

# IMES DISCUSSION PAPER SERIES

## ハザード間の相関を考慮に入れた 信用派生商品の評価法

むろい よしふみ  
室井 芳史\*

Discussion Paper No. 2006-J-11

# IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい

**備考：** 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

## ハザード間の相関を考慮に入れた信用派生商品の評価法

むろい よしふみ  
室井 芳史\*

### 要 旨

本論文では、複数の企業のデフォルト・リスクを伴う信用派生商品を誘導型アプローチで価格評価する手法を示す。具体的な商品として、カウンターパーティ・リスクを考慮した場合のクレジット・デフォルト・スワップやバスケット型のクレジット・デフォルト・スワップに加えて、これらのスワップのオプション（スワップション）を評価の対象とする。特に、スワップションの評価は必ずしも解析的に取り扱いやすい問題ではない。そこで、本論文では、クレジット・デフォルト・スワップの価格が偏微分方程式の解として与えられ、同スワップションはその解を基にモンテカルロ法で評価できることを示すほか、クレジット・デフォルト・スワップおよびスワップションの価格が、マリアバン解析をベースとして発展した小分散漸近展開法により、近似価格法を用いて評価可能であることを示す。

キーワード：クレジット・デフォルト・スワップ、クレジット・デフォルト・スワップション、コックス過程、偏微分方程式、小分散漸近展開、バスケット・スワップ、マリアバン解析

JEL classification: G13

\* 日本銀行金融研究所（現 大阪大学金融・保険教育研究センター助手、  
E-mail: muroi@sigmath.es.osaka-u.ac.jp）

本論文の内容は 2006 年 3 月に日本銀行で開催された「金融商品の価格付け手法とリスク管理技術の新潮流」をテーマとする研究報告会（FE テクニカル・ミーティング）への提出論文に加筆・修正を施したものである。同研究報告会の参加者からは多くの貴重なコメントを頂戴した。特に、中川秀敏助教授（東京工業大学）からは同研究報告会以外の場を含めて貴重な助言を頂いた。ここに記して感謝したい。本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

# 目次

1	はじめに	1
2	信用派生商品の評価法について	2
3	クレジット・デフォルト・スワップの価格	4
4	偏微分方程式による信用派生商品の評価	12
4.1	クレジット・デフォルト・スワップ	12
4.2	クレジット・デフォルト・スワップション	16
5	小分散漸近展開法による信用派生商品の評価	17
5.1	クレジット・デフォルト・スワップ	18
5.2	クレジット・デフォルト・スワップション	23
6	バスケット・スワップとバスケット・スワップション	27
7	数値計算	30
8	まとめ	39
	補論 小分散漸近展開法の正当性	40
	参考文献	46

# 1 はじめに

近年、信用リスクへの関心の高まりから、信用派生商品の評価方法の議論が活発になっている。信用派生商品の中でも、クレジット・デフォルト・スワップ（デフォルト・スワップ）は、その代表的な商品である。デフォルト・スワップとは、「取引するリスクの対象である企業と想定元本を決め、デフォルト・スワップの買い手は、定期的にスワップ・プレミアムと呼ばれるフィーを売り手に払う代わりに、当該企業が債務不履行等を起こした場合はデフォルト・スワップの売り手から元本の支払いを受ける」契約を指している。デフォルト・スワップは、特定企業のデフォルト・リスクを取引する機能を有する商品である。

従来研究されてきた信用派生商品进行评估する方法として、誘導型アプローチと構造型アプローチの2つのアプローチがある。本論文では、誘導型アプローチによるモデルの構築を行う。誘導型アプローチは、1990年代半ばより発達したモデリング法であり、企業のデフォルト時刻をハザード・レートでモデル化し、デフォルト・リスクを持つ商品の価格を計算する手法である。この方法を解説した論文としては、Jarrow and Turnbull [1995] や Duffie and Singleton [1999] が有名である。また、デフォルト・スワップやクレジット・スプレッド・オプションの評価方法については丸茂・家田 [2001] を参照。また、社債オプションの評価については、例えば、Muroi [2002,2004,2005] 等で研究が行われている。

本論文では、複数の企業のデフォルト・リスクを考慮に入れたモデルで信用派生商品の評価を行う。このようなモデルでは、カウンターパーティ・クレジット・リスクを考慮に入れたデフォルト・スワップの評価やバスケット型のデフォルト・スワップ（バスケット・スワップ）の評価が可能となる。一般に、デフォルト・スワップは、契約の参照企業のみならず取引主体のデフォルト・リスクも考慮に入れて価格が決まる。この取引主体のデフォルト・リスクをカウンターパーティ・クレジット・リスクと呼ぶ。カウンターパーティ・クレジット・リスクを考慮に入れた価格評価モデルの先行研究としては、例えば、Huge and Lando [1999], Chen and Filipović [2003] や Jarrow and Yu [2001] 等がある。また、複数企業のデフォルトが影響する信用派生商品の他の例として、バスケット・スワップが挙げられる。バスケット・スワップは、例えば、Kijima [2000] や Kijima and Muromachi [2000] で議論されている。そこで、本論文では、バスケット・スワップとそのオプション（バスケット・スワップション）の評価法にも言及する。誘導型アプローチにおいて、複数のハザード過程を考慮したモデルで信用派生商品の価格評価を行うと、金利過程に加えて数多くのハザード過程を扱うモデルを構築する必要があり、商品価格の計算が複雑になる傾向がある。この問題に対処するために、本論文では、まず、Chen and Filipović

[2003] に倣い、偏微分方程式を用いた価格付けを行う。また、その結果を用いて、モンテカルロ法によりクレジット・デフォルト・スワップション（デフォルト・スワップション）の評価を行う方法を考える。ここで、デフォルト・スワップションの価格評価を行うにあたり、モンテカルロ法以外の手段として、Kunitomo and Takahashi [2001] で導入された小分散漸近展開法の適用も考察する。また、小分散漸近展開法を用いてデフォルト・スワップションの価格計算方法を議論する。小分散漸近展開法は、包括的かつ効率的な計算手法であり、信用派生商品の価格の近似式を閉じた形で導出する。本手法は、近年 Muroi [2005] 等で信用派生商品の価格の計算に既に応用されており、社債オプション等の評価が簡便に行える利点を持つ。

本論文の構成は以下のとおりである。本節に続く、2節において、構造型アプローチおよび誘導型アプローチによる社債の価格の計算法について簡単な解説を行う。3節では、デフォルト・スワップについて若干の解説を行ったうえで、その評価方法の議論を行う。4節では、3節の結果を基に偏微分方程式を用いたデフォルト・スワップの価格の導出を行う。また、4節後半では、モンテカルロ法を用いたデフォルト・スワップションの評価方法を議論する。5節では小分散漸近展開法を用いたデフォルト・スワップおよびデフォルト・スワップションの評価方法を議論する。6節では、バスケット・スワップおよびバスケット・スワップションの評価方法に言及する。7節では数値計算の結果を示し、8節では本論文のまとめを述べる。なお、5節で用いる小分散漸近展開法については、補論で、マリアバン解析と呼ばれる数学的手法を用いてその正当性を解説する。

## 2 信用派生商品の評価法について

前節で既に述べたように、主な信用派生商品の評価法として、構造型アプローチと、誘導型アプローチの2種類のアプローチがある。本節では、それぞれの手法による社債の評価法を簡単に解説する。

Black and Cox [1976] や Merton [1976] により提案された構造型アプローチは、企業価値が確率微分方程式の解で表されると仮定し、この企業価値過程があらかじめ指定された境界を下回ったときに、デフォルトが起こるとしたモデルを構築した。典型的なモデリングは以下のとおりである。社債を発行している企業の価値が幾何ブラウン運動

$$dv_t = \mu v_t dt + \sigma v_t dW_t, \quad v_0 = v$$

に従って変動しているとする。ここで、 $W_t$  は現実の確率測度  $P$  の下での標準ブラウン運動であり、 $\mu$  と  $\sigma$  はドリフトとボラティリティの水準であり正の定数である。また、無

リスク金利の水準は  $r(> 0)$  で一定とする。社債の発行残高は  $L$  であり、満期  $T$  において企業価値が  $L$  を上回っている場合には、企業価値を切り崩して社債の返済に充て、満期において企業価値が  $L$  を下回った場合は、その企業を清算して社債の返済に充てるとする。すなわち、満期において、債券の保有者は  $\min\{L, v_T\}$  を受け取り、株式保有者は  $\max\{v_T - L, 0\}$  を受け取るモデルを構築する。Duffie [2001] で論じられるようにモデルは完備市場モデルであり、リスク中立確率測度  $Q$  が存在するとする。株式オプションの評価モデルと同様の議論から、 $\tilde{W}_t$  をリスク中立確率測度の下での標準ブラウン運動とすると、測度  $Q$  での企業価値過程は

$$dv_t = rv_t dt + \sigma v_t d\tilde{W}_t$$

である。株式価値の総額  $S_t$  は、次の条件付期待値を計算して求まる。

$$S_t = E_t^Q [e^{-r(T-t)} \max\{v_T - L, 0\}]$$

この式は、ブラック・ショールズのオプション評価式と全く同様に計算できる。ここで、 $E_t^Q$  は確率測度  $Q$  の下で時刻  $t$  までの企業価値過程  $v_t$  の挙動を所与として条件付けた期待値を表す。債券価値の総額は  $v_t - S_t$  で与えられ、社債価格を求めることができる。このようなモデリング方法は、社債の満期以前の時刻でのデフォルトを考慮に入れていない。一方、企業価値過程が初めて、時刻  $[0, T]$  で定義されたしきい値を下回ったタイミングをデフォルト時刻とするモデルも研究されている。そのような研究例としては Black and Cox [1976] や Longstaff and Schwartz [1995] 等がある。構造型アプローチによるプライシング手法は、デフォルト時刻の経済的意味付けが明確である反面、短期のデフォルト・リスクを正確に表現することが難しい。

一方、本論文で扱われた誘導型アプローチは Jarrow and Turnbull [1995] や Duffie and Singleton [1999] 等 1990 年代より盛んに研究が行われている手法であり、デフォルト時刻をハザード過程に支配された停止時刻で規定されるとしてモデリングを行う。本研究でも、この手法を用いてデフォルト・スワップやデフォルト・スワップションの評価を行っている。この方法を用いると、金利派生商品と同様の技法を用いて信用派生商品のプライシングが可能である。詳細は後述するが、このモデルの直感的な考え方は以下のとおりである。(短期)金利過程を  $r(t)$  として、社債を発行している企業のデフォルト時刻を  $\tau$  とする。デフォルト時刻は確率ハザード過程  $h(t)$  により規定された点過程の初めてのジャンプ時刻とする。よく行われる定義の仕方として、 $E$  を標準指数分布に従う確率分布で、確率過程  $r(t)$  や  $h(t)$  とは独立な確率変数とする。デフォルト時刻  $\tau$  を

$$\tau = \inf\{t : \int_0^t h(s) ds \geq E\} \quad (1)$$

で定義する。この停止時刻は、ハザードが  $h(t)$  である点過程の初めてのジャンプ時刻と同じ確率分布を持つ。Duffie and Singleton [1999] では満期においてペイオフ 1 が発生し、満期前にデフォルトが発生した場合、デフォルト時刻  $t$  において直前の債券価格の  $l_t$  倍の返済があるような商品を考えている。この商品の価格は

$$v(0, T) = E^Q[\exp(-\int_0^T r(t) + (1 - l_t)h(t)dt)]1_{\{\tau > 0\}}$$

と書ける。また、Jarrow and Turnbull [1995] のように、満期前にデフォルトがなければ満期でペイオフ 1 が返済され、満期前にデフォルトがあった場合には満期において  $\delta$  の返済がある商品は

$$v(0, T) = \delta E^Q[\exp(-\int_0^T r(t)dt)] + (1 - \delta)E^Q[\exp(-\int_0^T r(t) + h(t)dt)]1_{\{\tau > 0\}}$$

と価格計算がなされる。特に、確率過程  $X_t = (X_t^1, X_t^2)' = (r(t), h(t))'$  を確率微分方程式

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

の解とした場合を考察する。ここで、 $W_t$  は  $d$  次元標準ブラウン運動である。ここで、 $K_0 \in \mathbb{R}^d, K_1 \in \mathbb{R}^{d \times d}, H_{0ij} \in \mathbb{R}^d$  および  $H_{1ij} \in \mathbb{R}^d$  とする。この確率微分方程式がアファイン構造

$$\mu(x, t) = K_0 + K_1 x, \quad (\sigma(x, t)\sigma(x, t)')_{ij} = H_{0ij} + H_{1ij} \cdot x$$

を持つとき、Duffie and Singleton [1999] および Jarrow and Turnbull [1995] どちらのアプローチでも、偏微分方程式を解くことで社債価格計算が計算できる。また、近年では社債の派生商品の価格付け問題についても研究が行われている。社債オプションの評価法については、例えば、Muroi [2002] ではアメリカ型オプションの解析が行われている。さらに、Muroi [2004] では、ゼロ・リカバリー債のオプションはフーリエ解析を用いて価格計算できることを指摘しているが、社債のリカバリー・レートが 0 ではない場合、金利過程およびハザード過程が確率的に変動するモデルにおける債券オプションの評価は難しい問題であり、本研究で用いられる小分散漸近展開法等の技法を用いる必要性がある。

### 3 クレジット・デフォルト・スワップの価格

本節では、カウンターパーティ・リスクを取り込んだ信用派生商品の価格付け問題を誘導型アプローチを用いて考察する。本節の前半では、6 節で考察するバスケット・スワップの価格付け問題への応用に備えて、複数の企業 ( $I$  社) の存在を仮定した一般的なモデ



ルで議論を行う。本節の後半では、Chen and Filipović [2003] が論じた、バミューダ型のデフォルト・スワップの評価問題に焦点を当てて議論を行う。

デフォルト・スワップは、ある企業のデフォルト・リスクのヘッジに用いられる商品であり、デフォルト・スワップの買い手はあらかじめ決められた期日にスワップ・プレミアムと呼ばれるフィーを売り手に払う代わりに、当該企業のデフォルトが満期前に生じた場合には売り手からの一定の金額の支払いを受ける取引である。すなわち、企業のデフォルトに対する一種の保険の機能を持った商品である。デフォルト・スワップを購入することで、ある企業のデフォルト・リスクを抱える投資家は、デフォルト・リスクのヘッジが可能となる。本論文では、デフォルト・スワップの評価とデフォルト・スワップションの評価を行う。

まず、本論文の問題設定を行う。フィルター付き確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, U]}, P)$  を考え、これは通常条件<sup>1</sup> ('usual conditions') を満たすとする。確率測度  $P$  は、現実の確率を定めているとする。また、リスク中立的な確率測度  $Q$  が存在すると仮定する。この市場には、2種類のリスク、企業のデフォルト・リスクと金利リスク、が存在しているとする。金利リスクは、短期金利過程  $r(t)$  を用いてモデル化する。企業のデフォルト・リスクは、停止時刻として表現される企業のデフォルト時刻を通じてモデル化する。これらの企業のデフォルト時刻を記述する停止時刻をそれぞれ  $\tau_1, \dots, \tau_I$  とする。また、各企業のデフォルト時刻に関するハザード過程を  $h_1(t), \dots, h_I(t)$  とする<sup>2</sup>。金利とハザードの確率過程について、以下の仮定を設ける<sup>3</sup>。

仮定 3.1 金利過程  $\{r(t)\}$  と、各企業のハザード過程  $\{h_i(t)\}$  ( $i = 1, \dots, I$ ) は、正の値をとる可予測な確率過程であり、 $t \in [0, U]$  で

$$\int_0^t r(s) ds < \infty, \quad \int_0^t h_i(s) ds < \infty \quad (i = 1, \dots, I)$$

を満たす。

<sup>1</sup>フィルトレーション  $\{\mathcal{F}_t\}$  が通常条件を満たすとは、 $\{\mathcal{F}_t\}$  が右連続であり、 $\{\mathcal{F}_0\}$  が全ての測度 0 の事象を含むことをいう。

<sup>2</sup>時刻  $t$  でハザードが  $h(t)$  であるとは、時刻  $t$  で当該企業のデフォルトが生じていないとしたとき、 $\Delta t$  を微小な値として次の瞬間  $(t, t + \Delta t]$  にデフォルトが生じる確率は  $h(t)\Delta t$  であることを示す。

<sup>3</sup>本節では、金利過程やハザード過程が正值しか取らないことを仮定しているが、本論文の数値計算の章では、金利過程やハザード過程がガウシアンの場合等、負値を取りうる確率過程を用いて定式化を行っている箇所がある。このようなモデルは数学的な意味では厳密な正当化ができないが、数値計算の簡便さにより既存研究でも用いられることがある。

本節での議論のために、以下のフィルトレーションを導入する<sup>4</sup>。

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_t &= \sigma\{r(s), h_1(s), \dots, h_I(s) : 0 \leq s \leq t\} \\ \mathcal{H}_t^i &= \sigma\{1_{\{\tau_i \leq s\}} : 0 \leq s \leq t\} \quad (i = 1, \dots, I) \\ \mathcal{F}_t &= \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t^1 \vee \dots \vee \mathcal{H}_t^I.\end{aligned}$$

複数の企業のデフォルトを特徴付けるために、条件付独立 (conditionally independent) という概念を導入する。条件付独立は、例えば、Kijima and Muromachi [2000] や Kijima [2000] で見られるようにバスケット・スワップの評価問題でよく用いられる概念である。この概念を用いると、複数企業のデフォルト時刻のハザード過程が相関構造を持つモデルの構築が容易になる。その一方で、条件付独立の考え方では、ある企業のデフォルトを受けて、残りの企業のハザードが変化するようなモデル<sup>5</sup> の構築を行うことはできない。

**定義 3.1** 停止時刻  $\tau_i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) がフィルトレーション  $\{\mathcal{G}_t\}$  に関して、確率測度  $Q$  の下で条件付独立であるとは、任意の  $T > 0$  と  $t_1, \dots, t_I \in [0, T]$  について、

$$Q[\tau_1 > t_1, \dots, \tau_I > t_I | \mathcal{G}_T] = \prod_{i=1}^I Q[\tau_i > t_i | \mathcal{G}_T]$$

が成り立つことである。

つまり、条件付独立とは、未来のハザードを情報として事前に与えて条件付期待値が求められるならば、各停止時刻は互いに独立となることを指す<sup>6</sup>。

ここで、金利過程および各企業のハザード過程  $(r(t), h_1(t), \dots, h_I(t))$  と独立な確率変数  $E_1, \dots, E_I$  を考える。これらの確率変数は、互いに独立な標準指数分布に従うとする。デフォルト時刻  $\tau_i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) は、

$$\tau_i = \inf\left\{t : \int_0^t h_i(s) ds \geq E_i\right\} \quad (i = 1, \dots, I). \quad (2)$$

としてモデル化する。このモデルは、Bielecki and Rutkowski [2002] の Example 9.1.5 に対応している。この設定で、企業  $i$  のハザード過程が  $h_i(t)$  であり、かつ、各企業のデフォルト時刻が条件付独立であるモデルを考える。ここで、以下の補題が成り立つ。証明は Bielecki and Rutkowski [2002] の Lemma 9.1.1. を参照。

