IMES DISCUSSION PAPER SERIES

住宅ローン債権担保証券のプライシング手法について
―期限前償還リスクを持つ金融商品の価格の算出―

山崎　輝（やまざき　あきら）

Discussion Paper No. 2005-J-5

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

IMES Discussion Paper Series 2005-J-5
2005 年 4 月

住宅ローン債権担保証券のプライシング手法について
― 期限前償還リスクを持つ金融商品の価格の算出 ―

山崎 輝[*]

要　　旨

住宅ローン債権担保証券のプライシングでは、裏付資産となる住宅ローン債権の期限前償還によりキャッシュフローが変動する可能性を考慮する必要がある。本稿では、まず、住宅ローン債権担保証券の商品性を概説し、期限前償還のリスクに焦点を当てて、住宅ローン債権担保証券の既存の評価手法を説明する。そのうえで、フォワード中立確率下での格子展開を用いた評価方法と簡便な解析的評価手法の 2 種類の新たな評価手法を提案する。さらに、これらの各種評価モデルを用いて算出される住宅ローン債権担保証券の価格やリスク指標の特性を考察する。

キーワード：MBS、プリペイメント･リスク、ハザード･モデル、スポットレート･モデル
JEL classification: G21

[*]日本銀行金融研究所（E-mail: akira.yamazaki@boj.or.jp）

本稿の作成に当たっては、中川秀敏助教授（東京工業大学）から大変貴重なコメントを頂戴した。記して感謝したい。なお、本稿に示されている意見は日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

（目　次）

１． はじめに

住宅ローン債権担保証券 （Residential Mortgage-Backed Securities：RMBS）とは、住宅ローン債権から構成されるポートフォリオを裏付資産とするモーゲージ担保証券（Mortgage-Backed Securities：MBS）の一種である。モーゲージ担保証券は、不動産担保貸付債権（mortgage）を裏付資産とした資産担保証券（Asset-Backed Securities：ABS）の総称であり、住宅ローン債権担保証券の他に、商業用不動産を対象としたローン債権を裏付資産とした商業用不動産担保証券（Commercial Mortgage-Backed Securities：CMBS）がある。狭義では RMBS を MBS とすることもあるので、以下本稿では RMBS を MBS と呼ぶ。

MBS は米国の債券市場で活発に取引されている商品であるが、本邦 MBS 市場は、歴史が浅く、近年までは MBS の発行･売買は活発ではなかった。しかし、最近では、住宅金融公庫の貸付債権担保住宅金融公庫債券（以下、公庫 MBS）が牽引役となり、取引が徐々に盛んになっている。また、後述のように、今後も公庫 MBS の発行拡大が予定されているほか、民間金融機関もリスク管理の目的等で市場に参入する動きを見せていることから、本邦 MBS 市場は、市場参加者の拡大を伴って、発展していくことが予想される。

本邦 MBS 市場の発展を展望すると、MBS の価値やその特性を客観的に把握することが、取引価格の透明性やリスク管理の観点から重要となる。このとき注意しなければならないのは、MBS のプライシング（価格評価）では、通常の債券とは異なり、住宅ローン債務者による期限前償還の影響（リスク）を勘案する必要があることである。そこで、本稿では、期限前償還リスクに焦点を当て、MBS の評価手法を考察するとともに、幾つかの新たな評価方法を提案する。

本稿の構成は以下のとおりである。2 節では、MBS の商品性を概説したうえで、期限前償還リスクの説明を行う。3 節では、期限前償還を考慮した MBS のキャッシュフローの記述方法を述べる。4 節では、期限前償還行動を数理的に表現するプリペイメント･モデルを解説し、2 つの代表的なモデルを説明する。5 節では、やや複雑なプリペイメント･モデルを用いて、MBS の価格を数値計算によって求めるための既存方法を説明するとともに、新たな方法を提案する。6 節では、単純なプリペイメント･モデルを仮定して、MBS 価格の解析解の導出方法を提案する。7 節では、幾つかの評価手法により MBS の価格を求め、MBS の価格特性等を検討する。最後に 8 節で、本稿のまとめと今後の課題を述べる。

２．MBS の商品性

MBS[1]は、住宅ローン債権から構成されるポートフォリオを裏付資産とするABS の一種であり、ローン･プールの元利金の支払額に応じてキャッシュフローが発生するパス･スルー証券[2]として組成されることが一般的である。通常の住宅ローン契約では、住宅ローンの債務者は、約定返済の他に、契約期間中いつでも元本を返済することできる（期限前償還：プリペイメント）。このため、MBS のキャッシュフローは、ローン･プールから発生する利息額と予定されている元本償還額に加えて、期限前償還された元本額により構成される。

本節では、住宅ローンの証券化商品[3]である MBS の特徴を踏まえつつ、その組成スキームや派生商品を紹介するとともに、MBS が組成される背景や投資における特有のリスクを概説する。

（１） 本邦市場での MBS の主 要な組成スキーム

イ． 公庫 MBS の組成スキー ム

公庫 MBS の場合、住宅金融公庫が信託銀行に住宅ローン債権を信託し、それを担保として住宅金融公庫が債券を発行する（図表 2-1）。つまり公庫 MBS は、住宅金融公庫自身が発行体となり、住宅金融公庫によって元利金の支払が行われるため、住宅金融公庫の信用力に影響を受ける。しかし、住宅金融公庫の信用力に関わる「受益権行使事由[4]」が発生した場合には、公庫 MBS は消滅し、受益者確定手続きを経て、信託財産を裏付けとした受益権に切り替えられ、投資

[1] MBS は、米国債券市場で活発に取引されている商品である。米国では、1968 年に GNMA（Government National Mortgage Association）が設立されたことに伴い、1970 年より住宅ローンの証券化が本格的に開始された。1971 年には FHLMC（Federal Home Loan Mortgage Corporation）、さらに 1981 年には FNMA（Federal National Mortgage Association）が MBS の販売を開始して、米国 MBS 市場は大きく発展した。現在では、債券市場の最大の資産クラスとなっている。

[2] パス･スルー（Pass-Through）証券とは、裏付資産から発生したキャッシュフローを（手数料や保証料等を除き）そのまま投資家に支払う形態の証券をいう。一方、本節（３）で説明する CMO（Collateralized Mortgage Obligation）のように、裏付資産のキャッシュフローを加工し、異なるキャッシュフローに再構成して投資家に支払う形態の証券をペイ･スルー（Pay-Through）証券という。

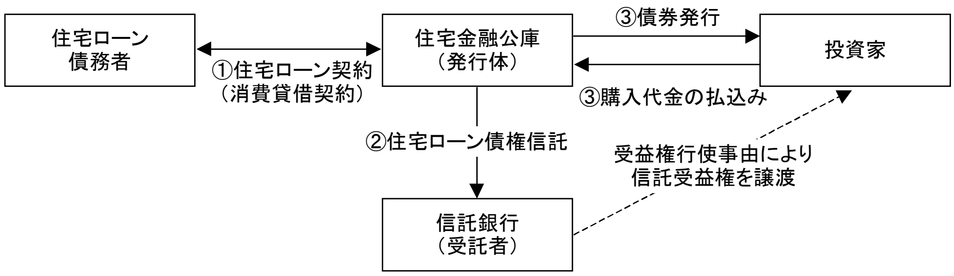
[3] 証券化のスキームや証券化商品の概要は、例えば、北[1999]を参照。

[4] 住宅金融公庫が解散した場合や株式会社等の会社更正法の適用を受ける法人となった場合等、4 つの受益権行使事由がある。

家に真正譲渡[5]される。さらには、担保資産となっている住宅ローン債権がデフォルトに陥ると、別の住宅ローン債権に差し替えられる。これらの信用補完によって格付会社からは最上位の格付が与えられている。

償還方法は、期限前償還部分を含めた元本償還額と利息額が毎月支払われる「月次パス･スルー方式」であり、元本残額が当初元本額の 10%未満になると全額繰上償還できる権利を住宅金融公庫側が保有している（クリーンアップ･コール条項）。

図表 2-1：公庫 MBS の組成スキーム



ロ． 民間金融機関がオリジネ ーターとなる MBS の組成スキーム

民間金融機関がオリジネーターとなる場合のMBSの組成スキームとしては、住宅ローン債権を信託銀行に信託して信託受益権を発行し、それを SPC（Special Purpose Company）に譲渡して MBS を起債する方法が一般的である（図表 2-2）。また、直接信託受益権を販売する方法もある。信用補完の手法としては、超過担保[6]を設定したり、優先･劣後スキーム[7]を用いることが多い。

MBS の償還方法は、期限前償還部分を含めた元本償還額と利息額が毎月支払われる「月次パス･スルー方式」であることが多い。

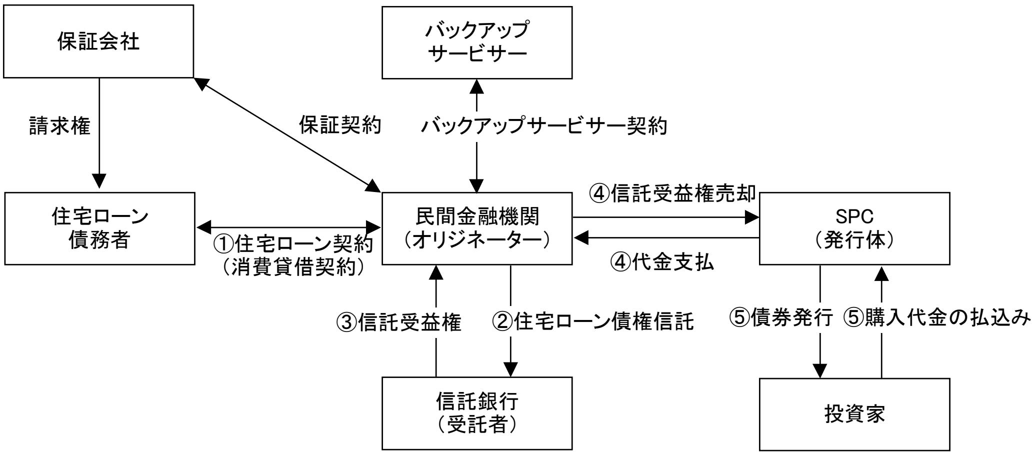
---

[5] 真正譲渡とは、オリジネーターと譲渡債権との関係が完全に切断され、オリジネーターが譲渡債権に対して支配権を残していない譲渡をいう。

[6] 超過担保とは、発行体の調達額を超えて譲渡された担保資産をいう。

[7] MBS を優先債と劣後債の二層構造にして、裏付資産からの回収金を、まず優先債の元利払いに充当し、劣後債の元利払いは優先債に劣後させるというスキーム。

図表 2-2：民間金融機関がオリジネーターとなる MBS の組成スキーム



（２） MBS 組成の背景

イ． 住宅金融公庫が MBS を 組成する背景

住宅金融公庫は、2001 年度からの財政投融資改革に先立ち、資金調達多様化の観点から、2001 年 3 月より貸付債権の証券化（公庫 MBS の発行）を開始した。2003 年 6 月には、民間金融機関による長期･固定金利の住宅資金の貸付を支援することを目的に「住宅金融公庫法および住宅融資保険法の一部を改正する法律」が公布され、この法律の施行に伴い 2003 年 10 月に「証券化支援事業（買取型）[8]」、2004 年 10 月に「証券化支援事業（保証型）[9]」を開始した。住宅金融公庫は、住宅ローンの証券化によって、財投資金のみに依存しない自己調達の実現と ALM（Asset Liability Management）の的確な実施を行うとともに、民間金融機関の住宅ローンの提供に対して支援を行い、MBS 市場の活性化を図っている。

特殊法人等整理合理化計画に基づき、住宅金融公庫の貸付は段階的に縮小され、2007 年に住宅金融公庫は廃止、証券化支援業務を主な業務とする独立行政法人が設立される予定である。

公庫 MBS は、2001 年 3 月から継続的に起債されていることもあり、現在では、

---

8 「証券化支援事業（買取型）」は、住宅金融公庫が民間金融機関の販売した住宅ローンを買い取り、その住宅ローン債権を担保に MBS を発行する業務。

9 「証券化支援事業（保証型）」は、住宅金融公庫が民間金融機関の販売した住宅ローンに対して、住宅ローン債務者が返済不能となった場合に保険金を支払い、また、その住宅ローンを担保として発行された MBS の元利払いを保証する業務。

本邦 MBS 市場のベンチマーク的な存在となっている。また、2005 年度の発行計画では、2004 年度の約 7 倍に相当する 2 兆 7,600 億円の起債が予定されており、公庫 MBS 市場のさらなる規模拡大が見込まれている。さらには、日本銀行適格担保への採用、債券投資インデックス[10]への組み入れ、公社債店頭売買参考統計値の公表等により、公庫 MBS を取り巻く環境の整備が進んでいる。

ロ． 民間金融機関が MBS を 組成する背景

数年前まで、本邦の金融機関は住宅ローンの証券化に消極的だった。その背景としては、住宅ローンを提供している民間金融機関にとって、住宅ローン債権は、バーゼル合意上のリスク･ウェイトが 50%と企業向け貸付の半分であること、小口分散化された債権であること、住宅ローン保証会社の保証付債権であることが多いこと、等から MBS として証券化し発行するニーズが乏しかったことが挙げられる。これまで不良債権処理に腐心してきた民間金融機関は、企業向け貸出債権 CDO（Collateralized Debt Obligation）等を組成することで、企業向け貸出債権のオフバランス化を進めて信用リスクの圧縮を図ろうとする一方、住宅ローンは、証券化によるオフバランス化の対象とはせずに、むしろ残高の積み上げを図る傾向があった。

このように、信用リスクの削減手段として MBS を組成する動機は、近年までは希薄であったが、最近では、ALM の観点から住宅ローンの証券化が注目されている。すなわち、住宅ローンの大半は、金利リスクのコントロールが難しい長期固定金利の資産であり､MBS を組成することで住宅ローン･ポートフォリオをオフバランス化し、金利リスクを外部に移転することができるからである。さらには、多くの金融機関がフィービジネスを強化する方針を打ち出してきているが、住宅ローンの証券化を活用することで、これまでのアセット･ビジネスに加えて、サービシング･ビジネス[11]にも取り組むことが可能になる。最近では、これらが背景と考えられる MBS の組成がいくつか見られているが、今後、住宅金融公庫の直接融資による住宅ローンの提供が縮小され、民間金融機関がその役割を担うようになれば、住宅ローンの証券化ニーズはさらに高まると考えられる。

---

[10] 公庫 MBS は､本邦債券市場の主要インデックスである NOMURA-BPI､日興債券パフォーマンス･インデックス、ダイワ･ボンド･インデックスに組み入れられている。

[11] 住宅ローン債権の回収や管理等を行う対価として手数料を得るビジネス。

（3） MBS の派生商品

現在、米国市場を中心に様々なタイプの MBS の派生商品が組成されている。本節では、MBS の代表的な派生商品である CMO と、分離型 MBS である IO と PO を概説する。

イ． CMO

CMO（Collateralized Mortgage Obligation）とは、住宅ローンから発生するキャッシュフローを組み替えて、異なったキャッシュフローのクラスに分割して発行される証券である。

CMO の例として、3 つのクラス（クラス A、クラス B、クラス C）に分割されている商品を考えよう。元本の償還部分はクラス A が完済されるまで、このクラスのみに振り分けられる。クラス A が完済となった後に、クラス B に元本償還が振り分けられ、最後に、クラス C が償還される。このような仕組みによって、期限前償還の影響を制御し、キャッシュフローや平均残存年限の異なる証券を組成することができる。

ロ． IO と PO

住宅ローンのキャッシュフローの元本部分と金利部分を、一定の比率に分離して組成されたものが、SMBS（分離型 MBS：Stripped Mortgage-Backed Securities）である。特に、金利部分のみで構成された証券を IO（Interest Only）、元本部分のみで構成された証券を PO（Principal Only）と呼ぶ。

IO は残存元本に対し一定の利息収入を得るための権利であり、PO は一種のゼロ･クーポン債とみなされる。しかし、裏付資産である住宅ローンの期限前償還の影響を受けるため、IO と PO は共にパス･スルー証券となる。

（4） MBS 特有のリスク

MBS には、一般的な ABS に共通するリスク[12]に加えて、地震リスク[13]や抵当権移転問題[14]に関するリスク等の偶発的リスクが存在する。このうち、最も特徴的なリスクとして挙げられるのは、期限前償還によるキャッシュフローの変動リスク（プリペイメント･リスク）である。以下では、プリペイメント･リスクを主に説明し、デフォルト･リスクを補足的に解説する。

