

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

銀行における流動性預金の現在価値と金利リスクの計測
— 先行研究のサーベイと実際のデータを用いた分析 —

あおのかずひこ
青野和彦*

Discussion Paper No. 2006-J-9

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい

備考：日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

銀行における流動性預金の現在価値と金利リスクの計測 — 先行研究のサーベイと実際のデータを用いた分析 —

あおの かずひこ
青野和彦*

要 旨

本稿では、銀行が受け入れている流動性預金（要求払預金）の現在価値の算出方法に関する先行研究をサーベイするとともに、実際のデータを用いて、流動性預金の現在価値や金利リスクを算出し、流動性預金の金利リスク計測の実務的手法を考察する。

具体的には、まず、流動性預金の現在価値を算出する方法を提案した幾つかの先行研究を取り上げ、それらで展開されている将来の預金額、預金金利および市場金利を記述するモデルと、モデルに基づく流動性預金の現在価値の算出方法の概要を解説する。

次に、先行研究のモデルから代表的なモデルを採用し、実際の預金額や預金金利等のヒストリカル・データを使って、モデルのパラメータを推定するとともに、モデルの表現力をみる。その上で、流動性預金の現在価値およびその金利感応度を求める。また、金利リスク管理手法の1つであるシナリオ分析を行う。さらに、流動性預金の滞留分であるコア預金の現在価値および金利感応度を求める手法を解説した上で、その手法を実際のデータに適用する。

キーワード：流動性預金、コア預金、預金価値、金利更改期、金利感応度

JEL classification: G21

* 日本銀行金融研究所（現 三菱東京 UFJ 銀行円貨資金証券部、E-mail: kazuhiko_aono@mufg.jp）

本稿は、2006年3月に日本銀行で開催された「金融商品の価格付け手法とリスク管理技術の新潮流」をテーマとする研究報告会（FEテクニカル・ミーティング）への提出論文に加筆・修正を施したものである。同テクニカル・ミーティング参加者からは、貴重なコメントを多数頂戴した。記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行あるいは三菱東京 UFJ 銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

(目次)

1. はじめに	1
2. 流動性預金の商品性、その金利更改期に関する考え方	2
(1) 流動性預金の商品性	2
(2) 流動性預金の金利更改期に関する考え方	4
3. 流動性預金の現在価値の算出モデル	6
(1) スプレッド付加後のディスカウント・ファクターを用いた評価モデル	6
(2) 無裁定価格理論に基づく評価モデル	10
4. 流動性預金の現在価値算出モデルを用いた実証分析	16
(1) OTSモデルとJvDモデルによる預金額と預金金利の推定	16
(2) 流動性預金の現在価値とその金利感応度	18
(3) シナリオ分析による金利リスク管理	20
(4) コア預金の現在価値とその金利感応度	23
5. 結語	26
補論1. 流動性預金の現在価値の解析解 (JvDモデル、HPモデル)	28
補論2. パラメータの推定結果 (OTSモデル、JvDモデル)	31
(1) OTSモデル	31
(2) JvDモデル	31

1. はじめに

内外の金融機関は、特に 1990 年代以降、リスク管理の重要性に関する認識が深まる中、ファイナンスの理論や技術の発展と歩調を合わせる形で、ALM (Asset Liability Management、資産・負債管理) の体制やそこで用いられる各種リスクの計測手法の構築・整備に注力してきた。

しかし、銀行の負債の大部分を占める流動性預金については、その金利リスクの計測や管理に関する議論は、それほど多くは行われてきていない。この背景には、流動性預金には、預金者に常時引き出すことができる権利 (アメリカン・オプション) が付与されているほか、預金者はそのオプションの行使を必ずしも合理的に行っている訳ではないという特殊性があることから、その金利リスクの評価はそもそも容易ではないとの認識があると考えられる。

以下は、10 年前 (1996 年) に付利のない要求払預金 (当座預金等) のリスク評価手法を論じた Selvaggio[1996] のイントロダクションからの引用である¹が、流動性預金全体の金利リスク管理の実務では、ここで書いてある姿は、10 年後の現時点 (2006 年) でも殆ど変わっていない。

『規制上の監査や銀行の資産・負債管理 (ALM) に関する会議の間に頻繁になされる質問は、「付利のない要求払預金をどこに ‘置いている’ のか？」である。それへの回答は、典型的には、「もちろん、1 カ月のバケットに」というものから、「我々は n カ月までの複数のバケットに振り分けている」、「安定額を 10 年のバケットに、残額をオーバー・ナイトのバケットに」というものに及んでいる。明らかに、ALM という技法と科学の実務家は、要求払預金勘定 (DDA) 債務の金利リスク・エクスポージャーに関してコンセンサスに達していない。商業銀行のバランス・シートでの DDA の相対割合が大きいことを前提とすると、これは、非常に残念なことである。』

¹ 原文は以下である。

「A frequently posed question during regulatory audits and at bank asset/liability management (ALM) conferences is “where do you ‘put’ non-interest-bearing demand deposits?” The answers typically range from “in the one-month bucket, of course” to “we tranche them out over n-months” to “stable base in the ten-year bucket and residual overnight.” Clearly, practitioners of the art and science of ALM have reached no consensus about the interest-rate risk exposure of demand deposit account (DDA) liabilities. This is particularly unnerving given the large relative DDA share of commercial bank balance sheets.」

銀行の ALM では、基本的に、負債で流動性預金が占める割合が高く、それが内包する金利リスクも小さくないと考えられる以上、流動性預金の金利リスクを、その商品性の実態に合わせて計測・管理するという潜在的なニーズは小さくないと考えられる。さらに、本邦に特有の事情として、近年の低金利局面で急増した流動性預金が、将来的な金利上昇局面で、大きく変動する可能性がある。このため、邦銀にとっては、流動性預金の金利リスクの計測・管理は相対的に重要なテーマとなっていると考えられる。

そこで、本稿では、流動性預金の計測手法を検討した幾つかの先行研究を基に、それらを流動性預金の金利リスクを金融実務の中で、どのように評価・管理していくかという点を検討する。

本稿の構成は、次のとおりである。まず、2 節で、流動性預金の商品性、およびその金利更改期に関する考え方を整理する。次に、3 節では、流動性預金の価値の算出を試みた先行研究を取り上げ、モデルの概要を説明する。さらに、4 節では、先行研究のモデルから代表的なモデルを採用し、実際の預金額や預金金利等のヒストリカル・データを使って、流動性預金やその滞留分であるコア預金の価値や金利リスクの算出を行う。最後に、5 節でまとめを述べる。

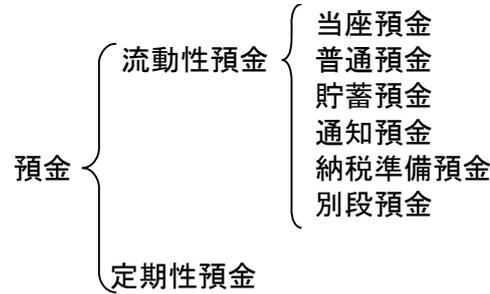
2. 流動性預金の商品性、その金利更改期に関する考え方

本節では、流動性預金の商品性を説明するとともに、その金利リスクを管理する上での、金利更改期に関する考え方を議論する。

(1) 流動性預金の商品性

流動性預金とは、預金期日の定めのない預金の総称である。その種類としては、普通預金、当座預金、通知預金、貯蓄預金、別段預金、納税準備預金がある(表 1)。流動性預金は、期日の定めがない点で、要求払預金、無期日預金とも呼ばれる。また、銀行のバランス・シート上で流動性預金の一定額が“滞留する”という特徴(後述)から、その滞留分をコア預金あるいは滞留性預金と呼ぶことがある。

表 1：流動性預金に分類される各種預金



流動性預金の特徴として挙げられることは、①銀行のバランス・シート上にその一定額が滞留すること、②定期性預金に比べて金利が低く設定されること、である。

まず、銀行のバランス・シート上に流動性預金の一定額が滞留する背景として挙げられるのは、流動性預金が各種の取引の資金決済に使われていることである。このため、各預金者には各自の流動性預金残高をある金額以上に保持する誘引が働き、その結果として、銀行のバランス・シート上に流動性預金の一定額が滞留していると考えられる。

次に、流動性預金の金利は、定期性預金のそれに比べて低く設定されているが、これは、流動性預金が、常時引き出し可能であるというオプション性を持っていることに基づくものである。つまり、預金者は、いつでも預金を引き出すことができる権利（オプション）を預金先の銀行から購入する対価として、オプション料を支払う必要があるため、その分、流動性預金の金利は定期性預金の金利よりも低く設定される。

預金金利の水準は、流動性預金、定期性預金の両方で、一般に、市場金利の水準と連動する形で決定される。この点、米国では、預金金利水準の変動には、市場金利の低下時には相対的に速やかに追従し、市場金利の上昇時には相対的に緩やかに追従するという、非対称性が観測されるといわれている²。

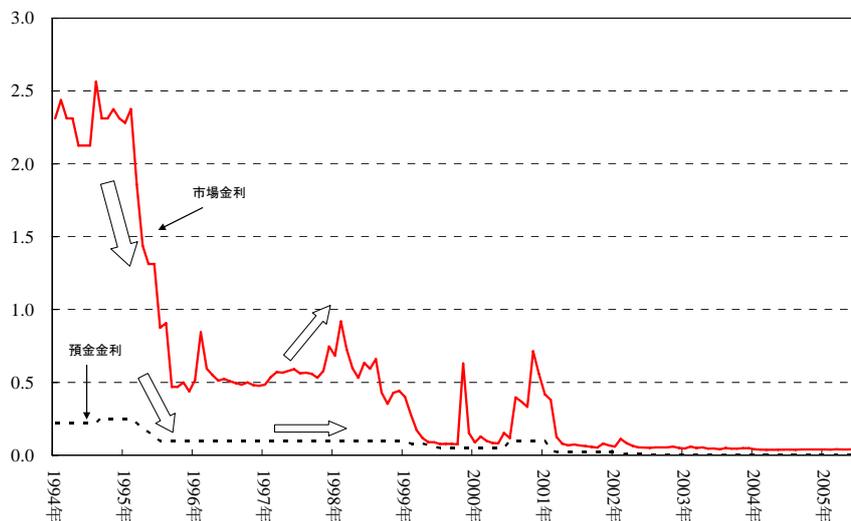
この非対称性が本邦でも確認されるか否かをみるために、1994年1月～2005年7月の本邦の普通預金金利と市場金利（1ヵ月Libor）の推移を図1に示した。