<sup>4</sup>フィルトレーションは、情報の集合であり、例えば、 $\mathcal{G}_t$  は時刻  $t$  までの金利過程およびハザード過程の履歴を表現していると考えればよい。同様に、 $\mathcal{H}_t^i$  は時刻  $t$  までに企業  $i$  のデフォルトが生じたか否か、また、デフォルトが生じた場合にはその時刻に関する情報を表現している。 $\mathcal{F}_t$  は時刻  $t$  までに定義された全ての確率過程の情報が含まれていると考えればよい。

<sup>5</sup>このようなモデルについては Jarrow and Yu [2001] を参照するとよい。

<sup>6</sup>一般に、条件付独立と独立は異なる概念である。条件付独立であっても独立であるとは限らず、逆も成り立たない。

補題 3.1 停止時刻  $\tau_1, \dots, \tau_I$  を (2) 式で定義するとき、以下が成立する。

(i) 時刻  $t_1, \dots, t_I$  での結合生存確率は次式で表現される。

$$Q[\tau_1 > t_1, \dots, \tau_I > t_I | \mathcal{G}_T] = \prod_{i=1}^I e^{-\int_0^{t_i} h_i(s) ds} = e^{-\sum_{i=1}^I \int_0^{t_i} h_i(s) ds}$$

(ii) 停止時刻  $\tau_1, \dots, \tau_I$  は条件付独立である。

補題 3.1 (ii) でわかるように、本論文では、ハザード過程は相関構造を持っているが、指数分布に従う確率変数  $(E_1, \dots, E_I)$  は互いに独立としてモデリングを行なうので、条件付独立の仮定の下でモデル化を行なったこととなる。

次に、Bielecki and Rutkowski [2002] の Definition 9.1.2 で与えられる、動的条件付独立 (dynamically conditionally independent) という概念を導入する。

定義 3.2 停止時刻  $\tau_i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) がフィルトレーション  $\{\mathcal{G}_t\}$  に関して、確率測度  $Q$  の下で動的条件付独立であるとは、任意の  $T > 0$  と  $t_1, \dots, t_I \in [t, T]$  について、

$$Q[\tau_1 > t_1, \dots, \tau_I > t_I | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t^1 \vee \dots \vee \mathcal{H}_t^I] = \prod_{i=1}^I Q[\tau_i > t_i | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t^1 \vee \dots \vee \mathcal{H}_t^I]$$

が成り立つことである。

現時点でのデフォルト・スワップの評価を行う場合には、定義 3.1 で導入された条件付独立の概念のみで議論可能である。ところが、本論文ではデフォルト・スワップシヨンの評価もあわせて行うので、デフォルト・スワップシヨンの満期時点でのデフォルト・スワップの価値を (確率変数の形で) 計算する必要がある。そこで、条件付独立の概念に加えて、定義 3.2 で導入した動的条件付独立の概念を用いる。本論文の設定では、以下の補題が成り立つ。証明は Bielecki and Rutkowski [2002] の Lemma 9.1.3 を参照。

補題 3.2 停止時刻  $\tau_1, \dots, \tau_I$  を (2) 式で定義するとき、以下が成立する。

(i) 停止時刻  $\tau_1, \dots, \tau_I$  は、動的条件付独立である。

(ii) 時刻  $t_1, \dots, t_I$  での結合生存確率は、次式で表現される<sup>7</sup>。

$$Q[\tau_1 > t_1, \dots, \tau_I > t_I | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t^1 \vee \dots \vee \mathcal{H}_t^I] = e^{-\sum_{i=1}^I \int_t^{t_i} h_i(s) ds} 1_{\{\tau_1 > t_1, \dots, \tau_I > t_I\}}$$

<sup>7</sup>Bielecki and Rutkowski [2002] の Lemma 9.1.3. によると (ii) の式は

$$Q[\tau_1 > t_1, \dots, \tau_I > t_I | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t^1 \vee \dots \vee \mathcal{H}_t^I] = e^{-\sum_{i=1}^I \int_t^{t_i} h_i(s) ds} 1_{\{\tau_1 > t_1, \dots, \tau_I > t_I\}}$$

となっているが、これは誤植と思われる。

次に、本補題の意味を解説する。時刻  $t$  までに各企業  $i = 1, \dots, I$  がデフォルトしたかどうかはわかっている、それ以降にデフォルトがあるかどうかはわからないとする。このとき、満期  $T$  までのハザード過程の動きが既知である場合には、企業  $i = 1, \dots, I$  のデフォルト時刻が  $t_1, \dots, t_I (> t)$  より後になる確率を評価できることを意味する。次に、6節でバスケット・スワップの評価を行うために次の補題を用意する。

補題 3.3 時刻  $s (> t)$  および停止時刻  $\tau_1, \dots, \tau_I$  について

$$Q[s \leq \tau_i < s + ds, \tau_k > s (k \neq i) | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t^1 \vee \dots \vee \mathcal{H}_t^I] = h_i(s) e^{-\sum_{i=1}^I \int_t^s h_i(u) du} ds 1_{\{\tau_1 > t, \dots, \tau_I > t\}}$$

が成り立つ。

この補題を証明するには

$$-\frac{\partial}{\partial t_i} Q[\tau_1 > t_1, \dots, \tau_I > t_I | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t^1 \vee \dots \vee \mathcal{H}_t^I] |_{t_1=s, \dots, t_I=s}$$

を計算すればよい。

ここからは、カウンターパーティ・クレジット・リスクを考慮したモデルを構築するために、 $I = 3$  の3企業モデルで考察を行う。3企業モデルは、金利過程と3企業のハザード過程のファクターを合わせて4ファクター・モデルとなる。デフォルト・スワップの価格を求めるには、参照企業のクレジット・リスクを考える必要があるが、本来はそれに加えて契約主体であるデフォルト・スワップの買い手や売り手が債務不履行となるリスクも評価する必要がある。例えば、デフォルト・スワップの売り手と参照企業がデフォルトした場合にデフォルト・スワップの契約どおりの支払いが行われない可能性が高い。また、買い手がデフォルト状態にあると、スワップ・プレミアムの支払いが行われない可能性が高い。これらの契約主体のクレジット・リスクをカウンターパーティ・クレジット・リスクと呼ぶ。

企業1を参照企業とするデフォルト・スワップの評価問題を考える。また、企業2をデフォルト・スワップの買い手、企業3を売り手とする。以下、ここでの設定を明示する。この市場では、国債と社債の2種類の債券が存在しているとする。国債は、満期  $T$  で額面の支払いが必ず発生する債券であるとする。社債は、満期  $T$  より前に企業のデフォルトが生じていなければ額面通りの支払いが債券の満期日に行われ、満期  $T$  より前に企業のデフォルトが生じていれば、額面全額が戻ってくる保証のない商品であるとする。本論文では、問題の簡略化のため、考察する全ての債券の額面を1で固定する。また、企業1の発行する社債は、企業1が満期前にデフォルトしなかった場合は満期に額面の支払いが

行われるとし、満期前にデフォルトがあれば一定の支払い  $\delta \in [0, 1)$  が発生すると仮定する。次に、以下のような2つの仮想的な商品を導入する。

- (i) 満期前にデフォルトが生じなかった場合は、満期に額面が償還され、満期前にデフォルトが生じた場合は償還が全くないゼロ・リカバリー債。
- (ii) 満期前に企業 1,2,3 のいずれの企業のデフォルトも発生しなかった場合には、満期で額面が償還され、それ以外の場合は全く償還のないゼロ・リカバリー債。本論文では、この商品を、「バスケット型ゼロ・リカバリー債」と呼ぶ。

リスク中立確率測度の存在を仮定して、それを  $Q$  と記述すると、時刻  $T$  で、国債と企業 1 のゼロ・リカバリー債の価格  $p(t, T), w_1(t, T)$  は以下で記述される。

$$\begin{aligned} p(t, T) &= E^Q[\exp(-\int_t^T r(s)ds)|\mathcal{G}_t] \\ w_1(t, T) &= E^Q[\exp(-\int_t^T r(s) + h_1(s)ds)|\mathcal{G}_t]1_{\{\tau_1 > t\}} \end{aligned}$$

同様に、バスケット型ゼロ・リカバリー債の価格  $w(t, T)$  は、

$$w(t, T) = E^Q[\exp(-\int_t^T r(s) + h_1(s) + h_2(s) + h_3(s)ds)|\mathcal{G}_t]1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > t\}}$$

となる<sup>8</sup>。この結果を用いると、企業 1 の発行する社債の価格  $v_1(t, T)$  は

$$v_1(t, T) = \delta p(t, T) + (1 - \delta)w_1(t, T) \quad (3)$$

---

<sup>8</sup> $w(t, T)$  や  $w_1(t, T)$  は同じ計算方法で導出されている。そこで、特に、 $w_1(t, T)$  式の導出過程で現れる期待値演算について説明する。

$$\begin{aligned} w_1(t, T) &= E^Q[\exp(-\int_t^T r(s)ds)1_{\{\tau_1 > T\}}|\mathcal{F}_t] = E^Q[E^Q[\exp(-\int_t^T r(s)ds)1_{\{\tau_1 > T\}}|\mathcal{G}_T \vee \mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_t] \\ &= E^Q[\exp(-\int_t^T r(s)ds)E^Q[1_{\{\tau_1 > T\}}|\mathcal{G}_T \vee \mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_t] = E^Q[\exp(-\int_t^T r(s) + h_1(s)ds)1_{\{\tau_1 > t\}}|\mathcal{F}_t] \\ &= E^Q[\exp(-\int_t^T r(s) + h_1(s)ds)|\mathcal{G}_t]1_{\{\tau_1 > t\}} \end{aligned}$$

2番目の等号は、外側の条件付期待値のフィルトレーション  $\mathcal{F}_t$  よりも内側の条件付期待値のフィルトレーション  $\mathcal{G}_T \vee \mathcal{F}_t$  の方が細かくなっている（より情報が多くなっている）ため、二重期待値の法則（‘The Law of Iterated Expectations’）によって成立する。3番目の等号は、内側の条件付期待値が満期までの金利過程およびハザード過程の動きが全て与えられたという条件での期待値であるため、 $\exp(-\int_t^T r(s)ds)$  は内側の条件付期待値で定数となって成立する。4番目の等号では、補題 3.2 (ii) を用いている。5番目の等号では、まず時刻  $t$  までのデフォルトの有無を情報として与えて条件付期待値を取っているため、インディケータ関数は条件付期待値演算の外に出せる。インディケータ関数を条件付期待値の外に出すと、条件付期待値内はデフォルトの有無の情報に依存しない式でのみ構成されているので、フィルトレーションを  $\mathcal{F}_t$  から  $\mathcal{G}_t$  に置き換えても値は不変である。

と書ける。なお、便宜的に、関数  $w_1$  および  $w$  からインディケータ関数を取り除いた関数を  $\tilde{w}_1$  および  $\tilde{w}$  と書く。すなわち、

$$\begin{aligned}\tilde{w}_1(t, T) &= E^Q[\exp(-\int_t^T r(s) + h_1(s)ds)|\mathcal{G}_t] \\ \tilde{w}(t, T) &= E^Q[\exp(-\int_t^T r(s) + h_1(s) + h_2(s) + h_3(s)ds)|\mathcal{G}_t]\end{aligned}$$

とする。

さて、 $T_0$  時点スタートのパミュダ型デフォルト・スワップの評価を行う。パミュダ型のデフォルト・スワップは、Chen and Filipović [2003] で導入された商品であり、プレミアムの支払い時期のみならず、参照企業のデフォルト時の保証もあらかじめ決められた時刻でのみ行われる商品である。この商品进行评估することで、スワップ価格の計算が簡略化され、それに伴って、後の節で計算するデフォルト・スワップションの価格の計算が大幅に簡略化される。

この商品は、時点  $T_0 (> 0)$  に契約がなされ、キャッシュ・フローの発生時点を  $\{T_1, \dots, T_n\}$  とする。本論文では、各時点間は等間隔であり、

$$\Delta = T_m - T_{m-1} \quad (m = 1, \dots, n)$$

とする。ここで、デフォルト・スワップは以下を満たす商品とする。

- (a) 時刻  $T_m$  までに企業  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) のいずれにもデフォルトが起きていないならば、すなわち  $T_m < \tau_1, \tau_2, \tau_3$  ならば、デフォルト・スワップの買い手は、固定レート  $c$  を時刻  $T_m$  に売り手に支払う。
- (b) 時刻の区間  $(T_{m-1}, T_m]$  で参照企業 1 にデフォルトが起きた場合、 $T_m < \tau_3$  かつ  $T_{m-1} < \tau_2$  であれば、すなわち、時刻  $T_{m-1}$  までにデフォルト・スワップの買い手はデフォルトしておらず、かつデフォルト・スワップの売り手のデフォルト時刻は  $T_m$  より後の時刻であれば、時刻  $T_m$  でデフォルト・スワップの売り手は、額面と社債の現在価値の差、

$$1 - v_1(T_m, T) = 1 - \delta p(T_m, T)$$

の支払いを行う。

- (c) 上記の事柄以外のこと起きた場合、スワップ契約は打ち切られ、キャッシュ・フローは発生しない。

時刻  $t(\leq T_0)$  でのスワップ・プレミアムの現在価値を  $cB_t$  と書くと、 $B_t$  は、

$$B_t = E^Q\left[\sum_{m=1}^n \exp\left(-\int_t^{T_m} r(s)ds\right)\Delta 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > T_m\}} \middle| \mathcal{F}_t\right] = \Delta \sum_{m=1}^n w(t, T_m) 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > t\}}$$

となる。また、デフォルト時の保証額の現在価値を  $S_t$  とおくと、

$$\begin{aligned} S_t &= E^Q\left[\sum_{m=1}^n e^{-\int_t^{T_m} r(s)ds} (1 - \delta p(T_m, T)) 1_{\{T_{m-1} < \tau_1 < T_m\}} 1_{\{T_{m-1} < \tau_2\}} 1_{\{T_m \leq \tau_3\}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \sum_{m=1}^n (S_t^{1m} - \delta S_t^{2m} - S_t^{3m} + \delta S_t^{4m}) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $S_t^{1m}, S_t^{2m}, S_t^{3m}, S_t^{4m}$  は、

$$\begin{aligned} S_t^{1m} &= E^Q\left[e^{-\int_t^{T_m} r(s)ds} 1_{\{\tau_1, \tau_2 > T_{m-1}, \tau_3 > T_m\}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ S_t^{2m} &= E^Q\left[e^{-\int_t^{T_m} r(s)ds} p(T_m, T) 1_{\{\tau_1, \tau_2 > T_{m-1}, \tau_3 > T_m\}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ S_t^{3m} &= E^Q\left[e^{-\int_t^{T_m} r(s)ds} 1_{\{\tau_1 > T_m, \tau_2 > T_{m-1}, \tau_3 > T_m\}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ S_t^{4m} &= E^Q\left[e^{-\int_t^{T_m} r(s)ds} p(T_m, T) 1_{\{\tau_1 > T_m, \tau_2 > T_{m-1}, \tau_3 > T_m\}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

で与えられる。これらの式は、 $w_1(t, T)$  の計算とほぼ同様に求められる。例えば、 $S_t^{2m}$  は、以下のように計算される。

$$\begin{aligned} S_t^{2m} &= E^Q\left[e^{-\int_t^{T_m} r(s)ds} p(T_m, T) E[1_{\{\tau_1, \tau_2 > T_{m-1}, \tau_3 > T_m\}} \middle| \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T] \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= E^Q\left[e^{-\int_t^{T_m} r(s)ds + h_3(s)ds - \int_t^{T_{m-1}} h_1(s) + h_2(s)ds} p(T_m, T) 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > t\}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= E^Q\left[e^{-\int_t^{T_m} r(s)ds + h_3(s)ds - \int_t^{T_{m-1}} h_1(s) + h_2(s)ds} E\left[e^{-\int_{T_m}^T r(s)ds} \middle| \mathcal{G}_{T_m}\right] \middle| \mathcal{G}_t\right] 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > t\}} \\ &= E^Q\left[e^{-\int_t^T r(s)ds - \int_t^{T_{m-1}} h_1(s) + h_2(s)ds - \int_t^{T_m} h_3(s)ds} \middle| \mathcal{G}_t\right] 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > t\}} \end{aligned}$$

上式第2行目の計算には、補題3.2 (ii) を用いた。同様に

$$\begin{aligned} S_t^{1m} &= E^Q\left[e^{-\int_t^{T_m} (r(s) + h_3(s))ds - \int_t^{T_{m-1}} (h_1(s) + h_2(s))ds} \middle| \mathcal{G}_t\right] 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > t\}} \\ S_t^{3m} &= E^Q\left[e^{-\int_t^{T_m} (r(s) + h_1(s) + h_3(s))ds - \int_t^{T_{m-1}} h_2(s)ds} \middle| \mathcal{G}_t\right] 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > t\}} \\ S_t^{4m} &= E^Q\left[e^{-\int_t^{T_m} (r(s) + h_1(s) + h_3(s))ds - \int_t^{T_{m-1}} h_2(s)ds} p(T_m, T) \middle| \mathcal{G}_t\right] 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > t\}} \\ &= E^Q\left[e^{-\int_t^T r(s)ds - \int_t^{T_m} (h_1(s) + h_3(s))ds - \int_t^{T_{m-1}} h_2(s)ds} \middle| \mathcal{G}_t\right] 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > t\}} \end{aligned}$$

と書ける。関数  $\tilde{w}$  を定義した際と同様に、便宜的に確率変数  $\tilde{S}_t^1$  を  $S_t^1$  からインディケーター関数  $1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > t\}}$  を取り除いた確率変数とし以下のように定義する。すなわち、

$$\tilde{S}_t^{1m} = E^Q\left[e^{-\int_t^{T_m} (r(s) + h_3(s))ds - \int_t^{T_{m-1}} (h_1(s) + h_2(s))ds} \middle| \mathcal{G}_t\right]$$

とする。同様に  $S_t^2, S_t^3, S_t^4$  からインディケータ関数  $1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > t\}}$  を取り除いた確率変数を  $\tilde{S}_t^2, \tilde{S}_t^3, \tilde{S}_t^4$  とする。

ここで、 $T_0$  時点スタートのデフォルト・スワップ (フォワード・スワップ) のプレミアムは、期待値を用いて書き表せる。時刻  $t$  ( $0 \leq t < T_0$ ) での、 $T_0$  時点スタートのデフォルト・スワップのプレミアムを  $CDS$  と記述すると、

$$CDS \times B_0 = S_0$$

であるから、

$$CDS = \frac{S_0}{B_0} = \frac{\sum_{m=1}^n (\tilde{S}_0^{1m} - \delta \tilde{S}_0^{2m} - \tilde{S}_0^{3m} + \delta \tilde{S}_0^{4m})}{\Delta \sum_{m=1}^n \tilde{w}(0, T_m)}$$