イ． プリペイメント･リスク

住宅ローン債務者は、その現在価値によらず、住宅ローンをいつでも額面で償還することができる。MBS では、裏付資産となる住宅ローンの期限前償還により元本償還額が決まるため、債務者の期限前償還行動の変化によりキャッシュフローが変動する。このキャッシュフローの変動リスクをプリペイメント･リスクと呼ぶ。

期限前償還は、広義では全額償還、一部償還、債務者のデフォルト等による代位弁済の 3 つを指し、狭義では代位弁済を除く 2 つをいう。期限前償還は、例えば、住宅ローン借換え、住宅売却、資金余剰により発生するが、その要因は多様である[15]。プリペイメント･リスクの把握は非常に難しいが、これの計測のために、過去のデータを用いて複雑な期限前償還を分析し、期限前償還率を推定するモデル（プリペイメント･モデル）を構築する試みが多数行われている。

---

[12] 例えば、オリジネーターが破綻した際に、債務者の有する預金債権等との相殺により担保資産が減耗してしまうリスク（相殺リスク）や、サービサーが破綻した際に、サービサー口座に滞留している担保資産からの回収資金が、サービサー自身の営業資金と混同されることにより破産財団等に組み入れられてしまい、投資家への元利金の支払いが滞ってしまうリスク（コミングリング･リスク）等がある。詳しくは、北[1999]の 9 章を参照。

[13] 住宅に対する地震保険の加入率が必ずしも高くないこと、また加入していたとしても、物件の価格を十分にカバーする契約となっていないため、地震によって住宅ローン･プールが毀損するリスクがある。このリスクは、担保資産となる住宅ローンが地域分散されていることで軽減される。

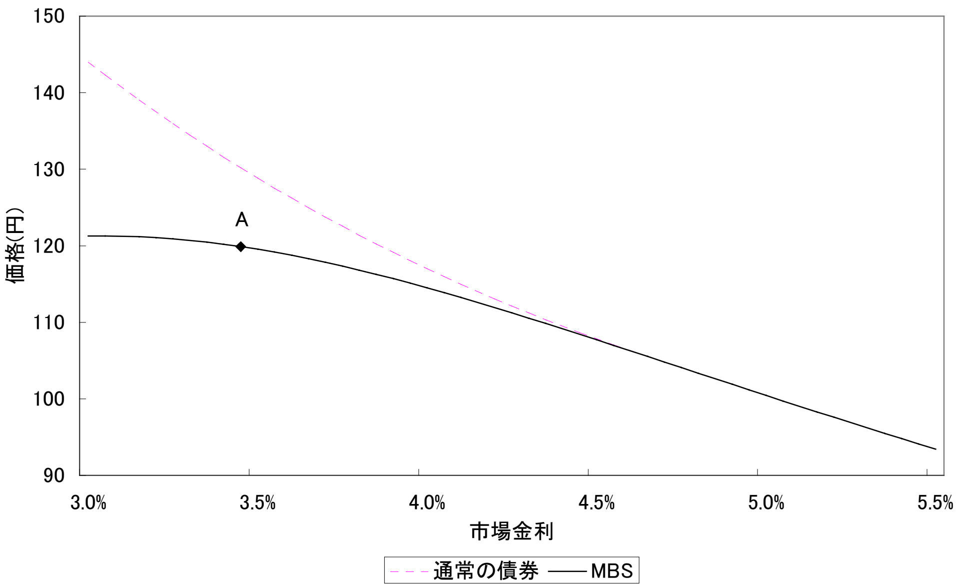
[14] 通常、住宅ローン債権がデフォルトすると、保証会社が代位弁済することで元本が 100%回収される。仮に抵当権を保有している保証会社が破綻した場合、抵当権の移転には各債務者の承認が必要であるため、すべての抵当権移転は困難となり、住宅ローン債権が実質無担保のローンになる可能性がある。

[15] 借換えの理由としては、金利低下、優遇措置や特典が付いたローンへの乗換え等、住宅売却の理由には、家族構成の変化、転勤･転職等、資金余剰の理由には、退職金、相続等が考えられる。

（イ） 期限前償還と価格変動

通常の債券の価格と市場金利は負の相関関係にあり、2 つの関係を表す曲線（価格曲線）は、原点に対して凸の形状（ポジティブ･コンベキシティ）となる。つまり、債券価格の市場金利についての 2 次の微分係数は正値になる。これに対して、MBS では、市場金利が低下すると借換えによる期限前償還が増えて、価格が 100 円を超える場合、つまりオーバー･パーでは額面超過部分が償還損となる。その結果、オーバー･パーでは価格に低下圧力が働くので、価格曲線は原点に対して凹の形状となる。これがネガティブ･コンベキシティと呼ばれる MBS 価格の特徴の 1 つである（図表 2-3）。例えば、図表 2-3 で現在の市場金利が 3.5%であるとすると、MBS 価格は A 点で示される。MBS 価格がオーバー･パーの領域では、市場金利が 3.5%から低下（上昇）するときの金利低下（上昇）幅 1 単位当たりの価格上昇（低下）幅は徐々に小さく（大きく）なる。また、MBS 価格がアンダー･パーの領域では、期限前償還が発生しにくくなることから、MBS 価格は通常の債券価格と同様にポジティブ･コンベキシティを有する。

図表 2-3：ネガティブ･コンベキシティの概念図



（ロ） 期限前償還と最終償還利回り

債券の投資尺度の 1 つとして最終償還利回りがある。債券の将来のキャッシュフローをある一定の割引率で割引いたとき、債券の現在価値に一致するような割引率が最終償還利回りである。MBS は期限前償還の存在によりキャッシュフ

ローが確定しないため、予想される最終償還利回りと実現利回りが一致せず、以下のリスクが顕現化する可能性がある。すなわち、期限前償還が増加するときには、オーバー･パーの MBS の実現利回りが低下する一方で、アンダー･パーの MBS の実現利回りが上昇する。逆に、期限前償還が減少するときには、MBS の実現利回りが各々反対になる。このように、MBS の最終利回りは取得時には確定されず、その後の期限前償還の増減によって変動するリスクを伴う。

ロ． デフォルト･リスク

MBS には 2 つの意味でのデフォルト･リスクが存在する。1 つは裏付資産となる住宅ローンの債務者のデフォルトであり、もう 1 つは、何らかの理由による MBS 自体のデフォルト[16]である。

前者に関しては、公庫 MBS では、デフォルトした住宅ローン債権は別の住宅ローン債権と差し替えられることになっているほか、本邦民間金融機関による MBS では、何らかの信用補完スキームにより住宅ローン債務者のデフォルトから MBS が隔離されていたり、代位弁済によって期限前償還として処理されることが多い。このため、本稿では、前者の意味でのデフォルトを捨象して考えることにする。また、後者の意味でのデフォルトが起こる可能性は否定できないが、本邦市場での事例がないことを踏まえて、本稿ではこれを捨象する。

３． MBS のキャッシュフロー

本稿では、同一の契約条件[17]の固定金利･元利均等返済型の住宅ローンが多数含まれるプールからキャッシュフローを生成する MBS を分析の対象とする。MBS のプリペイメント･リスクはキャッシュフローの変動リスクであるため、そのキャッシュフローの定式化が必要になる。以下では、まず、離散時間で元利金支払が発生する MBS を考え、「期限前償還のない場合」と「期限前償還のあ

[16] 例えば、オリジネーターが倒産したときに、譲渡債権の真正譲渡性が否定され、その債権が破産財団や更正債権の一部と認定されることで MBS の元利払いが停止してしまう状況等が考えられる。

[17] 「同一の契約条件」とは、借入金額、開始時点、満期、金利、1 回あたりの返済額等がすべて同じ住宅ローンを意味する。したがって、住宅ローンとそのプールの契約上の元利金支払条件は同一となる。ただし、ローン債務者の属性が同一であるとは限らない。

る場合」のキャッシュフローを定式化する。その後に、離散時間のキャッシュフローの極限として、連続時間の元利金支払のキャッシュフローを定式化する。

（1） 離散的な元利金支払いの 場合

イ． 期限前償還がないと仮定 したときのキャッシュフロー

1 年間に等間隔で m 回の元利金支払が発生する満期 T 年、年率の固定金利が c の住宅ローン･プールを考える。元利金支払い時点を $t_i = i/m$（$i = 0, 1, \cdots, mT$）、1 回あたりの元利金支払額を A（一定）、残存元本額を $M(t_i)$ とすると

$$A = M(t_i) - M(t_{i+1}) + \frac{c}{m} M(t_i), \tag{3-1}$$

であるので、当初元本（時点 $t_0 = 0$）は

$$\begin{aligned} M(0) &= \frac{A}{1+c/m} + \frac{M(t_1)}{1+c/m} \\ &= \frac{A}{1+c/m} + \frac{A}{(1+c/m)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+c/m)^{mT}} \\ &= A \frac{1 - \dfrac{1}{(1+c/m)^{mT}}}{c/m}, \end{aligned} \tag{3-2}$$

元利均等返済額は

$$A = M(0) \frac{c/m(1+c/m)^{mT}}{(1+c/m)^{mT} - 1}, \tag{3-3}$$

となり、時点 t_i での残存元本額は

$$M(t_i) = M(0) \frac{(1+c/m)^{mT} - (1+c/m)^{mt_i}}{(1+c/m)^{mT} - 1}, \tag{3-4}$$

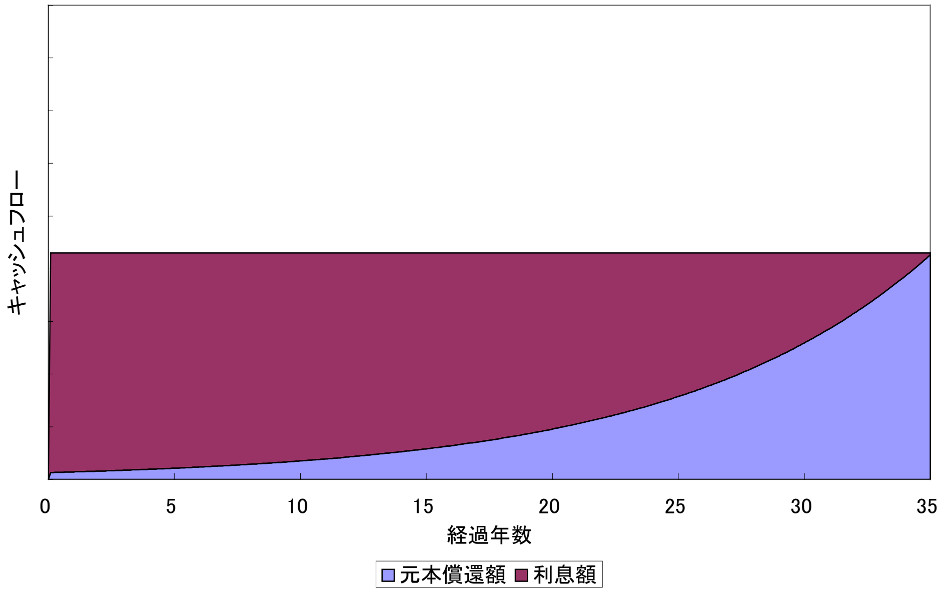
となる。さらに、時点 t_i での元本償還額 $P(t_i)$ は

$$P(t_i) = M(t_{i-1}) - M(t_i) = M(0) \frac{c/m(1+c/m)^{mt_{i-1}}}{(1+c/m)^{mT} - 1}, \tag{3-5}$$

となり、時点 t_i での利息額 $I(t_i)$ は以下のようになる。

$$I(t_i) = \frac{c}{m} M(t_{i-1}) = \frac{c}{m} M(0) \frac{(1+c/m)^{mT} - (1+c/m)^{mt_{i-1}}}{(1+c/m)^{mT} - 1}. \tag{3-6}$$

図表 3-1：期限前償還がないと仮定したときのキャッシュフロー



ロ．　期限前償還考慮後の予想 キャッシュフロー

期間$(t_{i-1}, t_i]$の期限前償還率[18]を$SMM(t_i)$とし、時点t_iでの期限前償還がないと仮定した場合の残存元本に対する実際の残存元本額の比率、つまり住宅ローンの生存率を$S(t_i)$とする。残存元本の比率$S(t_i)$は、それまで期限前償還されなかった比率であるから、以下の関係を得る。

$$S(t_i) = \prod_{j=1}^{i} \{1 - SMM(t_j)\}, \tag{3-7}$$

$$SMM(t_i) = \frac{S(t_{i-1}) - S(t_i)}{S(t_{i-1})}. \tag{3-8}$$

これらを用いることで、期限前償還を考慮したキャッシュフローを定式化することができる。

予想残存元本額$M^*(t_i)$は、生存率$S(t_i)$の定義より、次式で表される。

18 キャッシュフローの発生間隔を 1 ヵ月とするとき、その月次期限前償還率を SMM（Single Monthly Mortality）という。また、SMM を年率換算したものを CPR（Conditional Prepayment Rate）という。

$$M^*(t_i) = M(t_i)S(t_i). \tag{3-9}$$

予想元利金支払額$A^*(t_i)$は、時点t_{i-1}での残存元本$M^*(t_{i-1})$を当初元本とした満期$T-t_{i-1}$の元利均等償還債の元利金支払額とみなせるので、(3-3)式より

$$A^*(t_i) = M^*(t_{i-1})\frac{c/m(1+c/m)^{m(T-t_{i-1})}}{(1+c/m)^{m(T-t_{i-1})}-1} = AS(t_{i-1}), \tag{3-10}$$

となる。

予想利息額$I^*(t_i)$は、時点t_{i-1}の残存元本$M^*(t_{i-1})$に対する利息であるので

$$I^*(t_i) = \frac{c}{m}M^*(t_{i-1}) = I(t_i)S(t_{i-1}), \tag{3-11}$$

となり、予想予定元本償還額$P^*(t_i)$は、予想元利金支払額$A^*(t_i)$から予想利息額$I^*(t_i)$を差し引いたものであるので、(3-10)式と(3-11)式より、次式となる。

$$P^*(t_i) = A^*(t_i) - I^*(t_i) = P(t_i)S(t_{i-1}). \tag{3-12}$$

期限前償還額分を差し引く前の時点t_iでの残存元本は、時点t_{i-1}での実際の残存元本$M^*(t_{i-1})$から時点t_iの予想予定元本償還額$P^*(t_i)$を差し引いたものである。期間$(t_{i-1}, t_i]$の予想期限前償還額$PR(t_i)$は、これに期限前償還率$SMM(t_i)$を乗じた値になるので、次式で表される。

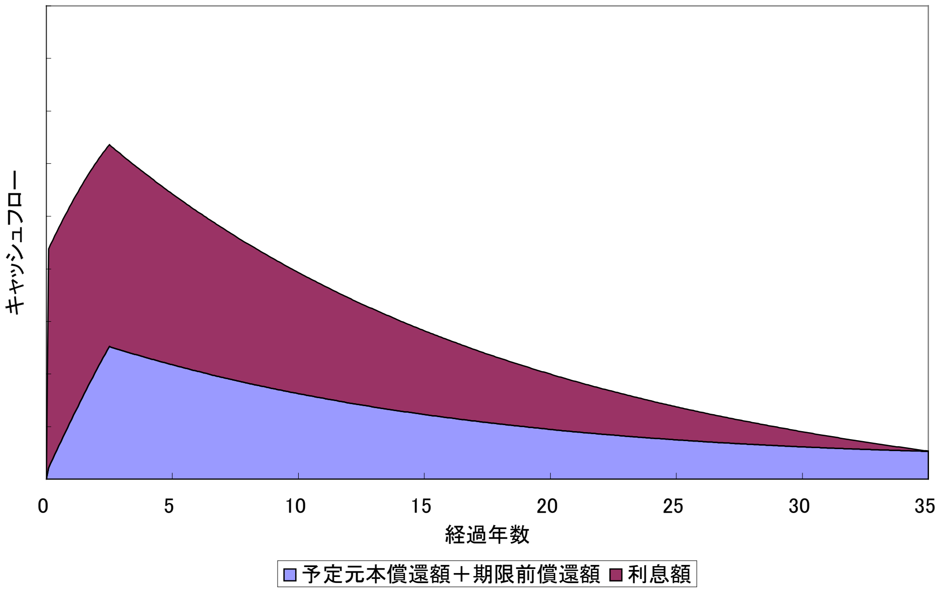
$$PR(t_i) = \{M^*(t_{i-1}) - P^*(t_i)\}SMM(t_i). \tag{3-13}$$