² 本稿3節（2）で後述するO'Brien[2000]は、預金金利変動の非対称性に関して、以下のよう
に指摘している（O'Brien[2000]のFigure 1も参照）。

「...rate adjustments tend to be asymmetric, displaying rigidity when market rates are increasing and rate spreads are wide but flexibility when market rates are decreasing and rate spreads are narrow...」

これをみると、市場金利の上昇時に、預金金利が殆ど変化していない局面があり、この点では、本邦の預金金利の変動にも非対称性があると指摘することが可能であるように思われる³。

図 1：普通預金金利（％）と 1 カ月 LIBOR（％）の推移



（２）流動性預金の金利更改期に関する考え方

1 節では、流動性預金の金利リスク管理で、流動性預金の満期に関する様々な考え方がある点に触れたが、このうち金利リスク管理の観点で最も保守的な考え方は、流動性預金の変動金利商品であることを理由に、その“金利更改期”を最短期（オーバー・ナイト、1 カ月、等）に分類することである。

この点、流動性預金は、変動金利商品ではあるが、市場金利の場合に比べて変動幅が僅少であることから、相対的にみて固定金利商品とみなすこともできる（図 2）⁴。さらに、上述のように、流動性預金はその一定額が銀行に滞留する傾向を持つことから、そのリスクを計測・管理する際には、便宜的に、流動性預金を固定金利商品とみなした上で、その滞留分の“金利更改期”を、最短期よりも長めの期間に割り当てるといった枠組みを採用し得ると考えられる（図 3）。

³ 図 1 の期間には、いわゆる 2000 年問題等の一時的な特殊要因によって、市場金利が上昇した局面も含まれている。

⁴ なお、普通預金金利に 1 カ月 LIBOR を回帰させたところ、以下の関係を得た（決定係数は 0.772）。

$$\text{普通預金金利} = 0.12774 \times 1 \text{ カ月 LIBOR} - 0.00016$$

図2：1ヵ月LIBOR（%、横軸）と普通預金金利（%、縦軸）（1995/3～2005/11月）

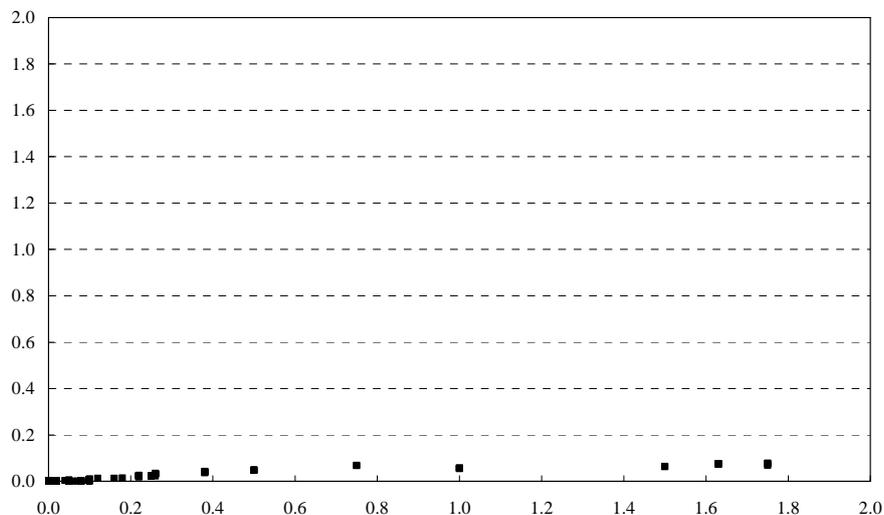
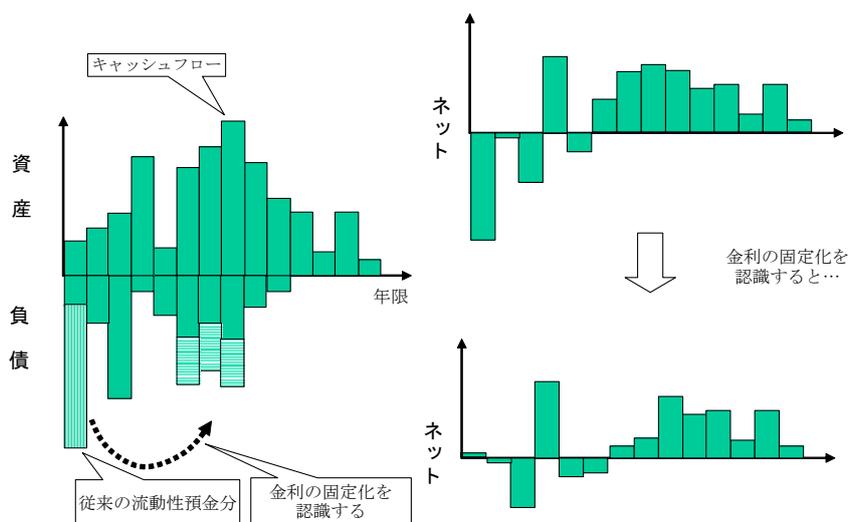


図3：流動性預金の金利リスクの捉え方



仮に、こうした枠組みを採用すると、運用サイドの中長期の固定金利運用の金利リスクの一部または全部を、調達サイドの流動性預金の滞留分でカバーしているとみなすことになる。この場合には、流動性預金の“金利更改期”を最短期に分類しつつ、中長期の固定金利運用の金利リスクを別途金利スワップ等でヘッジするという金利リスク管理に比べて、ヘッジ・コストを抑制することが可能となる。

ただし、上記の枠組みを実務で採用することができるか否かは、流動性預金の滞留分の額およびその金利更改期を、実態に合わせて、客観的に評価し得るか否かに依存しているといえる。

3. 流動性預金の現在価値の算出モデル

流動性預金は、市場で取引されていないことから、その時価を市場で入手することはできない。しかし、個別の銀行が、自ら抱える流動性預金の現在価値（present value）を何らかのモデルを使って推定することができれば、より現実に合った金利リスクの計測・管理を行うことができると考えられる。

流動性預金の現在価値は、基本的に、各将来時点における、①流動性預金から発生するキャッシュ・フロー、②預金金利、③割引金利、を変数として持つ。これらの変数は、一般的には独立ではなく、互いに依存している。例えば、①流動性預金から発生するキャッシュ・フローでは、流動性預金額やそこから発生するキャッシュ・フロー額は、②預金金利の水準、の影響を受ける。したがって、流動性預金の現在価値をモデル化する場合には、これらの依存関係を明示的に取り込む必要があることになる。

以下では、流動性預金の現在価値のモデル化を試みた複数の文献の概要を解説する⁵。具体的には、それらは、（1）スプレッドを付加したディスカウント・ファクターをキャッシュ・フローに乗じる形で評価を行うモデル、（2）無裁定価格理論を用いて評価を行うモデルである。なお、以下では、流動性預金の現在価値とは、「預金を受け入れている銀行にとっての現在価値」⁶のことを指す。

（1）スプレッド付加後のディスカウント・ファクターを用いた評価モデル

このモデルでは、スプレッドを加味したディスカウント・ファクターを、将来発生するキャッシュ・フローに乗じる形で、流動性預金の評価が行われる。以下では、このモデルに分類されるものとして、セルバッジョによるモデル（Selvaggio[1996]）と米国貯蓄金融機関監督局（Office of Thrift Supervision、以下OTS）によるモデルを説明する。

⁵ 以下、本稿で解説するモデルを含む各種モデルの概要を説明した資料として、Ellis and Jordan[2001]がある。

⁶ ここでの「流動性預金の現在価値」は、銀行が、受け入れた預金を、預金金利よりも高い市場金利で運用するときの運用益キャッシュ・フローの割引現在価値である。本節（2）の無裁定価格理論を用いて評価を行うモデル群では、「流動性預金の現在価値」は、基本的に、(9)式あるいは(10)式（リスク中立測度ベース）、または(26)式（フォワード中立測度ベース）で表される。

イ. セルバッジョ・モデル (OAS モデル)

セルバッジョ (Selvaggio[1996]) は、付利されない流動性預金 (当座預金等) の現在価値を、将来の各時点の預金額のネット運用益の割引価値として求めるモデルを提案している。後述のように、ここでは、流動性預金が常時引出し可能であるというオプション性を持つことから、割引金利にオプション調整スプレッド (Option Adjusted Spread <OAS>) を含める扱いとしている。以下、このモデルを OAS モデルと呼ぶ。

キャッシュ・フローは、預金金利以外のコスト (非金利コスト)⁷ を控除したネットの運用益である。ここで、運用は、将来の各時点の市場金利 (1 ヶ月 LIBOR) で行うと仮定されている。一方、キャッシュ・フローの割引に用いる割引金利には、国債金利等に一定のスプレッド s (OAS) を上乗せした金利を用いる。

OAS モデルでは、時点 0 (現時点) での流動性預金の現在価値 V_0 は、現時点から 30 年 (360 ヶ月)⁸ にわたる将来の各時点 (月) t_k で、 D_{t_k} を預金額、 $L_{t_k}^1$ を 1 ヶ月 LIBOR、 R_{t_k} を時点 t_k までの無リスクのイールド、 c_{t_k} を預金 1 単位当たりの非金利コストとして、

$$V_0 = \sum_{k=1}^{360} \frac{L_{t_k}^1 (1 - rr^{OAS}) D_{t_k} - c_{t_k}^{OAS} D_{t_k}}{(1 + R_{t_k} + s)^{t_k}} = \sum_{k=1}^{360} \frac{(L_{t_k}^1 - c_{t_k}) D_{t_k}}{(1 + R_{t_k} + s)^{t_k}} \quad (1)$$

$$c_{t_k} = rr^{OAS} L_{t_k}^1 + c^{OAS} \quad (2)$$

と表される。ここで、 rr^{OAS} は、準備預金制度における流動性預金の準備率 (以下、預金準備率) であり、 c^{OAS} は、それ以外の非金利コストである。

将来時点の預金額は、その時点の 3 ヶ月 LIBOR ($L_{t_k}^3$) および 1 時点前の預金額の関数として、次式で表されるとする⁹。 $\alpha_0^{OAS} \sim \alpha_2^{OAS}$ は、定数である。

$$\ln D_{t_k} = \alpha_0^{OAS} \ln D_{t_{k-1}} + \alpha_1^{OAS} \ln L_{t_k}^3 + \alpha_2^{OAS} \quad (3)$$

