_{t-1}\right) = 0$ とした GARCH モデル

$$R_t = \epsilon_t,\ \epsilon_t = \sigma_t z_t,\ \sigma_t > 0,\ z_t \sim \text{i.i.d.},\ E(z_t) = 0,\ Var(z_t) = 1 \tag{A1}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2,\ \omega > 0,\ \beta, \alpha \geq 0 \tag{A2}$$

について説明するが、GJR、EGARCH、APGARCH モデルの推定も同様にして行うことができる[41]。

上記 GARCH モデルの未知パラメータは、z_t の分布を標準正規分布にしたときには (ω, β, α) であり、t 分布にしたときには自由度 υ、skewed-t 分布にしたときにはさらに ξ が加わる．以下では z_t の確率密度関数を $f(z_t)$ で表し、未知パラメータをまとめて $\boldsymbol{\theta}$ で表す。未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ にある値が与えられたときに、それを条件とする観測値 $\{R_t\}_{t=1}^T = \{\epsilon_t\}_{t=1}^T$ の条件付き密度 $g(\{\epsilon_t\}_{t=1}^T | \boldsymbol{\theta})$ のことを尤度と呼び、L で表す。また、尤度を $\boldsymbol{\theta}$ の関数と考えたものを尤度関数と呼び、$L(\boldsymbol{\theta})$ で表す。GARCH モデルの最尤推定で通常使うのは、厳密な尤度 $g(\{\epsilon_t\}_{t=1}^T | \boldsymbol{\theta})$ ではなく、条件の中に σ_0^2 と ϵ_0^2 を加えた $g(\{\epsilon_t\}_{t=1}^T | \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \boldsymbol{\theta})$ である。以下では、条件の中の $\boldsymbol{\theta}$

[37]確率的ボラティリティ変動モデルやその推定法について詳しくは、Ghysels et al. [1996]、渡部 [2000, 2005a,b] を参照のこと。

[38]日経平均オプション価格を用いて、ARCH 型モデルのパフォーマンスの比較を行ったものに三井・渡部 [2003]、渡部 [2003] があり、RV のパフォーマンスを分析したものに Ubukata and Watanabe [2005] がある。

[39]RV と Implied Volatility との比較を行ったものに、Blair et al. [2001]、Koopman et al. [2005] がある。

[40]ARCH 型モデルのパラメータの最尤法以外の推定法には、最小距離 (minimum distance) 推定量 (Baillie and Chung [2001]、Kristensen and Linton [2006]) やマルコフ連鎖モンテカルロ法を用いたベイズ推定法がある (Bauwens and Lubrano [1998]、Nakatsuma [2000]、三井・渡部 [2003])。

[41](A1)、(A2) 式は GARCH(1,1) モデルである。一般的な GARCH(p,q) モデルや $E\left(R_t | \boldsymbol{I}_{t-1}\right) \neq 0$ の場合の最尤推定については、渡部 [2000, 2006] を参照のこと。

は省略する。このように修正された尤度は次のように表すことができる。

$$L = g(\epsilon_1|\sigma_0^2, \epsilon_0^2) \prod_{s=2}^{T} g(\epsilon_s|\{\epsilon_t\}_{t=1}^{s-1}, \sigma_0^2, \epsilon_0^2) \tag{A3}$$

GARCH モデルでは、ω、β、α と σ_0^2、ϵ_0^2 の値が与えられると、(A2) 式より σ_1^2 が計算できる。これは、尤度 (A3) の右辺の第 1 項 $g(\epsilon_1|\sigma_0^2, \epsilon_0^2)$ の分散である。平均は 0 なので、z_t の確率密度関数 $f(z_t)$ が与えられると、$g(\epsilon_1|\sigma_0^2, \epsilon_0^2)$ の値は次の式によって計算できる。

$$g(\epsilon_1|\sigma_0^2, \epsilon_0^2) = \frac{1}{\sigma_1} f\left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1}\right) \tag{A4}$$

例えば、z_t が標準正規分布に従う場合には、

$$g(\epsilon_1|\sigma_0^2, \epsilon_0^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_1^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

となる。さらに、ϵ_1 の値が与えられると、(A2) 式より、今度は σ_2^2 が計算できる。これは、$g(\epsilon_2|\epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2)$ の分散である。平均はゼロなので、$g(\epsilon_2|\epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2)$ の値は次の式によって計算できる。

$$g(\epsilon_2|\epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2) = \frac{1}{\sigma_2} f\left(\frac{\epsilon_2}{\sigma_2}\right) \tag{A5}$$

これを繰り返すと、(A3) 式の右辺の条件付き密度がすべて求まり、尤度を以下のように計算できる。

$$L = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sigma_t} f\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma_t}\right) \tag{A6}$$

ここで、右辺の σ_t は、既に述べたように、ϵ_0^2、σ_0^2 からスタートして、(A2) 式によって逐次的に計算される。ϵ_0^2、σ_0^2 の値には、通常、$(1/T)\sum_{t=1}^{T} \epsilon_t^2$ が用いられる (Bollerslev [1986])。