期限前償還を考慮した場合の MBS の予想キャッシュフロー$CF(t_i)$は、予想予定元本償還額$P^*(t_i)$、予想利息額$I^*(t_i)$、予想期限前償還額$PR(t_i)$の和であるので、(3-11)～(3-13)式および(3-8)式より以下で表される[19]。

$$\begin{aligned} CF(t_i) &= P^*(t_i) + I^*(t_i) + PR(t_i) \\ &= P(t_i)S(t_{i-1}) + I(t_i)S(t_{i-1}) \\ &\quad + \{M(t_{i-1})S(t_{i-1}) - P(t_i)S(t_{i-1})\}SMM(t_i) \\ &= \{M(t_{i-1}) + I(t_i)\}S(t_{i-1}) - M(t_i)S(t_i). \end{aligned} \tag{3-14}$$

[19] Fabozzi[2001]や Kariya and Kobayashi[1999]では、住宅ローン債権の回収や管理等のサービシング業務に対する手数料（サービシング･コスト）を考慮したキャッシュフローの定式化を行っているが、本稿では、サービシング･コストは考えないものとする。

図表 3-2：期限前償還考慮後の予想キャッシュフロー



（2） 連続的な元利金支払いの 場合

イ． 期限前償還がないと仮定 したときのキャッシュフロー

多くの住宅ローンでは、元利金の支払間隔は離散（1 ヵ月）であるが、連続元利金支払いのキャッシュフローを考えることで、数学的に扱いやすくなる。

1 年間の元利金支払額の合計を $\tilde{A} \equiv mA$ として、元利金の支払間隔を時間連続（$m \to \infty$）にした場合、(3-3)、(3-4)式から 1 年間の元利金支払額と時点 t の残存元本額は以下のように表せる。

$$\tilde{A} = \frac{cM(0)}{1 - \exp\{-cT\}}, \tag{3-15}$$

$$M(t) = \frac{\tilde{A}}{c}\left(1 - \exp\{-c(T-t)\}\right) = M(0)\frac{1-\exp\{-c(T-t)\}}{1-\exp\{-cT\}}. \tag{3-16}$$

ロ． 期限前償還考慮後の予想 キャッシュフロー

離散元利金支払モデルのキャッシュフローである(3-14)式は

$$CF(t_i) = A^*(t_i) + PR(t_i), \tag{3-17}$$

と書くことができる。ここで(3-10)、(3-13)式より

$$A^*(t_i) = AS(t_{i-1}), \tag{3-18}$$

$$\begin{aligned} PR(t_i) &= \{M(t_{i-1})S(t_{i-1}) - P(t_i)S(t_{i-1})\}SMM(t_i) \\ &= \{M(t_{i-1}) - P(t_i)\}\{S(t_{i-1}) - S(t_i)\} \\ &= -M(t_i)\{S(t_i) - S(t_{i-1})\}, \end{aligned} \tag{3-19}$$

となるので、$\Delta t \equiv t_i - t_{i-1} \to 0$（$m \to \infty$）とすると、連続元利金支払モデルにおける期限前償還考慮後の予想キャッシュフローが次式で得られる。

$$dCF(t) = \tilde{A}S(t)\,dt - M(t)\,dS(t). \tag{3-20}$$

４． 期限前償還率とプリペイ メント･モデル

前節で求めたMBSのキャッシュフロー･モデルでは、裏付資産である住宅ローン･プールの生存率$S(t)$が未知の変数となる。予想されるローン･プールの生存率$S(t)$は、個々の住宅ローンの生存確率を集積したものと考えられるので、ここでは、個別の住宅ローンを分析対象として、住宅ローンの生存確率を表現する方法を考える。なお、ローン･プールに代表的債務者が想定できるときには、その住宅ローンの生存確率とローン･プールの生存率を区別せずに$S(t)$で表す。

MBS の価格評価では、住宅ローンの生存確率を何らかのモデルで表現することが必要になる。このモデルの候補として、ハザード･モデルの枠組みは、期限前償還率を表現する手段を提供する。ハザード･モデルは、臨床試験での疾患の再発や死亡あるいは機械の故障率を分析するモデルとして、生存時間解析や信頼性工学の分野で発展してきた。また金融工学の分野では、住宅ローンや定期預金のプリペイメント･モデルに用いられるほか、信用リスクの研究では、企業のデフォルト過程を表現するモデルとして活用されている。

本節では、まずハザード･モデルの基本的な性質と期限前償還率との関係を説明する。プリペイメント･モデルの表現手法としては、ローン債務者の期限前償還要因となる説明変数から統計モデルによって期限前償還率を表現しようとする「統計的アプローチ」と、ローン債務者の期限前償還行動の構造を記述することによって期限前償還率を表現しようとする「構造的アプローチ」の 2 つの代表的な考え方がある。後半では、ハザード･モデルで記述される「統計的アプローチ」と「構造的アプローチ」の具体的なプリペイメント･モデルを説明する。

（1） ハザード･モデルの概要

住宅ローンが期限前償還される時点を確率変数τとし、時点$t(\geq 0)$から時点$t+\Delta t$の間に期限前償還される確率を$f(t)\Delta t = \Pr(t < \tau \leq t+\Delta t)$とする。このとき、累積期限前償還確率と生存確率は、それぞれ以下のようになる。

$$F(t) = \Pr(\tau \leq t) = \int_0^t f(s)\,ds, \tag{4-1}$$

$$S(t) = \Pr(\tau > t) = \int_t^\infty f(s)\,ds. \tag{4-2}$$

ハザード率は、次式で定義される。

$$h(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr(t < \tau \leq t+\Delta t \mid \tau > t)}{\Delta t}. \tag{4-3}$$

つまり、ハザード率は、ある時点で存在するローンが次の瞬間に期限前償還される確率を表現している。ハザード率と生存確率には

$$h(t) = -\frac{d}{dt}\ln S(t), \tag{4-4}$$

という関係が成立する。したがって、累積ハザード率を

$$H(t) \equiv \int_0^t h(s)\,ds, \tag{4-5}$$

とすれば、生存確率は

$$S(t) = \exp\{-H(t)\}, \tag{4-6}$$

で与えられる。(4-6)式を十分に小さい時間間隔Δtで離散化すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} S(t_i) &\approx \exp\left\{-\sum_{j=0}^{i} h(t_j)\Delta t\right\} \\ &= \prod_{j=0}^{i} \exp\{-h(t_j)\Delta t\} \\ &\approx \prod_{j=0}^{i} \{1 - h(t_j)\Delta t\}, \end{aligned} \tag{4-7}$$

つまり、ハザード率は単位時間当たりの$SMM(t_i)$の極限値である。

（２） 統計的アプローチによる プリペイメント･モデル

統計的アプローチは、ローン債務者の期限前償還要因となる説明変数（共変量）から統計モデルにより期限前償還率を推定する手法である。統計的アプローチでは、期限前償還行動自体の記述には立ち入らず、期限前償還のヒストリカル･データから共変量となる変数を選択して、統計的な特徴を抽出することでモデルを構築する。実務では、対象となるローン･プールの特性や分析者の主観等により、多様なタイプの統計モデルが用いられているが、本節では、先行研究の事例が多い比例ハザード･モデルを解説する。

$\vec{z}(t)$を時点tでの共変量行ベクトル、$\vec{\omega}$をそれに対応するパラメータ列ベクトルとする。比例ハザード･モデルのハザード関数$h(t)$は、次式で定義される。

$$h(t,\vec{z}(t)) = \bar{h}(t)\exp\{\vec{z}(t)\vec{\omega}\}. \tag{4-8}$$

ここで、$\bar{h}(t)$は共変量に依存しない時間tの関数で、ベースライン･ハザード関数と呼ばれている。比例ハザード･モデルはベースライン･ハザード関数とパラメトリックな指数関数の積からなり、ベースライン･ハザード関数がパラメトリックなものをパラメトリック比例ハザード･モデル、ノンパラメトリックなものをセミパラメトリック比例ハザード･モデルという[20]。また Jegadeesh and Ju[2000]は、(4-8)式の指数関数部分もノンパラメトリック関数としたノンパラメトリック･ハザード･モデルを提案している。

以下では、代表的な期限前償還要因として、経年効果、金利インセンティブ効果、バーンアウト効果の 3 つを取り上げ[21]、これらをパラメトリック比例ハザード･モデルに取り込む具体例を説明する。

イ． 経年効果

経年効果とは、住宅ローンの契約経過期間（loan age）の進行によって期限前償還利率が変化する現象をいう。そこで、時間のみの関数であるベースライン･

[20] パラメトリック比例ハザード･モデルによる本邦住宅ローンの期限前償還に関する研究には Sugimura[2002]が、セミパラメトリック比例ハザード･モデルによる研究には一條･森平[2000]がある。

[21] 一條･森平[2000]の本邦住宅ローンの実証研究では、住宅ローンの期限前償還要因として、「適用金利と市場金利の比」や「残存期間」のほか、「債務者の職業」や「過去の一部繰上返済回数」等が高い説明力を有している、と指摘されている。

ハザード関数によって経年効果を表現する。一般に、期限前償還率は、ローン契約当初は低く、時間を経るに従って徐々に上昇した後に、ある期間からは一定の範囲内に落ち着くといわれている。

経年効果を表現するベースライン・ハザード関数の例として、Schwartz and Torous[1989]や Sugimura[2002]が実証分析に用いた 3 つのモデルを挙げる。

ワイブル分布：
$$\bar{h}(t) = \lambda\gamma(\lambda t)^{\gamma-1}, \tag{4-9}$$

対数ロジスティック分布：
$$\bar{h}(t) = \frac{\lambda\gamma(\lambda t)^{\gamma-1}}{1+(\lambda t)^{\gamma}}, \tag{4-10}$$

対数正規分布：
$$\bar{h}(t) = \frac{\phi\left(\dfrac{\lambda - \ln t}{\gamma}\right)}{\gamma t \Phi\left(\dfrac{\lambda - \ln t}{\gamma}\right)}. \tag{4-11}$$

ここで、λとγはパラメータ、$\phi(x)$は標準正規分布の密度関数、$\Phi(x)$はその分布関数である。

ロ． 金利インセンティブ効果

金利インセンティブ効果とは、市場金利が低下すると有利なローンに借り替えようとして期限前償還率が高くなり、市場金利が上昇するとその率が低くなる現象をいう。金利インセンティブ効果の共変量$z_1(t)$は、現在契約している住宅ローン金利と、ローン債務者が借換えの指標にすると考えられる適当な参照金利で表現される。

住宅ローンの現契約利率をc、時点tの参照金利を$R(t)$とすると、金利インセンティブ効果による期限前償還を説明する共変量としては

金利差：
$$z_1(t) = c - R(t), \tag{4-12}$$

金利比：
$$z_1(t) = c / R(t), \tag{4-13}$$

等が考えられる。金利が低下すると期限前償還率が高くなることから、この共変量のパラメータω_1は通常は正の値となる。参照金利$R(t)$には短期金利や長期金利、もしくはそれらのヒストリカル・データの平均値等のうち、期限前償還率の説明力が高いものが選ばれる。なお、過去の金利の平均値等を参照金利とす

るときには、経路依存型商品として MBS 価格を評価しなければならない。

ハ． バーンアウト効果

バーンアウト効果とは、当初の金利低下局面では期限前償還率が高い一方で、それ以降の金利低下局面では期限前償還率が相対的に低い現象を指す。

Schwartz and Torous[1989]は、バーンアウト効果の共変量 $z_2(t)$ として

$$z_2(t) = \ln\left(\frac{AO^*(t)}{AO(t)}\right), \tag{4-14}$$

を採用した。ここで $AO^*(t)$ は時点 t でのローン･プールの残高、 $AO(t)$ は期限前償還がないと仮定したときのローン･プールの残高である。バーンアウトはローン･プールの残高の減少によって期限前償還率が低下する現象であり、共変量である(4-14)式は負の値をとるので、共変量のパラメータ ω_2 は正の値となることが期待される。 $AO^*(t)$ は過去の返済履歴に依存した関数となるので、(4-14)式は経路依存型の共変量となる。

（３） 構造的アプローチによる プリペイメント･モデル

McConnell and Singh[1994] や Stanton[1995]等は、経済価値だけでなく、経済価値では多少不利であっても気にしないといったローン債務者の心理的要因等を含めた借換えコストの概念を導入し、総合的な判断の下で、債務者は合理的な期限前償還を行うとするプリペイメント･モデルを提案した。このアプローチは期限前償還行動の構造を記述することから、構造的アプローチと呼ばれている。ここでは、McConnell and Singh[1994]による各種効果の扱いを説明する。

イ． 金利インセンティブ効果 、 経年効果

債務者 η のローンの負債価値を時点 t と金利 $r(t)$ の関数 $D^\eta(t, r(t))$ で表す。債務者 η のローンの残存元本額を $F^\eta(t)$、心理的要因等も含めた総合的な借換えコストを RF^η とすると、債務者 η が合理的な期限前償還を行う状況は、ローン価値が借換えコストを加味した残存元本額を上回る場合、すなわち

$$D^\eta(t, r(t)) \geq (1 + RF^\eta) F^\eta(t), \tag{4-15}$$

のときであると仮定する。ここで、(4-15)式の等号が成り立つような金利を$\tilde{r}(t)$と表す。期限前償還を表現するハザード率は、金利$r(t)$の水準にかかわらず経年効果によって変化する$\lambda(t)$と、金利$r(t)$が$\tilde{r}(t)$以下となった場合の期限前償還率の上昇幅ρによって、次式で定義する。

$$h_{\eta}(t)=\begin{cases}\lambda(t)+\rho & \text{if} \quad r(t)\le \tilde{r}(t),\\ \lambda(t) & \text{if} \quad r(t)>\tilde{r}(t).\end{cases} \tag{4-16}$$

つまり、このアプローチでは、期限前償還が合理的である状況と合理的でない状況を区別して、前者でρだけ期限前償還率が高くなる一方、後者でも$\lambda(t)$に相当する期限前償還が発生する。

その一方で、統計的アプローチによる金利インセンティブ効果の例（(4-12)、(4-13)式）では、債務者にとって期限前償還が合理的であるか否かの構造は明示的に記述されず、金利の低下とともに連続的に期限前償還率が上昇するとして、ローン債務者の期限前償還行動を表現している。

ロ．バーンアウト効果

構造的アプローチでは、バーンアウト効果を裏付資産の債務者の返済感応度で説明することが多い。MBS の裏付資産を構成するローン･プールには、金利インセンティブ効果による返済感応度が高い債務者と低い債務者が混在しており、返済感応度の高い債務者による期限前償還が進んだ後には、返済感応度の低い債務者の割合が増すと考える。その結果、プール全体の金利インセンティブ効果に対する返済が鈍化し、バーンアウト効果が生じると考える。

例えば、ローン･プールがそれぞれ同じ借換えインセンティブを持つ債務者の集合で$\hat{N}$個のサブ･プールに分割されるとすると、サブ･プール毎に異なる生存率$S_{\hat{n}}(t)$（$\hat{n}=1,2,\cdots,\hat{N}$）が決まる。ここで、ローン･プールでのサブ･プール$\hat{n}$の分割比率を$\pi_{\hat{n}}$とすると、ローン･プールの生存率$S(t)$は、次式で表される。

$$S(t)=\sum_{\hat{n}=1}^{\hat{N}}\pi_{\hat{n}}S_{\hat{n}}(t),\ \text{ただし、}\sum_{\hat{n}=1}^{\hat{N}}\pi_{\hat{n}}=1. \tag{4-17}$$

(4-17)式によると、異なった借換えインセンティブを持つサブ･プールに分割することで、期限前償還の進行とともに、ローン･プールでの、返済感応度の高いサブ･プールの割合が低下し、返済感応度の低いサブ･プールの割合が増す。こ

れは、バーンアウト効果を明示的に表現していることになる。この手法では、予めローン･プール を分割して、異なる返済感応度を持ったハザード･モデルを与えるだけで、バーンアウト効果を記述することができる。

５． MBS の数値計算法による評価

期限前償還行動の詳細な分析によって、推定精度の高いプリペイメント･モデルを構築しようとすると、モデルは一般的に複雑になる傾向がある。複雑なプリペイメント･モデルを MBS の価格評価に組み込むと、解析的な価格公式を導くことは難しくなり、数値解を求めることが必要になる。

本節では、具体的な数値解法として、先行研究で提案されている「モンテカルロ法」、「偏微分方程式の有限差分法」、「格子展開法」の 3 つによる MBS 価格の評価手法を説明する。そのうえで、新たに、「フォワード中立化法を適用した格子展開法」による評価手法を提案する。この新たな手法は、MBS に加え、その派生商品である IO と PO の価格も算出することができるという利点を持つ。