OAS モデルでは、 s を推定する必要がある。Selvaggio[1996] は、銀行買収に関する専門誌 (*Bank Mergers & Acquisitions*, 1995 年 3 月号) に掲載された、49 例

⁷ 預金口座の開設・維持や準備預金預入等の支払預金金利以外のコスト。

⁸ キャッシュ・フローを勘案する期間を 30 年までとしているのは、観測可能なイールド・カーブが 30 年までであること (term structure constraints) に基づいている。

⁹ Selvaggio[1996] では、預金額データの季節調整のために、(3) 式右辺にダミー変数を加えている。本稿では、説明の簡略化のために、ダミー変数は捨象している。

の銀行買収におけるコア預金の評価値を用いて、 s の概算値（ballpark number）を求めている。

このように、OAS モデルは、将来の各時点の預金額が、現時点の預金額と市場金利で記述されるという考え方を用いている。しかし、OAS モデルは、付利されない流動性預金（当座預金等）を対象としているため、これをそのまま、流動性預金の評価に用いることは基本的にはできない。また、OAS モデルでは、スプレッド s を推定する必要があるが、Selvaggio[1996]が行ったような銀行買収データの入手には、一般的に限界がある。また、仮にそうしたデータを入手したとしても、買収の対象となった他の銀行の預金の評価を直接用いることが適当か否かという議論があり得る。さらには、スプレッド s を正確に求めようとするならば、(3)式の預金額のモデルを含めて、モデル全体の説明力の高さを別途検討する必要がある。こうしたことから、実務において、流動性預金の評価にOAS モデルを用いることは、必ずしも現実的ではないと結論付けられる。

ロ. 米国貯蓄金融機関監督局モデル（OTS モデル）

米国貯蓄金融機関監督局（OTS）は、ネット・ポートフォリオ価値モデル（Net Portfolio Value Model）と称する金利リスク評価モデルを公表しており、その中で流動性預金の評価モデルを提示している（OTS[2001]）¹⁰。以下では、このモデルをOTSモデルと呼ぶ。

OTS モデルは、銀行の流動性預金のキャッシュ・フローを割り引くことで、銀行が受け入れている流動性預金の現在価値を算出する。具体的には、 t_k カ月後の預金額を D_{t_k} 、預金金利を i_{t_k} 、預金に関する非金利コストの預金1単位当たりの率を c_{t_k} として、現時点から30年（360カ月）にわたる流動性預金のキャッシュ・フローを基に、流動性預金の現在価値を(4)式で表す。

$$V_0 = \sum_{k=1}^{360} (-c_{t_k} D_{t_k} - i_{t_k} D_{t_{k-1}} + (D_{t_k} - D_{t_{k-1}})) DF_{t_k} \quad (4)$$

DF_{t_k} は、 $DF_{t_k} = 1/(1+LZ_{t_k} + \gamma)^k$ で定義されるディスカウント・ファクターである。 LZ_{t_k} は、LIBOR・スワップ金利ベースの時点 t_k までのイールドである。また、 γ は、

¹⁰ OTSのネット・ポートフォリオ価値モデルは、1990年代初頭に最初に公表され、その後、改定が行われている。

一種のリスク・プレミアムであると解釈されるが、OTS[2001]では $\gamma=0.0012$ （定数）と置かれている¹¹。

OTS モデルでは、現時点の市場で観測されるイールド・カーブから決まる将来の各時点の預金金利と現時点の預金額に基づいて、将来の各時点の預金額が求まるという考え方が採用されている。

まず、預金額は、その増減が、預金金利 i_k の水準、預金金利と市場金利（3 カ月 LIBOR L_k^3 ）との比率で説明されるとして、(5)式で与えられる。ここで、 $\alpha_0^{OTS} \sim \alpha_4^{OTS}$ は定数である。

$$D_{t_k} = D_{t_{k-1}} (\alpha_0^{OTS} + \alpha_1^{OTS} \arctan(\alpha_2^{OTS} + \alpha_3^{OTS} \frac{i_{t_k}}{L_{t_k}^3}) + \alpha_4^{OTS} i_{t_k})^{\frac{1}{12}} \quad (5)$$

次に、預金金利 i_k は、その時間変化が、(6)式のように、①1 時点前の預金金利の時間変化、②市場金利の時間変化、③その 1 時点前の時間変化、および④市場金利の線形和で表される指標金利 $E_{t_{k-1}}$ （(8)式）と預金金利の差 $G_{t_{k-1}}$ （(7)式）で説明されるとして、モデル化されている。ここで、 $\beta_0^{OTS} \sim \beta_6^{OTS}$ は定数である。

$$i_k - i_{t_{k-1}} = \beta_0^{OTS} (i_{t_{k-1}} - i_{t_{k-2}}) + \beta_1^{OTS} (L_{t_k}^3 - L_{t_{k-1}}^3) + \beta_2^{OTS} (L_{t_{k-2}}^3 - L_{t_{k-3}}^3) + G_{t_{k-1}} \quad (6)$$

$$G_{t_k} \equiv \begin{cases} \beta_5^{OTS} (i_{t_k} - E_{t_k}) & \text{if } i_{t_k} \geq E_{t_k} \\ \beta_6^{OTS} (i_{t_k} - E_{t_k}) & \text{if } i_{t_k} < E_{t_k} \end{cases} \quad (7)$$

$$E_{t_k} \equiv \beta_3^{OTS} + \beta_4^{OTS} L_{t_k}^3 \quad (8)$$

(7)式では、1 時点前の預金金利と指標金利の差の符号によって、その差に対する預金金利の変化幅の感応度が異なることが表現されている。これは、実際の銀行が預金金利を変更する際に、1 時点前の預金金利と何らかの指標金利の差を基準の 1 つとして変更幅の決定を行っている、また、その差の符号によって変動幅を変えている、という経験的な事実を踏まえているものである。

¹¹ OTS[2001]では、スプレッドは、預金の購入・承継取引で観測された価格（observed prices for deposit purchase/assumption transactions）からカリブレートされると説明されている。この点は、前述のOASモデルの項でも指摘したように、スプレッドの推定に、他の銀行の預金の評価を直接用いることが適当か否かという問題を内包する。

(2) 無裁定価格理論に基づく評価モデル

上述のOASモデル、OTSモデルは、モデル中にリスク・プレミアムを明示的に用いて流動性預金の現在価値を表現しているが、別のアプローチとして、無裁定価格理論の考え方を用いて、流動性預金の現在価値を表現するモデルが複数提案されている。以下では、無裁定価格理論に基づく流動性預金の現在価値のモデルとして、ジャロウとバン・デベンターによるモデル (Jarrow and van Deventer[1998])、オブライエンによるモデル (O'Brien[2000]) およびハチソンとペナッキによるモデル (Hutchison and Pennacchi[1996]) を解説する。これらのモデルに共通する点は、将来の不確実性は、基本的に市場金利 (無リスク金利) のみから発生するとした上で、無裁定価格理論を流動性預金の現在価値の算出に適用している点である¹²。

イ. ジャロウ=バン・デベンター・モデル

ジャロウとバン・デベンター (Jarrow and van Deventer[1998]、以下 JvD モデル) は、まず、流動性預金の現在価値を以下のように定式化した。

将来時点 τ までの期間を考え、その期間を等間隔に分割して、 $t_k - t_{k-1} = \Delta$ ($0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = \tau$) とする。JvDモデルでは、時点 0 (現時点) における流動性預金の現在価値を(9)式で表す¹³。

$$\begin{aligned} V_0 &= D_0 + E_0^* \left[\sum_{k=0}^{m-2} (D_{t_{k+1}} - D_{t_k}) DF_{t_{k+1}}^{rf} \right] - E_0^* \left[D_{t_{m-1}} DF_{t_m}^{rf} \right] - E_0^* \left[\sum_{k=0}^{m-1} (i_{t_k} + c_{t_k}) D_{t_k} DF_{t_{k+1}}^{rf} \right] \\ &= E_0^* \left[\sum_{k=0}^{m-1} D_{t_k} (r_{t_k} - i_{t_k} - c_{t_k}) DF_{t_{k+1}}^{rf} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $DF_{t_k}^{rf}$ は、時点 t_k での無リスクのイールド (R_{t_k}) のディスカウント・ファ

¹² Kalkbrener and Willing[2004]も、無裁定価格理論を用いて流動性預金の価値の算出を試みている。ただし、Kalkbrener and Willing[2004]は、Jarrow and van Deventer[1998]、O'Brien[2000]、Hutchison and Pennacchi[1996]とは異なり、市場金利の不確実性に加えて、預金額にも不確実性を導入している。

¹³ 流動性預金の価値の(9)式による定式化は、以下で説明するO'Brien[2000]、Hutchison and Pennacchi[1996]のモデルでも採用されている。一方、上述のセルバッジョ・モデルとOTSモデルは、これらと異なり、(9)式右辺の第1項と第3項を捨象して、流動性預金の価値を定式化している。

クターである。また、 $E_k^*[\cdot]$ は、リスク中立測度の下での時点 t_k での期待値演算子で、以下の関係を満たす。 $P(t_k, \tau)$ は、額面1、満期 τ の無リスクの割引債の時点 t_k での価格である。

$$P(t_k, \tau) = E_{t_k}^* [P(t_{k+1}, \tau) / (1 + R_{t_k})] = E_{t_k}^* [P(\tau, \tau) DF_{\tau}^{rf}] / DF_{t_k}^{rf}$$

(9)式右辺の第1～4項は、それぞれ、時点0での預金額、時点 t_{m-1} までの預金額の増減、時点 t_{m-1} での預金額の全額返済、時点 t_{m-1} までの預金金利と非金利コストの支払額である（いずれも現在価値）。

(9)式で、 $\Delta \rightarrow 0$ として、連続時点型にすると、(10)式を得る。

$$V_0 = E_0^* \left[\int_0^{\tau} D(s)(r(s) - i(s) - c(s)) DF^{rf}(s) ds \right] \quad (10)$$

ここで、 $r(t)$ は、瞬間スポット・レートであり、 $DF^{rf}(t)$ は、(11)式で定義される。

$$DF^{rf}(t) \equiv \exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right) \quad (11)$$