となる。この  $CDS$  の値を数値的に求めることが本論文の目標の1つである。

## 4 偏微分方程式による信用派生商品の評価

本節では、金利および各企業のハザードがガウシアン過程に従うときに、カウンターパーティ・クレジット・リスクを考慮した場合のデフォルト・スワップの価格とデフォルト・スワップション価格の計算方法を考察する。具体的には、Chen and Filipović [2003] に倣いデフォルト・スワップ価格の偏微分方程式を通じた計算方法を考察する。これにより、 $T_0$  時点スタートのデフォルト・スワップ (フォワード・スワップ) のプレミアムが解析的な手法で求められるほか、ペイオフ関数が、満期での金利やハザードの水準の関数として書ける。デフォルト・スワップション価格については、モンテカルロ法で計算する手法を示す。

### 4.1 クレジット・デフォルト・スワップ

偏微分方程式によるデフォルト・スワップの評価方法を議論する前に、まず、ファインマン=カッツの定理に関する議論を行いたい。時間的に一様な  $d$  次元の拡散過程  $\{X_t\}_t$  を確率微分方程式

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

の解であるとする。時間的に一様であるとは、確率微分方程式の係数  $\mu : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  および  $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^k$  が時間に依存しないことである。ここで、 $W_t$  は  $k$  次元標準ブラウン運動であるとする。条件付期待値

$$h(x, t) = E[\exp(-\int_t^T R(X_s)ds)g(X_T)|X_t = x]$$



を偏微分方程式を用いて計算する。確率過程  $X_t$  の生成作用素として

$$\mathcal{L}f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{E[f(X_t)|X_0 = x] - f(x)}{t}$$

を導入する<sup>9</sup>。このとき、次のファイマン=カッツの定理が成り立つ<sup>10</sup>。

定理 4.1  $g \in C_0^2(\mathbf{R}^d), R \in C(\mathbf{R}^d)$  であり、 $R$  は下に有界であるとする。条件付期待値

$$h(x, t) = E[\exp(-\int_t^T R(X_s)ds)g(X_T)|X_t = x]$$

は、以下の偏微分方程式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L} - R(x)\right)h(x, t) &= 0 \\ h(x, T) &= g(x) \end{aligned}$$

の解である。

本節の設定では、短期金利の確率過程と、3つの企業のハザードの確率過程を

$$\begin{aligned} dr(t) &= \alpha(\bar{r} - r(t))dt + \sigma_{00}dW_t^0 \\ dh_i(t) &= \beta_i(\bar{h}_i - h_i(t))dt + \sigma_{i0}dW_t^0 + \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}dW_t^j \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

として議論を行う。これは、ガウシアン・モデルであり、Vasicek [1977] が提案した短期金利モデル（バシチェック・モデル）の拡張になっている。脚注3でも述べたように、ガウシアン・モデルでは金利やハザードが負値になる可能性がある。一方、先行研究である Chen and Filipović [2003] は、Cox, Ingersoll and Ross [1985] で提案された短期金利モデル（CIR モデル）を多変量ジャンプ付き拡散過程に拡張したモデルを用いて金利過程お

<sup>9</sup>作用素  $\mathcal{L}$  は次のように計算される。関数  $f$  を  $C^2$  級関数であるとする。関数  $f(x, t)$  に伊藤の公式を適用すると

$$df(X_t, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}\right)f(X_t, t)dt + \nabla f(X_t, t)\sigma(X_t)dW_t$$

と書ける。ただし、 $\nabla$  は‘ナブラ記号’であり、 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$  である。すなわち  $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$  である。伊藤の公式より、 $\mathcal{L}$  は

$$\mathcal{L} = \sum_i \mu_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

である。ただし、 $a_{ij} = \sum_k \sigma_{ik}\sigma_{jk}$  である。この作用素の性質は、例えば、Øksendal [1998] の第7章等を参照。

<sup>10</sup>ファイマン=カッツの定理は、条件付期待値の計算と偏微分方程式を結ぶ定理であり、数理ファイナンスで多用される定理の1つである。ファイマン=カッツの定理の証明や解説はØksendal [1998] の第8章等を参照。

よびハザード過程を表現している。そのモデルでは、金利と各ハザードを駆動するブラウン運動は互いに独立であり、金利過程およびハザード過程のドリフト関数は金利過程とハザード過程の線形和で書かれるとしている。

$\tilde{S}_t^{1m}, \tilde{S}_t^{2m}, \tilde{S}_t^{3m}, \tilde{S}_t^{4m}$  および後述の6節で用いられる  $\tilde{S}_t^{5m}$  を計算する方法を考える。以下に示す  $\tilde{S}_t^{1m}$  の計算方法を用いると、ほかの  $\tilde{S}_t^{2m}, \tilde{S}_t^{3m}, \tilde{S}_t^{4m}$  および  $\tilde{S}_t^{5m}$  も同様に計算されるので、本節では  $\tilde{S}_t^{1m}$  の計算方法のみを示す。

3節での計算を再確認すると、以下の関係があった。

$$S_t^{1m} = E^Q[e^{-\int_t^{T_{m-1}} r(s)ds} 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > T_{m-1}\}}] E[e^{-\int_{T_{m-1}}^{T_m} r(s) + h_3(s)ds} | \mathcal{G}_{T_{m-1}}] | \mathcal{F}_t$$

上式右辺の内側の条件付期待値は、時刻  $T_{m-1}$  での状態の関数である。そこで、内側の条件付期待値に対応させた関数  $\tilde{\phi}(T-t, r, h_3)$  を

$$\tilde{\phi}(T-t, r, h_3) = E[\exp(-\int_t^T r(s) + h_3(s)ds) | r(t) = r, h_3(t) = h_3]$$

で定義する。この条件付期待値は、 $E[\exp(-\int_t^T r(s) + h_3(s)ds) | \mathcal{G}_t]$  と同じ意味である。なぜならば、フィルトレーション  $\mathcal{G}_t$  を与えた条件付期待値は  $r(s)$  や  $h_3(s)$  の時刻  $t$  までの動き方全てを情報とした条件付期待値であるが、これらの確率過程はマルコフ過程<sup>11</sup>であるので、 $\mathcal{G}_t$  の情報のうち、条件付期待値を計算する際に用いられるのは時刻  $t$  での  $r(t)$  や  $h_3(t)$  の水準のみであるからである。そこで、 $S_t^{1m}$  を以下で書き換える。

$$\begin{aligned} S_t^{1m} &= E^Q[e^{-\int_t^{T_{m-1}} r(s)ds} 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > T_{m-1}\}}] E[e^{-\int_{T_{m-1}}^{T_m} r(s) + h_3(s)ds} | \mathcal{G}_{T_{m-1}}] | \mathcal{F}_t \\ &= E^Q[e^{-\int_t^{T_{m-1}} r(s)ds} 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > T_{m-1}\}}] \tilde{\phi}(\Delta, r(T_{m-1}), h_3(T_{m-1})) | \mathcal{F}_t \\ &= E^Q[e^{-\int_t^{T_{m-1}} r(s) + h_1(s) + h_2(s) + h_3(s)ds} \tilde{\phi}(\Delta, r(T_{m-1}), h_3(T_{m-1})) | \mathcal{G}_t] 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > t\}} \end{aligned}$$

まず、関数  $\tilde{\phi}(\tau, r, h_3)$  を偏微分方程式を用いて表現する方法を考える。ここで、 $\tau = T_m - t$  である。関数  $\tilde{\phi}(\tau, r, h_3)$  は条件付期待値の形を持ち、ファイマン=カッツの定理(定理4.1)より偏微分方程式

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\phi} + \mathcal{L}_1 \tilde{\phi} = (r + h_3) \tilde{\phi}, \quad \tilde{\phi}(0, r, h_3) = 1$$

の解であることがわかる<sup>12</sup>。ここで、 $\mathcal{L}_1$  は、2次元の確率過程  $(r_t, h_t^3)$  の無限小生成作用素であり、次式で定義される。

$$\mathcal{L}_1 = \alpha(\bar{r} - r) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_3(\bar{h}_3 - h_3) \frac{\partial}{\partial h_3} + \frac{1}{2} \{ \sigma_{00}^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \tilde{a}_{33} \frac{\partial^2}{\partial h_3^2} \} + \sigma_{30} \sigma_{00} \frac{\partial^2}{\partial r \partial h_3}$$

<sup>11</sup> 確率過程  $\{X_s\}_s$  がマルコフ性を持つとは、時刻  $t$  までの  $\{X_s\}_s$  の挙動が情報として与えられた場合の確率過程の未来の動きと、時刻  $t$  での  $X_t$  の位置のみを情報として与えられた場合の確率過程の未来の動きが一致することを指す。

<sup>12</sup> 単純にファイマン=カッツの定理に当てはめた場合と時間微分の符号が逆転している。これは、関数  $\tilde{\phi}(\tau, r, h)$  では  $\tau = T_m - t$  としているので、 $\tau$  と  $t$  で時間の向きが逆であることによる。

ただし、 $\tilde{a}_{33} = (\sum_{i=0}^3 \sigma_{3i}^2)$  である。関数  $\tilde{\phi}(\tau, r, h_3)$  については、関数形を

$$\tilde{\phi}(\tau, r, h_3) = \exp(\tilde{\psi}(\tau) + \tilde{\rho}(\tau)r + \tilde{\eta}_3(\tau)h_3)$$

と仮定することで、以下の3つの常微分方程式を得る<sup>13</sup>。

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\tau}\tilde{\rho}(\tau) - \alpha\tilde{\rho}(\tau) - 1 &= 0 \\ -\frac{d}{d\tau}\tilde{\eta}_3(\tau) - \beta_3\tilde{\eta}_3(\tau) - 1 &= 0 \\ -\frac{d}{d\tau}\tilde{\psi}(\tau) + \alpha\tilde{r}\tilde{\rho}(\tau) + \beta_3\tilde{h}_3\tilde{\eta}_3(\tau) + \frac{1}{2}(\sigma_{00}^2\tilde{\rho}^2(\tau) + \tilde{a}_{33}\tilde{\eta}_3^2(\tau)) + \sigma_{30}\sigma_{00}\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\eta}_3(\tau) &= 0 \\ \tilde{\rho}(0) = 0, \quad \tilde{\psi}(0) = 0, \quad \tilde{\eta}_3(0) = 0 & \end{aligned}$$

この連立方程式はリッカチ方程式である。リッカチ方程式には、特別な場合を除き、解析的に閉じた解は存在しないため<sup>14</sup>、一般に数値解法により解を求める。例えば、ルンゲ・クッタ法を用いると、この方程式の解は、比較的簡便かつ極めて短時間で正確に計算される。それにより得られた3つの値  $\tilde{\psi}(\Delta)$ ,  $\tilde{\rho}(\Delta)$  および  $\tilde{\eta}_3(\Delta)$  を、それぞれ  $\tilde{\psi}, \tilde{\rho}$  および  $\tilde{\eta}_3$  とおく。すると、 $S_t^{1m}$  からインディケータ関数を取り除いたものが  $\tilde{S}_t^{1m}$  であるので

$$\tilde{S}_t^{1m} = E^Q[e^{-\int_t^{T_{m-1}} r(s)+h_1(s)+h_2(s)+h_3(s)ds} e^{\tilde{\psi}+\tilde{\rho}r(T_{m-1})+\tilde{\eta}_3h_3(T_{m-1})} | \mathcal{G}_t]$$

が成り立つ。そこで、改めて  $\tau = T_{m-1} - t$  とおき、関数  $\phi(\tau, r, h_1, h_2, h_3)$  を定義する。

$$\begin{aligned} \phi(\tau, r, h_1, h_2, h_3) &= E[e^{-\int_t^{T_{m-1}} r(s)+h_1(s)+h_2(s)+h_3(s)ds} e^{\tilde{\psi}+\tilde{\rho}r(T_{m-1})+\tilde{\eta}_3h_3(T_{m-1})} | r(t) = r, \\ &h_1(t) = h_1, h_2(t) = h_2, h_3(t) = h_3] \end{aligned}$$

すると、 $\tilde{S}_t^{1m} = \phi(\tau, r, h_1, h_2, h_3)$  が成り立つ。

ファインマン＝カッツの定理を用いると、関数  $\phi$  は、次の偏微分方程式を満たす。

$$-\frac{\partial}{\partial \tau}\phi + \mathcal{L}_2\phi = (r + h_1 + h_2 + h_3)\phi, \quad \phi(0, r, h_1, h_2, h_3) = e^{\tilde{\psi}+\tilde{\rho}r+\tilde{\eta}_3h_3}$$

<sup>13</sup>関数  $\tilde{\phi}$  を偏微分方程式に代入して  $r$  と  $h_3$  で整理すると、

$$\begin{aligned} &[-(\frac{d\tilde{\rho}}{d\tau} + \alpha\tilde{\rho}(\tau) + 1)r - (\frac{d\tilde{\eta}_3}{d\tau} + \beta_3\tilde{\eta}_3(\tau) + 1)h_3 \\ & - \{(\frac{d\tilde{\psi}}{d\tau} - \alpha\tilde{r}\tilde{\rho}(\tau) - \beta_3\tilde{h}_3\tilde{\eta}_3(\tau) - \frac{1}{2}(\sigma_{00}^2\tilde{\rho}^2(\tau) + \tilde{a}_{33}\tilde{\eta}_3^2(\tau)) - \sigma_{30}\sigma_{00}\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\eta}_3(\tau))\}]\tilde{\phi} = 0 \end{aligned}$$

となる。任意の  $r$  および  $h_3$  について右辺は常に0となることから3つの方程式が求まる。3つの境界条件は  $\tilde{\phi}(\tau, r, h_3)$  の表す偏微分方程式の境界条件が  $\tilde{\phi}(0, r, h_3) = 1 (= e^0)$  であることに対応している。

<sup>14</sup>解析的な解が存在する例として、本節で扱うガウシアン・モデルや1次元 CIR モデル等が挙げられる。

ただし、生成作用素  $\mathcal{L}_2$  は

$$\mathcal{L}_2 = \alpha(\bar{r} - r) \frac{\partial}{\partial r} + \sum_{i=1}^3 \beta_i (\bar{h}_i - h_i) \frac{\partial}{\partial h_i} + \frac{1}{2} \sigma_{00}^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sum_{i=1}^3 \sigma_{00} \sigma_{i0} \frac{\partial^2}{\partial r \partial h_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial h_i \partial h_j}$$

である。ここで、 $a_{ij} = \sum_{k=0}^3 \sigma_{ik} \sigma_{jk}$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ) である。この方程式も

$$\phi(\tau, r, h_1, h_2, h_3) = \exp(\psi(\tau) + \rho(\tau)r + \eta_1(\tau)h_1 + \eta_2(\tau)h_2 + \eta_3(\tau)h_3)$$

という関数形を仮定すると、 $\tilde{\phi}$  を求めたのと同様の計算により、 $\psi(\tau), \rho(\tau), \eta_1(\tau), \eta_2(\tau), \eta_3(\tau)$  の満たす連立リッカチ方程式

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\tau} \rho(\tau) - \alpha \rho(\tau) - 1 &= 0 \\ -\frac{d}{d\tau} \eta_j(\tau) - \beta_j \eta_j(\tau) - 1 &= 0 \quad (j = 1, 2, 3) \\ -\frac{d}{d\tau} \psi(\tau) + \alpha \bar{r} \rho(\tau) + \frac{1}{2} \sigma_{00}^2 \rho^2(\tau) + \sum_{j=1}^3 \sigma_{j0} \sigma_{00} \rho(\tau) \eta_j(\tau) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \eta_i(\tau) \eta_j(\tau) &= 0 \\ \rho(0) = \tilde{\rho}, \quad \psi(0) = \tilde{\psi}, \quad \eta_1(0) = 0, \quad \eta_2(0) = 0, \quad \eta_3(0) = \tilde{\eta}_3 \end{aligned}$$

を得る。ただし、リッカチ方程式の境界条件は、関数  $\phi(\cdot)$  を解とする偏微分方程式の境界条件が  $e^{\tilde{\psi} + \tilde{\rho}r + \tilde{\eta}_3 h_3}$  であることから示される。ここでも、方程式をルンゲ=クッタ法を用いて解いて数値解を求める。 $\psi(\tau), \rho(\tau), \eta_1(\tau), \eta_2(\tau), \eta_3(\tau)$  の数値解が求めれば、 $\tilde{S}_t^{1m}$  が求まる。また、 $\tilde{S}_t^{2m}, \tilde{S}_t^{3m}, \tilde{S}_t^{4m}$  および  $\tilde{w}(t, T_m)$  も同様にして求まる。そこで、 $\psi = \psi(T_{m-1}), \rho = \rho(T_{m-1}), \eta_1 = \eta_1(T_{m-1}), \eta_2 = \eta_2(T_{m-1}), \eta_3 = \eta_3(T_{m-1})$  とおくと、初期時点での金利およびハザードの水準が  $(r, h_1, h_2, h_3)$  であれば、初期時刻 0 でのフォワード・スワップの価格は  $\tilde{S}_t^{1m} = \exp(\psi + \rho r + \eta_1 h_1 + \eta_2 h_2 + \eta_3 h_3)$  と書ける。ガウシアン・モデルを含む一般のアファイン・モデル<sup>15</sup>でも、同様の計算により、デフォルト・スワップの価格の導出が可能である。

## 4.2 クレジット・デフォルト・スワップション

偏微分方程式の数値解としてスワップの価格を得られれば、モンテカルロ法によってデフォルト・スワップを原資産とするスワップションの評価も可能となる。本節の最後に、その計算方法の解説を行う。デフォルト・スワップションは、満期（スワップ開始時刻） $T_0$  で行使価格  $K$  のデフォルト・スワップ契約を行うかどうかを決める権利であり、デフォ

<sup>15</sup>アファイン・モデルとは、ガウシアン・モデルや CIR モデルより一般的なモデルに拡張したクラスの確率過程（アファイン過程）で金利やハザードをモデル化したものであり、十分な柔軟性を持ちつつ偏微分方程式を通じて簡便に解析を行えるという特徴を持つ。

ルト・スワップ開始時刻  $T_0$  にキャッシュ・フロー  $(S_{T_0} - KB_{T_0})^+$  が発生する商品である。

$C = S_{T_0}/B_{T_0}$  とおくと

$$(S_{T_0} - KB_{T_0})^+ = \sum_{m=1}^n (S_{T_0}^{1m} - \delta S_{T_0}^{2m} - S_{T_0}^{3m} + \delta S_{T_0}^{4m} - K \Delta w(T_0, T_m)) 1_{\{C > K\}}$$

であるので、時刻 0 でのデフォルト・スワップシヨンの価格は

$$E[e^{-\int_0^{T_0} r(s)ds} \{ \sum_{m=1}^n (\tilde{S}_{T_0}^{1m} - \delta \tilde{S}_{T_0}^{2m} - \tilde{S}_{T_0}^{3m} + \delta \tilde{S}_{T_0}^{4m} - K \Delta \tilde{w}(T_0, T_m)) \}^+ 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > T_0\}}]$$

と与えられる。これは、

$$E[e^{-\int_0^{T_0} r(s) + h_1^e(s) + h_2(s) + h_3(s) ds} \times \{ \sum_{m=1}^n (\tilde{S}_{T_0}^{1m} - \delta \tilde{S}_{T_0}^{2m} - \tilde{S}_{T_0}^{3m} + \delta \tilde{S}_{T_0}^{4m} - K \Delta \tilde{w}(T_0, T_m)) \}^+ 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > 0\}}] \quad (4)$$