以降では、外生的に与えられる確率変数をスポットレート $r(t)$ のみとして、プリペイメント･モデルとなるハザード率 $h(t)$ に以下の仮定を置く。

仮定 5-1

プリペイメント･モデルは、次式で与えられるとする。

$$h(t) = h(t, r(t)), \quad h(0) \geq 0.$$

スポットレート過程 $\{r(t), 0 \leq t \leq T\}$ は、次の確率微分方程式に従うとする。

$$dr(t) = \mu(r(t), t)\, dt + \sigma(r(t), t)\, dW(t). \tag{5-1}$$

ここで、$\mu(r(t), t)$ と $\sigma(r(t), t)$ はスポットレート $r(t)$ と時間 t に依存する関数、$W(t)$ はリスク中立確率の下での標準ブラウン運動とする。

このとき、離散元利金支払モデルでの MBS 価格 V は

$$V = E\left[\sum_{i=1}^{mT} \exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)\, ds\right\} CF(t_i)\right], \tag{5-2}$$

となり、連続元利金支払モデルでは

$$V = E\left[\int_0^T \exp\left\{-\int_0^t r(s)\,ds\right\} dCF(t)\right], \tag{5-3}$$

で与えられる。上式が MBS 価格の基本的な評価式となる。ここで(5-2)、(5-3)式の $E[\cdot]$ は、リスク中立確率下での期待値演算子である。

（1） モンテカルロ法による評価方法

MBS の最も単純な価格評価方法の 1 つは、モンテカルロ法によるものである。これは、(5-2)式の期待値演算子の中を、(3-14)式を用いて

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{mT}\{M(t_{i-1})+I(t_i)\}\exp\left\{-\sum_{j=0}^{i-1} r(t_j)\Delta t\right\}S(t_{i-1})\\&-\sum_{i=1}^{mT}M(t_i)\exp\left\{-\sum_{j=0}^{i-1} r(t_j)\Delta t\right\}S(t_i),\end{aligned} \tag{5-4}$$

と離散化させ、乱数により多数の金利パスを生成し、試行結果の平均値をとるという方法である。

この方法の利点としては以下が挙げられる。まず、経済指標や債務者の属性等[22]、金利以外の確率的な要素をプリペイメント・モデルに取り組むことができる。また、プリペイメント・モデルを経路依存型に拡張可能である点も有用である。例えば、金利インセンティブ効果の共変量で、参照金利を過去の金利履歴とすることや、バーンアウト効果を経路依存型共変量で表現することができる。しかし、モンテカルロ法は、一般に計算負荷が重く、発生させる乱数の系列に解が依存するという欠点がある。

（2） 偏微分方程式の導出による有限差分法を用いる評価方法

Schwartz and Torous[1989]、McConnell and Singh[1994]、Stanton[1995]等は、MBS 価格が満たす偏微分方程式を導いており、この偏微分方程式の解を数値計算により求める評価手法がある。ここでは、スポットレート・モデル（(5-1)式）が CIR（コックス=インガソル=ロス）モデル（Cox, Ingersoll and Ross[1985]）

---

[22] 例えば、失業率、不動産価格、債務者の所得、家族構成の変化等。

$$dr(t) = a(\bar{r} - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad r(t) \geq 0, \tag{5-5}$$

で与えられるとして、連続元利金支払モデルでの MBS 価格の偏微分方程式の導出過程を説明する。

時点tの MBS 価格を$V(t)$として、以下の確率過程$L(t)$を考える。

$$\begin{aligned} L(t) &= \exp\left\{-\int_0^t r(u)du\right\}V(t) + \int_0^t \exp\left\{-\int_0^s r(u)du\right\}CF(s)ds \\ &= \exp\left\{-\int_0^t r(u)du\right\}V(t) + \int_0^t \exp\left\{-\int_0^s r(u)du\right\}\{\tilde{A}S(s) + M(s)h(s)S(s)\}ds. \end{aligned} \tag{5-6}$$

確率過程$L(t)$は、MBS 価格$V(t)$と時点 0 から時点tまでに発生するキャッシュフロー$CF(s)$を割引いたものである。無裁定条件により、(5-6)式で定義された確率過程$L(t)$がリスク中立確率の下でマルチンゲールになる。

ここで、MBS 価格$V(t)$は金利r、住宅ローン･プールの生存率S、時間tの 3 変数の滑らかな関数$V(t) \equiv V(r, S, t)$と仮定する。住宅ローンの生存率$S(t)$が

$$dS(t) = -h(t)S(t)dt, \quad t \geq 0, \tag{5-7}$$

となることに注意して、MBS の価格$V(r, S, t)$に伊藤の補題を適用すると

$$dV(t) = \tilde{\mu}(r, S, t)dt + \tilde{\sigma}(r, S, t)dW(t), \tag{5-8}$$

となる。ここで、次の関係がある。

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= a(\bar{r} - r(t))\frac{\partial V}{\partial r} - h(t)S(t)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r(t)\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}, \\ \tilde{\sigma} &= \sigma\sqrt{r(t)}\frac{\partial V}{\partial r}. \end{aligned} \tag{5-9}$$

さらに、

$$Z(t) \equiv \exp\left\{-\int_0^t r(u)du\right\}, \quad t \geq 0, \tag{5-10}$$

とすると、

$$dZ(t) = -r(t)Z(t)dt, \tag{5-11}$$

となるので、(5-8)、(5-11)式を用いると次式が得られる[23]。

$$
\begin{aligned}
dL(t) &= V(t)dZ(t) + Z(t)dV(t) + d\langle Z,V\rangle(t) + Z(t)\{\tilde{A}S(t) + M(t)h(t)S(t)\}dt \\
&= Z(t)\left(\begin{aligned} & -r(t)V(t) + a(\bar{r} - r(t))\frac{\partial V}{\partial r} - h(t)S(t)\frac{\partial V}{\partial S} \\ & +\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r(t)\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \tilde{A}S(t) + M(t)h(t)S(t) \end{aligned}\right)dt \\
&\quad + Z(t)\sigma\sqrt{r(t)}\frac{\partial V}{\partial r}dW(t).
\end{aligned}
\tag{5-12}
$$

$L(t)$がマルチンゲールであることから、(5-12)式のドリフト項は 0 でなければならないので、

$$
\begin{aligned}
& -r(t)V(t) + a(\bar{r} - r(t))\frac{\partial V}{\partial r} - h(t)S(t)\frac{\partial V}{\partial S} \\
& +\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r(t)\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \tilde{A}S(t) + M(t)h(t)S(t) = 0,
\end{aligned}
\tag{5-13}
$$

が成り立ち、MBS 価格の満たす偏微分方程式（(5-13)式）を得る。(5-13)式の初期条件は$V(T) = 0$である。この偏微分方程式から、数値計算により解を求めることができる。具体的には、(5-13)式を差分方程式に変換して、有限差分法により数値解を求めればよい。

つまり、MBS 価格が従う偏微分方程式を定式化することができれば、有限差分法により MBS の価格を評価することができる訳である。ただし、有限差分法による評価では、差分方程式による近似誤差が生じるという欠点がある。

（３） 期限前償還オプションの 格子展開を用いた評価方法

青沼･木島[1998]は、格子展開によるアメリカン･オプションのプレミアム評価に類似した手法で定期預金の期限前解約オプション価値を評価した。これと同様の手法で、住宅ローンの期限前償還オプションも評価可能である。

金利格子はスポットレート･モデル（(5-1)式）に対して、時間の離散間隔を$\Delta t \equiv t_i - t_{i-1} = 1/m$、満期を$N\Delta t \equiv T$として構成し、以下のように表記する。

---

[23] (5-12)式の$\langle Z,V\rangle$は、ZとVの 2 次共変分（quadratic covariation）である。2 次共変分については、例えば Musiela and Rutkowski[1997]の Appendices B を参照。

・ スポットレートの実現値を小さい順に並べ、時点t_nで第k番目のノードを(n,k)で表し、この状態を時点t_nで状態kにあると表現する。

・ (n,k)上のスポットレートの実現値を$r(n,k)$、(n,k)から$(n+1,l)$への推移確率を$p(n;k,l)$で表し、時点t_nでの状態集合をJ_nで表す。

住宅ローンの期限前償還は、債務者によるコール･オプションの行使であり、期限前償還の権利は、住宅ローンの契約期間中にいつでも行使できる一種のアメリカン･コール･オプションと考えることができる。このことから、期限前償還の権利を期限前償還オプションと呼ぶことがある。通常のアメリカン･コール･オプションは、各時点のオプション･プレミアムと権利行使したときの価値を比較して、合理的に権利行使がなされるとして評価される。しかし、住宅ローンの債務者は、必ずしも合理的に期限前償還オプションを行使する訳ではないことが実証されている[24]。そこで、期限前償還オプションの評価では、推定されたプリペイメント･モデルに従ってオプションが行使されると考える。

まず、各時点$i\Delta t \equiv t_i$で元利均等返済額Aを支払う満期$N\Delta t \equiv T$の元利均等償還債を考える。時点$n\Delta t$で状態kにあるときの元利均等償還債の価格を$A(n,k)$、時点$n\Delta t$で状態kにあるときの満期$i\Delta t$の割引債価格を$v(n,k;i)$とする[25]。元利均等償還債の価格は、各時点で発生するキャッシュフローAに、その発生時点を満期とする割引債価格を乗じることで、以下で与えられる。

$$A(n,k) = A\sum_{i=n+1}^{N} v(n,k;i). \tag{5-14}$$

次に、元利均等償還債がプリペイメント･モデルに従って期限前償還されると

---

[24] 例えば、Schwartz and Torous[1989]や一條･森平[2001]等を参照。

[25] ノード(n,k)上での満期$N\Delta t$の割引債価格は

$$\begin{aligned} v(n,k;N) &= E\left[\left.\exp\left\{-\sum_{j=n}^{N-1} r(t_j)\Delta t\right\}\right| r(t_n)=r(n,k)\right] \\ &= e^{-r(n,k)\Delta t} E\left[\left.\exp\left\{-\sum_{j=n+1}^{N-1} r(t_j)\Delta t\right\}\right| r(t_n)=r(n,k)\right] \\ &= e^{-r(n,k)\Delta t} \sum_{l\in J_{n+1}} p(n;k,l)v(n+1,l;N), \end{aligned}$$

で与えられ、満期ではすべての状態kで$v(N,k;N)=1$となる。

する。任意のノード(n,k)で、この債券が期限前償還される確率は$h(n,k)\Delta t$、期限前償還されない確率は$1-h(n,k)\Delta t$となるので、ノード(n,k)での期限前償還オプションのプレミアム$C(n,k)$は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} C(n,k) &= h(n,k)\Delta t\, f(n,k) \\ &\quad + e^{-r(n,k)\Delta t}(1-h(n,k)\Delta t)\sum_{l\in J_{n+1}} p(n;k,l)C(n+1,l). \end{aligned} \tag{5-15}$$

ここで、$f(n,k)$はノード(n,k)で期限前償還したときのペイオフ関数

$$f(n,k) = A(n,k) - M(t_n), \tag{5-16}$$

である。満期時点のプレミアム$C(N,k)=0$を初期条件として、(5-15)式を後ろ向きに帰納的に解くことにより、期限前償還オプションのプレミアム$C(0,0)$が求まる。したがって、住宅ローンの価格は次式で求められる。

$$V = A(0,0) - C(0,0). \tag{5-17}$$

仮にプリペイメント･モデルが

$$h(n,k) = \begin{cases} 1/\Delta t & \text{if} \quad f(n,k) \geq e^{-r(n,k)\Delta t}\sum_{l\in J_{n+1}} p(n;k,l)C(n+1,l), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{5-18}$$

で定義されているときには、(5-15)式は

$$C(n,k) = \max\left\{ f(n,k),\, e^{-r(n,k)\Delta t}\sum_{l\in J_{n+1}} p(n;k,l)C(n+1,l) \right\}, \tag{5-19}$$

となり、通常のアメリカン･コール･オプションの評価式に一致する。

この評価手法では、期限前償還のオプション性を直接的に評価可能であるという利点があるが、スポットレートの格子展開による離散近似に伴い、近似誤差が生じるという欠点がある。

（4） フォワード中立化法による格子展開を用いた評価方法

柴崎･中村[2001]は、フォワード中立化法を適用することで、MBS の価格評価式の期待生存率に関する偏微分方程式を導き、有限差分法で数値解を与える手法を提案している。この手法を参考にして、本稿では、フォワード中立化法を適用した格子展開による数値解法を与える。

フォワード中立化法は、先渡価格をマルチンゲールにする確率測度を利用して価格評価を行う方法である[26]。同手法では、ある証券の現時点での価格 $X(0)$ が

$$X(0)=E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)\,ds\right\}X(t_i)\right]=v(0,t_i)E^{t_i}\left[X(t_i)\right], \tag{5-20}$$

となる。ここで、$v(0,t_i)$ は時点 0 における満期 t_i の割引債価格、$E^{t_i}[\cdot]$ はフォワード中立確率 $\Pr^{t_i}$ の下での期待値演算子である。上式のポイントは、割引債価格が期待値演算子の外に出ているため、その後の計算が容易であることである。

MBS の価格評価式（(5-2)式）にフォワード中立化法を用いて、(3-14)式を代入すると、

$$V=\sum_{i=1}^{mT}\{M(t_{i-1})+I(t_i)\}v(0,t_i)E^{t_i}\left[S(t_{i-1})\right]-\sum_{i=1}^{mT}M(t_i)v(0,t_i)E^{t_i}\left[S(t_i)\right], \tag{5-21}$$

となり、フォワード中立化法の適用後では、割引率と生存率の同時分布を考える必要がない。つまり、割引債価格 $v(0,t_i)$ が既知ならば、$E^{t_i}\left[S(t_i)\right]$ と $E^{t_i}\left[S(t_{i-1})\right]$ を計算することができれば MBS の価格が得られる。

さらにフォワード中立化法では、IO と PO の価格評価式が

$$IO=E\left[\sum_{i=1}^{mT}\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)\,ds\right\}I^*(t_i)\right]=\sum_{i=1}^{mT}I(t_i)v(0,t_i)E^{t_i}\left[S(t_{i-1})\right], \tag{5-22}$$

$$\begin{aligned}PO&=E\left[\sum_{i=1}^{mT}\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)\,ds\right\}\{P^*(t_i)+PR(t_i)\}\right]\\&=\sum_{i=1}^{mT}M(t_{i-1})v(0,t_i)E^{t_i}\left[S(t_{i-1})\right]+\sum_{i=1}^{mT}M(t_i)v(0,t_i)E^{t_i}\left[S(t_i)\right],\end{aligned} \tag{5-23}$$

として与えられるので、期待生存率を求めることで、MBS の価格と同時に IO と PO の価格も得られる。

イ．フォワード中立確率の下 での金利格子

ここでは、スポットレート・モデル（(5-1)式）が、以下のハル=ホワイト・モデル（Hull and White[1990]）で与えられるとする。

---

26 フォワード中立化法に関しては補論 A を参照。

$$dr(t) = (\phi(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t), \quad r(t) \geq 0. \tag{5-24}$$

フォワード中立化法[27]を用いるために、(5-24)式をフォワード中立確率 $\Pr^{t_i}$ に測度変換すると、次式を得る。

$$dr(t) = \{\phi(t) + b_{t_i}(t)\sigma^2 - ar(t)\}dt + \sigma dW^{t_i}(t), \quad 0 \leq t \leq t_i. \tag{5-25}$$

ただし、$W^{t_i}(t)$ はフォワード中立確率 $\Pr^{t_i}$ の下での標準ブラウン運動で、

$$b_{t_i}(t) = -\frac{1 - e^{-a(t_i - t)}}{a}, \tag{5-26}$$

とする。(5-25)式のドリフト項は複雑な形をしているため、

$$dX(t) = -aX(t)dt + \sigma dW^{t_i}(t), \quad X(0) = 0, \tag{5-27}$$

という別の解過程 $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ を考え、(5-25)式のスポットレートを解過程 $X(t)$ と確定的な関数（シフト関数と呼ぶ）$\theta^{t_i}(t)$ の和

$$r(t) = X(t) + \theta^{t_i}(t), \tag{5-28}$$

で表現する。このとき、

$$dr(t) = \left\{\theta^{t_i\prime}(t) + a\theta^{t_i}(t) - ar(t)\right\}dt + \sigma dW^{t_i}(t), \tag{5-29}$$