このようにして計算される尤度を最大化するパラメータの値をその推定値として選択すればよい。実際に尤度の最大化を行うときには、尤度ではなく、(A6) 式の対数をとった対数尤度

$$\ln L = \sum_{t=1}^{T} \left\{ -\ln(\sigma_t) + \ln f\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma_t}\right) \right\} \tag{A7}$$

を用いる[42]。

[42] ARCH 型モデルのパラメータの最尤推定量の漸近的な性質については、Straumann [2005] を参照のこと。ただし、EGARCH、APGARCH モデルのパラメータの最尤推定量の漸近正規性は厳密には明らかにされていない。

補論 B. FIEGARCH モデルの推定法

FIEGARCH モデル

$$(1-\beta L)(1-L)^d \left\{\ln(\sigma_t^2)-\omega\right\} = g(z_{t-1}) \tag{B1}$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma \left\{|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)\right\}$$

の推定には Taylor [2001] によって提案されている方法を用いた。

(B1) 式の左辺の $(1-L)^d$ は、

$$(1-L)^d = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j L^j,\ a_1 = d,\ a_j = \frac{j-d-1}{j} a_{j-1}\ (j \geq 2) \tag{B2}$$

であり、それに $(1-\beta L)$ を掛けた $(1-\beta L)(1-L)^d$ は次のように表せる。

$$(1-\beta L)(1-L)^d = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} b_j L^j,\ b_1 = d+\beta,\ b_j = a_j - \beta a_{j-1}\ (j \geq 2) \tag{B3}$$

そこで、$\ln(\sigma_0^2) = \ln(\sigma_{-1}^2) = \cdots$ をすべてその無条件期待値 ω とし、$g(z_0)$ もその無条件期待値 0 とすると、$\ln(\sigma_1^2)$ は以下のように計算できる。

$$\ln(\sigma_1^2) = \omega + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \left\{\ln(\sigma_{1-j}^2)-\omega\right\} + g(z_0) = \omega \tag{B4}$$

次に、ϵ_1 が与えられると、(B4) 式で計算された $\sigma_1^2 (= \exp[\ln(\sigma_1^2)])$ を使って $z_1 (= \epsilon_1/\sigma_1)$ を計算できるので、それを使って $\ln(\sigma_2^2)$ を以下のように計算できる。

$$\ln(\sigma_2^2) = \omega + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \left\{\ln(\sigma_{2-j}^2)-\omega\right\} + g(z_1) = \omega + b_1 \left\{\ln(\sigma_1^2)-\omega\right\} + g(z_1) \tag{B5}$$

以上を繰り返すことにより、$(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_T^2)$ を計算できるので、それらを使って (A7) 式より対数尤度を計算できる。そこで、その対数尤度を最大化するパラメータを求めて推定値とすればよい。

FIEGARCH モデルを提案した Bollerslev and Mikkelsen [1996] は、(B1) 式を次のように MA モデルに変更して推定している。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + (1-\phi L)^{-1}(1-L)^{-d} g(z_{t-1}) \tag{B6}$$

Taylor [2001] は、AR モデルを使った方が L^j の係数が早く 0 に収束することから、MA モデル (B6) ではなく、AR モデル (B1) を使うことを提案しており、本稿でもそれに従った[43]。

[43] MA モデル (B6) を使った推定も行ったが、パラメータの推定値はほとんど変わらなかった。

補論 C. RV-ARFIMAX モデルの推定法

RV-ARFIMAX モデル

$$(1-L)^d\left\{\ln(RV_t)-\mu_0-\mu_1|R_{t-1}|-\mu_2 D_{t-1}^{-}|R_{t-1}|\right\}=(1+\theta L)u_t,\ u_t\sim \text{i.i.d.}N(0,\sigma_u^2) \tag{C1}$$

の推定には Beran [1995] によって提案された近似最尤法 (approximate maximum likelihood method) を用いた。

RV-ARFIMAX モデル (C1) は次のように次数無限大の AR モデルとして表せる。

$$(1+\theta L)^{-1}(1-L)^d\left\{\ln(RV_t)-\mu_0-\mu_1|R_{t-1}|-\mu_2 D_{t-1}^{-}|R_{t-1}|\right\}=u_t \tag{C2}$$

ここで、左辺の $(1+\theta L)^{-1}(1-L)^d$ は次のように表せる。

$$(1+\theta L)^{-1}(1-L)^d=1-\sum_{j=1}^{\infty}\phi_j L^j,\ \phi_1=d+\theta,\ \phi_j=a_j-\theta\phi_{j-1}\ (j\geq 2) \tag{C3}$$

ただし、a_j は (B2) 式で定義したものである。

ここで、$y_t=\ln(RV_t)-\mu_0-\mu_1|R_{t-1}|-\mu_2 D_{t-1}^{-}|R_{t-1}|$ と定義し、$(y_0,y_{-1},\dots)$ をすべてその無条件期待値 0 とすると、(C2) と (C3) 式より、$(u_1,\dots,u_T)$ を計算できる。(C1) の仮定より、この $(u_1,\dots,u_T)$ は互いに独立な平均 0、分散 σ_u^2 の正規分布に従うので、対数尤度は次のように計算できる。

$$\ln L=-\frac{T}{2}\ln(2\pi\sigma_u^2)-\frac{1}{2\sigma_u^2}\sum_{t=1}^{T}u_t^2 \tag{C4}$$