を計算することで求められる。時刻  $T_0$  での  $\tilde{S}_{T_0}^{1m}$  は、 $\psi = \psi(T_{m-1} - T_0)$ ,  $\rho = \rho(T_{m-1} - T_0)$ ,  $\eta_1 = \eta_1(T_{m-1} - T_0)$ ,  $\eta_2 = \eta_2(T_{m-1} - T_0)$ ,  $\eta_3 = \eta_3(T_{m-1} - T_0)$  として、

$$\tilde{S}_{T_0}^{1m} = \exp(\psi + \rho r(T_0) + \eta_1 h_1(T_0) + \eta_2 h_2(T_0) + \eta_3 h_3(T_0))$$

と与えられる。同様に  $\tilde{S}_{T_0}^{2m}, \tilde{S}_{T_0}^{3m}, \tilde{S}_{T_0}^{4m}$  および  $\tilde{w}(t, T)$  も、 $(r(T_0), h_1(T_0), h_2(T_0), h_3(T_0))$  の線形和の指数関数の形で書き表される。

モンテカルロ法を用いて 4 次元確率過程  $\{(r(t), h_1(t), h_2(t), h_3(t))\}_{t \in [0, T]}$  のパスを  $N$  本生成する。各パスで  $S_{T_0}^{1m}$  等を計算して求めたペイオフ関数を割り引いた値

$$\exp(-\int_0^{T_0} (r(t) + h_1(t) + h_2(t) + h_3(t)) dt) (\tilde{S}_{T_0}^{1m} + \tilde{S}_{T_0}^{2m} + \tilde{S}_{T_0}^{3m} + \tilde{S}_{T_0}^{4m} - K \tilde{w}(T_0, T))^+$$

を求める。 $n$  番目のパスでの値を  $X_n$  と書くとき、

$$P \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$$

を計算する。 $N$  を十分大きくすれば、 $P$  はデフォルト・スワップシオン価格に収束する。

7 節では、シミュレーションによりデフォルト・スワップシヨンの価格を計算した結果と小分散漸近展開法を用いて求めた結果を比較する。

## 5 小分散漸近展開法による信用派生商品の評価

本節では、デフォルト・スワップおよびデフォルト・スワップシヨンの近似価格を、Kunitomo and Takahashi [2001, 2003] による小分散漸近展開法を用いて計算する。小分散漸

近展開は、近年、数理統計学や数理ファイナンスをはじめとする応用分野で研究されている。小分散漸近展開法を用いた信用派生商品の価格付けへの応用としては、Muroi [2005] が挙げられる。本節の前半では、デフォルト・スワップの評価問題を、後半では、デフォルト・スワップシヨンの評価問題を考察する。

4節では、偏微分方程式アプローチとモンテカルロ法を組み合わせ、デフォルト・スワップシヨンの評価を行った。一方で、モンテカルロ法を用いず、偏微分方程式アプローチによりデフォルト・スワップシヨンの価格を導出することは一般に難しい問題である。Singleton and Umantsev [2002] はクーポン債オプションやスワップシヨンのペイオフ関数に線形近似を行うことで、Duffie, Pan and Singleton [1999] による変数変換アプローチによるこれらの商品の近似価格の導出方法を提案した。Chen and Filipović [2003] は、この手法を倣ったデフォルト・スワップシヨンの評価法を提案している。しかし、これらの手法は、数値計算が複雑化しやすいという問題を抱えている。

そこで、本節では、小分散漸近展開を用いて、デフォルト・スワップの価格を求め、さらにデフォルト・スワップシヨンの価格を求める。

なお、小分散漸近展開法の数学的な裏づけには、マリアバン解析と呼ばれる近年発達した理論が必要であるが、その点は補論で解説する。

## 5.1 クレジット・デフォルト・スワップ

まず、短期金利  $r^\epsilon(t)$  と各企業のハザード過程  $h_i^\epsilon(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) が、確率微分方程式

$$r^\epsilon(t) = x_0 + \int_0^t \mu_0(\bar{x}_0 - r^\epsilon(s)) ds + \sum_{j=0}^J \epsilon \int_0^t \sigma_{0j}(r^\epsilon(s), h_1^\epsilon(s), h_2^\epsilon(s), h_3^\epsilon(s)) dW_s^j \quad (5)$$

$$h_i^\epsilon(t) = x_i + \int_0^t \mu_i(\bar{x}_i - h_i^\epsilon(s)) ds + \sum_{j=0}^J \epsilon \int_0^t \sigma_{ij}(r^\epsilon(s), h_1^\epsilon(s), h_2^\epsilon(s), h_3^\epsilon(s)) dW_s^j \quad (6)$$

に従っているとする。ここで、確率過程  $(W_t^0, \dots, W_t^J)$  は  $J+1$  次元標準ブラウン運動である。また、 $\epsilon \in (0, 1]$  は小さな値のパラメータである。このモデルは、広いクラスの確率過程を含むモデルである。4変数関数  $f(r, h_1, h_2, h_3)$  を考える。簡略化のために、微分記号  $\partial_i$  ( $i = 0, \dots, 3$ ) は、 $\partial_0 f(r, h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial}{\partial r} f(r, h_1, h_2, h_3)$  および  $\partial_i f(r, h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial}{\partial h_i} f(r, h_1, h_2, h_3)$  ( $i = 1, 2, 3$ )

であるとする。 $r^\epsilon(t)$  および  $h_i^\epsilon(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) の漸近展開を考える。これらの確率過程に漸近展開法を用いたときの0次オーダーの項を  $X_i(t)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) で表す。すなわち、

$$X_0(t) = r^\epsilon(t)|_{\epsilon=0}, \quad X_i(t) = h_i^\epsilon(t)|_{\epsilon=0} \quad (i = 1, 2, 3)$$

とおくと、 $X_i(t)$  は、(5),(6) 式より、

$$X_i(t) = x_i + \int_0^t \mu_i(\bar{x}_i - X_i(s))ds$$

と書ける。この積分方程式の解は、

$$X_i(t) = \bar{x}_i + (x_i - \bar{x}_i)e^{-\mu_i t}$$

で与えられる。

また、 $r^\epsilon(t)$  および  $h_i^\epsilon(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) の漸近展開の1次オーダーの項を  $A_i(t)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) と表す。すなわち、

$$A_0(t) = \left. \frac{\partial r^\epsilon(t)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}, \quad A_i(t) = \left. \frac{\partial h_i^\epsilon(t)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \quad (i = 1, 2, 3)$$

とおくと、

$$A_i(t) = - \int_0^t \mu_i A_i(s)ds + \sum_{j=0}^J \int_0^t \sigma_{ij}(X_0(s), \dots, X_3(s))dW_s^j$$

と書ける。この積分方程式を解くと、 $A_i(t)$  ( $i = 0, \dots, 3$ ) は、

$$A_i(t) = \sum_{j=0}^J \int_0^t \sigma_{ij}^A(t, s)dW_s^j, \quad \sigma_{ij}^A(t, s) = Y_i(t)(Y_i(s))^{-1}\sigma_{ij}(X_0(s), \dots, X_3(s))$$

となる。ここで、 $Y_i(t)$  は、常微分方程式

$$\frac{dY_i(t)}{dt} = -\mu_i Y_i(t), \quad Y_i(0) = 1, \quad (i = 0, \dots, 3)$$

の解であり、 $Y_i(t) = e^{-\mu_i t}$  で与えられる。

$r^\epsilon(t)$  および  $h_i^\epsilon(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) の漸近展開の2次オーダーの項を  $B_i(t)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) と表す。すなわち、

$$B_0(t) = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r^\epsilon(t)}{\partial \epsilon^2} \right|_{\epsilon=0}, \quad B_i(t) = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_i^\epsilon(t)}{\partial \epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} \quad (i = 1, 2, 3)$$

とおくと、

$$B_i(t) = - \int_0^t \mu_i B_i(s)ds + \sum_{j=0}^J \sum_{l=0}^3 \int_0^t \partial_l \sigma_{ij}(X_0(s), \dots, X_3(s))A_l(s)dW_s^j$$

と書ける。この積分方程式を解くと

$$B_i(t) = \sum_{j,k=0}^J \sum_{l=0}^3 \int_0^t \sigma_{ijl}^B(t, s) \int_0^s \sigma_{lk}^A(s, u)dW_u^k dW_s^j$$

を得る。ただし、積分中の  $\sigma_{ijk}^B(t, s)$  は

$$\sigma_{ijk}^B(t, s) = Y_i(t)(Y_i(s))^{-1}\partial_k\sigma_{ij}(X_0(s), \dots, X_3(s))$$

で与えられる。これらの結果から、金利および各企業  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) のハザードを表す確率過程  $r^\epsilon(t), h_i^\epsilon(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) のパラメータ  $\epsilon$  に関する形式的なテイラー展開の式は

$$r^\epsilon(t) = X_0(t) + \epsilon A_0(t) + \epsilon^2 B_0(t) + o_Q(\epsilon^2), \quad h_i^\epsilon(t) = X_i(t) + \epsilon A_i(t) + \epsilon^2 B_i(t) + o_Q(\epsilon^2)$$

となる<sup>16</sup>。ここで、

$$R_1^{ij}(t, T) = \int_0^t r_{ij}^A(T, t, s) dW_s^j, \quad \tilde{R}_1^{ij}(t, T) = \int_t^T r_{ij}^A(T, s, s) dW_s^j$$

という変数を導入すると

$$\int_t^T A_i(s) ds = \sum_{j=0}^J (R_1^{ij}(t, T) + \tilde{R}_1^{ij}(t, T))$$

と書ける<sup>17</sup>。ただし、

$$r_{ij}^A(T, t, s) = \left( \int_t^T Y_i(u) du \right) (Y_i(s))^{-1} \sigma_{ij}(X_0(s), \dots, X_3(s))$$

である。

同様に、

$$\begin{aligned} R_2^{ijk}(t, T) &= \sum_{l=0}^3 \int_0^t r_{ijl}^B(T, t, s) \int_0^s \sigma_{lk}^A(s, u) dW_u^k dW_s^j \\ \tilde{R}_2^{ijk}(t, T) &= \sum_{l=0}^3 \int_t^T r_{ijl}^B(T, s, s) \int_0^s \sigma_{lk}^A(s, u) dW_u^k dW_s^j \end{aligned}$$

<sup>16</sup>  $\epsilon$  をパラメータとする確率変数  $X^\epsilon$  が、 $X^\epsilon = o_Q(\epsilon^k)$  とは、確率変数  $Y^\epsilon = X^\epsilon/\epsilon^k$  が  $\epsilon \rightarrow 0$  で、確率測度  $Q$  で、0 に確率収束することを指す。また、(非確率的な) 関数  $f(\epsilon)$  が  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\epsilon)}{\epsilon^k} = 0$  を満たすとき、 $f(\epsilon) = o(\epsilon^k)$  と書く。また、 $\epsilon = 0$  の近傍で  $\frac{f(\epsilon)}{\epsilon^k}$  が有界ならば  $f(\epsilon) = O(\epsilon^k)$  と書く。

<sup>17</sup> この式は次のように計算される。

$$\begin{aligned} \int_t^T A_i(s) ds &= \sum_{j=0}^J \int_t^T \int_0^s \sigma_{ij}^A(s, u) dW_u^j ds \\ &= \sum_{j=0}^J \int_t^T \int_0^t \sigma_{ij}^A(s, u) dW_u^j ds + \sum_{j=0}^J \int_t^T \int_t^s \sigma_{ij}^A(s, u) dW_u^j ds \\ &= \sum_{j=0}^J \int_0^t \int_t^T \sigma_{ij}^A(s, u) ds dW_u^j + \sum_{j=0}^J \int_t^T \int_u^T \sigma_{ij}^A(s, u) ds dW_u^j \end{aligned}$$

ここで、最後の等号ではフビニの定理を用いている。



という変数を導入すると

$$\int_t^T B_i(s)ds = \sum_{j,k=0}^J (R_2^{ijk}(t,T) + \tilde{R}_2^{ijk}(t,T))$$

と書ける<sup>18</sup>。ただし、

$$r_{ijk}^B(T, t, s) = \left( \int_t^T Y_i(u)du \right) (Y_i(s))^{-1} \partial_k \sigma_{ij}(X_0(s), \dots, X_3(s))$$

である。

したがって、時刻  $t \in [0, T]$  での満期  $T$  の割引債価格は、

$$p(t, T) = e^{-\int_t^T X_0(s)ds - \epsilon \sum_{j=0}^J R_1^{0,j}(t,T) - \epsilon^2 \sum_{j=0}^J R_2^{0,j}(t,T)} \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{j=0}^J \int_t^T r_{0j}^A(T, u, u)^2 du \right) + o_Q(\epsilon^2)$$

と表現される。時刻  $t$  までに参照企業である企業 1 がデフォルトしていない場合には、企業 1 の発行するゼロ・リカバリー債価格は

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1(t, T) &= e^{-\int_t^T X_0(s) + X_1(s) ds - \epsilon \sum_{j=0}^J (R_1^{0,j}(t,T) + R_1^{1,j}(t,T)) - \epsilon^2 \sum_{j=0}^J (R_2^{0,j}(t,T) + R_2^{1,j}(t,T))} \\ &\quad \times \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{j=0}^J \int_t^T (r_{0j}^A(T, u, u) + r_{1j}^A(T, u, u))^2 du \right) + o_Q(\epsilon^2) \end{aligned}$$

で求められる。

(3) 式より、社債の価格も計算可能である。時刻  $t$  までに、いずれの企業もデフォルトしていない場合には、バスケット型ゼロ・リカバリー債の価格も

$$\begin{aligned} \tilde{w}(t, T) &= e^{-\sum_{i=0}^3 \int_t^T X_i(s) ds - \epsilon \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^J R_1^{i,j}(t,T) - \epsilon^2 \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^J R_2^{i,j}(t,T)} \\ &\quad \times \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{j=0}^J \int_t^T \left( \sum_{i=0}^3 r_{ij}^A(T, u, u) \right)^2 du \right) + o_Q(\epsilon^2) \end{aligned}$$

で与えられる。

次に、スワップ価格の導出を行う際に必要となる  $\tilde{S}_t^{1m}, \tilde{S}_t^{2m}, \tilde{S}_t^{3m}, \tilde{S}_t^{4m}$  の計算を行う。 $\tilde{S}_t^{1m}$  は

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t^{1m} &= \alpha_1^m(t) e^{-\epsilon \sum_{j=0}^J R_1^{0j}(t, T_m) + R_1^{1j}(t, T_{m-1}) + R_1^{2j}(t, T_{m-1}) + R_1^{3j}(t, T_m)} \times \\ &\quad \times e^{-\epsilon^2 \sum_{j,k=0}^J R_2^{0jk}(t, T_m) + R_2^{1jk}(t, T_{m-1}) + R_2^{2jk}(t, T_{m-1}) + R_2^{3jk}(t, T_m)} + o_Q(\epsilon^2) \end{aligned}$$

で与えられる。式中の  $\alpha_1^m(t)$  は

$$\alpha_1^m(t) = e^{-\int_t^{T_m} (X_0(s) + X_3(s)) ds - \int_t^{T_{m-1}} (X_1(s) + X_2(s)) ds}$$

<sup>18</sup>脚注 17 とほぼ同様の計算をすればよい。

$$\begin{aligned} & \times \left\{ 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{j=0}^J \int_t^{T_m} (q_{1j}^A(T_m, u, u))^2 du \right\} \\ q_{1j}^A(T_m, t, u) &= (r_{0j}^A(T_m, t, u) + r_{3j}^A(T_m, t, u)) \\ & \quad + (r_{1j}^A(T_{m-1}, t, u) + r_{2j}^A(T_{m-1}, t, u)) \mathbf{1}_{\{u \leq T_{m-1}\}} \end{aligned}$$

で与えられる。

同様に、 $\tilde{S}_t^{2m}$  は

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t^{2m} &= \alpha_2^m(t) e^{-\epsilon \sum_{j=0}^J R_1^{0j}(t, T) + R_1^{1j}(t, T_{m-1}) + R_1^{2j}(t, T_{m-1}) + R_1^{3j}(t, T_m)} \times \\ & \quad \times e^{-\epsilon^2 \sum_{j,k=0}^J R_2^{0jk}(t, T) + R_2^{1jk}(t, T_{m-1}) + R_2^{2jk}(t, T_{m-1}) + R_2^{3jk}(t, T_m)} + o_Q(\epsilon^2) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、

$$\begin{aligned} \alpha_2^m(t) &= e^{-\int_t^T X_0(s) ds - \int_t^{T_{m-1}} (X_1(s) + X_2(s)) ds - \int_t^{T_m} X_3(s) ds} \\ & \quad \times \left\{ 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{j=0}^J \int_t^T (q_{2j}^A(T_m, u, u))^2 du \right\} \\ q_{2j}^A(T_m, t, u) &= r_{0j}^A(T, t, u) + (r_{1j}^A(T_{m-1}, t, u) + r_{2j}^A(T_{m-1}, t, u)) \mathbf{1}_{\{u \leq T_{m-1}\}} \\ & \quad + r_{3j}^A(T_m, t, u) \mathbf{1}_{\{u \leq T_m\}} \end{aligned}$$

である。

さらに、 $\tilde{S}_t^{3m}, \tilde{S}_t^{4m}$  も

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t^{3m} &= \alpha_3^m(t) e^{-\epsilon \sum_{j=0}^J R_1^{0j}(t, T_m) + R_1^{1j}(t, T_m) + R_1^{2j}(t, T_{m-1}) + R_1^{3j}(t, T_m)} \times \\ & \quad \times e^{-\epsilon^2 \sum_{j,k=0}^J R_2^{0jk}(t, T_m) + R_2^{1jk}(t, T_m) + R_2^{2jk}(t, T_{m-1}) + R_2^{3jk}(t, T_m)} + o_Q(\epsilon^2) \\ \tilde{S}_t^{4m} &= \alpha_4^m(t) e^{-\epsilon \sum_{j=0}^J R_1^{0j}(t, T) + R_1^{1j}(t, T_m) + R_1^{2j}(t, T_{m-1}) + R_1^{3j}(t, T_m)} \times \\ & \quad \times e^{-\epsilon^2 \sum_{j,k=0}^J R_2^{0jk}(t, T) + R_2^{1jk}(t, T_m) + R_2^{2jk}(t, T_{m-1}) + R_2^{3jk}(t, T_m)} + o_Q(\epsilon^2) \end{aligned}$$