将来時点の市場金利（無リスク金利）、預金額および預金金利は、以下のように表現される。

第1に、将来時点の市場金利は、不確実性を持ち、(12)式のハル＝ホワイト・モデル（Hull and White[1990]）で記述される。

$$dr(t) = m^{JvD} (\bar{r}(t) - r(t)) dt + \sigma^{JvD}(t) dZ(t) \quad (12)$$

ここで、 $Z(t)$ 、 m^{JvD} 、 $\sigma^{JvD}(t)$ は、それぞれ、標準ブラウン運動、平均回帰率、ボラティリティを表す。ボラティリティを一定（ $\sigma^{JvD}(t) = \sigma^{JvD}$ ）とすると、平均回帰水準 $\bar{r}(t)$ は、時点0からみた将来時点 t の瞬間フォワード・レートを $f(0, t)$ として、以下となる。

$$\bar{r}(t) = f(0, t) + \left[\frac{1}{m^{JvD}} \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \frac{(\sigma^{JvD})^2 (1 - e^{-2m^{JvD}t})}{2(m^{JvD})^2} \right] \quad (13)$$

第2に、将来時点の預金額は、(14)式のように、時間（1、2次項）、その時点までの無リスク金利の和（積分）およびその時点と時点0の無リスク金利の差で記述される。ここで、 $\alpha_0^{JvD} \sim \alpha_3^{JvD}$ は、定数である。

$$D(t) = D(0) \exp\left(\alpha_0^{JvD} t + \alpha_1^{JvD} \frac{t^2}{2} + \alpha_2^{JvD} \int_0^t r(s) ds + \alpha_3^{JvD} (r(t) - r(0))\right) \quad (14)$$

(14)式は、微分形では、(15)式で表される。

$$d \ln D(t) = (\alpha_0^{JvD} + \alpha_1^{JvD} t + \alpha_2^{JvD} r(t)) dt + \alpha_3^{JvD} dr(t) \quad (15)$$

第3に、将来時点の預金金利は、(16)式のように、時間（1次項）、その時点までの無リスク金利の和（積分）およびその時点と時点0の無リスク金利の差で記述される。ここで、 $\beta_0^{JvD} \sim \beta_2^{JvD}$ は、定数である。

$$i(t) = i(0) + \beta_0^{JvD} t + \beta_1^{JvD} \int_0^t r(s) ds + \beta_2^{JvD} (r(t) - r(0)) \quad (16)$$

(16)式は、微分形では、(17)式となる。

$$di(t) = (\beta_0^{JvD} + \beta_1^{JvD} r(t)) dt + \beta_2^{JvD} dr(t) \quad (17)$$

以上で、将来時点の市場金利、預金額および預金金利がモデル化された。それらを(10)式に適用することによって、流動性預金の現在価値の解析解が得られる（補論1を参照）。

なお、次節の実証分析では、将来時点の預金額と預金金利の表現に、上述の(14)、(16)式に代えて、JvDモデルの応用版モデルであるJanosi, Jarrow and Zullo[1999]による、以下の(18)、(19)式をそれぞれ用いる。Janosi, Jarrow and Zullo[1999]でも、流動性預金の現在価値の解析解が得られる（補論1を参照）¹⁴。

$$D(t) = \alpha_0^{JvD} D(0) (1/\alpha_0^{JvD})^{(\alpha_1^{JvD} t)} \exp(\alpha_2^{JvD} t + \alpha_3^{JvD} \int_{t-\Delta}^t r(s) ds) \quad (18)$$

$$i(t) = \beta_0^{JvD} + (\beta_1^{JvD})^t (i(0) - \beta_0^{JvD}) + \beta_2^{JvD} \int_{t-\Delta}^t r(s) ds \quad (19)$$

ロ. オブライエン・モデル

オブライエン（O'Brien[2000]、以下OBモデル）は、JvDモデルと同様の考え方で、流動性預金の現在価値を求めるモデルを提案した。

OBモデルでは、預金準備率を rr^{OB} 、準備預金関連のコスト以外の非金利コストを c_{t_k} とし、流動性預金債務の現在価値 C_0 を次式で表す。

¹⁴ 以下では、Janosi, Jarrow and Zullo[1999]も、敢えて区別せずにJvDモデルと呼ぶ。

$$\begin{aligned}
C_0 &= rr^{OB} \cdot D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} E_0^* \left[(i_{t_{k-1}} + c_{t_{k-1}}) D_{t_{k-1}} - (1 - rr^{OB})(D_{t_k} - D_{t_{k-1}}) \right] DF_{t_k}^{rf} \\
&= D_0 - \sum_{k=1}^{\infty} E_0^* \left[D_{t_{k-1}} (r_{t_{k-1}} - (i_{t_{k-1}} + c_{t_{k-1}} + rr^{OB} r_{t_{k-1}})) \right] DF_{t_k}^{rf}
\end{aligned} \tag{20}$$

なお、 C_0 と流動性預金の現在価値 V_0 には、以下の関係がある。

$$C_0 + V_0 = D_0 \tag{21}$$

OB モデルでは、将来時点の市場金利（無リスク金利）、預金額および預金金利は、それぞれ以下のように表現される。

第 1 に、将来時点の市場金利は、コックス＝インガソル＝ロス・モデル（Cox, Ingersoll and Ross[1985]）に従うとする。

$$dr(t) = m^{OB} (a^{OB} - r(t))dt + \sigma^{OB} \sqrt{r(t)}dZ(t) \tag{22}$$

ここで、 m^{OB} 、 a^{OB} 、 σ^{OB} は、それぞれ平均回帰率、平均回帰水準、ボラティリティである。

第 2 に、将来時点の預金額は、市場金利 r_k と預金金利 i_k の差、家計所得 Y_k および1時点前の預金額で表される。ここで、 $\alpha_0^{OB} \sim \alpha_3^{OB}$ は、定数である。

$$\ln D_{t_k} = \alpha_0^{OB} + \alpha_1^{OB} (r_k - i_k) + \alpha_2^{OB} \ln Y_k + \alpha_3^{OB} \ln D_{t_{k-1}} \tag{23}$$

OB モデルでは、家計所得は年率 3%で確定的に増加するとの仮定が置かれている。つまり、モデルでは家計所得の不確実性は捨象されている。

第 3 に、将来時点の預金金利は、 $\beta_0^{OB} \sim \beta_3^{OB}$ を定数として、(24)～(25)式で記述される。(24)～(25)式では、預金金利変動の非対称性が表現されている。

$$i_k = i_{t_{k-1}} + (\beta_0^{OB} I_k + \beta_1^{OB} (1 - I_k)) (\beta_2^{OB} r_k - \beta_3^{OB} - i_{t_{k-1}}) \tag{24}$$

$$I_k = \begin{cases} 1 & \beta_2^{OB} r_k - \beta_3^{OB} - i_{t_{k-1}} > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{25}$$

OB モデルでは、JvD モデルとは異なり、流動性預金の現在価値の解析解が得られていない。このため、O'Brien[2000]では、モンテカルロ・シミュレーションによって、流動性預金の現在価値を求める手続きが示されている。

ハ. ハチソン＝ペナッキ・モデル

ハチソンとペナッキ（Hutchison and Pennacchi[1996]、以下 HP モデル）も、無裁定価格理論を用いて、流動性預金の現在価値を表現するモデルを提案した。

まず、上述のように、流動性預金の現在価値は、次式で表された（(10)式の再掲）。

$$V_0 = E_0^* \left[\int_0^{\tau} D(s)(r(s) - i(s) - c(s)) DF^{rf}(s) ds \right] \quad (10)$$

これは、フォワード中立測度を用いると、(26)式で表される。

$$V_0 = \int_0^{\tau} P(0, s) E_0^F [D(s)(r(s) - i(s) - c(s))] ds \quad (26)$$

ここで、 $E_0^F[\cdot]$ は、フォワード中立測度の下での時点 0 での期待値演算子、 $P(0, t)$ は、満期 t の無リスクの割引債の時点 0 における価格である。

非金利コストは、 rr^{HP} を預金準備率、 ζ^{HP} をそれ以外の非金利コストとして、(27)式で定式化される。

$$c(t) = \zeta^{HP} + rr^{HP} r(t) \quad (27)$$

HP モデルは、(26)式に基づいて、流動性預金の現在価値をモデル化する。HP モデルでは、将来時点の市場金利（無リスク金利）、預金金利および預金額を以下のように表現している。

第 1 に、将来時点の市場金利は、バシチェック・モデル（Vasicek[1977]）に従うとする。

$$dr(t) = m^{HP} (a^{HP} - r(t)) dt + \sigma^{HP} dZ(t) \quad (28)$$

ここで、 m^{HP} 、 σ^{HP} 、 a^{HP} は、それぞれ、平均回帰率、平均回帰水準、ボラティリティである。

バシチェック・モデルでは、割引債価格 $P_0(t)$ は、次式で表される¹⁵。

$$P_0(t) = \exp \left[\frac{(1 - e^{-m^{HP} t})}{m^{HP}} (r_{\infty} - r(t)) - r_{\infty} t - \frac{(\sigma^{HP})^2}{4(m^{HP})^3} (1 - e^{-m^{HP} t})^2 \right] \quad (29)$$

¹⁵ (29)式右辺にある r_{∞} は、 λ をリスクの市場価格として、次式で表現される。

$$r_{\infty} = a^{HP} + \sigma^{HP} \lambda / m^{HP} - (\sigma^{HP})^2 / (2(m^{HP})^2)$$

第2に、預金金利は、銀行が、各時点 t で(30)式を満たす形で決定するとする。

$$\max_{i(t)} (r(t) - i(t) - c(t))D(t) \quad (30)$$

(30)式を満たす預金金利 $i^*(t)$ は、(31)式で表される。

$$i^*(t) = r(t) - c(t) - \frac{D(t)}{\partial D(t)/\partial i(t)} \quad (31)$$

さらに、 $(\partial D(t)/\partial i(t))/D(t)$ の逆数を、 $\beta_0^{HP}, \beta_1^{HP}$ を定数として、

$$\frac{D(t)}{\partial D(t)/\partial i(t)} = -\beta_0^{HP} - c(t) + (1 - \beta_1^{HP})r(t) - v(t) \quad (32)$$

とおく (Hutchison[1995]) ことで、

$$i^*(t) = \beta_0^{HP} + \beta_1^{HP}r(t) + v(t) \quad (33)$$

を得る。上式の $v(t)$ は、預金の需要関数の預金金利に関する弾力性に影響を与える要因である。

第3に、将来時点の預金額は、 $r(t)$ 、 $i^*(t)$ および関数 $\eta(t)$ の和に、時間の指数関数を乗じた次式で表されるとする。 $\alpha_0^{HP} \sim \alpha_2^{HP}$ は、定数である。

$$D(t) = (\alpha_0^{HP}r(t) + \alpha_1^{HP}i^*(t) + \eta(t))\exp(\alpha_2^{HP}t) \quad (34)$$