となることから、(5-29)式と(5-25)式を比較することで

$$\theta^{t_i\prime}(t) + a\theta^{t_i}(t) = \phi(t) + b_{t_i}(t)\sigma^2, \quad \theta^{t_i}(0) = r(0), \tag{5-30}$$

となり、$\theta^{t_i}(t)$ に関する微分方程式（(5-30)式）を解いて

$$\theta^{t_i}(t) = e^{-at}\left(\int_0^t e^{as}(\phi(s) + b_{t_i}(s)\sigma^2)ds + r(0)\right), \tag{5-31}$$

でシフト関数を表現することができる。

(5-25)式に基づいた格子上のスポットレートの実現値 $r(n,k)$ は、(5-27)式の解過程に基づく格子を生成し、その実現値 $x(n,k)$ と(5-31)式で表されるシフト関数の和として、次式で与えられる。

$$r(n,k) = x(n,k) + \theta^{t_i}(t_n). \tag{5-32}$$

[27] フォワード中立確率の下でのスポットレート・モデルの変換方法は、補論 A を参照。

なお、フォワード中立化法を適用する前のスポットレート過程（(5-24)式）のシフト関数を$\theta(t)$とする[28]と、(5-31)式は

$$\theta^{t_i}(t)=\theta(t)+\xi^{t_i}(t), \tag{5-33}$$

と書くことができる。ただし、以下の関係がある。

$$\begin{aligned}\xi^{t_i}(t)&=e^{-at}\left(\int_0^t e^{as}b_{t_i}(s)\sigma^2 ds\right)\\&=\frac{\sigma^2}{a^2}\left(\frac{e^{-a(t_i-t)}-e^{-a(t_i+t)}}{2}+e^{-at}-1\right).\end{aligned} \tag{5-34}$$

したがって、シフト関数$\theta^{t_i}(t)$は$\theta(t)$を$\xi^{t_i}(t)$だけ移動させたものである。

ロ． フォワード中立確率の下 での期待生存率の計算

MBS 価格の算出は、フォワード中立化法により変換した金利格子上で、生存率の期待値を求める問題へと帰着された。ここで、各ノード(n,k)で前時点からの推移確率を考慮した生存率を$Q(n,k)$と置くと、次時点のノード$(n+1,l)$では

$$Q(n+1,l)=\sum_{k\in J_n}p(n;k,l)\exp\{-h(n+1,l)\Delta t\}Q(n,k), \tag{5-35}$$

となる。ただし$Q(0,0)=1$である。つまり$Q(n+1,l)$は、ノード(n,k)から$(n+1,l)$への推移確率とそこへ到達したときの生存率を乗じ、その状態に関して和をとったものとして、(5-35)式により定義される。このとき、(5-35)式は前向き帰納法で解けることから、期待生存率は、次式で計算することができる。

$$\begin{aligned}E^{t_i}\left[S(t_i)\right]&=\sum_{l\in J_i}Q(i,l),\\E^{t_i}\left[S(t_{i-1})\right]&=\sum_{k\in J_{i-1}}Q(i-1,k).\end{aligned} \tag{5-36}$$

この評価手法では、MBS の価格とともに IO と PO の価格も同時に評価できるという利点がある。ただし、本節（３）の手法と同様、スポットレートの格子展開による近似誤差が生じるという欠点がある。

[28] 解過程とシフト関数による一般的な金利格子の生成方法は、補論 B を参照。

（5） 数値計算法による評価手 法のまとめ

ここで、本節で取り上げたMBS価格の4つの評価手法の概要と特徴を図表5-1にまとめる。

図表 5-1：MBS **の数値計算法による評価手法の概要と特徴**

MBSの数値計算法	長 所	短 所
(1)モンテカルロ法	複雑なプリペイメント･モデルを表現可能	計算負荷が重く、発生させる乱数の系列に解が依存
(2)偏微分方程式の導出による有限差分法	MBS 価格が従う偏微分方程式が得られれば、評価可能	差分方程式による近似誤差が生じる
(3)期限前償還オプションの格子展開	期限前償還のオプション性を直接的に評価	スポットレートの格子展開による近似誤差が生じる
(4)フォワード中立化法による格子展開	MBS価格とともにIOとPOの価格も同時に評価	スポットレートの格子展開による近似誤差が生じる

６． MBS の解析的アプロー チによる評価

住宅ローン債務者の期限前償還行動を詳細に表現しようとすると、プリペイメント･モデルは複雑になり、MBSの価格評価は数値計算に頼らざるを得ない。しかし、住宅ローンは10年超の契約となることが多いため、MBSは超長期の債券となることが多いうえ、各時点で期限前償還率を逐次計算する必要があることから、数値解法による計算負荷は重くなる傾向がある。

その一方で、トレーダーや投資家等の市場参加者にとっては、投資判断を短い時間で行わなければならないケースもあり、可能な限り短時間でMBSの価格を評価することが望ましい。このため、実務では、価格算出の計算負荷軽減のために、簡単な構造のプリペイメント･モデルによって MBS 価格を求めることがある。そこで本節では、簡単な構造のプリペイメント･モデルを仮定することにより、MBSの解析的な価格算出式の導出を試みる。

MBS価格Vの基本となる評価式は、(5-2)式と(3-14)式より

$$
\begin{aligned}
V &= E\left[\sum_{i=1}^{mT}\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)ds\right\}CF(t_i)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{mT}\{M(t_{i-1})+I(t_i)\}E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)ds\right\}S(t_{i-1})\right] \\
&\quad -\sum_{i=1}^{mT}M(t_i)E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)ds\right\}S(t_i)\right],
\end{aligned} \tag{6-1}
$$

となる。残存元本額$M(t_i)$と利息額$I(t_i)$は(3-4)、(3-6)式で与えられているので、(6-1)式の期待値部分

$$
E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)ds\right\}S(t_{i-1})\right], \tag{6-2}
$$

$$
E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)ds\right\}S(t_i)\right], \tag{6-3}
$$

が求まれば、MBS 価格の解析的な評価式が得られたことになる。以下では、簡単な構造のプリペイメント･モデルを仮定して、(6-2)､(6-3)式を求める。

（1） 確定的なプリペイメント・モデルの場合

プリペイメント･モデルが時間の確定的関数で与えられると、(6-2)、(6-3)式は

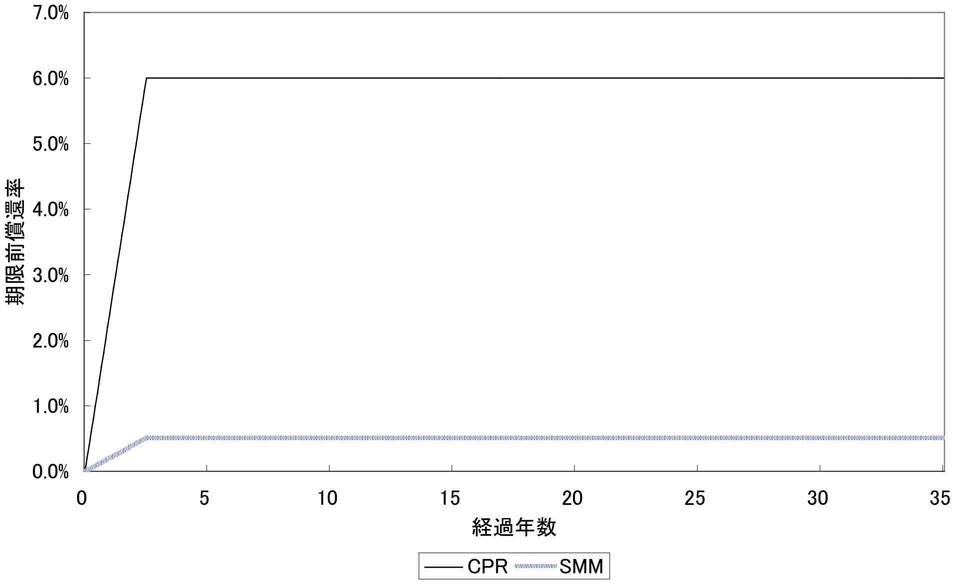
$$
E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)ds\right\}S(t_{i-1})\right] = v(0,t_i)S(t_{i-1}), \tag{6-4}
$$

$$
E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)ds\right\}S(t_i)\right] = v(0,t_i)S(t_i), \tag{6-5}
$$

となる。したがって、割引債価格$v(0,t_i)$と住宅ローンの生存率$S(t_i)$が得られれば、MBS 価格を求めることができる。

例として、プリペイメント･モデルに PSA モデルを採用した場合の生存率$S(t_i)$を考えてみよう。PSA モデルは、米国証券業協会（PSA：Public Securities Association）が期限前償還の統一的尺度として考案したもので、米国 MBS 市場では、プリペイメント･モデルのベンチマークとして広く利用されている。

図表 6-1**：**PSA **モデル**



このモデルでは、年率の期限前償還率$CPR(t_i)$が、契約当初 0%から 30 ヵ月目まで直線的に上昇し、30 ヵ月目以降は 6%で一定になる。つまり PSA モデルは、元利金支払の間隔を 1 ヵ月（時点t_iは契約後iヶ月目）として

$$CPR(t_i) = \begin{cases} 6\% \times \dfrac{i}{30} & \text{if } i \le 30 \\ 6\% & \text{if } i > 30 \end{cases} = 6\% \times \min\left(1, \frac{i}{30}\right), \tag{6-6}$$

で定義されるプリペイメント･モデルである。$SMM(t_i) = 1 - \left(1 - CPR(t_i)\right)^{1/12}$であるので、(3-7)式より住宅ローンの生存率は、次式となる。

$$S(t_i) = \prod_{j=1}^{i} \{1 - SMM(t_j)\} = \prod_{j=1}^{i} \left\{1 - 6\% \times \min\left(1, \frac{j}{30}\right)\right\}^{1/12}. \tag{6-7}$$

確定的なプリペイメント･モデルを仮定すると､MBS の価格が容易に得られるが、MBS のキャッシュフローも時間t_iの確定的関数となり、金利変化に伴うキャッシュフローの増減が表現されない。このため、ネガティブ･コンベキシティやデュレーションの変化等、MBS の価格特性を反映することができない。

（２） 確率変数を含むプリペイ メント･モデルの場合（ケース１）

ここでは、金利インセンティブ効果を考慮するために、スポットレートを変数とするプリペイメント･モデルを考える。このとき、スポットレートが確率的

であるとの仮定の下では、プリペイメント･モデルは確率変数を含む関数となる。この仮定の下では、Nakamura[2001]が提案した MBS 評価へのフォワード中立化法の適用により、MBS 価格の解析解評価は、あるスポットレート･モデルを仮定したときの割引債価格の評価と同値になることを示す。

まず、プリペイメント･モデルがスポットレートの指数関数で与えられるときに、MBS 価格の解析的評価が可能か否かを検討する。

仮定 6-1

プリペイメント･モデルは次式で与えられるとする[29]。

$$h(t) = e^{\lambda(L-r(t))}.$$

ここで、λ と L はパラメータである。スポットレート過程 $\{r(t), 0 \le t \le T\}$ は以下のバシチェック･モデル（Vasicek[1977]）に従うとする。

$$dr(t) = a(\bar{r} - r(t))dt + \sigma dW(t), \quad r(0) \ge 0.$$

ここで、a、$\bar{r}$ および σ は定数、$W(t)$ はリスク中立確率下での標準ブラウン運動とする。

この仮定の下で 5 節（4）と同様にフォワード中立化法を適用すると(6-2)、(6-3)式は、それぞれ以下のようになる。

$$E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)ds\right\} S(t_{i-1})\right] = v(0,t_i)E^{t_i}\left[S(t_{i-1})\right], \tag{6-8}$$

$$E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)ds\right\} S(t_i)\right] = v(0,t_i)E^{t_i}\left[S(t_i)\right]. \tag{6-9}$$

(6-8)、(6-9)式において、割引債価格 $v(0,t_i)$ は解析的に得られるので、MBS の価格評価はフォワード中立確率の下での期待生存率 $E^{t_i}\left[S(t_{i-1})\right]$、$E^{t_i}\left[S(t_i)\right]$ を求める問題に帰着する。

フォワード中立確率 $\Pr^{t_i}$ の下で、スポットレート過程 $\{r(t), 0 \le t \le T\}$ が従う確率微分方程式は

$$dr(t) = a(\xi(t) - r(t))dt + \sigma dW^{t_i}(t), \quad 0 \le t \le t_i\,, \tag{6-10}$$

---

[29] これは、非常に単純なコックス（Cox）の比例ハザード･モデルである。このモデルでは、ハザード率が負の値になることを排除することができる。

となる。ただし、$W^{t_i}(t)$は標準ブラウン運動で

$$\xi(t) = \bar{r} - \frac{\sigma^2}{a^2}\left(1 - e^{-a(t_i - t)}\right), \tag{6-11}$$

とする。ここで仮定 6-1 のプリペイメント・モデルの両辺に対数をとって微分し、(6-10)式を代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} d\ln h(t) &= -\lambda\, dr(t) \\ &= -\lambda a\left(\xi(t) - r(t)\right)dt - \lambda\sigma dW^{t_i}(t) \\ &= -\lambda a\left(\xi(t) - L + \frac{\ln h(t)}{\lambda}\right)dt - \lambda\sigma dW^{t_i}(t) \\ &= a\left(\lambda\left(L - \xi(t)\right) - \ln h(t)\right)dt - \lambda\sigma dW^{t_i}(t). \end{aligned} \tag{6-12}$$

$\alpha(t) \equiv \lambda a\left(L - \xi(t)\right),\ \beta \equiv -\lambda\sigma$ と置くと、(6-12)式は

$$d\ln h(t) = \left(\alpha(t) - a\ln h(t)\right)dt + \beta dW^{t_i}(t), \quad h(0) \geq 0, \tag{6-13}$$

と変形されるが、これはブラック=カラシンスキー・モデル（Black and Karasinski[1991]）の確率微分方程式である。求めるべき期待生存率は

$$\begin{aligned} E^{t_i}\left[S(t_{i-1})\right] &= E^{t_i}\left[\exp\left\{-\int_0^{t_{i-1}} h(s)\,ds\right\}\right], \\ E^{t_i}\left[S(t_i)\right] &= E^{t_i}\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} h(s)\,ds\right\}\right], \end{aligned} \tag{6-14}$$

であるので、(6-13)式による割引債価格を求める問題に等しい。

ところが、ブラック=カラシンスキー・モデルによる割引債価格の解析解は知られておらず[30]、MBS 価格の解析解を得ることはできない。仮定 6-1 の下で期待生存率の解析解を得られないということは、既存研究でよく前提とされる比例ハザード・モデルでは MBS 価格の解析解は得られないということを意味する。

さて、公庫 MBS 市場では、複数の証券会社のプリペイメント予想が、金利の変化幅毎の期限前償還率の予測値として情報ベンダーより提供されている（図表 6-2）。

[30] 例えば、Brigo and Mercurio[2001]の 3 章を参照。

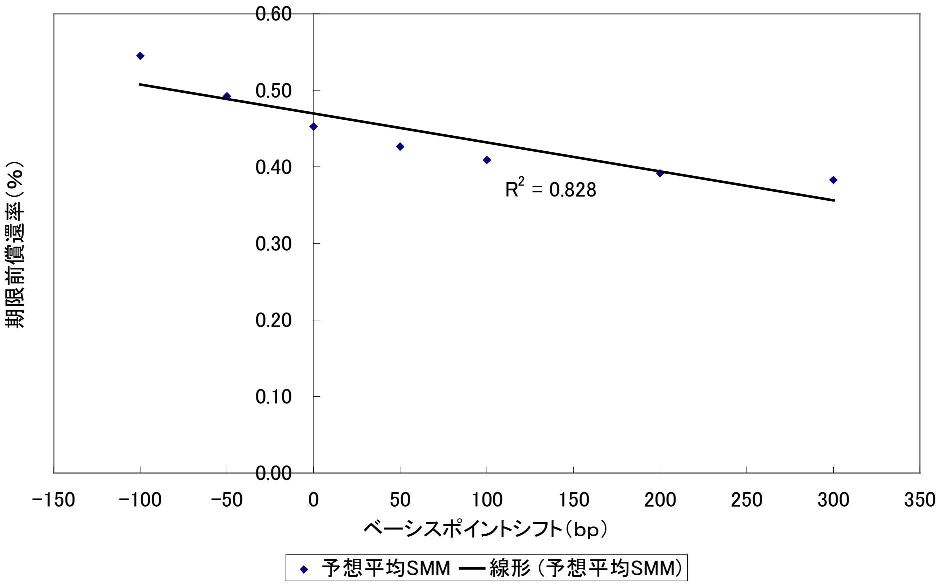
図表 6-2**：公庫** MBS#23　**予想** CPR**（%）基準日：**2004 **年** 10 **年** 6 **日**