この式の右辺で $(d,\mu_0,\mu_1,\mu_2,\theta)$ に依存するのは $\sum_{t=1}^{T}u_t^2$ だけなので、まず、$\sum_{t=1}^{T}u_t^2$ を最小化する $(d,\mu_0,\mu_1,\mu_2,\theta)$ を求め、次に、その下で $(u_1,\dots,u_T)$ を計算すれば、σ_u^2 はその標本分散 $(1/T)\sum_{t=1}^{T}u_t^2$ として推定できる。

大塚芳宏、「Heterogeneous モデルによる市場のボラティリティ構造分析と予測力の比較」、千葉大学社会科学研究科修士論文、2006 年

白石典義・高山俊則、「株式収益率ボラティリティの長期依存性とロングメモリー・モデル」、『ジャフィー・ジャーナル』、1998 年、123～150 頁

三井秀俊・渡部敏明、「ベイズ推定法による GARCH オプション価格付けモデルの分析」、『日本統計学会誌』第 33 巻第 3 号、2003 年、307～324 頁

矢島美寛、「長期記憶をもつ時系列モデル」刈屋武昭・矢島美寛・田中勝人・竹内啓著『経済時系列の統計 その数理的基礎』第 II 部、岩波書店、2003 年、103～202 頁

渡部敏明、『ボラティリティ変動モデル』、朝倉書店、2000 年

渡部敏明、「日経 225 オプションデータを使った GARCH オプション価格付けモデルの検証」、『金融研究』第 22 巻別冊第 2 号、2003 年、1～34 頁

渡部敏明、「マルチ・ムーブ・サンプラーを用いた確率的ボラティリティ変動モデルのベイズ推定法」、和合肇編『マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いた応用計量分析』第 9 章、東洋経済新報社、2005 年 a、259～294 頁

渡部敏明、「確率的ボラティリティ変動モデル：分析法とモデルの発展」、日本大学経済学部経済科学研究所『紀要』第 35 号、2005 年 b、111～133 頁

渡部敏明、「ARCH モデル」、縄田和満・蓑谷千凰彦・和合肇編『計量経済学ハンドブック』16.4 節、朝倉書店、近刊、2006 年

Aït-Sahalia, Yacine, Per A. Mykland and Lan Zhang, "How Often to Sample a Continuous-time Process in the Presence of Market Microstructure Noise," *Review of Financial Studies*, 18(2), 2005, pp.351–416.

Andersen, Torben G. and Tim Bollerslev, "Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts," *International Economic Review*, 39(4), 1998, pp.885–905.

Andersen, Torben G., Tim Bollerslev, Francis X. Diebold and Paul Labys, " Modeling and Forecasting Realized Volatility," *Econometrica*, 71(2), 2003, pp.579–625.

Baillie, Richard T., Tim Bollerslev and Hans Ole Mikkelsen, "Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 74(1), 1996, pp.3–30.

Baillie, Richard T. and Huimin Chung, "Estimation of GARCH Models from the Autocorrelations of the Squares of a Process," *Journal of Time Series Analysis*, 22(6), 2001, pp.631–650.

Bandi, Federico M. and Jeffrey R. Russell, "Separating Microstructure Noise from Volatility," *Journal of Financial Economics*, 2004, forthcoming.

Bandi, Federico M. and Jeffrey R. Russell, "Microstructure Noise, Realized Variance, and Optimal Sampling," Working Paper, Graduate School of Business, University of Chicago, 2005.

Barndorff-Nielsen, Ole. E. and Neil Shephard, "Econometric Analysis of Realized Volatility and its Use in Estimating Stochastic Volatility Models," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 64(2), 2002, pp.253–280.

Bauwens, Luc and Michel Lubrano, "Bayesian Inference on GARCH Models using the Gibbs Sampler," *Econometrics Journal*, 1(1), 1998, pp.C23–C46.

Beran, Jan, *Statistics for long-memory processes*, Chapman & Hall, 1994.

Beran, Jan, "Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter for Invertible Short and Long Memory Autoregressive Integrated Moving Average Models," *Journal of the Royal Statistical Society*, B57, 1995, pp.659–672.

Bhardwaj, Geetesh and Norman R. Swanson," An Empirical Investigation of the Usefulness of ARFIMA Models for Predicting Macroeconomic and Financial Time Series, "*Journal of Econometrics*, 131(1-2), 2006, pp.539–578.

Black, Fischer, "Studies of Stock Market Volatility Changes," *1976 Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, 1976, pp.177–181.

Black, Fischer and Myron Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81(3), 1973, pp.637–654.

Blair, Bevan J., Ser-Huang Poon and Stephen J. Taylor, "Forecasting S&P 100 Volatility: The Incremental Information Content of Implied Volatilities and High-frequency Index Returns," *Journal of Econometrics*, 105(1), 2001, pp.5–26.