と書け、 $\alpha_3^m(t)$  および  $\alpha_4^m(t)$  は

$$\begin{aligned} \alpha_3^m(t) &= e^{-\int_t^{T_m} (X_0(s) + X_1(s) + X_3(s)) ds - \int_t^{T_{m-1}} X_2(s) ds} \\ & \quad \times \left\{ 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{j=0}^J \int_t^{T_m} (q_{3j}^A(T_m, u, u))^2 du \right\} \\ \alpha_4^m(t) &= e^{-\int_t^T X_0(s) ds - \int_t^{T_m} (X_1(s) + X_3(s)) ds - \int_t^{T_{m-1}} X_2(s) ds} \\ & \quad \times \left\{ 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{j=0}^J \int_t^T (q_{4j}^A(T_m, u, u))^2 du \right\} \\ q_{3j}^A(T_m, t, u) &= r_{0j}^A(T_m, t, u) + r_{1j}^A(T_m, t, u) + r_{2j}^A(T_{m-1}, t, u) \mathbf{1}_{\{u \leq T_{m-1}\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +r_{3j}^A(T_m, t, u) \\
q_{4j}^A(T_m, t, u) & = r_{0j}^A(T, t, u) + (r_{1j}^A(T_m, t, u) + r_{3j}^A(T_m, t, u))1_{\{u \leq T_m\}} \\
& + r_{2j}^A(T_{m-1}, t, u)1_{\{u \leq T_{m-1}\}}
\end{aligned}$$

で与えられる。

以上から、3節の最後で与えられた時刻0での $T_0$ 時点スタートのデフォルト・スワップの近似価格は、以下のように求まる。

定理 5.1 時刻0での $T_0$ 時点スタートのデフォルト・スワップの価格は

$$\begin{aligned}
CDS(0) & = \frac{\sum_{m=1}^n (\tilde{S}_0^{1m} - \delta \tilde{S}_0^{2m} - \tilde{S}_0^{3m} + \delta \tilde{S}_0^{4m})}{\Delta \sum_{m=1}^n \tilde{w}(0, T_m)} 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > 0\}} \\
& = \frac{\sum_{m=1}^n (\alpha_1^m(0) - \delta \alpha_2^m(0) - \alpha_3^m(0) + \delta \alpha_4^m(0)) + o_Q(\epsilon^2)}{\Delta \sum_{m=1}^n \tilde{w}(0, T_m) + o_Q(\epsilon^2)} 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > 0\}}
\end{aligned}$$

で与えられる。

## 5.2 クレジット・デフォルト・スワップション

4節で述べたように、デフォルト・スワップションは、満期 $T_0$ でスワップ契約を行うか否かを定められる権利であり、スワップ開始時刻 $T_0$ にキャッシュ・フロー $(S_{T_0} - KB_{T_0})^+$ が発生する商品である。(4)式で示したように、

$$E[e^{-\int_0^{T_0} r^\epsilon(s) + h_1^\epsilon(s) + h_2^\epsilon(s) + h_3^\epsilon(s) ds} \{ \sum_{m=1}^n (\tilde{S}_{T_0}^{1m} - \delta \tilde{S}_{T_0}^{2m} - \tilde{S}_{T_0}^{3m} + \delta \tilde{S}_{T_0}^{4m} - K \Delta \tilde{w}(T_0, T_m)) \}^+] 1_{\{\tau_1, \tau_2, \tau_3 > 0\}}$$

を計算することでデフォルト・スワップションの価格を求められる。

確率変数 $g$ を

$$g = e^{-\int_0^{T_0} r^\epsilon(s) + h_1^\epsilon(s) + h_2^\epsilon(s) + h_3^\epsilon(s) ds} \{ \sum_{m=1}^n (\tilde{S}_{T_0}^{1m} - \delta \tilde{S}_{T_0}^{2m} - \tilde{S}_{T_0}^{3m} + \delta \tilde{S}_{T_0}^{4m} - K \Delta \tilde{w}(T_0, T_m)) \}$$

と定義する。確率変数 $g$ の密度関数がわかると、上記の期待値が計算されることから、 $g$ の密度関数を漸近近似する方法を考える。まず、

$$e^{-\int_0^{T_0} r^\epsilon(s) + h_1^\epsilon(s) + h_2^\epsilon(s) + h_3^\epsilon(s) ds} \tilde{S}_{T_0}^{im} = g_{im}^0 + \epsilon g_{im}^1 + \epsilon^2 g_{im}^2 + o_Q(\epsilon^2)$$

の $g_{im}^0, g_{im}^1$  および  $g_{im}^2$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) を具体的に求めると、

$$g_{im}^0 = e^{-\int_0^{T_0} X_0(s) + \dots + X_3(s) ds} \alpha_i^m(T_0)$$

$$\begin{aligned}
g_{im}^1 &= -g_{im}^0 \sum_{j=0}^J \int_0^{T_0} q_{ij}^A(T_m, u, u) dW_u^j \\
g_{im}^2 &= -g_{im}^0 \sum_{j,k=0}^J \sum_{l=0}^3 \int_0^{T_0} q_{ijl}^B(T_m, s, s) \int_0^s \sigma_{lk}^A(s, u) dW_u^k dW_s^j \\
&\quad + \frac{g_{im}^0}{2} \left\{ \sum_{j=0}^J \int_0^{T_0} q_{ij}^A(T_m, u, u) dW_u^j \right\}^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $q_{ijk}^B(T_m, t, u)$  ( $i = 1, 2, 3, 4; j, k = 0, \dots, J$ ) は

$$\begin{aligned}
q_{1jk}^B(T_m, t, u) &= (r_{0jk}^B(T_m, t, u) + r_{3jk}^B(T_m, t, u)) \\
&\quad + (r_{1jk}^B(T_{m-1}, t, u) + r_{2jk}^B(T_{m-1}, t, u)) 1_{\{u \leq T_{m-1}\}} \\
q_{2jk}^B(T_m, t, u) &= r_{0jk}^B(T, t, u) + (r_{1jk}^B(T_{m-1}, t, u) + r_{2jk}^B(T_{m-1}, t, u)) 1_{\{u \leq T_{m-1}\}} \\
&\quad + r_{3jk}^B(T_m, t, u) 1_{\{u \leq T_m\}} \\
q_{3jk}^B(T_m, t, u) &= r_{0jk}^B(T_m, t, u) + r_{1jk}^B(T_m, t, u) + r_{2jk}^B(T_{m-1}, t, u) 1_{\{u \leq T_{m-1}\}} \\
&\quad + r_{3jk}^B(T_m, t, u) \\
q_{4jk}^B(T_m, t, u) &= r_{0jk}^B(T, t, u) + (r_{1jk}^B(T_m, t, u) + r_{3jk}^B(T_m, t, u)) 1_{\{u \leq T_m\}} \\
&\quad + r_{2jk}^B(T_{m-1}, t, u) 1_{\{u \leq T_{m-1}\}}
\end{aligned}$$

である。同様に、

$$e^{-\int_0^{T_0} r^\epsilon(s) + h_1^\epsilon(s) + h_2^\epsilon(s) + h_3^\epsilon(s) ds} \tilde{w}(T_0, T_m) = g_{5m}^0 + \epsilon g_{5m}^1 + \epsilon^2 g_{5m}^2 + o_Q(\epsilon^2)$$

における  $g_{5m}^0, g_{5m}^1$  および  $g_{5m}^2$  も求まる。具体的に求めると

$$\begin{aligned}
g_{5m}^0 &= e^{-\int_0^{T_0} X_0(s) + \dots + X_3(s) ds} \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{j=0}^J \int_{T_0}^{T_m} \left( \sum_{i=0}^3 r_{ij}^A(T_m, u, u) \right)^2 du \right) \\
g_{5m}^1 &= -g_{5m}^0 \sum_{j=0}^J \int_0^{T_0} \sum_{i=0}^3 r_{ij}^A(T_m, u, u) dW_u^j \\
g_{5m}^2 &= -g_{5m}^0 \sum_{j,k=0}^J \sum_{l=0}^3 \int_0^{T_0} \sum_{i=0}^3 r_{ijl}^B(T_m, s, s) \int_0^u \sigma_{lk}^A(s, u) dW_u^k dW_s^j \\
&\quad + \frac{g_{5m}^0}{2} \left\{ \sum_{j=0}^J \int_0^{T_0} \sum_{i=0}^3 r_{ij}^A(T_m, u, u) dW_u^j \right\}^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}$$

を得る。

次に、

$$g^i = \sum_{m=1}^n (g_{1m}^i - \delta g_{2m}^i - g_{3m}^i + \delta g_{4m}^i - K \Delta g_{5m}^i) \quad (i = 0, 1, 2)$$

とおく。ここまでの議論から、各 0 次オーダーの項  $g_{jm}^0$  のオーダーは  $O(1)$  である。一方、アット・ザ・マネー付近では

$$g^0 = \sum_{m=1}^n (g_{1m}^0 - \delta g_{2m}^0 - g_{3m}^0 + \delta g_{4m}^0 - K \Delta g_{5m}^0)$$

は大きくないことが期待される。よって、本研究では  $g^0 = \epsilon y (= O(\epsilon))$  を仮定する。また、 $g^1$  を

$$g^1 = \sum_{j=0}^J \int_0^{T_0} \sigma_g^j(t) dW_t^j$$

とする。すなわち、 $\sigma_g^j(t)$  を

$$\begin{aligned} \sigma_g^j(t) = & \sum_{m=1}^n \{ -g_{1m}^0 q_{1j}^A(T_m, t, t) + \delta g_{2m}^0 q_{2j}^A(T_m, t, t) \\ & + g_{3m}^0 q_{3j}^A(T_m, t, t) - \delta g_{4m}^0 q_{4j}^A(T_m, t, t) + K \Delta g_{5m}^0 \sum_{i=0}^3 r_{ij}^A(T_m, t, t) \} \end{aligned}$$

とする。

このとき、デフォルト・スワップションの価格  $P$  は

$$P = E[g 1_{\{g \geq 0\}}]$$

で与えられる。

確率変数

$$X_{T_0}^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} (g - g^0) = g^1 + \epsilon g^2 + \dots$$

の密度関数を求める。密度関数が求まれば、デフォルト・スワップションの価格が求まる。そこで、確率変数  $X_{T_0}^\epsilon$  の特性関数  $\phi_X(t)$  を計算すると、

$$\phi_X(t) = E[e^{itX_{T_0}^\epsilon}] = E[e^{it(g^1 + \epsilon g^2 + \dots)}] = E[e^{itg^1} (1 + \epsilon it E[g^2 | g^1])] + o_Q(\epsilon)$$

となる。

ここで、次の条件を仮定する。

$$\Sigma = \int_0^{T_0} \sum_{j=0}^J \sigma_g^j(t)^2 dt > 0$$

この条件の下で、次の補題が成り立つ。

**補題 5.1** 確率変数  $X_{T_0}^\epsilon$  の密度関数  $f_X^\epsilon(x)$  の漸近展開は、次の式で与えられる。

$$f_X^\epsilon(x) = n[x; 0, \Sigma] + \epsilon \left[ \frac{c}{\Sigma} x^3 + \left( \frac{f}{\Sigma} - 2c \right) x \right] n[x; 0, \Sigma] + o(\epsilon^2)$$

ただし、 $n[x; 0, \Sigma]$  は平均 0、分散  $\Sigma$  の正規分布の密度関数である。また、式中の  $c$  と  $f$  は

$$E[g_2|g_1 = x] = cx^2 + f$$

を満たす定数である。

補題 5.1 の  $c$  および  $f$  を求めるためには、次の補題を用いる。

補題 5.2  $\{w_t\}$  を  $n$  次元ブラウン運動、 $x$  を  $k$  次元ベクトルとする。非確率的な関数  $q_1(t) : \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^{k \times n}$  と正定値行列  $\Sigma = \int_0^T q_1(t)q_1(t)'dt$  が存在するとき、以下が成立する。

(1) 非確率的な関数  $q_i(t) : \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^{m \times n}$  ( $i = 2, 3$ ) が存在するとき、 $0 \leq s \leq t \leq T$  で、次式が成立する。

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^t \left[\int_0^s q_2(u)dw_u\right]' q_3(s)dw_s \mid \int_0^T q_1(u)dw_u = x\right] \\ = \text{tr} \int_0^t \left[\int_0^s q_2(u)q_1(u)'du\right] q_1(s)q_3(s)'ds \Sigma^{-1}[xx' - \Sigma]\Sigma^{-1} \end{aligned}$$

(2) 非確率的な関数  $q_i(t) : \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^n$  ( $i = 2, 3$ ) が存在するとき、 $0 \leq s \leq t \leq T$  で、次式が成立する。

$$\begin{aligned} E\left[\left[\int_0^s q_2(u)dw_u\right] \left[\int_0^t q_3(v)dw_v\right] \mid \int_0^T q_1(u)dw_u = x\right] \\ = \int_0^s q_2(u)q_3(u)'du + \left[\int_0^s q_2(u)q_1(u)'du\right] \Sigma^{-1}[xx' - \Sigma]\Sigma^{-1} \left[\int_0^t q_1(u)q_3(u)'du\right] \end{aligned}$$

この補題を用いて  $c$  および  $f$  を求める。

$$\begin{aligned} c_{im} &= -g_{im}^0 \sum_{j,k=0}^J \sum_{l=0}^3 \int_0^{T_0} q_{ijl}^B(T_m, s, s) \sigma_g^j(s) \int_0^s \sigma_{lk}^A(s, u) \sigma_g^k(u) duds \\ &\quad + \frac{g_{im}^0}{2} \sum_{j=0}^3 \left\{ \int_0^{T_0} q_{ij}^A(T_m, s, s) \sigma_g^j(s) ds \right\}^2 \quad (i = 1, \dots, 4) \\ c_{5m} &= -g_{5m}^0 \sum_{j,k=0}^J \sum_{l=0}^3 \int_0^{T_0} \sum_{i=0}^3 r_{ijl}^B(T_m, s, s) \sigma_g^j(s) \int_0^s \sigma_{lk}^A(s, u) \sigma_g^k(u) duds \\ &\quad + \frac{g_{5m}^0}{2} \sum_{j=0}^3 \left\{ \int_0^{T_0} \sum_{i=0}^3 r_{ij}^A(T_m, s, s) \sigma_g^j(s) ds \right\}^2 \end{aligned}$$

とおくと、 $c = \sum_{m=1}^n (c_{1m} - \delta c_{2m} - c_{3m} + \delta c_{4m} - K \Delta c_{5m}) / \Sigma^2$  である。

また、

$$b_{im} = \frac{g_{im}^0}{2} \int_0^{T_0} \sum_{j=0}^J q_{ij}^A(T_m, s, s)^2 ds \quad (i = 1, \dots, 4)$$

$$b_{5m} = \frac{g_{5m}^0}{2} \int_0^{T_0} \sum_{j=0}^J \left( \sum_{i=0}^3 r_{ij}^A(T_m, s, s) \right)^2 ds$$

$$b = \sum_{m=1}^n (b_{1m} - \delta b_{2m} - b_{3m} + \delta b_{4m} - K \Delta b_{5m})$$

とおくと、 $f$  は  $f = b - c\Sigma$  で与えられる。

$c$  と  $f$  の値を用いてデフォルト・スワップションの価格を計算する。

$$\begin{aligned} P &= E^Q[g_0 + \epsilon X_i^\epsilon]^+ \\ &= \int_{g_0 + \epsilon x \geq 0} (g_0 + \epsilon x) f_X^\epsilon(x) dx \\ &= \int_{g_0 + \epsilon x \geq 0} (g_0 + \epsilon x) n[x; 0, \Sigma] \left\{ 1 + \epsilon \left[ \frac{c}{\Sigma} x^3 + \left( \frac{f}{\Sigma} - 2c \right) x \right] + \epsilon^2 h(x) \right\} dx + o(\epsilon^2), \end{aligned}$$

が成り立つので、この式を用いてデフォルト・スワップション価格の計算を行う<sup>19</sup>。ここで、 $h(x)$  は多項式である。

$y = g_0/\epsilon (= O(1))$  とおくと、

$$P = g_0 \int_{-y}^{\infty} n[x; 0, \Sigma] dx + \epsilon \int_{-y}^{\infty} x n[x; 0, \Sigma] dx + \epsilon^2 \int_{-y}^{\infty} (cx^2 + f) n[x; 0, \Sigma] dx + o(\epsilon^2)$$

となる。標準正規分布の分布関数を  $N(x)$  とおくと、

$$\begin{aligned} \int_{-y}^{\infty} x n[x; 0, \Sigma] dx &= \Sigma n[y; 0, \Sigma], \\ \int_{-y}^{\infty} x^2 n[x; 0, \Sigma] dx &= \Sigma N\left(\frac{y}{\Sigma^{1/2}}\right) - y \Sigma n[y; 0, \Sigma], \end{aligned}$$

が成り立つ。

この式を用いて、上記の積分計算を行うと、デフォルト・スワップションの価格計算が行える。

## 6 バスケット・スワップとバスケット・スワップション

前節までは、カウンターパーティ・クレジット・リスクを考慮に入れた場合に、デフォルト・スワップおよびデフォルト・スワップションの価格を計算する方法を考察してきた。

<sup>19</sup>この計算では、 $g_0 = \epsilon y$  のオーダーが  $O(\epsilon)$  であることに加え、 $-\Sigma \frac{d}{dx} n[x; 0, \Sigma] = x n[x; 0, \Sigma]$  と部分積分により求まる 2 つの式

$$\int_{-g_0/\epsilon}^{\infty} (g_0 + \epsilon x) x^3 n[x; 0, \Sigma] dx = \Sigma \left\{ \epsilon \int_{-g_0/\epsilon}^{\infty} x^2 n[x; 0, \Sigma] dx + 2 \int_{-g_0/\epsilon}^{\infty} (g_0 + \epsilon x) x n[x; 0, \Sigma] dx \right\}$$

および

$$\int_{-g_0/\epsilon}^{\infty} (g_0 + \epsilon x) x n[x; 0, \Sigma] dx = \epsilon \Sigma \int_{-g_0/\epsilon}^{\infty} n[x; 0, \Sigma] dx$$

を用いている。

カウンターパーティ・クレジット・リスクを考慮する例のほかにも、複数のハザード過程の挙動が価格に反映する信用派生商品が存在しており、その例としては、バスケット・スワップ等が挙げられる。バスケット・スワップは、あらかじめ指定された  $I$  社の企業の中で、1つの企業でもデフォルトが生じれば、スワップの売り手が一定額の保証を行う商品であり、しばしば相対で契約が行われている取引である。この商品を扱った既存研究としては、Kijima [2000] および Kijima and Muromachi [2000] 等が挙げられる。

以下では、Kijima and Muromachi [2000] を参考に、バスケット・スワップおよびバスケット・スワップションの価格の導出方法を考察する。ここでのモデルは、 $I$  社のハザード過程に加えて、確率金利のファクターも考えているので、 $I+1$  ファクター・モデルにより記述される。

本節で考えるバスケット・スワップは、 $T_0$  に契約を開始し、キャッシュ・フローの発生時点が  $\{T_1, \dots, T_n\}$  である契約とする。前節までに考察を行ったデフォルト・スワップ、デフォルト・スワップションの例と同様に、各時点間の長さは等間隔で、 $\Delta = T_m - T_{m-1}$  ( $m = 1, \dots, n$ ) とする。バスケット・スワップは、次のような商品であるとする。

- (a) 時刻  $T_m$  で、 $I$  社の企業のうちいずれもデフォルトを引き起こしていない場合 ( $T_m < \tau_1, \dots, \tau_I$ ) には、時刻  $T_m$  でバスケット・スワップの購入者は固定レート  $c$  をスワップの売り手に支払う。
- (b) 時刻  $(T_{m-1}, T_m]$  で、 $I$  社の企業の中で初めて第  $i$  企業がデフォルトしたとする。このとき、バスケット・スワップの売り手から買い手へのキャッシュ・フロー  $\gamma_i$  が時刻  $T_m$  で発生して契約が終了する。
- (c) 取引の終了時刻  $T$  までに、デフォルトがなければ満期時点  $T$  で売り手から買い手にキャッシュ・フロー  $\gamma_0$  が発生する。