証券会社	−300	−200	−100	−50	±0	+50	+100	+200	+300
	-----ベーシスポイントシフト-----								
DAIM	n/a	n/a	7.0	6.4	6.0	5.7	5.4	4.9	4.5
NSHL	17.0	17.0	11.2	8.6	7.0	6.6	6.4	6.1	5.9
MZSR	n/a	n/a	n/a	n/a	4.5	4.3	4.2	4.0	3.9
LHLC	n/a	n/a	n/a	n/a	5.3	4.9	4.5	4.1	3.8
TMIX	n/a	n/a	6.3	5.8	5.3	5.1	4.9	4.7	4.7
UFSC	n/a	n/a	n/a	n/a	4.0	3.6	3.3	2.8	2.5
MSGH	n/a	n/a	6.2	5.6	5.2	5.0	4.8	4.6	4.4
DSLZ	n/a	n/a	6.4	5.7	5.3	5.0	4.8	4.6	4.5
NMGH	9.3	9.0	5.7	4.9	4.6	4.5	4.4	4.4	4.7
平均	13.2	13.0	7.1	6.2	5.2	5.0	4.7	4.5	4.3
中央値	13.2	13.0	6.4	5.8	5.3	5.0	4.8	4.6	4.5

出所：Bloomberg

各社の予想 CPR の中央値を SMM に変換した値のグラフを図表 6-3 に示す。

図表 6-3**：公庫** MBS#23　**予想** SMM**（%）基準日：**2004 **年** 10 **年** 6 **日**



図表 6-3 から、金利の変化と期限前償還率には、線形に近い関係があることがわかる。つまり、本邦の MBS 市場では、金利の変化と期限前償還率の関係は、仮定 6-1 のような指数関数でなくとも、その１次近似である線形関数によって表現し得る可能性がある。そこで、プリペイメント・モデルがスポットレートによる線形関数で与えられるとする。

仮定 6-2

プリペイメント・モデルは、次式で与えられるものとする。

$$h(t) = \lambda\left(L - r(t)\right), \quad h(0) \geq 0.$$

ここで、λ と L はパラメータである。一方、スポットレート過程 $\{r(t), 0 \leq t \leq T\}$

は、以下のバシチェック･モデルに従うとする。

$$dr(t)=a\left(\bar{r}-r(t)\right)dt+\sigma dW(t),\quad r(0)\geq 0.$$

ここで、a、$\bar{r}$、σ は定数、$W(t)$ はリスク中立確率下での標準ブラウン運動とする。

上記と同様に、フォワード中立化法によってスポットレート過程を(6-10)式に変換する。このとき、仮定 6-2 のプリペイメント･モデルの両辺を微分すると

$$\begin{aligned}dh(t)&=-\lambda\, dr(t)\\&=-\lambda a\left(\xi(t)-r(t)\right)dt-\lambda\sigma dW^{t_i}(t)\\&=a\left(\lambda\left(L-\xi(t)\right)-h(t)\right)dt-\lambda\sigma dW^{t_i}(t),\end{aligned}\tag{6-15}$$

となる。(6-15)式は

$$dh(t)=\left(\alpha(t)-ah(t)\right)dt+\beta dW^{t_i}(t),\tag{6-16}$$

と書き直せる。(6-16)式はハル=ホワイト･モデル（Hull and White[1990]）である。したがって、仮定 6-2 の下での $E^{t_i}\left[S(t_i)\right]$、$E^{t_i}\left[S(t_{i-1})\right]$ の評価は、ハル=ホワイト･モデルによる割引債価格を求める問題に等しくなる。

ハル=ホワイト･モデルでの割引債の価格公式[31]を用いて、$E^{\tau}\left[S(t)\right]$ を評価すると、$\zeta(x)\equiv(1-e^{-ax})/a$ と置いて、

$$b_T(t)=-\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}=-\zeta(T-t),\tag{6-17}$$

$$\begin{aligned}a_T(t)&=\int_t^T\alpha(s)b_T(s)ds+\frac{1}{2}\int_t^T\beta^2 b_T^2(s)ds=a\lambda\int_t^T(L-\xi(s))b_T(s)ds+\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\int_t^T b_T^2(s)ds\\&=\lambda\left(\bar{r}-L-\frac{\sigma^2}{a^2}\right)\left((T-t)-\zeta(T-t)\right)+\frac{\lambda\sigma^2 e^{-a(\tau-T)}}{a^2}\left(\zeta(T-t)-\frac{\zeta(2(T-t))}{2}\right)\\&\quad+\frac{\lambda^2\sigma^2}{2a^2}\left((T-t)-2\zeta(T-t)+\frac{\zeta(2(T-t))}{2}\right),\end{aligned}\tag{6-18}$$

としたとき、

---

31 補論 A の(A-4)、(A-14)式を参照。

$$E^{\tau}\left[S(t)\right]=E^{\tau}\left[\exp\left\{-\int_0^t h(s)ds\right\}\right]=\exp\{a_t(0)+b_t(0)h(0)\}$$

$$=\exp\left\{\begin{array}{l}\lambda\left(\bar{r}-L-\dfrac{\sigma^2}{a^2}\right)(t-\zeta(t))+\dfrac{\lambda\sigma^2e^{-a(\tau-t)}}{2a^2}\left(\zeta(t)-\dfrac{\zeta(2t)}{2}\right)\\ +\dfrac{\lambda\sigma^2}{2a^2}\left(t-2\zeta(t)+\dfrac{\zeta(2t)}{2}\right)\zeta(2t)-\zeta(t)\lambda(L-r(0))\end{array}\right\}, \quad (6\text{-}19)$$

$$=\exp\left\{\begin{array}{l}\lambda\left(\bar{r}-L-\dfrac{\sigma^2}{a^2}\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)\right)t+\lambda\left(r(0)-\bar{r}+\dfrac{\sigma^2}{a^2}\left(1-\lambda+e^{-a(\tau-t)}\right)\right)\zeta(t)\\ +\dfrac{\lambda\sigma^2}{2a^2}\left(\dfrac{\lambda}{2}-e^{-a(\tau-t)}\right)\zeta(2t)\end{array}\right\},$$

となる。 (6-19)式より

$$E^{t_i}\left[S(t_i)\right]=\exp\left\{\begin{array}{l}\lambda\left(\bar{r}-L-\dfrac{\sigma^2}{a^2}\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)\right)t_i+\lambda\left(r(0)-\bar{r}+\dfrac{\sigma^2}{a^2}(2-\lambda)\right)\zeta(t_i)\\ +\dfrac{\lambda\sigma^2}{2a^2}\left(\dfrac{\lambda}{2}-1\right)\zeta(2t_i)\end{array}\right\}, \quad (6\text{-}20)$$

$$E^{t_i}\left[S(t_{i-1})\right]=\exp\left\{\begin{array}{l}\lambda\left(\bar{r}-L-\dfrac{\sigma^2}{a^2}\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)\right)t_{i-1}\\ +\lambda\left(r(0)-\bar{r}+\dfrac{\sigma^2}{a^2}\left(1-\lambda+e^{-a(t_i-t_{i-1})}\right)\right)\zeta(t_{i-1})\\ +\dfrac{\lambda\sigma^2}{2a^2}\left(\dfrac{\lambda}{2}-e^{-a(t_i-t_{i-1})}\right)\zeta(2t_{i-1})\end{array}\right\}, \quad (6\text{-}21)$$

となるので、仮定 6-2 の下での MBS 価格の解析解が得られたことになる。

図表 6-3 で見たように、本邦の MBS 市場では、金利と期限前償還率には、線形に近い関係があった。これを踏まえれば、仮定 6-2 の線形関数の仮定で得られた MBS 価格の解析解が活用される可能性は低くないと思われる。ただし、このモデルには、経年効果が織り込まれないという欠点がある。

（3） 確率変数を含むプリペイ メント･モデルの場合（ケース２）

本節（２）の仮定 6-2 のプリペイメント･モデルでは、線形関数で表される金利インセンティブ効果のみを織り込んだ MBS 価格の解析解を得た。以下では、

経年効果と金利インセンティブ効果の和として与えられるプリペイメント･モデルを仮定し、MBS 価格の解析的評価を行う。

なお、ここでの解析的アプローチによる評価手法は、Duffie[1998]や Kijima and Muromachi[1999]等によるバスケット型クレジット商品の評価で見られるアイデアや解法を、MBS の価格評価に応用したものである。

仮定 6-3

プリペイメント･モデルは次式で与えられるものとする。

$$h(t)=\lambda\big(L-r(t)\big)+g(t),\quad h(0)\geq 0.$$

ここで、λ と L はパラメータ、$g(t)$ は経年効果を表現する確率過程とする。

スポットレート過程 $\{r(t),0\leq t\leq T\}$ はバシチェック･モデル

$$dr(t)=a\big(\bar{r}-r(t)\big)dt+\sigma dW_0(t),\quad r(0)\geq 0,$$

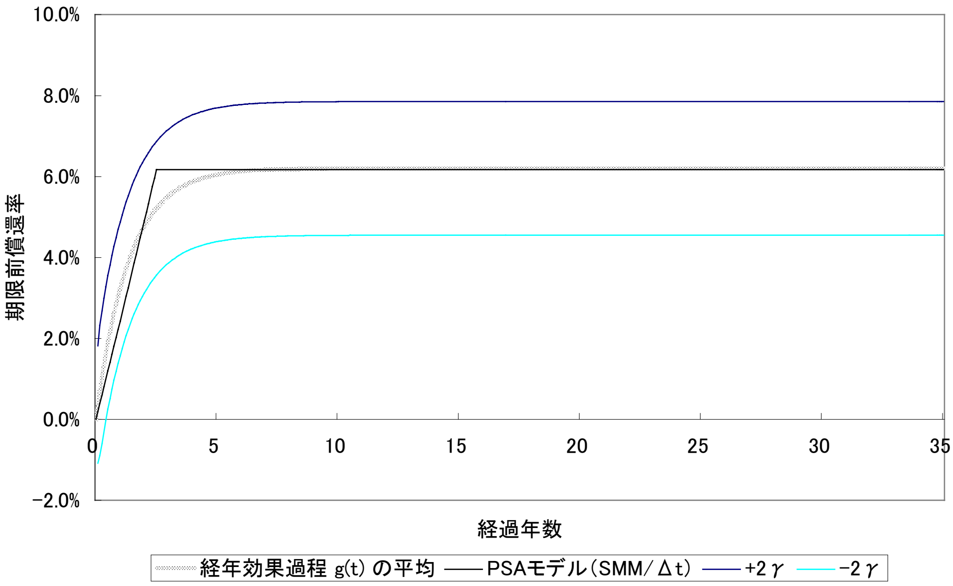
に、経年効果過程 $\{g(t),0\leq t\leq T\}$ は確率微分方程式

$$dg(t)=b\big(\bar{g}-g(t)\big)dt+\gamma dW_1(t),$$

に従うとする。a、$\bar{r}$、σ、b、$\bar{g}$、γ は定数、$W_0(t)$ と $W_1(t)$ は共にリスク中立確率下での標準ブラウン運動であり、$dW_0(t)dW_1(t)=\rho dt$ の関係を有する。

このモデルは、経年効果を確率的に表現している。この過程の例としては、その期待値が PSA モデルで与えられる確率過程（図表 6-4）等が考えられよう。

図表 6-4**：経年効果過程の例**



このとき、(6-2)、(6-3)式は

$$
\begin{aligned}
E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)\,ds\right\}S(t_i)\right] &= E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)\,ds\right\}\exp\left\{-\int_0^{t_i} h(s)\,ds\right\}\right] \\
&= E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i}\big((1-\lambda)r(s)+g(s)+\lambda L\big)ds\right\}\right],
\end{aligned} \tag{6-22}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)ds\right\}S(t_{i-1})\right] &= E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)ds\right\}\exp\left\{-\int_0^{t_{i-1}} h(s)ds\right\}\right] \\
&= E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)ds-\int_0^{t_{i-1}}\big(-\lambda r(s)+g(s)+\lambda L\big)ds\right\}\right],
\end{aligned} \tag{6-23}
$$

となるので、(6-22)、(6-23)式を解析的に評価することができれば MBS 価格の解析解が得られる。

スポットレート過程$\{r(t), t \geq 0\}$は OU（Ornstein=Uhlenbeck）過程に従っているので、

$$
r(t) = \bar{r} + \big(r(0)-\bar{r}\big)e^{-at} + \sigma\int_0^t e^{-a(t-s)}\,dW_0(s), \tag{6-24}
$$

となる。ここで、

$$
H(\tau) \equiv \int_0^\tau r(t)\,dt = \bar{r}\int_0^\tau dt + \big(r(0)-\bar{r}\big)\int_0^\tau e^{-at}\,dt + \sigma\int_0^\tau\int_0^t e^{-a(t-s)}\,dW_0(s)\,dt, \tag{6-25}
$$

とする。(6-25)式の右辺第 3 項は積分の順序交換により

$$
\int_0^\tau\int_0^t e^{-a(t-s)}dW_0(s)dt = \int_0^\tau\int_s^\tau e^{-a(t-s)}dt\,dW_0(s) = \int_0^\tau\left(\frac{1-e^{-a(\tau-s)}}{a}\right)dW_0(s), \tag{6-26}
$$

となるので、$\zeta(x) \equiv (1-e^{-ax})/a$と置けば、

$$
H(\tau) = \bar{r}\tau + \big(r(0)-\bar{r}\big)\zeta(\tau) + \sigma\int_0^\tau \zeta(\tau-s)dW_0(s), \tag{6-27}
$$

となる。(6-27)式より$H(\tau)$は正規分布に従う確率変数であり、その平均と分散は、それぞれ以下のようになる。

$$
\mu_H(\tau) \equiv E\big[H(\tau)\big] = \bar{r}\tau + \big(r(0)-\bar{r}\big)\zeta(\tau), \tag{6-28}
$$

$$\sigma_H^2(\tau) \equiv V[H(\tau)] = \sigma^2 \int_0^\tau \zeta^2(\tau - s)\,ds = \frac{\sigma^2}{a^2}\int_0^\tau \left(1 - e^{-a(\tau - s)}\right)^2 ds$$
$$= \frac{\sigma^2}{a^2}\left(\tau - 2\zeta(\tau) + \frac{1}{2}\zeta(2\tau)\right). \tag{6-29}$$

経年効果過程$\{g(t), t \geq 0\}$も OU 過程に従っているので、

$$g(t) = \bar{g} + \left(g(0) - \bar{g}\right)e^{-bt} + \gamma\int_0^t e^{-b(t-s)}\,dW_1(s), \tag{6-30}$$

となり、上記と同様の議論により、$\vartheta(x) \equiv \left(1 - e^{-bx}\right)/b$と置いて、

$$G(\tau) \equiv \int_0^\tau g(t)\,dt = \bar{g}\tau + \left(g(0) - \bar{g}\right)\vartheta(\tau) + \gamma\int_0^\tau \vartheta(\tau - s)\,dW_1(s), \tag{6-31}$$

となる。(6-31)式より$G(\tau)$は正規分布に従う確率変数であり、その平均と分散は、それぞれ以下のようになる。

$$\mu_G(\tau) \equiv E[G(\tau)] = \bar{g}\tau + \left(g(0) - \bar{g}\right)\vartheta(\tau), \tag{6-32}$$

$$\sigma_G^2(\tau) \equiv V[G(\tau)] = \frac{\gamma^2}{b^2}\left(\tau - 2\vartheta(\tau) + \frac{1}{2}\vartheta(2\tau)\right). \tag{6-33}$$

$H(\tau)$と$G(\tau)$の共分散$\mathrm{cov}\left(H(\tau), G(\tau)\right)$は

$$\mathrm{cov}\left(H(\tau), G(\tau)\right) = \sigma\gamma E\left[\left(\int_0^\tau \zeta(\tau - s)\,dW_0(s)\right)\left(\int_0^\tau \vartheta(\tau - s)\,dW_1(s)\right)\right]$$
$$= \frac{\rho\sigma\gamma}{ab}\int_0^\tau \left(1 - e^{-a(\tau - s)}\right)\left(1 - e^{-b(\tau - s)}\right)ds$$
$$= \frac{\rho\sigma\gamma}{ab}\left(\tau - \frac{1 - e^{-a\tau}}{a} - \frac{1 - e^{-b\tau}}{b} + \frac{1 - e^{-(a+b)\tau}}{a + b}\right) \tag{6-34}$$
$$= \frac{\rho\sigma\gamma}{ab}\left(\tau - \zeta(\tau) - \vartheta(\tau) + \frac{1 - e^{-(a+b)\tau}}{a + b}\right),$$