Bollerslev, Tim, "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31(3), 1986, pp.307–327.

Bollerslev, Tim, "A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prives and Rate of Return," *Review of Economics and Statistics*, 69(3), 1987, pp.542–547.

Bollerslev, Tim, Robert. F. Engle and Daniel B. Nelson, "ARCH Models," Robert F. Engle and Dan McFadden eds., *The Handbook of Econometrics 4*, 1994, pp.2959–3038, Elsevier.

Bollerslev, Tim. and Hans O. Mikkelsen, "Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility," *Journal of Econometrics*, 73(1), 1996, pp.151–184.

Christie, A. Andrew, "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances: Value, Leverage, and Interest Rate Effects," *Journal of Financial Economics*, 10(4), 1982, pp.407-432.

Chung, Ching-Fan, "Estimating the Fractionally Integrated GARCH Model," Working Paper, Institute of Economics, Academia Sinica, 1999.

Corsi, Fulvio, "A Simple Long Memory Model of Realized Volatility," Working Paper, Institute of Finance, University of Lugano, 2004.

Diebold, Francis, *Empirical Modeling of Exchange Rate Dynamics*, 1988, Springer-Verlag.

Ding, Zhuanxin, Clive W. J. Granger and Robert F. Engle, "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model," *Journal of Empirical Finance*, 1(1), 1993, pp.83–106.

Engle, Robert. F., "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, 50(4), 1982, pp.987–1007.

Engle, Robert, F. and Simone Manganelli, "CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles," *Journal of Business & Economic Statistics*, 22(4), 2004, pp.367–381.

Fama, Eugene F., "The Behavior of Stock Market Prices," *Journal of Business*, 38(1), 1965, pp.34–105.

Fernández, Carmen, and Mark F. J. Steel, "On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness," *Journal of the American Statistical Association*, 93(441), 1998, pp.359–371.

Geweke, John, "Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment", *Econometric Reviews*, 5, 1986 pp.57–61.

Ghysels, Eric, Andrew C. Harvey and Eric Renault, "Stochastic volatility," G. S. Maddala and C. R. Rao, eds., in *Handbook of Statistics 14: Statistical Methods in Finance*, 1996, pp.119–191, Elsevier.

Giot, Pierre and Sébastien, Laurent, "Modelling Daily Value-at-Risk Using Realized Volatility and ARCH Type Models," *Journal of Empirical Finance*, 11(3), 2004, pp.379–398.

Glosten, Lawrence R., Ravi Jagannathan and David E. Runkle, "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks," *Journal of Finance*, 48(5), 1993, pp.1779–1801.

Granger, Clive W. J. and Mark J. Machina, "Structural Attribution of Observed Volatility Clustering," *Journal of Econometrics*, 2006, forthcoming.

Hansen, Peter. R. and Asger Lunde, "A Realized Variance for the Whole Day Based on Intermittent High-frequency Data," *Journal of Financial Econometrics*, 3(4), 2005a, pp.525–554.

Hansen, Peter. R. and Asger Lunde, "A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)?" *Journal of Applied Econometrics*, 20(7), 2005b, pp.873–889.

Hansen, Peter. R. and Asger Lunde, "Consistent Ranking of Volatility Models," *Journal of Econometrics*, 131(1-2), 2006, pp.97–121.

Higgins, Matthew L. and Anil K. Bera, "A Class of Nonlinear ARCH Models," *International Economic Review*, 33(1), 1992, pp.137–158.

Jarque, Carlos M. and Anil K. Bera, "Test for Normality of Observations and Regression Residuals," *International Statistical Review*, 55(2), 1987, pp.163–172.

Karanasos, Menelaos and Jinki Kim, "A Re-examination of the Asymmetric Power ARCH Model," *Journal of Empirical Finance*, 13(1), 2006, pp.113–128.

Koopman, Siem Jan, Borus Jungbacker and Eugenie Hol, "Forecasting Daily Variability of the S&P 100 Stock Index using Historical, Realized and Implied Volatility Measurements," *Journal of Empirical Finance*, 12(3), 2005, pp.445–475.

Kristensen, Dennis and Oliver Linton, "A Closed-form Estimator for the GARCH(1,1)-model," *Econometric Theory*, 22, 2006, pp.323–337.

Kupiec, Paul, "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models," *Journal of Derivatives*, 3(2), 1995, pp.73–84.

Lambert, Philippe and Sébastien Laurent, "Modelling Financial Time Series using GARCH-type Models and a Skewed Student Distributions for the Innovations," Discussion Paper 0125, Institute de Statistique, Universit'e Catholique de Louvain, 2001.

Ljung, G. M. and G. E. P. Box, "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models," *Biometrika*, 65(2), 1978, pp.297–303.

Mandelbrot, Benoit, "The Variation of Certain Speculative Prices," *Journal of Business*, 36(3), 1963, pp.394–419.

Mincer, Jacob and Victor Zarnowitz, "The Evaluation of Economic Forecasts," Jacob Mincer eds., *Economic Forecasts and Expectations*, 1969, National Bureau of Economic Research.