この定義のように、バスケットに含まれる企業の中で初めて倒産した企業に関する損失のみを保証するスワップをファースト・トゥ・デフォルト (first-to-default) 型スワップという。

ここでの商品性は、Kijima and Muromachi [2000] が扱ったものよりも複雑であるが<sup>20</sup>、今回のモデルでも、この研究とほぼ同じ計算手法により価格が求まる。保証額の現在価値

---

<sup>20</sup>Kijima and Muromachi [2000] の枠組みでは、スワップの売り手から買い手へのキャッシュ・フローが発生するのは満期のみである。



は、以下のように与えられる<sup>21</sup>。

$$\begin{aligned}
S'_t &= \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^I \{E^Q[\gamma_i \exp(-\int_t^{T_m} r(s)ds) 1_{\{T_{m-1} < \tau_i \leq T_m\}} 1_{\{\tau_i \leq \tau_1, \dots, \tau_i \leq \tau_I\}} | \mathcal{F}_t] \\
&\quad + E^Q[\gamma_0 \exp(-\int_t^T r(s)ds) 1_{\{T < \tau_1, \dots, T < \tau_I\}} | \mathcal{F}_t]\} \\
&= \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^I \{E^Q[\gamma_i \exp(-\int_t^{T_m} r(s)ds) \int_t^{T_m} h_i(s) \exp(-\sum_{j=1}^I \int_t^s h_j(u)du) ds | \mathcal{G}_t] \\
&\quad - E^Q[\gamma_i \exp(-\int_t^{T_m} r(s)ds) \int_t^{T_{m-1}} h_i(s) \exp(-\sum_{j=1}^I \int_t^s h_j(u)du) ds | \mathcal{G}_t]\} 1_{\{\tau_1, \dots, \tau_I > t\}} \\
&\quad + \gamma_0 E^Q[\exp(-\int_t^T (r(s) + \sum_{i=1}^I h_i(s)) ds) | \mathcal{G}_t] 1_{\{\tau_1, \dots, \tau_I > t\}}
\end{aligned}$$

一方、スワップ・プレミアムの現在価値は、

$$c'B'_t = c'\Delta \sum_{m=1}^n w(t, T_m)$$

である。よって、時刻  $t$  でのバスケット・スワップのプレミアム  $BCDS(t)$  は

$$BCDS(t) = \frac{S'_t}{B'_t}$$

と計算される。

特に、 $\gamma_1, \dots, \gamma_I$  が全て同じ値を取り、 $\gamma_1, \dots, \gamma_I \equiv \gamma$  と表現されるときは、保証額の現在価値の価格形式は簡略化される。そこで、

$$S_t^{5m} = E[\exp(-\int_t^{T_m} r(s)ds - \sum_{i=1}^I \int_t^{T_{m-1}} h_i(s)ds) | \mathcal{G}_t] 1_{\{\tau_1, \dots, \tau_I > t\}}$$

---

<sup>21</sup>2 番目の等号の計算方法を記す。1 番目の等号の右边第 1 項を  $S_i$  とおくと、

$$\begin{aligned}
S_i &= E^Q[\gamma_i \exp(-\int_t^{T_m} r(s)ds) E^Q[1_{\{\tau_i \leq T_m\}} 1_{\{\tau_i \leq \tau_1, \dots, \tau_i \leq \tau_I\}} | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t^1 \vee \dots \vee \mathcal{H}_t^I] | \mathcal{F}_t] \\
&\quad - E^Q[\gamma_i \exp(-\int_t^{T_m} r(s)ds) E^Q[1_{\{\tau_i \leq T_{m-1}\}} 1_{\{\tau_i \leq \tau_1, \dots, \tau_i \leq \tau_I\}} | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t^1 \vee \dots \vee \mathcal{H}_t^I] | \mathcal{F}_t]
\end{aligned}$$

が成り立つ。この式の第 1 項を  $T_i$  とおくと補題 3.3 より

$$\begin{aligned}
T_i &= E^Q[\gamma_i e^{-\int_t^{T_m} r(s)ds} \int_t^{T_m} Q[s \leq \tau_i < s + ds, \tau_k > s \ (k \neq i) | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t^1 \vee \dots \vee \mathcal{H}_t^I] | \mathcal{F}_t] \\
&= E^Q[\gamma_i e^{-\int_t^{T_m} r(s)ds} \int_t^{T_m} h_i(s) e^{-\sum_{i=1}^I \int_t^s h_i(u)du} ds 1_{\{\tau_1, \dots, \tau_I > t\}} | \mathcal{F}_t] \\
&= E^Q[\gamma_i e^{-\int_t^{T_m} r(s)ds} \int_t^{T_m} h_i(s) e^{-\sum_{i=1}^I \int_t^s h_i(u)du} ds | \mathcal{G}_t] 1_{\{\tau_1, \dots, \tau_I > t\}}
\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $S_i$  の式の右边第 2 項も同様に計算されるので、2 番目の等号も成り立つ。

を導入する。

ここでも、3節で  $\tilde{S}_t^1$  等を定義したときと同様に、期待値の後に付いているインディケータ関数を取り除いたものを  $\tilde{S}_t^5$  と書く。このとき、保証額の現在価値は、

$$S'_t = \{\gamma_0 \tilde{w}(t, T) + \gamma \sum_{m=1}^n (\tilde{S}_t^{5m} - \tilde{w}(t, T_m))\} 1_{\{\tau_1, \dots, \tau_I > t\}}$$

である。この式は4節で議論したように偏微分方程式を用いて計算可能である。また、5節で議論したように小分散漸近展開でも計算可能である。

以上から、時刻  $t$  ( $0 \leq t \leq T_0$ ) での、フォワード・バスケット・スワップの価格  $BCDS(t)$  は、

$$BCDS(t) = \frac{S'_t}{B'_t} = \frac{\gamma_0 \tilde{w}(t, T) + \gamma \sum_{m=1}^n (\tilde{S}_t^{5m} - \tilde{w}(t, T_m))}{\Delta \sum_{m=1}^n \tilde{w}(t, T_m)} 1_{\{\tau_1, \dots, \tau_I > t\}}$$

となる。

この式を計算すると、バスケット・スワップの価格が求まる。また、この場合も、前節までの議論と同様に、満期  $T_0$ 、行使価格  $K$  のバスケット・スワップションの価格計算が可能である。すなわち、確率変数  $C'$  を

$$C' = \frac{\tilde{S}'_{T_0}}{\tilde{B}'_{T_0}} = \frac{\gamma_0 \tilde{w}(T_0, T) + \gamma \sum_{m=1}^n (\tilde{S}'_{T_0}{}^{5m} - \tilde{w}(T_0, T_m))}{\Delta \sum_{m=1}^n \tilde{w}(T_0, T_m)}$$

とおくと、バスケット・スワップションは、満期時刻  $T_0$  で

$$(\gamma_0 w(t, T) + \gamma \sum_{m=1}^n (S_t^{5m} - w(t, T_m)) - K \Delta \sum_{m=1}^n w(t, T_m)) 1_{\{C' > K\}}$$

のペイオフがある商品とみなせる。

4節で議論したようにペイオフ関数を、金利や各企業のハザードの関数として偏微分方程式を用いて計算し、そのうえでモンテカルロ法を用いて、バスケット・スワップションの価格を計算することができる。数値計算結果は、次の節で示す。

また、前節と同様に小分散漸近展開法を用いると、バスケット・スワップションの近似価格も導出することができる。Kijima and Muromachi [2000] では、はじめの2社のデフォルトによる損失までヘッジすることができるバスケット・スワップ (second-to-default swap) の評価も行われているが、本論文ではそこまでは議論しない。

## 7 数値計算

前節までに、カウンターパーティ・クレジット・リスクを持つ場合のデフォルト・スワップ、デフォルト・スワップションの近似価格、および、バスケット・スワップ、バスケット

ト・スワップションの近似価格を偏微分方程式および小分散漸近展開法を用いて計算する方法を示してきた。本節では、それらを基に数値計算を行った結果の議論を行う。

まず、4節のように、ガウシアン・モデルで、偏微分方程式を用いてデフォルト・スワップの価格計算を行う。アファイン・モデルに含まれるそのほかのモデルでも、若干の変更を行えば価格計算可能であるので、アファイン・モデルに含まれるモデルのうち、CIRモデルを用いた設定でデフォルト・スワップの価格計算も行う。また、5節に従って小分散漸近展開を用いた価格計算も行う。小分散漸近展開法を用いれば、金利過程やハザード過程がアファイン・モデルに含まれていない場合でも信用派生商品の評価が可能である。そこで、さらにCEVモデル(定弾性ボラティリティ・モデル、Constant Elasticity of Volatility Model)を用いた設定でも価格計算も行う。バスケット・スワップについてもこれらの手法を若干変更して価格計算を行う。また、デフォルト・スワップションの評価には、4節で議論されたモンテカルロ法と5節で議論した小分散漸近展開法を用いて数値計算を行う。

(i) ガウシアン・モデル：

金利を表す確率過程を

$$dr^\epsilon(t) = \alpha(\bar{r} - r^\epsilon(t))dt + \epsilon\sigma dW_t^0, \quad r^\epsilon(0) = r$$

とする。パラメータは  $\alpha = 0.2, \bar{r} = 0.05, \sigma = 1.5, r = 0.05$  とする。微小なパラメータは、 $\epsilon = 0.01$  とする。さらに、企業  $i = 1, 2, 3$  のデフォルト時刻を規定する停止時刻を  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  とすると、それぞれの停止時刻  $\tau_i$  のハザード過程  $h_i^\epsilon(t)$  は

$$dh_i^\epsilon(t) = \beta_i(\bar{h}_i - h_i^\epsilon(t))dt + \epsilon \sum_{j=0}^3 \sigma_{ij} dW_t^j, \quad h_i^\epsilon(0) = h_i$$

で表現されるとする。 $(W^0, W^1, W^2, W^3)$  は、標準ブラウン運動であり、パラメータは、 $\beta_1 = 0.1, \beta_2 = 0.1, \beta_3 = 0.2, \bar{h}_1 = 0.04, \bar{h}_2 = 0.04, \bar{h}_3 = 0.03$  および  $h_1 = 0.04, h_2 = 0.03, h_3 = 0.04$  とする。また、ボラティリティの水準は、 $\sigma_{10} = -0.4, \sigma_{20} = -0.6, \sigma_{30} = -0.5, \sigma_{11} = 1.0, \sigma_{21} = 0.5, \sigma_{31} = -0.4, \sigma_{32} = 0.4, \sigma_{22} = 1.5, \sigma_{33} = 1.0$  とする。それ以外のボラティリティの水準は0とする。

(ii) CIR モデル：

金利およびハザードを表す確率過程が全てCIRモデルで表されるとする。ただし、全ての確率過程は独立であるとする。金利を表す確率過程は、

$$dr^\epsilon(t) = \alpha(\bar{r} - r^\epsilon(t))dt + \epsilon\sigma\sqrt{r^\epsilon(t)}dW_t^0, \quad r^\epsilon(0) = r$$

とする。パラメータは  $\alpha = 0.2, \bar{r} = 0.05, \sigma = 7.5, r = 0.05$  とする。

企業  $i = 1, 2, 3$  のデフォルト時刻を規定する停止時刻を  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  とすると、それぞれの停止時刻  $\tau_i$  のハザード過程  $h_i^\epsilon(t)$  は、

$$dh_i^\epsilon(t) = \beta_i(\bar{h}_i - h_i^\epsilon(t))dt + \epsilon\sigma_{ii}\sqrt{h_i^\epsilon(t)}dW_t^i, h_i^\epsilon(0) = h_i$$

で表現されるとする。ここで、パラメータは、 $\beta_1 = 0.1, \beta_2 = 0.1, \beta_3 = 0.2, \bar{h}_1 = 0.04, \bar{h}_2 = 0.04, \bar{h}_3 = 0.03$  および  $h_1 = 0.04, h_2 = 0.03, h_3 = 0.04$  とする。また、ボラティリティの水準は、 $\sigma_{11} = 5.0, \sigma_{22} = 7.5, \sigma_{33} = 5.0$  とする。なお、今回数値計算を行ったモデルのうち、金利や各ハザード過程が独立であるモデルは、このモデルのみである。

(iii) 金利が CIR モデルでハザードがガウシアン・モデルの場合 (CIR 金利モデル) :

金利を表す確率過程が

$$dr^\epsilon(t) = \alpha(\bar{r} - r^\epsilon(t))dt + \epsilon\sigma\sqrt{r^\epsilon(t)}dW_t^0, r^\epsilon(0) = r$$

で書けるとする。一方、停止時刻  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  のハザード過程は、

$$dh_i^\epsilon(t) = \beta_i(\bar{h}_i - h_i^\epsilon(t))dt + \epsilon\sigma_{i0}\sqrt{r^\epsilon(t)}dW_t^0 + \epsilon\sum_{j=1}^3\sigma_{ij}dW_t^j, h_i^\epsilon(0) = h_i$$

であるとする。ここで、 $\sigma = 7.5$  であり、 $\sigma_{10} = -2.0, \sigma_{20} = -3.0, \sigma_{30} = -2.5$  である。これ以外のパラメータは、ガウシアン・モデルの場合と同じである。

(iv) 金利が CEV モデルでハザードがガウシアン・モデルの場合 (CEV 金利モデル) :

前の3つの例と異なり、デフォルト・スワップの解析解は求まらない。ここでは金利を表現する確率過程は、

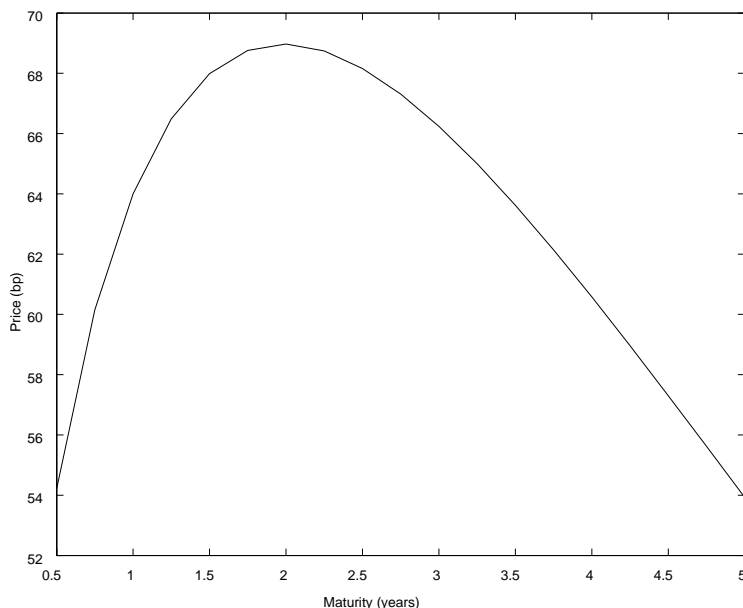
$$dr^\epsilon(t) = \alpha(\bar{r} - r^\epsilon(t))dt + \epsilon\sigma(r^\epsilon(t))^\xi dW_t^0, r^\epsilon(0) = r$$

であり、停止時刻  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  のハザード過程は、

$$dh_i^\epsilon(t) = \beta_i(\bar{h}_i - h_i^\epsilon(t))dt + \epsilon\sigma_{i0}(r^\epsilon(t))^\xi dW_t^0 + \epsilon\sum_{j=1}^3\sigma_{ij}dW_t^j, h_i^\epsilon(0) = h_i$$

であるとする。 $\xi = 0.7$  とし、ほかのパラメータは CIR 金利モデルと同じであるとする。

図 1: 満期とデフォルト・スワップション価格 (CIR 金利モデル)



まず、デフォルト・スワップ価格の数値計算の設定を行う。参照資産となる企業のデフォルト・デフォルト時の債券のリカバリー・レートは、 $\delta = 0.5$  で固定する。また、デフォルト・スワップの開始時刻を  $T_0 = 1$  年として、半年に 1 回プレミアムの支払いのあるケース ( $\Delta = 0.5$ ) を考える。支払回数が 6 回のもものと 10 回のもので数値計算を行った。つまり、デフォルト・スワップの満期は、それぞれ、4 年後および 6 年後となる。また、社債の満期は、デフォルト・スワップの満期と等しく、 $T = T_m$  であるものとする。

ガウシアン・モデル、CIR モデルおよび CIR 金利モデルにおけるデフォルト・スワップの価格は、解析的に閉じた形で書ける。ただし、完全に陽的な表現を得るのはかなり煩雑であるので、価格式の係数のリッカチ方程式をルンゲ・クッタ法による数値計算により求めて、解析解としている。

まず、表 1 では、カウンターパーティ・リスクを含めたモデルにおけるデフォルト・スワップの価格を与えた。また、表 3 ではバスケット・スワップの価格を与えた。また、CEV 金利モデルの場合には解析解が求まらないので、小分散漸近展開法による結果と解析解の比較は行えない。表 1 および表 3 より、小分散漸近展開法により、極めて精度の高いスワップの近似解が得られることがわかる。また、小分散漸近展開法は、CEV 金利モデルのように、通常の方法では解析解の導出が難しい場合でも価格を求められることが特徴である。また、バスケット・スワップの評価でも、3 企業モデルを考察した。バスケット・スワップのリカバリー・レートは  $\gamma_0 = 0$  かつ  $\gamma = 0.5$  とした。

デフォルト・スワップション価格の数値計算も 4 節で議論した方法により行った。1 年

表1. デフォルト・スワップ価格

満期1年・支払回数6回			満期1年・支払回数10回		
	解析解	漸近展開		解析解	漸近展開
ガウシアン	0.021685	0.021685	ガウシアン	0.022615	0.022616
CIR	0.021711	0.021710	CIR	0.022680	0.022677
CIR 金利	0.021675	0.021675	CIR 金利	0.022593	0.022592
CEV 金利		0.021711	CEV 金利		0.022678

表2. デフォルト・スワップション価格

満期1年・支払回数6回			満期1年・支払回数10回		
	漸近展開	M.C.		漸近展開	M.C.
ガウシアン	0.003563	0.003572	ガウシアン	0.006369	0.006394
CIR	0.003339	0.003331	CIR	0.006092	0.006070
CIR 金利	0.003606	0.003619	CIR 金利	0.0064	0.006441

ここで、M.C.とは、モンテカルロ法を意味している。

表3. バスケット・スワップ価格

満期1年・支払回数6回			満期1年・支払回数10回		
	解析解	漸近展開		解析解	漸近展開
ガウシアン	0.055017	0.055018	ガウシアン	0.054432	0.054438
CIR	0.055252	0.055248	CIR	0.054853	0.054843
CIR 金利	0.055024	0.055025	CIR 金利	0.054436	0.054443
CEV 金利		0.054999	CEV 金利		0.054426