上式の $\eta(t)$ は、預金の需要関数の預金金利に関する弾力性に影響を与えることなく、需要をシフトさせる要因である。

HPモデルでは、預金の需要に影響を与える $v(t)$ 、 $\eta(t)$ には、① $r(t)$ と独立な確率過程で表現されるとの仮定、および②イデオシンクラティックな変数 (local market variables) であり、それらの不確実性は分散可能である (diversifiable) との仮定が置かれている。これらの仮定から、HPモデルでは、流動性預金の価格付けにおいて考慮される不確実性は、市場金利 $r(t)$ のそれのみとなる。

以上のようにモデル化された、将来時点の市場金利、預金額および預金金利を、(26)式に適用し、かつ $\tau \rightarrow \infty$ とすることで、流動性預金の現在価値の解析解が得られる (補論1を参照)。

4. 流動性預金の現在価値算出モデルを用いた実証分析

本節では、3節で説明した流動性預金の現在価値算出モデルを用いて、実証分析を行い、モデルを実務上でどのように活用することが可能かという点を検討する。

まず、代表的なモデルとしてOTSモデルとJvDモデルを対象に、預金額や預金金利等のヒストリカル・データによってパラメータを求めた上で、それらデータとモデルによる推定値とのフィットの程度をみる。次に、相対的にフィットのよいJvDモデルを用いて、流動性預金の現在価値を求めるとともに、その金利感応度を算出する。さらに、JvDモデルを用いたシナリオ分析による金利リスクの評価を検討する。最後に、カルクブレナーとウィリング（Kalkbrenner and Willing[2004]）の考え方に準拠して、流動性預金のうちの滞留分であるコア預金を定式化した上で、その現在価値と金利感応度を求める。

（1）OTSモデルとJvDモデルによる預金額と預金金利の推定

ここでは、前節で説明したモデルの代表例を用いて、各種パラメータの算出を行い、預金額と預金金利の推移に対するモデルの当てはまり具合をみる。モデルは、①スプレッドを付加したディスカウント・ファクターをキャッシュ・フローに乗じる形で評価を行うモデルとしてOTSモデル、②無裁定価格理論を用いて評価を行うモデルとしてJvDモデルを使用する。

パラメータ推定に使用したデータ（1995年6月～2005年6月の月末データ）¹⁶は、預金額が、国内銀行・銀行勘定普通預金残高、預金金利が、都市銀行・銀行勘定普通預金平均金利、そして市場金利が、LIBOR（1～12ヵ月）とスワップ金利（2～10、12、15、20、30年）である¹⁷。

預金額と預金金利の推移を表現するために必要なパラメータは、基本的には、預金額、預金金利および市場金利のヒストリカル・データを、OTSモデルでは(5)、(6)～(8)式に、JvDモデルでは(18)、(19)式に、それぞれ適用することで求められ

¹⁶ したがって、本稿の分析は、金利低下局面のデータにのみ基づいており、多様な金利局面を検討したものではない点で、限定的である。

¹⁷ 本稿では、市場金利として、国債金利ではなく、LIBOR・スワップ金利を用いた。また、LIBOR・スワップ金利には、月中平均値を用いた。

る。しかし、本稿のデータ期間中には、いわゆるペイオフ解禁の影響から預金額が急増した時期を含んでいることから、預金額関数である(5)、(18)式の右辺に、ダミー変数を追加して、パラメータ推定を行った（詳細は補論2）。

データ期間中の実際の預金額の推移と、推定されたパラメータを用いたモデルによる預金額の推移を図4に示す。また、データ期間中の実際の預金（普通預金）金利の推移と、推定されたパラメータを用いたモデルによる預金金利の推移を示したのが、図5である。

図4：JvDモデルとOTSモデルによる預金額の推定（縦軸：億円）

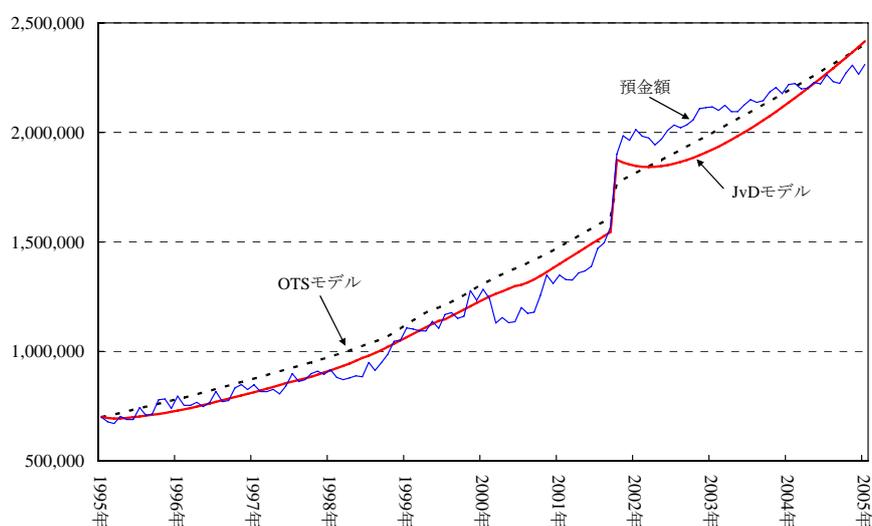


図5：JvDモデルとOTSモデルによる預金金利の推定

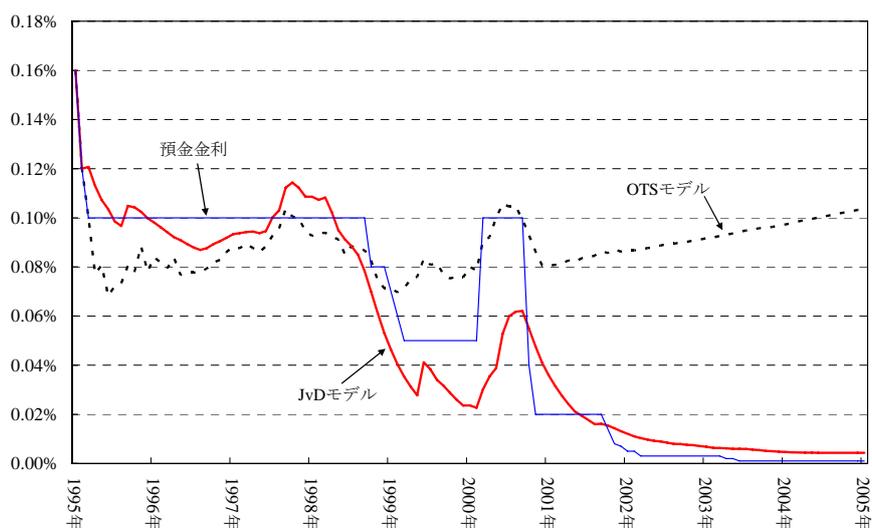


図4からは、OTSモデルおよびJvDモデルは、実際の預金額の推移の傾向を概ね表現していることがわかる。

一方、図 5 からは、OTS モデルよりも JvD モデルの方が、実際の預金金利の推移を相対的にうまく表現していると評価することができる。

図 4、5 でのモデルのフィットの結果を踏まえ、以下では、OTS モデルは使用せず、JvD モデルのみを用いて分析を行う。

(2) 流動性預金の現在価値とその金利感応度

ここでは、JvD モデルを用いて、流動性預金の現在価値（以下、預金価値）を求めるとともに、その金利感応度を算出する。

JvD モデルでは、将来の市場金利の過程は(12)式で記述される。ここでは、Janosi, Jarrow and Zullo[1999]に従って、LIBOR・スワップ金利のヒストリカル・データを用いて、(12)式のパラメータを推定した（詳細は補論 2）。

JvDモデルの各パラメータに推定値を代入して、データ期間の最終時点である 2005 年 6 月末時点（現時点＝時点 0）の預金価値を、補論 1 の(44)～(52)式で求めた。ここでは、Janosi, Jarrow and Zullo[1999]と同様に、預金残額を全額返済する時点（ τ ）を $\tau=30$ 年（360 ヶ月）と仮定した¹⁸。時点 0 で受け入れている預金額（100 とする）と比較する形で、預金価値を示したのが、表 2 である¹⁹。

表 2：2005 年 6 月末時点での預金価値

預金価値(a)	受入預金額(b)	a/b
355.59	100	3.55 倍

表 2 では、預金価値が現時点の受入預金額の約 3.5 倍になるという結果が得られている。預金価値が非常に大きく計算されているが、これは、推定されたパラメータを用いると、以下で説明するように、将来の推定預金額が、現時点以降も単調に増加を続けることが主因である。

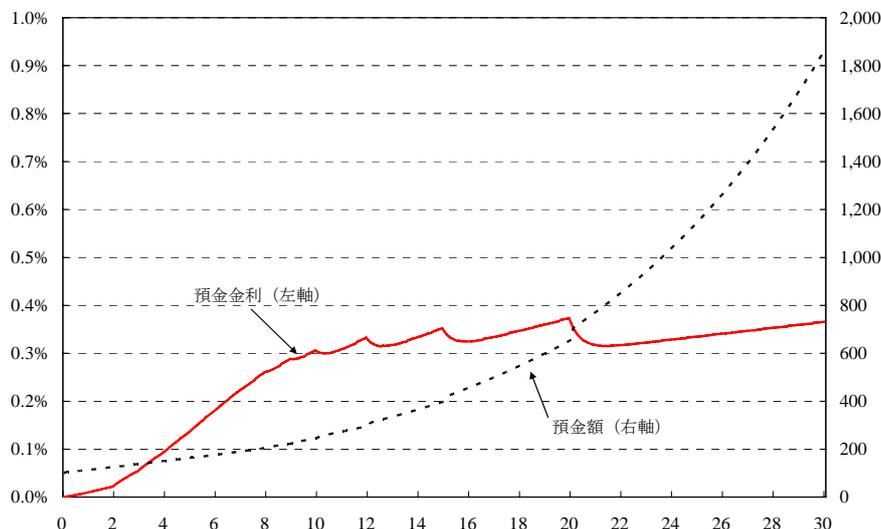
具体的には、JvD モデルの預金額関数（(18)式）と預金金利関数（(19)式）のパラメータは、実際の預金額（図 4）と実際の預金金利（図 5）の推移データを基にそれぞれ得られているが、それらのパラメータを使って、30 年後までの預