Nakatsuma, Teruo, "Bayesian Analysis of ARMA-GARCH Models: A Markov Chain Sampling Approach," *Journal of Econometrics*, 95(1), 2000, pp.57–69.

Nelson, Daniel B., "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 1991, 59(2), pp.347–370.

Pantula, Ssatry G., "Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment," *Econometric Reviews*, 5, 1986, pp.71–74.

Schoffer, Olaf, "HY-A-PARCH: A Stationary A-PARCH Model with Long Memory," Technical Report 4003, Fachbereich Statistik, Universität Dortmunt, 2003.

Schwert, G. William, "Why Does Stock Market Volatility Change over Time?" *Journal of Finance*, 44(5), 1989, pp.1115–1153.

Schwert, G. William, "Stock Volatility and the Crash of '87," *Review of Financial Studies*, 3(1), 1990, pp.77–102.

Straumann, Daniel, *Estimation in Conditionally Heteroscedastic Time Series Models*, 2005, Springer.

Taylor, Stephen J., *Modeling Financial Time Series*, 1986, John Wiley and Sons.

Taylor, Stephen J., "Consequences for Option Pricing for a Lomg Memory in Volatility," Working Paper 2001/017, Lancaster University Management School, 2001.

Thomakos, Dimitrios D. and Tao Wang, "Realized Volatility in the Futures Markets," *Journal of Empirical Finance*, 10(3), 2003, pp.321–353.

Tse, Yiu Kuen., "The Conditional Heteroskedasticity of the Yen-Dollar Exchange Rate," *Journal of Applied Econometrics*, 13(1), 1998, pp.49–55.

Ubukata, Masato and Toshiaki, Watanabe, " Pricing Nikkei 225 Options using Realized Volatility, "Mimeo, 2005.

Watanabe, Toshiaki, "Excess Kurtosis of Conditional Distribution for Daily Stock Returns: The Case of Japan," *Applied Economics Letters*, 7(6), 2000, pp.353–355.

Watanabe, Toshiaki and Keiko Yamaguchi, "Measuring, Modeling and Forecasting Realized Volatility in the Nikkei 225 Stock Index Futures Market," Mimeo, 2005.

Wu, Guojun, "The Determinants of Asymmetric Volatility," *Review of Financial Studies*, 14(3), 2001, pp.837–859.

Zakoian, Jean.-Michel, "Threshold Heteroskedasticity Models," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18(5), 1994, pp.931–955.

表 1: 日経平均日次変化率と RV の基本統計量

サンプル期間：2000 年 1 月 4 日–2005 年 12 月 19 日　　サンプル数:1,468

(a) 日経平均日次変化率

平均	標準偏差	最大値	最小値	歪度	尖度	JB	LB(10)	
							変化率	変化率 2 乗
-0.014	1.430	7.222	-7.234	-0.131	4.727	186.55	6.03	60.63
(0.037)				(0.064)	(0.128)			

括弧内の数値は標準誤差。JB は正規性を検定するための Jarque-Bera 統計量で、臨界値は 4.61 (10%)、5.99 (5%)、9.21 (1%)。LB(10) は 1 次から 10 次までの自己相関がすべて 0 であるという帰無仮説を検定するための Ljung-Box 統計量で、Diebold (1988) の方法により分散不均一性を調整している。LB(10) の臨界値は 15.99 (10%)、18.31 (5%)、23.21 (1%)。

(b) 日経平均 RV

	平均	標準偏差	最大値	最小値	LB(10)
RV	1.507	1.215	20.838	0.082	951.42
	(0.032)				
ln(RV)	0.156	0.742	3.037	-2.506	2599.51
	(0.019)				

括弧内の数値は標準誤差. LB(10) は 1 次から 10 次までの自己相関がすべて 0 であるという帰無仮説を検定するための Ljung-Box 統計量で、Diebold (1988) の方法により分散不均一性を調整している。LB(10) の臨界値は 15.99 (10%)、18.31 (5%)、23.21 (1%)。

表 2: ARCH 型モデルの推定結果

サンプル期間：2000 年 1 月 4 日–2004 年 1 月 26 日　　サンプル数:1,000

(a) GARCH

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2,\ \omega > 0,\ \beta, \alpha \geq 0$$

	正規分布	t 分布	skewed-t 分布
ω	0.139	0.119	0.119
	(0.047)	(0.050)	(0.050)
β	0.890	0.903	0.903
	(0.025)	(0.027)	(0.027)
α	0.056	0.049	0.049
	(0.016)	(0.016)	(0.016)
υ		12.123	12.231
		(3.913)	(4.011)
ξ			0.987
			(0.045)
対数尤度	-1868.71	-1860.81	-1860.77

括弧内の数値は標準誤差。

(b) GJR

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^{-}\epsilon_{t-1}^2,\ \omega > 0,\ \beta,\alpha,\gamma \geq 0$$