表4. バスケット・スワップション価格

満期1年・支払回数6回			満期1年・支払回数10回		
	漸近展開	M.C.		漸近展開	M.C.
ガウシアン	0.009360	0.009382	ガウシアン	0.011665	0.011694
CIR	0.006533	0.006508	CIR	0.008183	0.008096
CIR 金利	0.009683	0.009687	CIR 金利	0.012078	0.012080

ここで、M.C.とは、モンテカルロ法を意味している。

表 5 . 満期とデフォルト・スワップション価格 (CIR 金利モデル)

満期 (年)	1	2	3	4	5
漸近展開	0.0064	0.006897	0.006624	0.006058	0.005393
モンテカルロ	0.006435	0.006953	0.006708	0.006168	0.005529

図 2: 行使価格とデフォルト・スワップション価格 (CEV モデル)

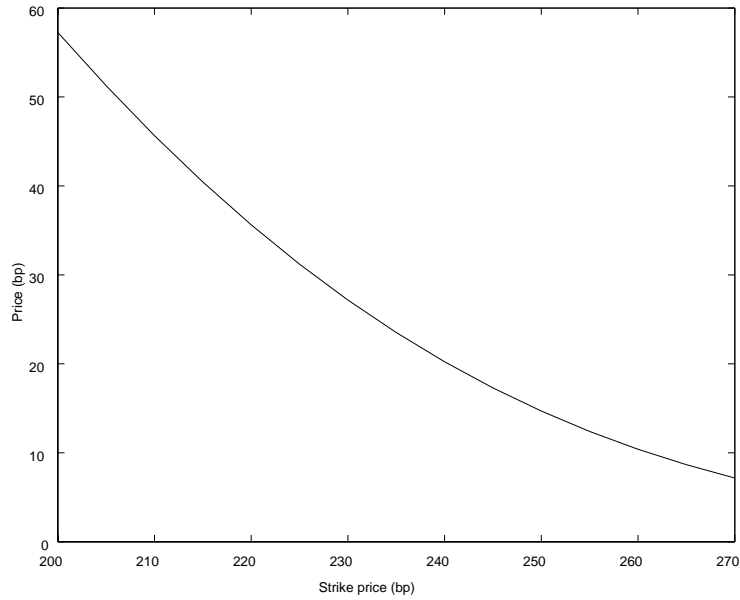


図 3: 行使価格とバスケット・スワップション価格 (CEV モデル)

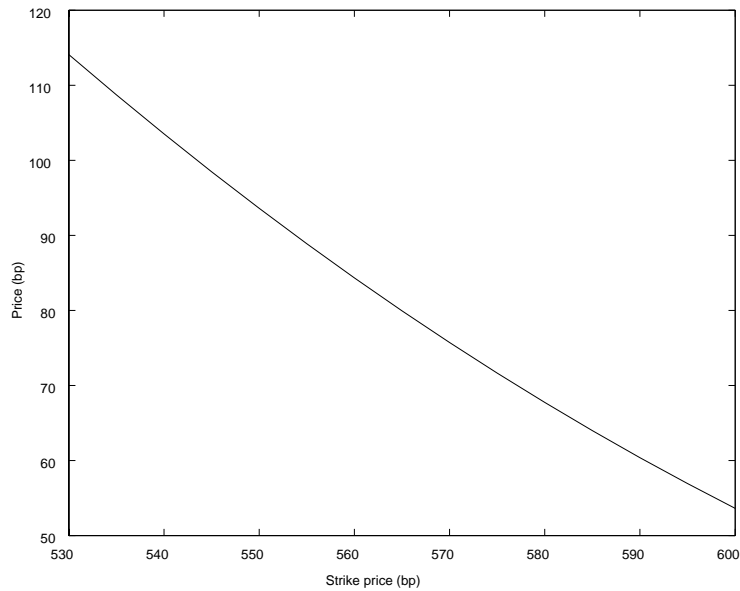


図 4: ハザードとデフォルト・スワップ価格 (CIR モデル)

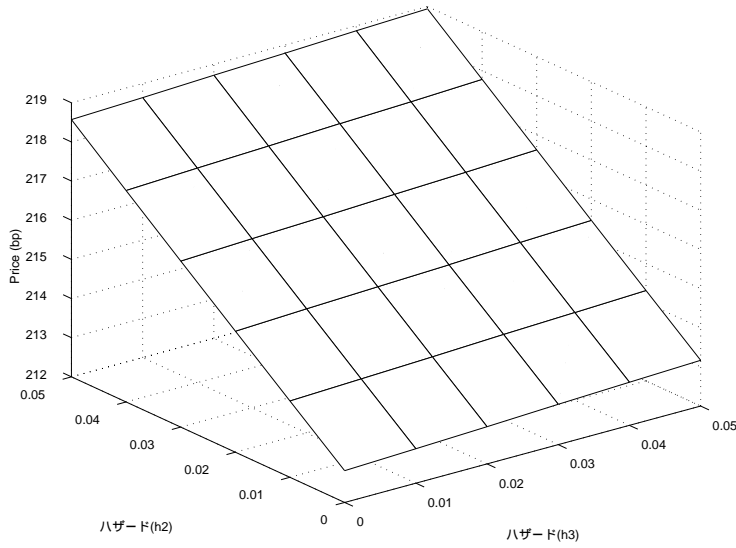
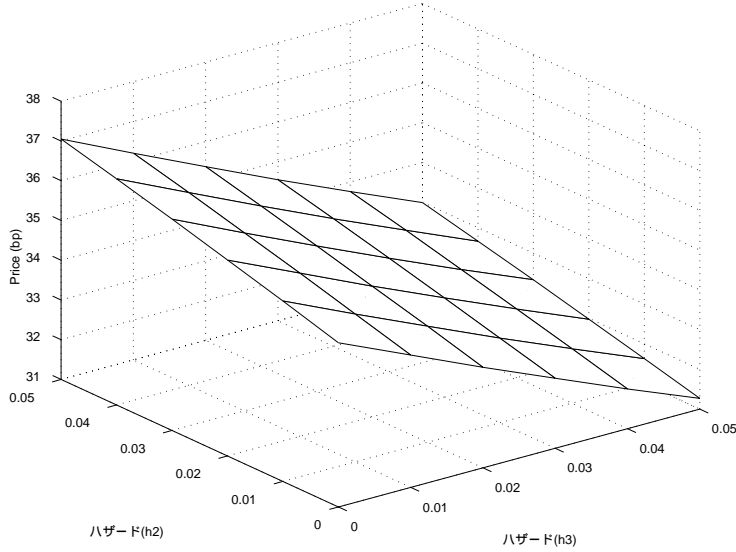


図 5: ハザードとデフォルト・スワップション価格 (CIR モデル)





を5,000分割し、モンテカルロ法により1,000,000本のパスを作成してシミュレーションによる価格計算を行った。漸近展開によるデフォルト・スワップシヨンの評価の結果をモンテカルロ法による結果をベースとして比較する。デフォルト・スワップシヨンの価格を計算するにあたり、デフォルト・スワップの満期は1年とし、行使価格は0.022で固定してある。その結果が表2である。誤差は総じて小さいことがわかる。

一方、表4では、バスケット・スワップシヨンの価格を示す。バスケット・スワップシヨンの満期は1年であり、行使価格は0.055である。バスケット・スワップシヨンの場合でも、漸近展開によって、高い精度で価格の計算が可能であることがわかる。

表5は、CIR金利モデルにおいて、デフォルト・スワップシヨンの価格を漸近展開法およびモンテカルロ法で解いたものを比較している。表1から表4では、1年を5,000分割してパスを構築し価格計算を行ったが、ここでは、計算時間の節約のために1年あたりの分割数は2,000としている。デフォルト・スワップシヨンの満期が短い場合は、漸近展開法の計算精度が高く、満期が長くなるほど漸近展開法の計算精度は低下することがわかる。

図1では、CIR金利モデルにおけるデフォルト・スワップシヨンの価格を満期の関数として図示した。満期が長くなると、価格は一定値まで増加し、それ以上満期が長くなると、逆に価格が減少することがわかる。図2では、CEV金利モデルでカウンターパーティ・リスクのあるデフォルト・スワップのオプション価格を行使価格の関数として図示した。同様に、図3はCEV金利モデルでバスケット・スワップシヨンの価格を行使価格の関数として図示したものである。

いま、CIRモデルで買い手と売り手のハザードの満たす確率微分方程式中の平均回帰水準のパラメータおよび初期値が同一の値を取るモデルを考える。すなわち、

$$h_2 = \bar{h}_2, h_3 = \bar{h}_3$$

を満たし、かつ、ほかのパラメータは先に定義したCIRモデルと同じ値を取るモデルを考える。 $h_2$ と $h_3$ を、それぞれ0.0から0.05までの値を与えたときのデフォルト・スワップおよびデフォルト・スワップシヨンの価格を図示したものが図4と図5である。デフォルト・スワップの価格が $h_2$ の変化に敏感であり、 $h_3$ の変化には反応が少ないことがわかる。デフォルト・スワップの価格がデフォルト・スワップの買い手のハザード $h_2$ の増加関数となっているのは、本研究で提案したデフォルト・スワップは、プレミアムが後払いになっていることによるものと考えられる。一方、デフォルト・スワップシヨンは $h_2$ の緩い増加関数、 $h_3$ の減少関数になっていることがわかる。 $h_2$ に対して緩い増加関数となったのは、デフォルト・スワップ価格が $h_2$ の増加関数である結果であり、 $h_3$ に対し減少関数であるのは、条件付期待値によるデフォルト・スワップシヨンの価格式(4)式中の割引率

表 6. バスケット商品価格の相関係数の効果

	スワップ	スワップション
相関あり	0.055567	0.001352
相関なし	0.054351	0.008137

$e^{-\int_0^{T_0} r(t)+h_1(t)+h_2(t)+h_3(t)dt}$  による影響であるものと考えられる。

最後に表 6 では、ハザード過程や金利過程の相関係数がバスケット・スワップおよびバスケット・スワップションに及ぼす効果について調べた。ここでは、ガウシアン・モデルを用いて価格を計算している。ボラティリティの係数以外は上述のガウシアン・モデルと同じパラメータを用いている。また、ボラティリティの係数は相関なしの場合で、 $\sigma_{00} = 0.015$ ,  $\sigma_{11} = 0.01$ ,  $\sigma_{22} = 0.02$ ,  $\sigma_{33} = 0.01$  である。ほかのボラティリティのパラメータは 0 で固定してある。比較のため、相関の有無に関わらず同じ大きさのボラティリティを持つ金利およびハザード過程を考察する。金利のボラティリティ係数の大きさは  $\sigma_{00} = 0.015$  である。また、企業 1 のハザード過程のボラティリティの大きさは  $\sigma_{10} = (-2/7) * 0.01$ ,  $\sigma_{11} = (5/7) * 0.01$ ,  $\sigma_{12} = (2/7) * 0.02$ ,  $\sigma_{13} = (4/7) * 0.01$  とする。企業 2 のハザード過程のボラティリティの大きさは  $\sigma_{20} = (-2/7) * 0.02$ ,  $\sigma_{21} = (4/7) * 0.02$ ,  $\sigma_{22} = (5/7) * 0.02$ ,  $\sigma_{23} = (2/7) * 0.02$  である。さらに、企業 3 のハザード過程のボラティリティの大きさは  $\sigma_{30} = (-2/7) * 0.01$ ,  $\sigma_{31} = (2/7) * 0.01$ ,  $\sigma_{32} = (4/7) * 0.02$ ,  $\sigma_{33} = (5/7) * 0.01$  とする。このように、パラメータを選んでおくと金利や各ハザード過程の満たす確率微分方程式のボラティリティの大きさ自体は相関の有無によらず、金利過程のボラティリティは 0.015、企業 1, 2, 3 のハザード過程のボラティリティは各々 0.01, 0.02, 0.01 となる。条件付独立性を基礎にしたモデルでは、Kijima and Muromachi [2000] で議論されているようにバスケット・スワップのプレミアムへの相関構造の効果は大きくないことが知られている<sup>22</sup>。一方で、相関構造がバスケット・スワップション価格へ大きな効果をもたらすか否かはあまり知られていない。表 6 の数値計算結果から、相関の有無によりバスケット・スワップの価格に大きな差は認められない。一方で、バスケット・スワップションの価格には相関の有無により大きな差が認められ、相関構造はバスケット・スワップション価格に大きな影響を与えることがわかる。

<sup>22</sup>Kijima and Muromachi [2000] では “According to our extensive numerical experiments, the price of the default swaps, especially for  $\pi_D$ , is surprisingly robust with respect to correlation coefficients.” と述べており、相関係数はバスケット・スワップ（特に、ファースト・トゥ・デフォルト型）価格に強い影響を及ぼさないことが述べられている。

## 8 まとめ

本論文では、カウンターパーティ・クレジット・リスクが存在する場合におけるデフォルト・スワップやバスケット・スワップの価格の解析を中心に議論を行った。これらは、複数の企業のデフォルト・リスクを考慮に入れなければ、価格を計算することのできない信用派生商品である。本論文で扱った商品は、デフォルト・スワップとデフォルト・スワップション、バスケット・スワップとバスケット・スワップションと多岐に渡っている。これらの商品でも、特に、スワップションの価格計算は解析的な扱いが難しい問題である。

本論文では、まず、これらの商品の価格を偏微分方程式およびモンテカルロ法を用いた計算方法を提案した。また、Kunitomo and Takahashi [2001] や国友・高橋 [2003] 等で導入された小分散漸近展開法によりこれらの信用派生商品価格の近似計算を行い、数値計算の結果についても考察を行った。3 企業モデルで満期 1 年のデフォルト・スワップションおよびバスケット・スワップションの価格計算を行い、精度の高い結果を得た。

今後の課題としては、ペイオフ関数を線形近似したうえで、変数変換アプローチを用いる方法 ( Singleton and Umantsev [2002] ) 等、ほかの手法による結果との比較が挙げられる。また、本論文ではコーラブルなデフォルト・スワップのような早期行使権の付いた商品の価格評価は行っていない。早期行使権の付いた商品の解析は信用派生商品の評価で重要なトピックの 1 つであるが、本論文で用いた小分散漸近展開法等の手法とは相性が悪いようである。また、本論文の問題設定のようにファクター数が多い問題では、偏微分方程式を用いた評価でも早期行使権の付いた商品の価格計算はあまり効率がよくない。早期行使権の付いた商品の価格評価も今後の課題である。

以上

## 補論 小分散漸近展開法の正当性

本補論では、本論でスワップション等の価格の近似計算で用いられた小分散漸近展開法の数学的考察を行う。

まず、小分散漸近展開法の数学的考察に関する既存研究の展開を説明する。1980年代後半より Watanabe [1987] 等により、数学的な正当化に関する研究が行われるようになった。1990年代には数理統計学への応用が盛んになり、数理統計学的な見地からの数学的正当化は Yoshida [1992] 等で議論されている。その後、数理ファイナンスでも応用されるようになり、Kunitomo and Takahashi [2001,2003] や国友・高橋 [2003] で、数理ファイナンスの視点からの数学的な正当化に関して考察が行われている。小分散漸近展開法は、マリアバン解析と呼ばれる数学を基礎にしているが、マリアバン解析については、例えば、Ikeda and Watanabe [1989], Nualart [1995], Øksendal [1997], 重川 [1998] 等を参照。近年、マリアバン解析は、株式オプションのグリークス (感応度) の計算等で用いられている。これについては、今村・内田・高橋 [2005] を参照。

$[0, T]$  で定義された連続関数  $x : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$  全体の空間を  $C_0([0, T]; \mathbf{R}^d)$  と書く。この空間は、ブラウン運動のパス全体の集合とみなせ、ノルム  $\|x\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|$  を入れるとバナッハ空間となる。 $C_0([0, T]; \mathbf{R}^d)$  の部分空間  $H^1$  を 2 乗可積分な密度を持つ関数全体の空間としよう。すなわち、

$$x(t) = \int_0^t \frac{d}{ds} x(s) ds, \quad \frac{d}{dt} x(t) \in H$$

と表現される関数全体が  $H^1$  である。ここで、 $H$  を 2 乗可積分な関数全体からなるヒルベルト空間  $H = L^2([0, T]; \mathbf{R}^d)$  とする。空間  $H^1$  に

$$\langle x, y \rangle_{H^1} = \left\langle \frac{d}{dt} x, \frac{d}{dt} y \right\rangle_H = \sum_{i=1}^d \int_0^T \frac{d}{dt} x_i(t) \frac{d}{dt} y_i(t) dt$$

という内積を入れると、ヒルベルト空間  $H$  の構造を  $H^1$  に移せる。さらに、

$$\|x\|_\infty \leq \int_0^T \left| \frac{d}{dt} x(t) \right| dt \leq \left\| \frac{d}{dt} x(t) \right\|_H \leq \|x\|_{H^1}$$

より、 $H^1$  の元を  $C_0([0, T]; \mathbf{R}^d)$  の元とみる写像は連続である。 $w$  と  $h = (h_1, \dots, h_n)$  を  $h_1, \dots, h_n \in H^1$  および  $w \in C_0([0, T]; \mathbf{R}^d)$  とする。確率変数  $F$  が多項式汎関数  $\mathcal{P}$  に含まれるとは、多項式  $f$  を用いて、

$$F = f(W(h_1), \dots, W(h_n))$$

と書けることとする。ここで、 $W(h)$  は確率積分  $\int_0^T h(t)dw_t$  を表す。関数  $k(t) \in H^1$  とすると  $H^1$  の定義より、ある関数  $\gamma(t)$  を用いて  $k(t) = \int_0^t \gamma(s)ds$  と書ける。 $F$  の  $k \in H^1$  方向の方向微分を

$$\langle DF, \gamma \rangle_H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(W(h_1) + \epsilon \langle h_1, \gamma \rangle_H, \dots, W(h_n) + \epsilon \langle h_n, \gamma \rangle_H) - f(W(h_1), \dots, W(h_n))]$$

で定義する。関数  $\psi(t, \omega)$  が存在して

$$\langle DF, \gamma \rangle_H = \int_0^t \psi(s, \omega) \gamma(s) ds$$

が成り立つとき、 $\psi(t, \omega)$  を  $F$  の微分と呼び  $D_t F$  と書く。この  $D_t F$  は、次のように計算可能である。

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i$$

ここで、 $\{D_t F\}$  を確率過程の元とみなしたものを  $DF$  と書く。すなわち、 $DF$  とは  $\{\psi(\cdot, \omega)\}$  のことである。

滑らかで  $\{\mathcal{F}_T\}$  可測な  $E^P[F^2] < \infty$  を満たす確率変数  $F$  は、 $[0, T]^n$  で定義された、 $n$  変数関数であり、各要素に対して対称な 2 乗可積分な関数  $\hat{f}_n$  を用いて  $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\hat{f}_n)$  と書ける。この結果は、Nualart [1995] の Proposition 1.2.1 を参照。このような表示方法をウィナー・カオス展開とよぶ。ただし、 $I_n(\cdot)$  は  $n$  重確率積分を表し、 $f$  を  $[0, T]^n$  で定義された関数とすると

$$I_n(f) = \int_0^T \cdots \int_0^{t_n} \int_0^{t_2} f(t_1, \dots, t_n) dW_{t_1} \cdots dW_{t_n}$$