となる。$\kappa \leq \tau$のとき、$H(\tau)$と$H(\kappa)$の共分散$\mathrm{cov}\left(H(\tau), H(\kappa)\right)$は次式となる。

$$\operatorname{cov}\left(H(\tau),H(\kappa)\right)=\sigma^2 E\left[\left(\int_0^\tau \zeta(\tau-s)\,dW_0(s)\right)\left(\int_0^\kappa \zeta(\kappa-t)\,dW_0(t)\right)\right]$$

$$=\frac{\sigma^2}{a^2}\int_0^{\min\{\tau,\kappa\}}\left(1-e^{-a(\tau-s)}\right)\left(1-e^{-a(\kappa-s)}\right)ds \tag{6-35}$$

$$=\frac{\sigma^2}{a^2}\left(\kappa-\left(1+e^{-a(\tau-\kappa)}\right)\zeta(\kappa)+\frac{e^{-a(\tau-\kappa)}}{2}\zeta(2\kappa)\right).$$

$\kappa\le\tau$ のとき、$H(\tau)$ と $G(\kappa)$ の共分散 $\operatorname{cov}\left(H(\tau),G(\kappa)\right)$ は以下で与えられる。

$$\operatorname{cov}\left(H(\tau),G(\kappa)\right)=\sigma\gamma E\left[\left(\int_0^\tau \zeta(\tau-s)\,dW_0(s)\right)\left(\int_0^\kappa \vartheta(\kappa-t)\,dW_1(t)\right)\right]$$

$$=\frac{\rho\sigma\gamma}{ab}\left(\kappa-e^{-a(\tau-\kappa)}\zeta(\kappa)-\vartheta(\kappa)+\frac{e^{-a(\tau-\kappa)}-e^{-a\tau-b\kappa}}{a+b}\right). \tag{6-36}$$

ここで

$$Y(t_i)\equiv\int_0^{t_i}\left((1-\lambda)r(s)+g(s)+\lambda L\right)ds=(1-\lambda)\int_0^{t_i}r(s)ds+\int_0^{t_i}g(s)ds+\lambda Lt_i$$

$$=(1-\lambda)H(t_i)+G(t_i)+\lambda Lt_i, \tag{6-37}$$

と置くと、(6-37)式の右辺は正規分布に従う確率変数の 1 次結合と確定的な項の和になっているので、$Y(t_i)$ も正規分布に従う確率変数であることがわかる。$Y(t_i)$ の平均と分散はそれぞれ

$$\mu_Y(t_i)\equiv E\left[Y(t_i)\right]=(1-\lambda)\mu_H(t_i)+\mu_G(t_i)+\lambda Lt_i, \tag{6-38}$$

$$\sigma_Y^2(t_i)\equiv V\left[Y(t_i)\right]=V\left[(1-\lambda)H(t_i)+G(t_i)\right]$$

$$=(1-\lambda)^2\sigma_H^2(t_i)+\sigma_G^2(t_i)+2(1-\lambda)\operatorname{cov}\left(H(t_i),G(t_i)\right), \tag{6-39}$$

となり、(6-39)式の共分散 $\operatorname{cov}\left(H(t_i),G(t_i)\right)$ は(6-34)式から導ける。したがって、求めるべき(6-22)式は、正規分布の積率母関数の公式[32]を利用して、次式となる。

$$E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i}r(s)\,ds\right\}S(t_i)\right]=E\left[e^{-Y(t_i)}\right]=\exp\left\{-\mu_Y(t_i)+\frac{\sigma_Y^2(t_i)}{2}\right\}. \tag{6-40}$$

---

[32] 確率変数 X が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき、その積率母関数 $m_X(\theta)\equiv E[e^{\theta X}]$ は

$$m_X(\theta)=\exp\left\{\mu\theta+\frac{\sigma^2}{2}\theta^2\right\},$$

となる。

次に、

$$
\begin{aligned}
Z(t_i) &\equiv \int_0^{t_i} r(s)\,ds + \int_0^{t_{i-1}} \left(-\lambda r(s) + g(s) + \lambda L\right) ds \\
&= H(t_i) - \lambda H(t_{i-1}) + G(t_{i-1}) + \lambda L t_{i-1}\,,
\end{aligned}
\tag{6-41}
$$

と置くと、(6-41)式の右辺は正規分布に従う確率変数の一次結合と確定的な項の和になっているので、$Z(t_i)$も正規分布に従う確率変数であることがわかる。$Z(t_i)$の平均と分散はそれぞれ

$$
\mu_Z(t_i) \equiv E\left[Z(t_i)\right] = \mu_H(t_i) - \lambda \mu_H(t_{i-1}) + \mu_G(t_{i-1}) + \lambda L t_{i-1}\,, \tag{6-42}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_Z^2(t_i) &\equiv V\left[Z(t_i)\right] = V\left[H(t_i) - \lambda H(t_{i-1}) + G(t_{i-1})\right] \\
&= \sigma_H^2(t_i) + \lambda^2 \sigma_H^2(t_{i-1}) + \sigma_G^2(t_{i-1}) - 2\lambda \operatorname{cov}\left(H(t_i), H(t_{i-1})\right) \\
&\quad + 2\operatorname{cov}\left(H(t_i), G(t_{i-1})\right) - 2\lambda \operatorname{cov}\left(H(t_{i-1}), G(t_{i-1})\right),
\end{aligned}
\tag{6-43}
$$

となり、(6-43)式の 3 つの共分散$\operatorname{cov}\left(H(t_i), H(t_{i-1})\right)$、$\operatorname{cov}\left(H(t_i), G(t_{i-1})\right)$、$\operatorname{cov}\left(H(t_{i-1}), G(t_{i-1})\right)$はそれぞれ(6-35)、(6-36)、(6-34)式から導ける。したがって、求めるべき(6-23)式は

$$
E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)\,ds\right\} S(t_{i-1})\right] = E\left[e^{-Z(t_i)}\right] = \exp\left\{-\mu_Z(t_i) + \frac{\sigma_Z^2(t_i)}{2}\right\}, \tag{6-44}
$$

で計算可能であることがわかる。(6-40)、(6-44)式より、仮定 6-3 の下での MBS 価格の解析解が得られたことになる。

仮定 6-3 による MBS 価格の解析解は、経年効果を織り込んだ評価式となっている。ただし、仮定 6-2 と同様、比例ハザード・モデルとは整合的にならない。

（4） 解析的アプローチによる 評価手法のまとめ

本節で取り上げた解析解による MBS の価格評価の概要を図表 6-5、解析解と数値計算による価格評価の比較を図表 6-6 にまとめる。

図表 6-5：MBS の価格評価の解析的アプローチ

アプローチ	長 所	短 所
確定的なプリペイメント･モデル	期限前償還率を時間の確定的な関数としており、解析解が容易に得られる	MBS 特有の価格特性を反映しない
仮定 6-1 によるプリペイメント･モデル（指数関数型）	期限前償還率を金利の指数関数として与えており、比例ハザード･モデルとも整合的	ブラック=カラシンスキー･モデルによる割引債の評価問題に帰着し、解析解は得られない
仮定 6-2 によるプリペイメント･モデル（線形関数型）	期限前償還率を金利の線形関数としており、本邦の MBS 市場実態と整合的。ハル=ホワイト･モデルによる割引債の評価問題に帰着し、解析解が得られる	比例ハザード･モデルとは非整合的であり、経年効果が織り込まれない
仮定 6-3 によるプリペイメント･モデル（線形関数型）	期限前償還率を金利の線形関数と経年効果過程の和で与え、解析解が得られる	経年効果は織り込まれるが、比例ハザード･モデルとは非整合的

図表 6-6：解析解と数値計算法による MBS の価格評価の比較

MBS の評価手法	特 徴	長 所	短 所
解析解による評価	単純なプリペイメント・モデルにより MBS の評価式を導出	瞬時に価格を算出可能	単純なプリペイメント・モデルのみに対応
数値計算による評価	複雑なプリペイメント・モデルに対応して数値計算法により MBS 価格を評価	説明力の高いプリペイメント・モデルを活用可能	計算負荷が大

７． 数値例

本節では、仮想的なプリペイメント･モデルを与えて、前節までに説明した評価手法のいくつかによって、MBS の価格や実効デュレーション等を計算するとともにその変動特性を考察する。この数値例よって、MBS の価格特性はプリペイメント･モデルに強く依存することが明らかになる。

以下の数値例では、スポットレート過程$\{r(t), t \geq 0\}$はバシチェック･モデル

$$dr(t) = a(\bar{r} - r(t))dt + \sigma dW(t), \quad t \geq 0, \qquad (7\text{-}1)$$

に従うと仮定する。

（1） MBS とコーラブル債の 価格比較

ここでは、5 節（3）の評価方法によって、期限前償還オプションとアメリカン・コール・オプションのプレミアムを計算し、MBS の価格と合理的に権利行使されるコーラブル債の価格を比較する。

プリペイメント・モデルには、ベースライン・ハザード関数に対数ロジスティック分布を持つ比例ハザード・モデル

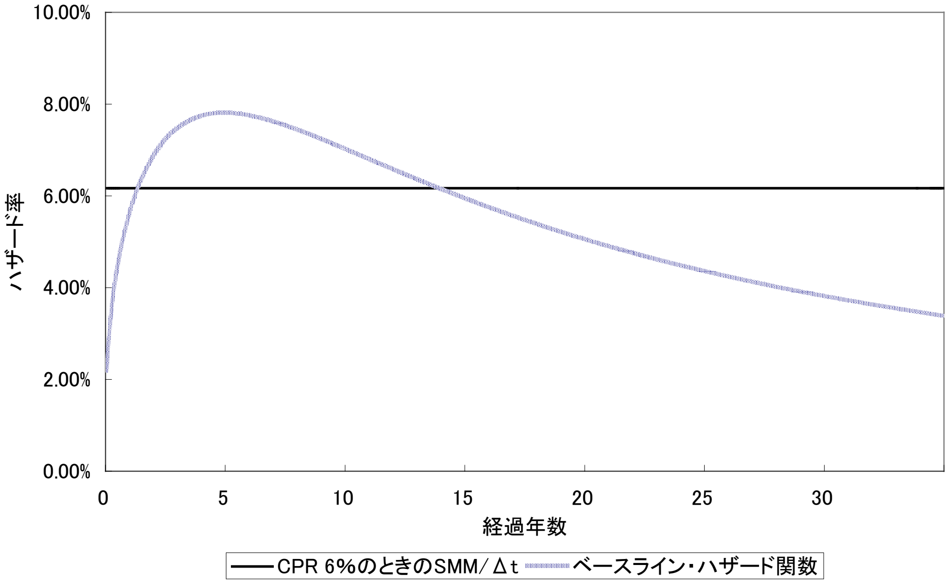
$$h(t)=\frac{\lambda\gamma(\lambda t)^{\gamma-1}}{1+(\lambda t)^{\gamma}}e^{\omega(R-r(t))}, \qquad (7\text{-}2)$$

を仮定した。各モデルのパラメータと MBS の条件は図表 7-1 のとおりとする。パラメータは 5 年経過後にベースライン・ハザード関数が最大になるように設定した（図表 7-2[33]）。

図表 7-1：MBS の条件と各モデルのパラメータ

MBS		スポットレート・モデル		プリペイメント・モデル	
当初元本（円）	100.00	a	20.0%	R	5.0%
クーポン	15 種類	$\bar{r}$	10.0%	λ	0.102
満期（年）	10	σ	2.0%	γ	1.391
		$r(0)$	5.0%	ω	75.000

図表 7-2：ベースライン・ハザード関数



33 ベースライン・ハザード関数のグラフとともに、CPR が 6%で一定としたときのハザード率のグラフを併記した。

MBS の価格、および合理的に権利行使されるコーラブル債の価格を算出した結果が図表 7-3 である。ここから、非合理的な権利行使を伴う期限前償還オプションは、合理的に行使されるアメリカン･オプションよりもプレミアムが低くなっていることがわかる。コーラブル債の価格が 100 円を上回ることがない一方で、イン･ザ･マネーでも期限前償還しない債務者が存在するため、MBS の価格はオーバー･パーになり得る。逆に、アウト･オブ･ザ･マネーでも、期限前償還を行う債務者が存在するため、期限前償還オプションのプレミアムが負値となり得る。

図表 7-3：MBS とコーラブル債の価格比較

クーポン	コーラブル債	元利均等債	アメリカン・オプション	MBS	元利均等債	期限前償還オプション
1.0%	75.557	75.558	0.001	78.407	75.558	-2.849
2.0%	79.356	79.361	0.005	81.673	79.361	-2.312
3.0%	83.264	83.283	0.019	85.033	83.283	-1.750
4.0%	87.256	87.323	0.067	88.486	87.323	-1.162
5.0%	91.252	91.481	0.229	92.030	91.481	-0.550
6.0%	95.068	95.754	0.686	95.666	95.754	0.088
7.0%	98.257	100.143	1.885	99.391	100.143	0.752
8.0%	100.000	104.644	4.644	103.204	104.644	1.440
9.0%	100.000	109.257	9.257	107.104	109.257	2.153
10.0%	100.000	113.979	13.979	111.089	113.979	2.890
11.0%	100.000	118.808	18.808	115.157	118.808	3.651
12.0%	100.000	123.743	23.743	119.306	123.743	4.437
13.0%	100.000	128.779	28.779	123.534	128.779	5.245
14.0%	100.000	133.916	33.916	127.839	133.916	6.077
15.0%	100.000	139.150	39.150	132.219	139.150	6.931

（２） MBS 価格と金利変化

次に、期限前償還の金利インセンティブ効果を決定するパラメータ ω に異なる値を与えることで、MBS の価格特性を検証する。MBS の評価手法には、５節（４）の数値計算方法を用いる。金利のパラレル･シフトによる MBS 価格と実効デュレーションの推移を示すとともに、MBS を IO と PO（(5-22)、(5-23)式を参照）に分解して、それぞれの価格変化も調べる。

なお、実効デュレーション[34] ED は、次式で定義する。

$$ED = \frac{V_{-\Delta y} - V_{\Delta y}}{V_0 \times 2\Delta y} \times 100. \tag{7-3}$$

ここで、V_0 は現状の MBS 価格、Δy は金利の平行移動幅、$V_{\Delta y}$（$V_{-\Delta y}$）は金利を

[34] 実効デュレーションは、イールドカーブをパラレルに上下動させたときの価格感応度で、通常の固定利付債を対象とする修正デュレーションに相当する。

Δy（$-\Delta y$）ずらしたときの MBS 価格とする。ここでは$\Delta y = 0.1\%$ とする。プリペイメント・モデルは(7-2)式とし、各パラメータを図表 7-4 のとおりに設定した。

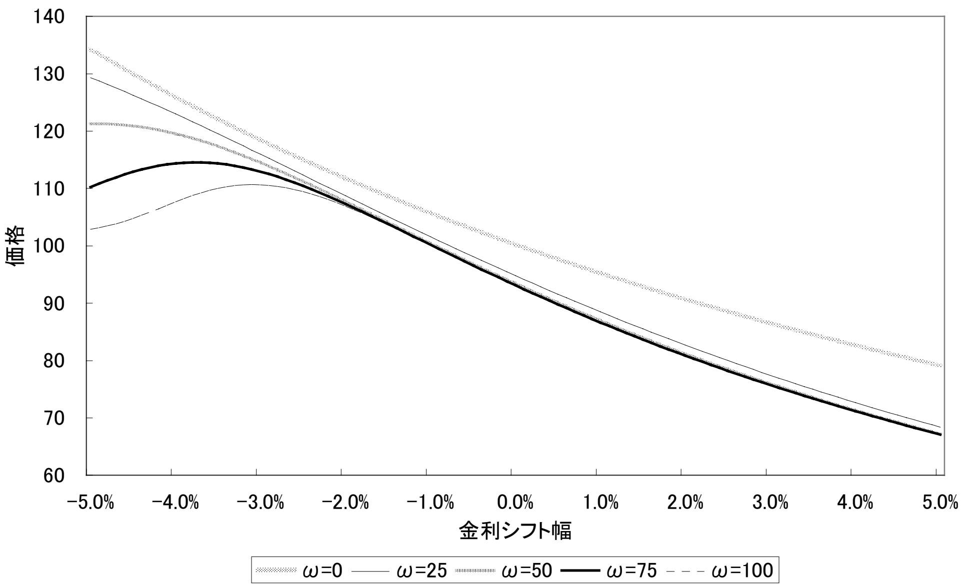
図表 7-4**：**MBS **の条件と各モデルのパラメータ**

MBS		スポットレート・モデル		プリペイメント・モデル	
当初元本（円）	100.00	a	20.0%	R	5.0%
クーポン	10.0%	$\bar{r}$	15.0%	λ	0.102
満期（年）	35	σ	2.0%	γ	1.391
		$r(0)$	5.0%	ω	5 種類