	正規分布	t 分布	skewed-t 分布
ω	0.134	0.110	0.109
	(0.043)	(0.044)	(0.043)
β	0.890	0.906	0.906
	(0.024)	(0.025)	(0.026)
α	0.029	0.019	0.019
	(0.016)	(0.015)	(0.016)
γ	0.054	0.060	0.060
	(0.026)	(0.026)	(0.026)
υ		12.035	12.159
		(3.854)	(3.988)
ξ			0.983
			(0.045)
対数尤度	-1866.28	-1858.01	-1857.94

括弧内の数値は標準誤差。

(c) EGARCH

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta\left\{\ln(\sigma_{t-1}^2) - \omega\right\} + \theta z_{t-1} + \gamma\left\{|z_{t-1}| - E\left(|z_{t-1}|\right)\right\}$$

	正規分布	t 分布	skewed-t 分布
ω	0.896	0.834	0.832
	(0.083)	(0.093)	(0.093)
β	0.944	0.955	0.955
	(0.018)	(0.019)	(0.019)
θ	-0.052	-0.058	-0.058
	(0.020)	(0.021)	(0.021)
γ	0.116	0.091	0.091
	(0.034)	(0.035)	(0.034)
υ		11.409	11.473
		(3.450)	(3.487)
ξ			0.990
			(0.045)
対数尤度	-1867.15	-1858.53	-1858.50

括弧内の数値は標準誤差。

(d) APGARCH

$$\sigma_t^\delta = \omega + \beta\sigma_{t-1}^\delta + \alpha\left(|\epsilon_{t-1}| - \gamma\epsilon_{t-1}\right)^\delta,\ \delta,\omega > 0,\ \beta,\alpha \geq 0,\ -1 < \gamma < 1$$

	正規分布	t 分布	skewed-t 分布
ω	0.117	0.087	0.088
	(0.053)	(0.044)	(0.042)
β	0.892	0.911	0.911
	(0.025)	(0.027)	(0.026)
α	0.056	0.047	0.047
	(0.019)	(0.018)	(0.018)
γ	0.309	0.478	0.470
	(0.205)	(0.338)	(0.332)
δ	1.716	1.532	1.551
	(0.701)	(0.639)	(0.631)
υ		11.777	11.892
		(3.653)	(3.728)
ξ			0.985
			(0.045)
対数尤度	-1866.21	-1857.81	-1857.75

括弧内の数値は標準誤差。

(e) FIEGARCH

$$(1-\beta L)(1-L)^d \left\{\ln(\sigma_t^2)-\omega\right\} = \theta z_{t-1} + \gamma \left\{|z_{t-1}| - E(|z_{t-1})\right\}$$

	正規分布	t 分布	skewed-t 分布
ω	0.889	0.690	0.687
	(0.136)	(0.197)	(0.200)
ϕ	0.905	0.889	0.888
	(0.041)	(0.062)	(0.062)
θ	-0.035	-0.038	-0.038
	(0.018)	(0.017)	(0.016)
γ	0.098	0.068	0.068
	(0.029)	(0.028)	(0.028)
d	0.243	0.342	0.342
	(0.151)	(0.172)	(0.173)
υ		11.345	11.429
		(3.311)	(3.441)
ξ			0.988
			(0.045)
対数尤度	-1865.86	-1856.79	-1856.76

括弧内の数値は標準誤差。

表 3: RV-ARFIMAX モデルの推定結果

サンプル期間：2000 年 1 月 4 日–2004 年 1 月 26 日　　サンプル数:1,000

(a) RV-ARFIMAX モデルのパラメータの推定結果

$$(1-L)^d \left\{ \ln(RV_t) - \mu_0 - \mu_1 |R_{t-1}| - \mu_2 D^-_{t-1} |R_{t-1}| \right\} = (1+\theta L) u_t, \ u_t \sim \text{i.i.d.} N(0, \sigma_u^2)$$

d	μ_0	μ_1	μ_2	θ	σ_u^2
0.473	0.292	0.001	0.050	-0.188	0.193
(0.055)	(0.174)	(0.019)	(0.017)	(0.069)	(0.010)

括弧内の数値は標準誤差。

(b) 残差 $\hat{u}_t$ の基本統計量

平均	標準偏差	最大値	最小値	歪度	尖度	JB	LB(10)
0.004	0.440	2.186	-1.272	0.291	3.823	42.32	8.85
(0.014)				(0.077)	(0.155)		

括弧内の数値は標準誤差。JB は正規性を検定するための Jarque-Bera 統計量で、臨界値は 4.61 (10%)、5.99 (5%)、9.21 (1%)。LB(10) は 1 次から 10 次までの自己相関がすべて 0 であるという帰無仮説を検定するための Ljung-Box 統計量で、Diebold (1988) の方法により分散不均一性を調整している。LB(10) の臨界値は 15.99 (10%)、18.31 (5%)、23.21 (1%)。