¹⁸ 観測可能なイールド・カーブが 30 年までであることによる。

¹⁹ 非金利コストは、ここでは、準備預金制度に係るコストのみを考え、預金準備率を 1.3% とした。

金額と預金金利の推移を算出したものが図6である。

図6：JvDモデルによる預金金利と預金額（初期値=100）の将来推移（30年後まで）

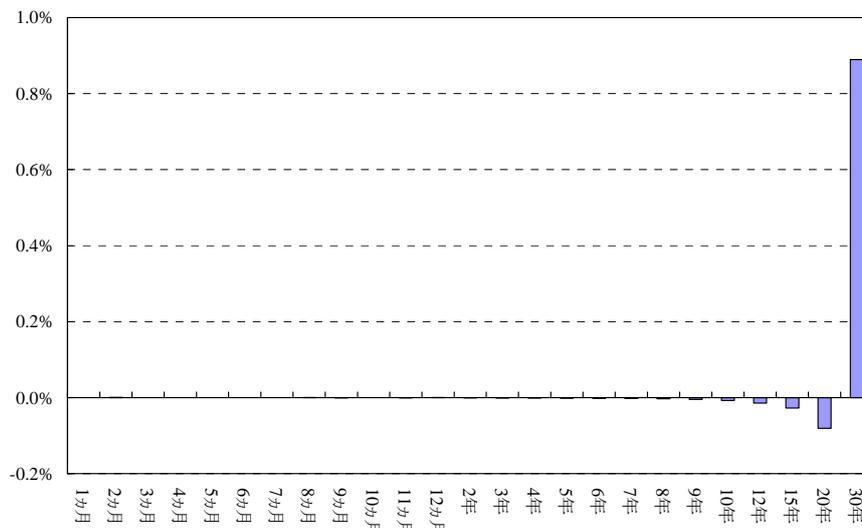


これをみると、まず、預金金利は、10年後程度まで単調に増加し、それ以降は0.3~0.4%の水準で推移する計算になることがわかる。一方、預金額は、現時点から30年後まで単調に増加を続け、30年後の預金額は現時点のその18倍強に達するとの算出結果となっている。この預金額の単調な増加が、受入預金を運用することによる将来の収益キャッシュ・フローの現在価値、つまり預金価値を押し上げているのである。

次に、預金価値の市場金利（LIBOR<1~12ヵ月>、スワップ金利<2~10、12、15、20、30年>）に対する感応度を計算する。市場金利に対する預金価値の感応度がわかれば、それに基づいて、預金価値の変動をヘッジすることが可能となる。

具体的には、各市場金利が単独で1ベース・ポイント（=0.01%、1bp）だけ上昇したときの預金価値の変化額（1ベース・ポイント・バリュー、1bpv）を求めた。図7に、1bpvの預金価値に対する比率を示す。

図7：LIBOR・スワップ金利に対する預金価値の1bpv（預金価値比）



2節では、流動性預金の金利リスク管理実務では、その“金利更改期”を最短期（オーバー・ナイトや1ヵ月等）に分類することが多いと指摘した。しかし、図7からは、預金価値は、必ずしも、最短期の金利に対して大きな感応度がある訳ではないことになる。つまり、預金価値は、最短期以外の金利にも感応度を持つ。したがって、金利リスク管理上は、そのことを前提に、複数期間の金利スワップ等を用いることで、ヘッジを行うことが可能である。

なお、図7では、預金価値は、相対的に短い満期の金利には殆ど反応しない一方、30年金利に対する感応度が最も高い。これは、上述のように、現時点から30年にわたって、預金額が単調に増え続けることで、30年目時点で、相対的に多額の返済キャッシュ・フローが発生することに起因している。

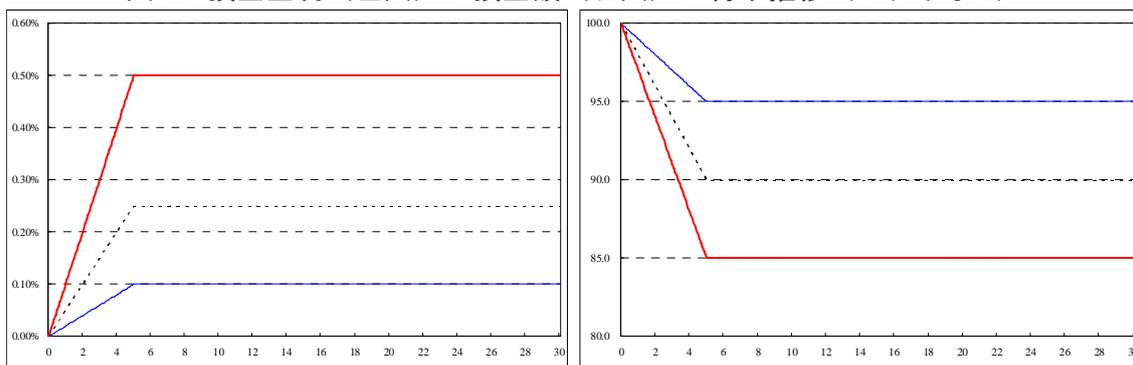
（3）シナリオ分析による金利リスク管理

次に、シナリオ分析を考える。上述のように、2005年6月末時点からの30年間は、預金額は単調に増加するという推定結果を得ている。しかし、短中期的には、市場金利が上昇し、それに伴って、流動性預金として滞留している資金の一部が、他の運用資産へシフトする可能性があると考えられる。この点、上述の結果は、明らかに、このような“シナリオ”を想定していない。

そこで、以下では、預金金利や預金額等の将来の推移に一定の仮定（シナリオ）を設定し、そのシナリオの下で、預金価値を求める。

第1のシナリオ(シナリオ1)として、①預金金利が、先行き5年間は上昇(+0.1%、+0.25%、+0.5%)し、その後は一定、②預金額が、先行き5年間は減少(-5%、-10%、-15%)し、その後は一定、というケースを考える(図8)。このシナリオでは、将来の市場金利は、簡単化のため、不変であるとする。

図8：預金金利(左図)と預金額(右図)の将来推移(シナリオ1)



シナリオ1の下で、預金価値を計算した結果を表3に示す。いずれの組み合わせでも、預金価値の受入預金額に対する比率は、3~4割程度にとどまり、表2の結果(預金価値/受入預金額は約3.5倍)とは様変わりとなっている。この点、30年後の預金額は、シナリオ1では、現時点の0.85~0.95倍であるのに対し、表2の場合では、現時点の約18倍である。運用収益は将来の受入預金額に依存するが、この預金額の差が、運用収益、延いてはその割引価値である預金価値における差をもたらした主因である。

表3：シナリオ1に基づく預金価値の対受入預金額比率

		預金金利		
		+0.10%	+0.25%	+0.50%
預金額	-5%	42.4%	39.5%	34.5%
	-10%	40.2%	37.4%	32.7%
	-15%	38.0%	35.4%	30.9%

次に、第2のシナリオ(シナリオ2)として、(18)式の預金額関数で明示的に時間に依存する項を取り除く——具体的には、 $\alpha_1^{JD} = 1$ 、 $\alpha_2^{JD} = 0$ とし、他のパラメータは不変(補論2で掲げた値)とする——ことで、将来の預金額を与えるというケースを考える(表4)。

表4：シナリオ2に基づく2005年6月末時点での預金価値

預金価値(a)	受入預金額(b)	a/b
25.61	100	0.26倍

シナリオ 2 での預金価値/受入預金額 (26%) は、表 2 の場合 (3.55 倍) を大幅に下回るほか、シナリオ 1 でのそれ (3~4 割程度) をも下回っている^{20,21}。

次に、第 3 のシナリオ (シナリオ 3) として、市場金利 (イールド・カーブ) が、平行に 50 ベーシス・ポイント (bps) 上昇したというケースを考える。預金額と預金金利は、それぞれ(18)式と(19)式に従って決まり、それらに基づいて、預金価値が計算される。

その結果が、表 5 であるが、預金価値は、表 2 の場合 (355.59) よりも大きい。図 7 でみたように、預金価値は、特に 30 年の市場金利の微小変動に対して、相対的に大きな正の感応度を有しているが、これが、+50bps の金利変化による預金価値の増加の背景になっている。

表 5：シナリオ 3 に基づく 2005 年 6 月末時点での預金価値

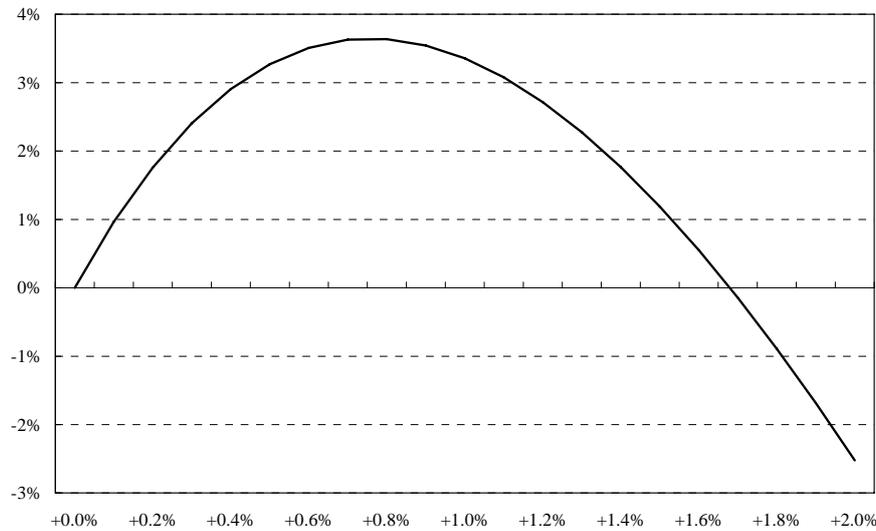
預金価値(a)	受入預金額(b)	a/b
367.22	100	3.67 倍

ただし、市場金利が上昇すれば預金価値が常に増加する訳ではない。この点を示したのが図 9 である。市場金利の上昇幅が 80bps 前後までは、預金価値は増加するが、それ以上の市場金利の上昇幅では、預金価値は逆に低下に転ずる。つまり、市場金利が高くなると、ディスカウント・ファクターが小さくなり、ネットのキャッシュ・フローの増加による預金価値の増加を上回る形で、将来キャッシュ・フローの割引現在価値である預金価値を押し下げている。

²⁰ シナリオ 2 では、30 年後の預金額は、現時点の 0.35 倍程度となる。これは、シナリオ 1 での 30 年後の預金額 (現時点の 0.85~0.95 倍) よりも小さい。