と定義される。確率変数  $F$  から  $n$  重積分への射影を考える。つまり、 $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\hat{f}_n)$  を  $I_n(\hat{f}_n)$  に割り当てる写像を考え、その写像を  $J_n$  と書く。

このような準備のもとで、 $L_p$  ノルムを用いて、確率変数  $F$  について新しいノルム

$$\|F\|_{p,s} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)^{s/2} J_k F \right\|_p$$

を定義する。

多項式汎関数の空間  $\mathcal{P}$  をノルム  $\|\cdot\|_{p,s}$  を用いて完備化した空間を  $D_p^s$  と書く。 $1/p + 1/q = 1$  という関係があるときに、 $D_q^{-s}$  は  $D_p^s$  の双対である。ここで、滑らかな確率変数の族  $D^\infty$  とその双対である超ウィナー汎関数の族  $\tilde{D}^{-\infty}$  を

$$D^\infty = \bigcap_{s>0} \bigcap_{1<p<+\infty} D_p^s, \quad \text{および} \quad \tilde{D}^{-\infty} = \bigcup_{s>0} \bigcap_{1<p<+\infty} D_p^{-s}$$

で定義しておく。

$D_p^1$  に含まれる確率変数についてマリアバンの共分散行列を

$$\sigma_{MC}(F) = \{\langle DF^i, DF^j \rangle_H\}_{i,j} = \left\{ \int_0^T \psi_i(t, \cdot) \psi_j(t, \cdot) dt \right\}_{i,j}$$

で定義する。 $\psi(t, \cdot)$  は確率変数なので、マリアバンの共分散行列も確率変数である。

ここで、確率変数  $X^\epsilon(\omega)$  を小さなパラメータ  $\epsilon$  を持つウィナー汎関数とする。この確率変数が

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|X^\epsilon\|_{p,s}}{\epsilon^k} < +\infty$$

を満たすとき、 $D_p^s$  において  $X^\epsilon(\omega) = O(\epsilon^k)$  であるということにする。

もし、全ての  $p > 1, s > 0$  および各  $k = 1, 2, \dots$  について

$$X^\epsilon(\omega) - (g_1 + \epsilon g_2 + \dots + \epsilon^{k-1} g_k) = O(\epsilon^k)$$

が、 $\epsilon \rightarrow 0$  のときに  $D_p^s$  に属するとき、 $X^\epsilon(\omega)$  は漸近展開を持つといい、 $\epsilon \rightarrow 0$  で

$$X^\epsilon(\omega) \sim g_1 + \epsilon g_2 + \dots$$

は  $D^\infty$  に属し、 $g_1, g_2, \dots \in D^\infty$  である。

各  $k = 1, 2, \dots$  に対して、 $s > 0$  および全ての  $p > 1$  について、 $X^\epsilon(\omega), g_1, g_2, \dots \in D_p^{-s}$  かつ  $\epsilon \rightarrow 0$  のとき

$$X^\epsilon(\omega) - (g_1 + \epsilon g_2 + \dots + \epsilon^{k-1} g_k) = O(\epsilon^k)$$

が、 $D_p^{-s}$  に属するならば、 $X^\epsilon(\omega) \in \tilde{D}^{-\infty}$  は漸近展開を持つといい、

$$X^\epsilon(\omega) \sim g_1 + \epsilon g_2 + \dots$$

は  $\tilde{D}^{-\infty}$  に属し、 $g_1, g_2, \dots \in \tilde{D}^{-\infty}$  である。

定理 A.1 での議論のために関数  $\psi(y)$  を導入する。 $\psi(y)$  は滑らかで、任意の実数  $y$  に対して  $0 \leq \psi(y) \leq 1$  を満たす関数とする。 $|y| > 1$  ならば  $\psi(y) = 0$  であり、 $|y| < 1/2$  では  $\psi(y) = 1$  とする。また、 $\phi^\epsilon(y)$  は滑らかな関数とする。さらに、 $\eta^\epsilon$  は  $D^\infty$  に含まれる確率変数とする。いま、合成汎関数  $\psi(\eta^\epsilon) \phi^\epsilon(X^\epsilon) I_B(X^\epsilon)$  が  $\tilde{D}^{-\infty}$  において漸近展開を持つ条件は Yoshida [1992] で与えられており、定理 A.1 にまとめられる。なお、 $\psi(\eta^\epsilon)$  の部分は、 $\phi^\epsilon(X^\epsilon)$  の裾を無視して、局所的な部分でのみ考えるためにおいてある。 $\eta^\epsilon$  をどのように選べばよいかは後述する。

定理 A.1 次の条件を満たしているとする。

- (i)  $\{X^\epsilon(\omega); \epsilon \in (0, 1]\} \in D^\infty$  とする。

(ii)  $X^\epsilon(\omega)$  は次の漸近展開を持ち、 $X^\epsilon(\omega) \sim g_1 + \epsilon g_2 + \dots$  は  $\epsilon \rightarrow 0$  において  $D^\infty$  に属し、 $g_1, g_2, \dots \in D^\infty$  となる。

(iii)  $\{\eta^\epsilon(\omega)\} \in D^\infty$  であり、かつ  $\epsilon \rightarrow 0$  のとき、 $O(1) \in D^\infty$  となる。

(iv) 任意の  $p > 1$  で次式が成立する。

$$\sup_{\epsilon \in (0,1]} E[1_{\{|\eta^\epsilon| \leq 1\}} (\det[\sigma_{MC}(X^\epsilon)])^{-p}] < \infty \quad (\text{A-1})$$

(v) 任意の  $k \geq 1$  で次式が成立する。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-k} P[|\eta^\epsilon| > \frac{1}{2}] = 0 \quad (\text{A-2})$$

(vi) 関数  $\phi^\epsilon(x)$  は、 $(x, \epsilon)$  について  $\mathbb{R}^n \times (0, 1]$  上で滑らかである。

これらの条件のもとで  $\psi(\eta^\epsilon)\phi^\epsilon(X^\epsilon)I_B(X^\epsilon)$  は  $\epsilon \rightarrow 0$  のとき、 $\tilde{D}^{-\infty}$  の意味で漸近展開を持ち、 $\psi(\eta^\epsilon)\phi^\epsilon(X^\epsilon)I_B(X^\epsilon) \sim \Phi_0 + \epsilon\Phi_1 + \dots$  と書ける。

Yoshida [1992] の Theorem 2.2 の証明で示されるように、漸近展開の正当性の証明ではたびたび部分積分の公式が用いられる。部分積分を行うための条件が (A-1) 式である。Ikeda and Watanabe [1989] の 5 章 9 節にあるように、部分積分を行うとマリアバンの共分散行列の逆行列を計算しなければならないが、マリアバン共分散行列が逆行列を持つための条件として、すなわちマリアバンの共分散行列の非退化性の条件として (A-1) 式が必要になる。また、(A-1) 式の中に入っているインディケータ関数や (A-2) 式は、裾での挙動を無視できるように、Watanabe [1987] の Theorem 2.3 を局所化するための条件である。この条件は、Yoshida [1992] の Theorem 2.2 で与えられている。定理 A.1 の条件が満たされれば、

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\epsilon^k} E[\psi(\eta^\epsilon)\phi^\epsilon(X^\epsilon)I_B(X^\epsilon) - (\Phi_0 + \epsilon\Phi_1 + \dots + \epsilon^k\Phi_k)] \right| < \infty$$

が成り立つ。

本論 4 節で議論したように、金利およびハザードの確率過程が、4 次元の確率微分方程式

$$z^\epsilon(t) = x_0 + \int_0^t \mu(z^\epsilon(s), s) ds + \sum_{j=0}^J \epsilon \int_0^t \sigma(z^\epsilon(s), s) dW_s \quad (\text{A-3})$$

で与えられているとする。ただし、 $z^\epsilon(t) = {}^t(z_0^\epsilon(t), \dots, z_3^\epsilon(t)) = {}^t(r^\epsilon(t), h_1^\epsilon(t), h_2^\epsilon(t), h_3^\epsilon(t))$  である。また、ドリフト項と拡散項を表す関数  $\mu$  および  $\sigma$  は、 $\mu : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  および

$\sigma : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4 \otimes \mathbf{R}^4$  で与えられており、 $W_t = (w_t^0, w_t^1, w_t^2, w_t^3)$  は 4 次元標準ブラウン運動とする。ドリフト項および拡散項は、有界性の条件

$$\sup_{z \in \mathbf{R}^4} \left| \frac{\partial^k \mu_i(z, s)}{\partial z_0^{k_0} \cdots \partial z_3^{k_3}} \right| < M_1(k), \quad \sup_{z \in \mathbf{R}^4} \left| \frac{\partial^k \sigma_{ij}(z, s)}{\partial z_0^{k_0} \cdots \partial z_3^{k_3}} \right| < M_2(k) \quad (\text{A-4})$$

および

$$\sup_{0 \leq s \leq T} [|\mu(0, s)| + |\sigma(0, s)|] < M_3 \quad (\text{A-5})$$

を満たしているとする<sup>23</sup>。ここで、 $k = k_0 + \cdots + k_3$  である。

マリアバン解析は、ブラウン運動のパスの汎関数の微分に関する理論であり、確率微分方程式の解にマリアバン解析を適用するためには、確率微分方程式が強い解を持つ必要性がある。条件 (A-4) および (A-5) のもとでは、確率微分方程式 (A-3) が強い解を持つことが知られている。この条件のもとでは、次の定理が成り立つ。

**定理 A.2** 条件 (A-4) および (A-5) のもとで、確率変数  $z^\epsilon(T)$  は  $D^\infty$  であり、 $\epsilon \rightarrow 0$  につれて漸近展開

$$z^\epsilon(T) \sim z^0(T) + \epsilon g_1(T) + \epsilon^2 g_2(T) + \cdots$$

を持ち、 $g_1(T), g_2(T), \dots \in D^\infty(\mathbf{R}^d)$  となる。

この定理は、例えば、Kunitomo and Takahashi [2003] の Theorem 3.1 で与えられており、定理 A.1 の条件 (i) および (ii) にあたる。

定理 A.1 の条件 (iv) を調べるにはマリアバンの共分散行列をあらかじめ計算しておく必要がある。確率微分方程式 (A-3) のマリアバンの共分散行列は

$$\sigma_{MC}^{ij}((z^\epsilon(T))) = \left\{ \sum_{k=0}^3 \int_0^T [Y^\epsilon(T)Y^\epsilon(s)^{-1}\sigma(z^\epsilon(s), s)]^{ik} [Y^\epsilon(T)Y^\epsilon(s)^{-1}\sigma(z^\epsilon(s), s)]^{jk} ds \right\}_{i,j} \quad (\text{A-6})$$

で与えられる。ここで、確率過程  $Y^\epsilon(t)$  は確率微分方程式

$$dY_{il}^\epsilon(t) = \sum_{k=0}^3 \partial_k \mu_i(z^\epsilon(t), t) Y_{kl}^\epsilon(t) dt + \epsilon \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 \partial_k \sigma_{ij}(z^\epsilon(t), t) Y_{kl}^\epsilon(t) dw_t^j$$

の解である。ここで、定理 A.1 の仮定を成立させるために以下の条件をおく。

**条件 A.1** 任意の  $T > 0$  について、 $n \times n$  次行列  $\Sigma_T$  を

$$\Sigma_T = \sum_{k=0}^3 \int_0^T [Y(T)Y(s)^{-1}\sigma(z^0(s), s)]^{ik} [Y(T)Y(s)^{-1}\sigma(z^0(s), s)]^{jk} ds \quad (\text{A-7})$$

で定義すると、この行列は非退化である。ここで、 $Y(t) = Y^0(t)$  である。

<sup>23</sup>金融工学で多用されるモデルの1つである CIR モデルは、実は、これらの条件を満たしていない。ただし、その場合でも漸近展開を用いても問題は生じない。



任意の正の実数  $c$  に対して、確率変数  $\eta_c^\epsilon$  を

$$\eta_c^\epsilon = c \int_0^T |Y^\epsilon(T)(Y^\epsilon(s))^{-1}\sigma(z^\epsilon(s), s) - Y(T)(Y(s))^{-1}\sigma(z^0(s), s)|^2 ds$$

で定める。

この  $\eta_c^\epsilon$  を定理 A.1 の中の  $\eta^\epsilon$  として用いれば、Kunitomo and Takahashi [2003] や 国友・高橋 [2003] で議論されているように、条件 A.1 と (A-4) および (A-5) のもとで、定理 A.1 の条件 (iii)(iv)(v) が満たされることがわかる。よって、以下の定理が成り立つ。

**定理 A.3** 確率微分方程式 (A-3) において、条件 A.1 と (A-4), (A-5) が成り立つとき、多項式次数の滑らかな関数  $\phi^\epsilon(x)$  に対し、 $\psi(\eta_c^\epsilon)\phi(z^\epsilon(T))I_B(z^\epsilon(T))$  は  $\epsilon \rightarrow 0$  のときに漸近展開を持ち

$$\psi(\eta_c^\epsilon)\phi(z^\epsilon(T))I_B(z^\epsilon(T)) \sim \Phi_0 + \epsilon\Phi_1 + \epsilon^2\Phi_2 + \dots$$

は  $D^{-\infty}$  に属する。ただし、 $B$  は、ボレル集合であり、 $\eta^\epsilon \in D^\infty$  および、 $\psi(y)$  は滑らかな関数で、任意の実数  $y$  に対して  $0 \leq \psi(y) \leq 1$  を満たすとする。 $|y| > 1$  ならば  $\psi(y) = 0$  であり、 $|y| < 1/2$  で  $\psi(y) = 1$  とする。また、 $\phi^\epsilon(y)$  を滑らかな関数とする。 $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$  は、 $X_T^\epsilon$  の形式的なテイラー展開により与えられる。

この定理より、

$$\begin{aligned} E[\phi(z^\epsilon(T))1_B(z^\epsilon(T))] &\sim E[\psi(\eta_c^\epsilon)\phi(z^\epsilon(T))I_B(z^\epsilon(T))] \\ &\sim E[\Phi_0] + \epsilon E[\Phi_1] + \epsilon^2 E[\Phi_2] + \dots \end{aligned}$$

が成り立つので、漸近展開が行えることが示された。あとは、各項の期待値を計算すればよい。

## 参考文献

- [1] Black, F. and J. Cox, “Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions,” *Journal of Finance* **31**, pp.351-367, 1976.
- [2] Bielecki, T. R. and M. Rutkowski, *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*, Springer, 2002.
- [3] Chen, L. and D. Filipović, “Credit Derivatives in an Affine Framework,” working paper, 2003.
- [4] Cox, J., J. Ingersoll and S. Ross, “A Theory of Term Structure of Interest Rates,” *Econometrica* **53**, pp.385-408, 1985.
- [5] Duffie, D., *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton, 2001.
- [6] Duffie, D., J. Pan, and K. Singleton, “Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions,” *Econometrica* **68**, pp.1343–1376, 1999.
- [7] Duffie, D. and K. Singleton, “Modeling Term Structures of Defaultable Bonds,” *The Review of Financial Studies* **12**, pp.687–720, 1999.
- [8] Huge, B. and D. Lando, “Swap Pricing with Two-sided Default Risk in Rating Based Model,” *European Finance Review* **3**, pp.239-268, 1999.
- [9] Ikeda, N. and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and and Diffusion Processes*, 2nd ed., North-Holland/ Kodansha, Tokyo, 1989.
- [10] Jarrow, R. and S. Turnbull, “Pricing Derivatives with Credit Risk,” *Journal of Finance* **50**, pp.53–86, 1995.
- [11] Jarrow, R. and F. Yu, “Counterparty risk and the Pricing on Defaultable Securities,” *Journal of Finance* **56**, pp.1765–1798, 2001.
- [12] Kijima, M., “Valuation of a Credit Swap of the Basket Type,” *Review of Derivatives Research* **4**, pp.81–97, 2000.
- [13] Kijima, M. and Y. Muromachi, “Credit Events and Valuation of Credit Derivatives of Basket Type,” *Review of Derivatives Research* **4**, pp.55-79, 2000.

- [14] Kunitomo, N. and A. Takahashi, “The Asymptotic Expansion Approach to the Valuation of Interest Rate Contingent Claims,” *Mathematical Finance* **11**, pp.117–151, 2001.
- [15] Kunitomo, N. and A. Takahashi, “On Validity of the Asymptotic Expansion Approach in Contingent Claims Analysis ,” *The Annals of Applied Probability*, **13**, pp.914–952, 2003.
- [16] Longstaff, F. and E. Schwartz, “A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt,” *Journal of Finance* **50**, pp.789-819, 1995.
- [17] Merton, R., “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates,” *Journal of Finance* **29**, pp.449-470, 1974.
- [18] Muroi, Y., “Pricing American Put Options on Defaultable Bonds,” *Asia-Pacific Financial Markets* **9**, pp.217–239, 2002.
- [19] Muroi, Y., “A Review for Pricing Problems of Options on Defaultable Bonds,” JAFEE 冬季大会予稿集 (日本金融・証券計量・工学学会), pp.96–114, 2004.
- [20] Muroi, Y., “Pricing Contingent Claim with Credit Risk: Asymptotic Expansion Approach,” *Finance and Stochastics* **9**, pp.414–427, 2005.
- [21] Nualart, D., *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer, 1995.
- [22] Øksendal, B. (1997) *An Introduction to Malliavin Calculus with Applications to Economics*, Norwegian School of Economics and Business Administration.
- [23] Øksensal, B., *Stochastic Differential Equations 5th ed.*, Springer, 1998.  
日本語版 谷口節男 訳, 『確率微分方程式・入門から応用まで』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1999年
- [24] Singleton, K. and L. Umantsev, “Pricing Coupon-bond Options and Swaptions in Affine Term Structure Models,” *Mathematical Finance* **12**, pp.427–446, 2002.
- [25] Vasicek, O., “An Equilibrium Characterization of the Term Structure,” *Journal of Financial Economics* **5**, pp.177–188, 1977.

- [26] Watanabe, S., “Analysis of Wiener Functionals (Malliavin Calculus) and Its Applications to Heat Kernels,” *Annals of Probability* **15**, pp.1–39, 1987.
- [27] Yoshida, N., “Asymptotic Expansions of Maximum Likelihood Estimators for Small Diffusions via the Theory of Malliavin-Watanabe,” *Probability Theory and Related Fields* **92**, pp.275–311, 1992.
- [28] 今村悟, 内田善彦, 高橋明彦, 「マリアバン解析を用いたオプションのリスク指標の数値計算について」, 『金融研究』第 24 巻別冊第 1 号, 日本銀行金融研究所, 1 ~ 38 頁, 2005 年
- [29] 国友直人, 高橋明彦, 『数理ファイナンスの基礎・マリアバン解析と漸近展開の応用』, 東洋経済新報社, 2003 年
- [30] 重川一郎, 『確率解析 (岩波講座現代数学の展開 9)』, 岩波書店, 1998 年
- [31] 丸茂幸平, 家田明, 「信用リスクのある金融商品のコックス過程を用いたプライシング方法」, 『金融研究』第 20 巻別冊第 1 号, 日本銀行金融研究所, 19 ~ 48 頁, 2001 年