表 4: ボラティリティ予測

(a) RMSE, RMSPE, MAE, MAPE

	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE
RV-ARFIMAX	0.500	0.860	0.354	0.589
GARCH-n	0.754	1.680	0.619	1.213
GARCH-t	0.751	1.657	0.612	1.192
GARCH-st	0.750	1.654	0.612	1.191
GJR-n	0.765	1.605	0.608	1.153
GJR-t	0.761	1.605	0.605	1.150
GJR-st	0.759	1.602	0.604	1.149
EGARCH-n	0.733	1.523	0.584	1.095
EGARCH-t	0.716	1.482	0.567	1.060
EGARCH-st	0.735	1.536	0.586	1.103
APGARCH-n	0.752	1.560	0.596	1.123
APGARCH-t	0.745	1.557	0.592	1.116
APGARCH-st	0.745	1.557	0.591	1.117
FIEGARCH-n	0.670	1.328	0.515	0.945
FIEGARCH-t	0.676	1.367	0.524	0.971
FIEGARCH-st	0.675	1.364	0.523	0.969

GARCH、GJR、EGARCH、APGARCH、FIEGARCH の後の -n, -t, -st は、(2) 式の z_t の分布に、それぞれ、標準正規分布、分散を 1 に基準化した t 分布、skewed-t 分布を仮定していることを表している。

(b) Mincer-Zarnowitz 回帰

$$RV_t = a + b\hat{\sigma}^2_{t|t-1} + \eta_t$$

	a	b	F 値	R^2
RV-ARFIMAX	0.102	0.862	2.90	0.319
	(0.053)	(0.058)		
GARCH-n	0.111	0.540	299.01	0.315
	(0.053)	(0.037)		
GARCH-t	0.134	0.529	284.98	0.301
	(0.053)	(0.037)		
GARCH-st	0.132	0.530	283.63	0.302
	(0.053)	(0.037)		
GJR-n	0.178	0.496	331.31	0.334
	(0.047)	(0.032)		
GJR-t	0.184	0.495	316.54	0.324
	(0.048)	(0.033)		
GJR-st	0.182	0.497	314.51	0.325
	(0.048)	(0.033)		
EGARCH-n	0.170	0.516	284.00	0.332
	(0.048)	(0.034)		
EGARCH-t	0.185	0.516	249.21	0.318
	(0.048)	(0.035)		
EGARCH-st	0.175	0.512	276.01	0.319
	(0.049)	(0.035)		
APGARCH-n	0.184	0.498	311.94	0.333
	(0.047)	(0.033)		
APGARCH-t	0.188	0.500	292.69	0.322
	(0.048)	(0.034)		
APGARCH-st	0.187	0.501	292.46	0.323
	(0.048)	(0.034)		
FIEGARCH-n	0.207	0.529	195.33	0.327
	(0.046)	(0.035)		
FIEGARCH-t	0.204	0.527	197.25	0.318
	(0.047)	(0.036)		
FIEGARCH-st	0.203	0.529	196.08	0.318
	(0.047)	(0.036)		

GARCH、GJR、EGARCH、APGARCH、FIEGARCH の後の -n, -t, -st は、(2) 式の z_t の分布に、それぞれ、標準正規分布、分散を 1 に基準化した t 分布、skewed-t 分布を仮定していることを表している。括弧内の数値は標準誤差。F 値はボラティリティの予測値の不偏性 ($H_0 : a = b = 1$) を検定するためのもので、臨界値は 2.31(10%)、3.01 (5%)、4.65 (1%)。

表 5: w_t の分布の推定結果

$$R_t = \sqrt{\sigma^2 RV_{t|t-1}} w_t$$

$$\begin{aligned} w_t &\sim \text{i.i.d.} N(0,1) \\ w_t &\sim \text{i.i.d. standardized-}t(\upsilon) \\ w_t &\sim \text{i.i.d. standardized skewed-}t(\upsilon,\xi) \end{aligned}$$

	正規分布	t 分布	skewed-t 分布
σ	1.186	1.186	1.185
	(0.027)	(0.030)	(0.030)
υ		15.120	15.466
		(5.964)	(6.283)
ξ			0.980
			(0.045)
対数尤度	-1590.47	-1585.43	-1585.33

括弧内の数値は標準誤差。

表 6: Value-at-Risk

(a) Failure rate (%)

	long position			short position		
	10%	5%	1%	10%	5%	1%
RV-ARFIMAX-n	10.897	7.479	2.778	15.598	8.974	3.632
RV-ARFIMAX-t	8.761	3.632	0.641	11.538	5.556	0.000
RV-ARFIMAX-st	8.761	3.632	0.641	14.103	7.479	1.068
GARCH-n	6.197	2.991	0.855	9.402	4.060	0.427
GARCH-t	6.624	3.205	0.855	10.684	4.487	0.214
GARCH-st	6.624	3.205	0.855	12.607	5.983	0.855
GJR-n	5.983	2.778	0.855	10.043	4.274	0.427
GJR-t	6.838	2.991	0.855	10.470	4.487	0.214
GJR-st	6.410	2.778	0.855	12.179	6.197	1.068
EGARCH-n	6.624	3.419	0.855	9.615	4.487	0.427
EGARCH-t	7.265	4.274	0.855	10.897	5.556	0.214
EGARCH-st	6.624	3.632	0.855	11.966	7.265	1.068
APGARCH-n	5.983	2.991	0.855	10.043	4.487	0.427
APGARCH-t	6.838	3.419	0.855	10.470	4.701	0.214
APGARCH-st	6.410	3.205	0.855	12.393	7.051	1.282
FIEGARCH-n	8.120	3.632	0.855	10.684	6.410	1.282
FIEGARCH-t	8.120	3.632	0.855	11.538	6.624	0.641
FIEGARCH-st	8.120	3.632	0.641	13.675	8.120	2.137