²¹ シナリオ 2 のように、「 $\alpha_1^{JD} = 1$, $\alpha_2^{JD} = 0$ かつ他のパラメータは不変とする」のではなく、 $\alpha_1^{JD} = 1$, $\alpha_2^{JD} = 0$ とした上で他のパラメータを再推定することも考えられる。しかし、実際にパラメータの再推定を行ったところ、預金額関数のフィットは、上述の図 4 の場合に比べて相当悪化するとの結果となった。このため、ここでは敢えて、「 $\alpha_1^{JD} = 1$, $\alpha_2^{JD} = 0$ かつ他のパラメータは不変とする」というシナリオを設定することにした。

図9：市場金利の上昇幅（横軸）と預金価値の変化率（縦軸）の関係



(4) コア預金の現在価値とその金利感応度

上記では、将来の預金額の推移を JvD モデルの(18)式で表現して、将来時点の預金額の変動を織り込んで、現時点での預金額の現在価値や金利リスクを算出した。しかし、リスク管理上、ある時点での預金の金利リスクのヘッジは、その時点で受け入れている預金額のみを対象にし、将来の預金額の変動分は変動が発生した時点でヘッジの対象とするとの考え方もあり得る。

カルクブレナーとウィリング (Kalkbrener and Willing[2004]) は、この考え方を踏まえて、預金額の過程として、将来の預金額の増加を捨象する(35)式の過程を提案した。

$$M(t) \equiv \min_{0 \leq s \leq t} D(s) \quad (35)$$

$M(t)$ は、時点 t までの預金額の最小値であり、 $[0, t]$ の全期間を通じて運用することが可能な額である。この意味で、 $M(t)$ は、預金額のうちで滞留部分の額、つまりコア預金額を表していると解釈することが可能である²²。

$M(t)$ の現在価値（以下、コア預金価値）は、(10)式から、

$$V_0 = E_0^* \left[\int_0^{\tau} M(s)(r(s) - i(s) - c(s)) DF^{rf}(s) ds \right] \quad (36)$$

²² $M(t)$ は、①任意の t で、 $M(t) \leq D(t)$ 、② $s \leq t$ で、 $M(s) \geq M(t)$ という性質を持つ。

で表現される。

以下では、(36)式のコア預金価値の定式化と、JvD モデルとを組み合わせ、コア預金価値とその金利感応度を求める。

(36)式のコア預金価値は、その解析的な表現を得ることが難しいため、ここでは、モンテカルロ・シミュレーションによって求める。シミュレーションによるコア預金価値の算出は、以下の手順で行う。まず、(12)式のハル=ホワイト・モデルにより、時点 s の市場金利 $r(s)$ をシミュレートする。その $r(s)$ を(18)、(19)式に代入して、それぞれ預金額 $D(s)$ と預金金利を求める。さらに、(35)式で $M(s)$ を計算した上で、 $r(s)$ 、 $i(s)$ および別途計算した $c(s)$ とともに、(36)式右辺の被積分項に代入する。これらの一連の手続きを $s=0$ から $s=\tau$ まで行い、積分計算を行う。ここまでの積分計算を多数回行い、その平均値を取ることで、コア預金価値 V_0 を得る。

その結果が、表 6 である。コア預金価値は、(35)式で将来の預金額にキャップを被せる形になっていることから、表 3 の場合と同様、表 2 (355.59) の約 1/10 という水準となった。

表 6 : 2005 年 6 月末時点でのコア預金価値

コア預金価値(a)	受入預金額(b)	a/b
35.14	100	35.1%

次に、コア預金価値の LIBOR (1~12 ヶ月)、スワップ金利 (2~10、12、15、20、30 年) に対する感応度を計算する。具体的には、各金利が単独で 1 ベーシス・ポイント (=0.01%、1bp) だけ上昇したときのコア預金価値の変化額 (1 ベーシス・ポイント・バリュー、1bpv) を求めた。図 10 に、1bpv のコア預金価値に対する比率を示した。

さいことを前提とすると、これは、非常に残念なことである。』

5. 結語

本稿では、銀行が受け入れている流動性預金の現在価値の算出のために、先行研究の理論モデルを実際のデータに適用して、流動性預金と、流動性預金の滞留分であるコア預金の現在価値と金利感応度を求める手法を検討した。

本稿の分析では、本邦国内銀行の預金額の1995年6月～2005年6月のヒストリカル・データ等を基に、将来の預金の受入分も勘案して、流動性預金の現在価値を算出したところ、モデルでは将来にわたって預金額が大きく増加することから、流動性預金の現在価値は現時点の預金額を大幅に上回る水準（約3.5倍）に達することが導かれた。その一方で、流動性預金の滞留分であるコア預金額の過程を定式化した上で、その現在価値を求めると、将来の預金額の増加を捨象しているため、現時点の預金額の3割程度となった。また、コア預金の現在価値の金利感応度を計算した結果、コア預金は、固定金利商品の集合体として、その金利リスクを認識することができることが示された。

このように、流動性預金（特にコア預金）の現在価値と金利リスクを、理論モデルの枠組みを用いて捉えることは、金利リスク管理の実務上は、一定の有用性があることから、既存のリスク管理実務の中に、こうした考え方を取り込むことは検討に値すると思われる。

今後の課題として、データとモデルの扱いを挙げる。まず、データについては、本稿の分析は、金利低下局面で流動性預金額が増加した時期のデータを用いたという点で限定的であり、本来は多様な金利局面のデータを用いた分析・検討が必要である。

また、本稿の分析で用いたデータは、複数の銀行のデータを集計したものであり、個別銀行のデータではない。本来、預金額や預金金利の変動は、各銀行の地域性（景況、季節性等）、顧客層や、銀行自体の要因（信用度等）に依存するため、具体的なモデルの枠組みや、モデルのパラメータの推定期間といった詳細は、個別銀行での実際のデータを基に検討されるべきものである。

次に、データとも密接に関連するが、モデルに関する課題を挙げる。まず、本稿で解説した先行研究の多く（Jarrow and van Deventer[1998]、O'Brien[2000]、

Hutchison and Pennacchi[1996]) は、預金額、預金金利および市場金利のモデル化に当って、市場金利にのみ不確実性を与えている。しかし、これが妥当であるか否かを判断するには、実際のデータを用いた実務的な分析を要しよう。その結果によっては、市場金利の不確実性に加えて、預金額にも不確実性を導入している Kalkbrener and Willing[2004]のような、より自由度の高いモデルが必要になる可能性がある。

また、十分に大きなサイズの預金契約データを用いることができれば、顧客属性等から預金の滞留性を要因分析した結果を参考に、モデルを拡張あるいは変更することも可能になると考えられる。

以 上

補論 1. 流動性預金の現在価値の解析解 (JvD モデル、HP モデル)

JvD モデルと HP モデルにおける流動性預金の現在価値の解析解が得られる。以下では、それぞれの具体的な式を示す (導出過程等の詳細は原論文を参照)。

(1) JvD モデルによる流動性預金の現在価値の解析解

Jarrow and van Deventer[1998]では、流動性預金の現在価値の解析解は(37)～(43)式で表現される (各パラメータは本論を参照)。

$$\begin{aligned}
 V_0 = & D(0) \exp(-\alpha_3^{JvD} r(0)) (1 - \beta_2^{JvD}) \int_0^{\tau} \exp(\alpha_0^{JvD} t + \alpha_1^{JvD} t^2 / 2) MO(t, \alpha_2^{JvD} - 1, \alpha_3^{JvD}) \\
 & \cdot (\mu_2(t) + \sigma_2^2(t) \alpha_3^{JvD} + \sigma_{12}(t) (\alpha_2^{JvD} - 1)) dt \\
 & + D(0) \exp(-\alpha_3^{JvD} r(0)) \int_0^{\tau} \exp(\alpha_0^{JvD} t + \alpha_1^{JvD} t^2 / 2) \\
 & \cdot (-i(0) - \beta_0^{JvD} t + \beta_2^{JvD} r(0)) MO(t, \alpha_2^{JvD} - 1, \alpha_3^{JvD}) dt \\
 & - D(0) \exp(-\alpha_3^{JvD} r(0)) \beta_1^{JvD} \int_0^{\tau} \exp(\alpha_0^{JvD} t + \alpha_1^{JvD} t^2 / 2) MO(t, \alpha_2^{JvD} - 1, \alpha_3^{JvD}) \\
 & \cdot (\mu_2(t) + \sigma_1^2(t) (\alpha_2^{JvD} - 1) + \sigma_{12}(t) \alpha_3^{JvD}) dt
 \end{aligned} \tag{37}$$

ここで、以下の関係がある。

$$\mu_1(t) = \int_0^t f(0, s) ds + (1/2) \int_0^t [(\sigma^{JvD} / m^{JvD})^2 (1 - \exp(-m^{JvD}(t-s)))^2] ds \tag{38}$$

$$\sigma_1^2(t) = \int_0^t [(\sigma^{JvD} / m^{JvD})^2 (1 - \exp(-m^{JvD}(t-s)))^2] ds \tag{39}$$

$$\mu_2(t) = f(0, t) + (\sigma^{JvD} / (2m^{JvD}))^2 (1 - \exp(-m^{JvD}t))^2 \tag{40}$$

$$\sigma_2^2(t) = \int_0^t (\sigma^{JvD})^2 \exp(-2m^{JvD}(t-s)) ds \tag{41}$$

$$\sigma_{12}(t) = (\sigma^{JvD} / (2m^{JvD}))^2 (1 - \exp(-m^{JvD}t))^2 \tag{42}$$

$$MO(t, v_1, v_2) = \exp[\mu_1(t)v_1 + \mu_2(t)v_2 + (1/2)(\sigma_1^2(t)v_1^2 + 2\sigma_{12}(t)v_1v_2 + \sigma_2^2(t)v_2^2)] \tag{43}$$

一方、Jarrow and van Deventer[1998]の応用版である Janosi, Jarrow and Zullo[1999]では、流動性預金の現在価値の解析解は(44)～(52)式で表現される(各パラメータは本論を参照)。本論で行うデータを用いた分析では、この Janosi, Jarrow and Zullo[1999]による流動性預金の現在価値の解析解を用いる。

$$V_0 = \alpha_0^{JvD} D(0) \int_0^{\tau} (1/\alpha_0^{JvD})^{(\alpha_1^{JvD})^t} \exp(\alpha_2^{JvD} t + \mu_1(t) + \sigma_1^2(t)/2) \cdot ((\mu_3(t) + \sigma_{13}(t)) - (\beta_0^{JvD} + (\beta_1^{JvD})^t (i(0) - \beta_0^{JvD}) + \mu_2(t) + \sigma_{12}(t)) - c(t)) dt \quad (44)$$

ここで、以下の関係がある。

$$\mu_1(t) = \alpha_3^{JvD} \int_{\max(t-\Delta, 0)}^t f(0, s) + (1/2)(\sigma^{JvD}/m^{JvD})^2 (1 - \exp(-m^{JvD} s))^2 ds - \int_0^t f(0, s) + (1/2)(\sigma^{JvD}/m^{JvD})^2 (1 - \exp(-m^{JvD} s))^2 ds \quad (45)$$

$$\sigma_1^2(t) = (\sigma^{JvD}/m^{JvD})^2 \int_0^{\max(t-\Delta, 0)} [(\alpha_3^{JvD} (\exp(m^{JvD} \Delta) - 1) + 1) \exp(-m^{JvD} (t-s)) - 1]^2 ds + (\sigma^{JvD}/m^{JvD})^2 (\alpha_3^{JvD} - 1)^2 \int_{\max(t-\Delta, 0)}^t (1 - \exp(-m^{JvD} (t-s)))^2 ds \quad (46)$$

$$\mu_2(t) = \beta_2^{JvD} \int_{\max(t-\Delta, 0)}^t f(0, s) + (1/2)(\sigma^{JvD}/m^{JvD})^2 (1 - \exp(-m^{JvD} s))^2 ds \quad (47)$$

$$\sigma_2^2(t) = (\beta_2^{JvD})^2 (\exp(m^{JvD} \Delta) - 1)^2 (\sigma^{JvD}/m^{JvD})^2 \int_0^{\max(t-\Delta, 0)} \exp(-2m^{JvD} (t-s)) ds + (\beta_2^{JvD})^2 (\sigma^{JvD}/m^{JvD})^2 \int_{\max(t-\Delta, 0)}^t (1 - \exp(-m^{JvD} (t-s)))^2 ds \quad (48)$$

$$\mu_3(t) = f(0, t) + (1/2)(\sigma^{JvD}/m^{JvD})^2 (1 - \exp(-m^{JvD} t))^2 \quad (49)$$

$$\sigma_3^2(t) = (\sigma^{JvD})^2 \int_0^t \exp(-2m^{JvD} (t-s)) ds \quad (50)$$

$$\sigma_{12}(t) = \alpha_3^{JvD} \beta_2^{JvD} ((\exp(m^{JvD} \Delta) - 1) \sigma^{JvD}/m^{JvD})^2 \int_0^{\max(t-\Delta, 0)} \exp(-2m^{JvD} (t-s)) ds - \beta_2^{JvD} (\exp(m^{JvD} \Delta) - 1) (\sigma^{JvD}/m^{JvD})^2 \int_{\max(t-\Delta, 0)}^t (\exp(-m^{JvD} (t-s)) - \exp(-2m^{JvD} (t-s))) ds + (\alpha_3^{JvD} - 1) \beta_2^{JvD} (\sigma^{JvD}/m^{JvD})^2 \int_{\max(0, t-\Delta)}^t (1 - \exp(-m^{JvD} (t-s)))^2 ds \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}(t) &= \alpha_3^{JvD} (\exp(m^{JvD} \Delta) - 1) (\sigma^{JvD} / m^{JvD})^2 \int_0^{\max(t-\Delta, 0)} \exp(-2m^{JvD}(t-s)) ds \\
&\quad - (\sigma^{JvD})^2 / m^{JvD} \int_0^{\max(t-\Delta, 0)} (\exp(-m^{JvD}(t-s)) - \exp(-2m^{JvD}(t-s))) ds \\
&\quad + (\alpha_3^{JvD} - 1) (\sigma^{JvD})^2 / m^{JvD} \int_{\max(t-\Delta, 0)}^t (\exp(-m^{JvD}(t-s)) - \exp(-2m^{JvD}(t-s))) ds
\end{aligned} \tag{52}$$

(2) HP モデルによる流動性預金の現在価値の解析解

HP モデルでは、 $\tau \rightarrow \infty$ とすると、流動性預金の現在価値の解析解は次のように表現される。ただし、 $\gamma_0^H, \gamma_1^H, \gamma_2^H$ は定数である。

$$\begin{aligned}
V_0 &= -\frac{\gamma_0^{HP}}{a^{HP}} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{r(0) - r_{\infty}}{a^{HP}} \right) \frac{1}{\gamma_1^{HP} (\gamma_1^{HP} + 1) \cdots (\gamma_1^{HP} + j)} \right. \\
&\quad \left. \cdot {}_2F_2 \left(\frac{j+1}{2}, \frac{j+2}{2}; \frac{\gamma_1^{HP} + j+1}{2}, \frac{\gamma_1^{HP} + j+2}{2}; \gamma_2^{HP} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{53}$$

ここで、 ${}_2F_2(\cdot)$ は、一般化超幾何関数を表し、以下で定義される。

$$\begin{aligned}
&{}_2F_2 \left(\frac{j+1}{2}, \frac{j+2}{2}; \frac{\gamma_1^{HP} + j+1}{2}, \frac{\gamma_1^{HP} + j+2}{2}; \gamma_2^{HP} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{j+1}{2} \right)_n \left(\frac{j+2}{2} \right)_n}{n! \left(\frac{\gamma_1^{HP} + j+1}{2} \right)_n \left(\frac{\gamma_1^{HP} + j+2}{2} \right)_n} (\gamma_2^{HP})^n
\end{aligned} \tag{54}$$

なお、 $(\lambda)_n \equiv \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n-1)$ である。

補論 2. パラメータの推定結果 (OTS モデル、JvD モデル)

OTS モデルと JvD モデルのパラメータの推定結果は、以下のとおりである。

(1) OTS モデル

(5)式にダミー変数を加えた以下の(5')式 (式中の τ は 2002/3 月)、および(6)~(8)式は、それぞれ非線形回帰 (最小 2 乗法) により推定を行った。

$$D_{t_k} = D_{t_{k-1}}(\alpha_0^{OTS} + \alpha_1^{OTS} \arctan(\alpha_2^{OTS} + \alpha_3^{OTS} \frac{i_{t_k}}{L_{t_k}^3}) + \alpha_4^{OTS} i_{t_k})^{\frac{1}{12}} + \alpha_5^{OTS} 1_{t_k=\tau} \quad (5')$$

α_0^{OTS}	α_1^{OTS}	α_2^{OTS}	α_3^{OTS}	α_4^{OTS}	α_5^{OTS}
1.184	0.129	1.799	-0.858	-3.992	1.462.E+14

β_0^{OTS}	β_1^{OTS}	β_2^{OTS}	β_3^{OTS}	β_4^{OTS}	β_5^{OTS}	β_6^{OTS}
-0.138	0.029	0.038	2.849	3.698	2.036	-2.052.E-6

(2) JvD モデル

(12)式は、最小 2 乗法により、(18)式にダミー変数を加えた以下の(18')式 (式中の τ は 2002/3 月) および(19)式は、それぞれ、最尤法により推定を行った^{24,25}。

$$D(t) = \alpha_0^{JvD} D(0) (1/\alpha_0^{JvD})^{(\alpha_1^{JvD})^t} \exp(\alpha_2^{JvD} t + \alpha_3^{JvD} \int_{t-\Delta}^t r(s) ds + \alpha_4^{JvD} 1_{t \geq \tau}) \quad (18')$$

m^{JvD}	σ^{JvD}
0.217	0.011

α_0^{JvD}	α_1^{JvD}	α_2^{JvD}	α_3^{JvD}	α_4^{JvD}
1.026	0.276	0.130	-138.45	0.183

β_0^{JvD}	β_1^{JvD}	β_2^{JvD}
-3.108.E-5	0.831	2.101

²⁴ 詳細は、Janosi, Jarrow and Zullo[1999]を参照。

²⁵ 本稿の分析では、 Δ を 1 ヲ月とした。

参考文献

- Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, Jr., and Stephen A. Ross, "A theory of the term structure of interest rates," *Econometrica*, **53**, 1985, pp. 385-407.
- Ellis, David M., and James V. Jordan, "The Evaluation of Credit Union Non-Maturity Deposits," National Economic Research Associates, prepared for National Credit Union Administration, 2001.
(<http://www.ncua.gov/ALManagementInvest/nerastudy.pdf>)
- Hull, John and Alan White, "Pricing interest-rate-derivative securities," *The Review of Financial Studies*, **3**, 1990, pp. 573-592.
- Hutchison, David, "Retail Bank Deposit Pricing: An Intertemporal Asset Pricing Approach," *Journal of Money, Credit and Banking*, **27**, 1995, pp. 217-231.
- Hutchison, David and George Pennacchi, "A Framework for Estimating the Value and Interest Rate Risk of Retail Bank Deposits," Working Paper Series WP-92-30, Federal Reserve Bank of Chicago, 1992.
- Hutchison, David and George Pennacchi, "Measuring Rents and Interest Rate Risk in Imperfect Financial Markets: The Case of Retail Deposits," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **31**, 1996, pp. 399-417.
- Janosi, Tibor, Robert A. Jarrow and Ferdinando Zullo, "An Empirical Analysis of the Jarrow-van Deventer Model for Valuing Non-Maturity Demand Deposits," *Journal of Derivatives*, **7**, 1999, pp. 8-31.
- Jarrow, Robert A. and Donald R. van Deventer, "The Arbitrage-free Valuation and Hedging of Demand Deposits and Credit Card Loans," *Journal of Banking and Finance*, **22**, 1998, pp. 249-272.
- Kalkbrener, Michael, and Jan Willing "Risk Management of Non-maturing Liability," *Journal of Banking and Finance*, **28**, 2004, pp. 1547-1568.
- O'Brien, James M., "Estimating the Value and Interest Rate Risk of Interest-Bearing Transactions Deposits," Finance and Economics Discussion Series 2000-53, Board of Governors Federal Reserve System, 2000.

Office of Thrift Supervision, “Demand Deposits,” *The OTS Net Portfolio Value Model*, Section 6.D, 2001.

(<http://www.ots.treas.gov/pagehtml.cfm?catNumber=85&an=3>)

Selvaggio, Robert D., “Using OAS Methodology to Value and Hedge Commercial Bank Retail Demand Deposit Premiums,” *The Handbook of Asset/Liability Management: State-of-the-art Investment Strategies, Risk Control and Regulatory Requirements*, McGraw-Hill, 1996, pp. 363-374.

Vasicek, Oldrich, “Equilibrium Characterization of the Term Structure,” *Journal of Financial Economics*, **5**, 1977, pp. 177-188.