RV-ARFIMAX の後の -n、-t、-st は、(31) 式の w_t の分布に、それぞれ、標準正規分布、分散を 1 に基準化した t 分布、skewed-t 分布を仮定していることを表している。また、GARCH、GJR、EGARCH、APGARCH、FIEGARCH の後の -n, -t, -st は、(2) 式の z_t の分布に、それぞれ、標準正規分布、分散を 1 に基準化した t 分布、skewed-t 分布を仮定していることを表している。

(b) Kupiec [1995] の尤度比検定の p 値

	long position			short position		
	10%	5%	1%	10%	5%	1%
RV-ARFIMA-n	0.523	0.021	0.002	0.000	0.000	0.000
RV-ARFIMA-t	0.362	0.154	0.403	0.278	0.588	0.000
RV-ARFIMA-st	0.362	0.154	0.403	0.005	0.021	0.883
GARCH-n	0.003	0.032	0.746	0.663	0.335	0.160
GARCH-t	0.010	0.057	0.746	0.625	0.605	0.038
GARCH-st	0.010	0.057	0.746	0.070	0.343	0.746
GJR-n	0.002	0.016	0.746	0.975	0.460	0.160
GJR-t	0.016	0.032	0.746	0.736	0.605	0.038
GJR-st	0.006	0.016	0.746	0.127	0.251	0.883
EGARCH-n	0.010	0.097	0.746	0.780	0.605	0.160
EGARCH-t	0.039	0.460	0.746	0.523	0.588	0.038
EGARCH-st	0.010	0.154	0.746	0.168	0.035	0.883
APGARCH-n	0.002	0.032	0.746	0.975	0.605	0.160
APGARCH-t	0.016	0.097	0.746	0.736	0.764	0.038
APGARCH-st	0.006	0.057	0.746	0.095	0.054	0.557
FIEGARCH-n	0.162	0.154	0.746	0.625	0.179	0.557
FIEGARCH-t	0.162	0.154	0.746	0.278	0.124	0.403
FIEGARCH-st	0.162	0.154	0.403	0.012	0.004	0.032

RV-ARFIMAX の後の -n、-t、-st は、(31) 式の w_t の分布に、それぞれ、標準正規分布、分散を 1 に基準化した t 分布、skewed-t 分布を仮定していることを表している。また、GARCH、GJR、EGARCH、APGARCH、FIEGARCH の後の -n, -t, -st は、(2) 式の z_t の分布に、それぞれ、標準正規分布、分散を 1 に基準化した t 分布、skewed-t 分布を仮定していることを表している。

(c) Engle and Manganelli [1999] の dynamic quantile 検定の p 値

	long position			short position		
	10%	5%	1%	10%	5%	1%
RV-ARFIMA-n	0.117	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
RV-ARFIMA-t	0.844	0.212	0.998	0.061	0.006	0.000
RV-ARFIMA-st	0.838	0.213	0.998	0.017	0.000	0.991
GARCH-n	0.085	0.510	0.989	0.011	0.008	0.962
GARCH-t	0.165	0.682	0.987	0.018	0.001	0.840
GARCH-st	0.163	0.682	0.987	0.005	0.000	0.801
GJR-n	0.174	0.390	0.997	0.004	0.004	0.963
GJR-t	0.130	0.494	0.997	0.005	0.008	0.849
GJR-st	0.234	0.387	0.997	0.000	0.000	0.702
EGARCH-n	0.171	0.533	0.999	0.005	0.000	0.965
EGARCH-t	0.597	0.476	0.998	0.000	0.000	0.000
EGARCH-st	0.330	0.222	0.998	0.003	0.000	0.647
APGARCH-n	0.176	0.498	0.999	0.004	0.000	0.965
APGARCH-t	0.334	0.784	0.999	0.005	0.000	0.851
APGARCH-st	0.234	0.653	0.999	0.001	0.000	0.556
FIEGARCH-n	0.895	0.688	0.999	0.022	0.000	0.534
FIEGARCH-t	0.910	0.685	0.999	0.018	0.000	0.969
FIEGARCH-st	0.909	0.685	0.999	0.001	0.000	0.000

RV-ARFIMAX の後の -n、-t、-st は、(31) 式の w_t の分布に、それぞれ、標準正規分布、分散を 1 に基準化した t 分布、skewed-t 分布を仮定していることを表している。また、GARCH、GJR、EGARCH、APGARCH、FIEGARCH の後の -n, -t, -st は、(2) 式の z_t の分布に、それぞれ、標準正規分布、分散を 1 に基準化した t 分布、skewed-t 分布を仮定していることを表している。