以下の図表 7-5～7-8 では、プリペイメント・モデルの金利インセンティブ効果のパラメータωの水準を複数与えて、MBS 価格等を計算した結果である。なお、$\omega = 0$ のときには、金利インセンティブ効果のないプリペイメント・モデルとなる。また、ωが大きいほど、金利変化に対する期限前償還率の感応度が高いという関係がある。

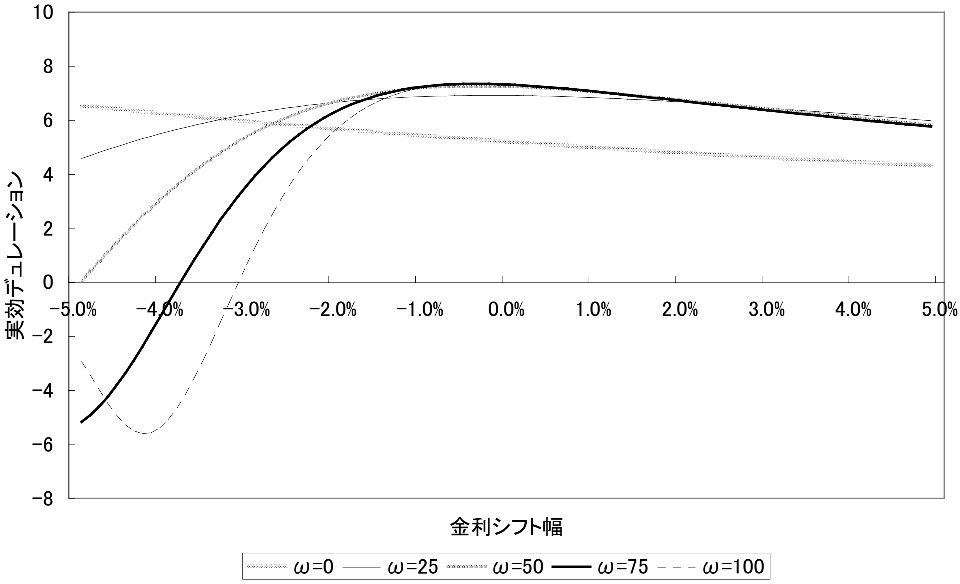
図表 7-5 では、金利のパラレル・シフトに対する MBS 価格の推移を示した。これからは、ωが大きいほど MBS の価格は低い、つまり期限前償還オプションのプレミアムが高いことがわかる。$\omega = 0$ のときには、緩やかな正のコンベキシティをもつ曲線となり、$\omega = 25$ のときでも、明確なネガティブ・コンベキシティの性質は確認することはできない。しかし、さらにωの値が大きくなると、グラフ左方でネガティブ・コンベキシティが観測され、ωが大きいほどネガティブ・コンベキシティが強いことがわかる。

図表 7-5**：**MBS **価格の推移**



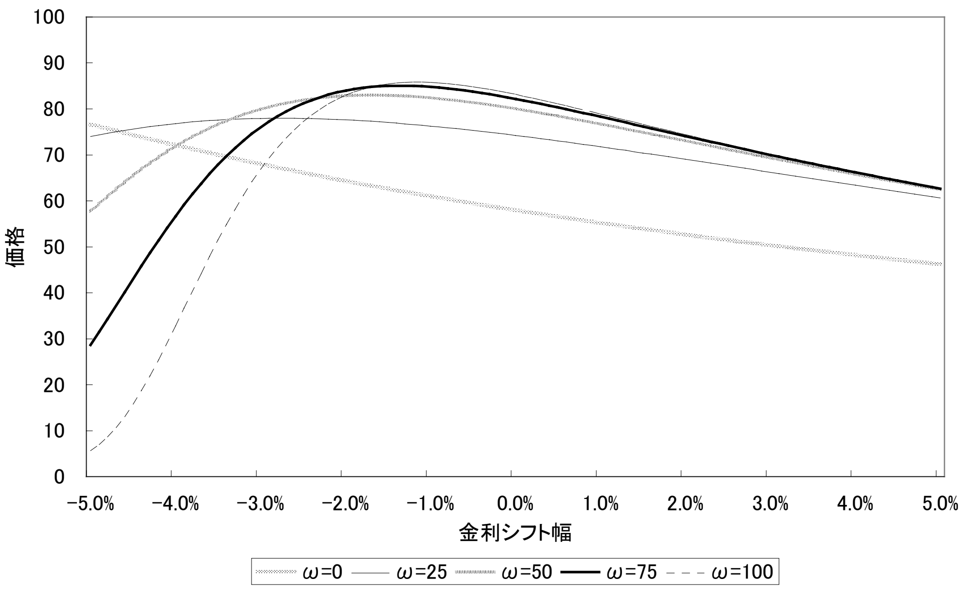
図表 7-6 では、金利のパラレル･シフトに対する実効デュレーションの推移を示した。$\omega = 0$ のときには、金利の上昇によって緩やかに実効デュレーションが短期化するが、それ以外のときには、グラフ左方で金利低下により実効デュレーションが短期化しており、ω が大きいほどより短期化する傾向がある。

図表 7-6：実効デュレーションの推移



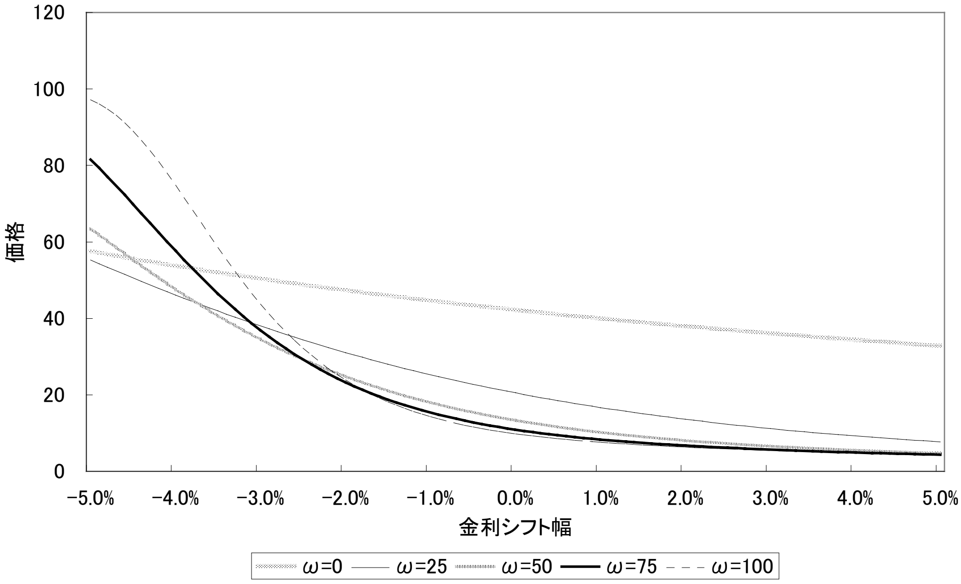
図表 7-7 に、IO 価格の推移を示した。$\omega = 0$ のときには、金利低下とともに IO の価格は上昇するが、それ以外のときには、グラフ左方で金利低下とともに価格が低下している。これが IO 特有のネガティブ･デュレーションの性質である。

図表 7-7：IO 価格の推移



図表 7-8 には、PO 価格の推移を示した。PO 価格は、$\omega=0$ のときを除き、グラフ左方では、ω が大きいほど低いが、グラフ右方になると、その関係は逆になる。

図表 7-8**：**PO **価格の推移**



（３） 解析解による MBS **価格 の計算結果**

次に、プリペイメント･モデルが仮定 6-3 を満たすとして、７節（３）で導いた解析解で MBS 価格を計算し、PSA モデルを採用した場合の価格と比較する。

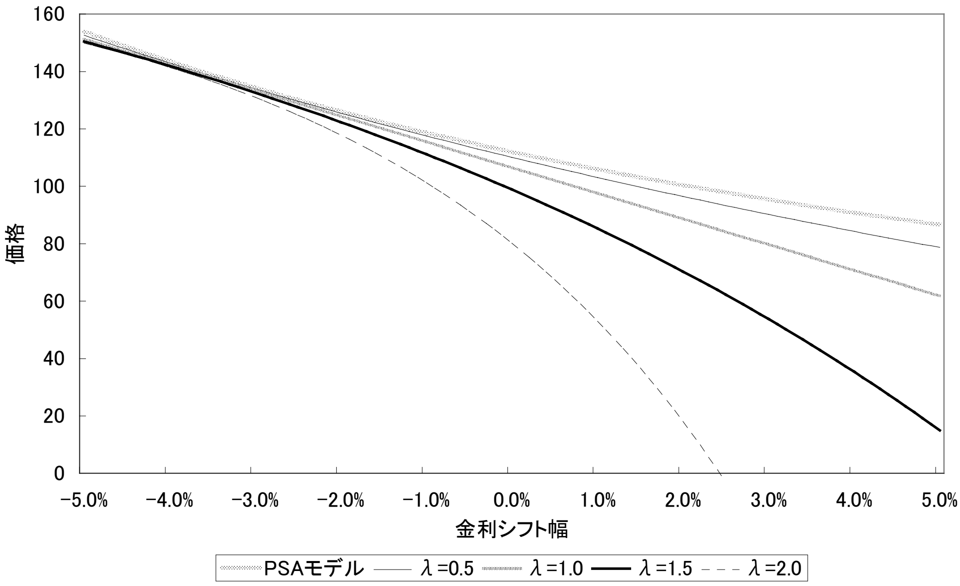
MBS の条件とスポットレート･モデルのパラメータは、図表 7-4 と同じ値に設定し、プリペイメント･モデルのパラメータは図表 7-9 のとおりとした。経年効果過程 $g(t)$ のパラメータは図表 6-4 のグラフに対応している。つまり、スポットレートが不変であれば、プリペイメント･モデルによる期限前償還率の期待値が概ね PSA モデルに一致して推移するように設定した。

図表 7-9**：プリペイメント･モデルのパラメータ**

金利インセンティブ効果		経年効果過程		金利と経年効果の相関係数	
λ	4 種類	b	73.4%	ρ	7 種類
L	5.0%	$\overline{g}$	6.2%		
		γ	2.0%		
		$g(0)$	0.0%		

図表 7-10 では、金利のパラレル･シフトに対する MBS 価格の推移を示した。金利インセンティブ効果のパラメータλが大きく､スポットレートに対する期限前償還率の感応度が高いほど、その価格は低い。また、PSA モデルによる MBS 価格は、割高に評価されている。λの値が大きいと、グラフ全体が原点に対して凹の形状となり、ネガティブ･コンベキシティとなる。$\lambda = 2.0$ の場合には、グラフ右方で MBS 価格が負値となるという問題が生じる。

図表 7-10**：**MBS **価格の推移**



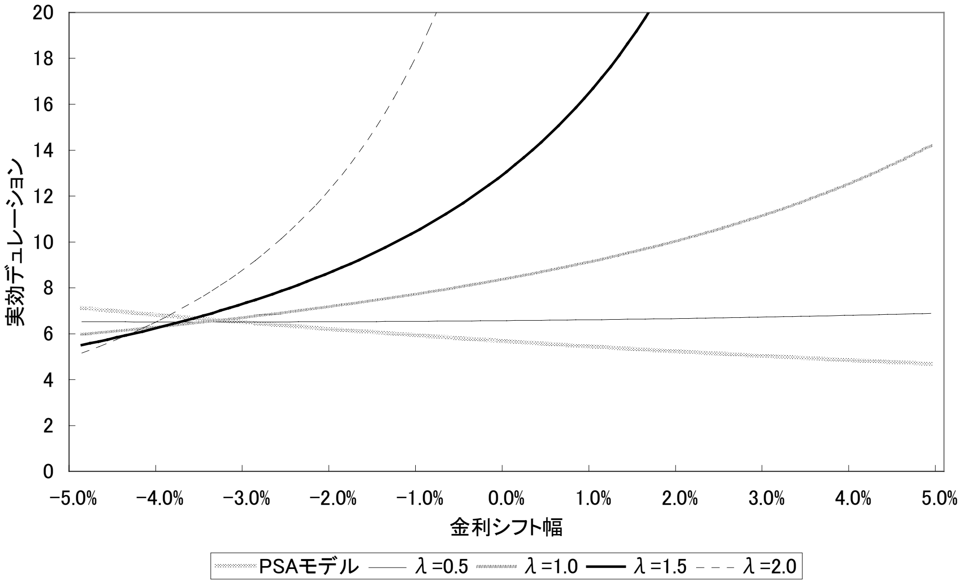
図表 7-11 に､スポットレート$r(t)$と経年効果過程$g(t)$の相関係数ρに幾つかの値を与えたときの計算結果を示した。ρが正のときには、金利インセンティブ効果と経年効果は負の相関を持つため、金利変動による期限前償還が相殺されて、MBS 価格が割高に評価されている。

図表 7-11**：プリペイメント要因の相関と** MBS **価格**

相関係数ρ	λ=0.5	λ=1.0	λ=1.5	λ=2.0
-0.9	109.45	105.59	97.22	76.47
-0.6	109.66	105.90	97.77	77.72
-0.3	109.88	106.21	98.32	78.96
0.0	110.09	106.53	98.87	80.17
0.3	110.30	106.84	99.41	81.36
0.6	110.52	107.15	99.94	82.53
0.9	110.74	107.46	100.48	83.68

図表 7-12 では、MBS の実効デュレーションを示した。λの値が大きいと、金利上昇によるデュレーションが長いことが確認できる。その一方で、PSA モデルでは、デュレーションは金利の緩やかな減少関数である。

図表 7-12：実効デュレーションの推移



（4） 若干の考察

以上の計算結果から、数値解と解析解の両方でネガティブ･コンベキシティやデュレーションの変動等、MBS 特有の価格特性をみることができた。

評価モデルの説明力という点では、数値解の方が、プリペイメント･モデルの仮定が緩く、多様な設定が可能であるため、解析解よりも優れている。数値解法による計算例では、現実の MBS の値動きに類似した形状のグラフ（図表 7-5、7-6 等）が描けている。したがって、プリペイメント･モデルを適切に選択することで、数値解法によって、MBS の理論価格の変動やデュレーションの変化、IO や PO の価格特性等を計算することができるうえ、それらを投資戦略の立案やリスク管理へ活用することが可能となる。

この一方で、解析解による評価は、従来の PSA モデルのような手法に比べれば、幾つかの優れた点がある。第 1 に、解析解によって、ネガティブ･コンベキシティやデュレーションの変動等、MBS の特徴的な性質を捉えることができる。第 2 に、解析解は、PSA モデルでは反映することができない期限前償還オプショ

ンの価値を考慮している。第 3 に、図表 6-3 で示したとおり、本邦 MBS 市場では、金利変動と期限前償還率の間に線形に近い関係があるので、仮定 6-3 によるプリペイメント･モデルを使うことは正当化されると考えられる。したがって、解析解による評価には一定の限界があることを認識したうえであれば、MBS の価格の近似的な計算等に活用することは十分可能であると考えられる。

８． おわりに

本稿では、MBS の商品性を概説したうえで、MBS 価格を評価する幾つかの手法を解説するとともに、数値例でその価格特性を示した。先行研究での評価方法の解説に止まらず、数値解法では、フォワード中立化法を適用した金利格子による評価手法を新たに提案したことが本稿の 1 つの貢献である。また、フォワード中立化法やバスケット型クレジット商品の評価で用いられる手法を MBS に応用することで、解析的なアプローチによる価格評価公式を導出した。これは、本稿のもう 1 つの貢献である。

その一方で、本稿では、プリペイメント･モデルに関しては、既存研究を挙げるに止まったが、本来は、実証分析等により、適切な期限前償還行動のモデルを検討する必要がある。この点を今後の課題に挙げることにしたい。

以　上

補論 A．アフィン･モデルとフォワード中立化法

MBS の価格評価では、金利モデルはキャッシュフローの割引関数を与えるとともに、金利インセンティブ効果に伴う期限前償還率の変化を説明するための変数の役割を担う。以下では、1 ファクター･スポットレート･モデルのうち、アフィン･モデルの基本的な性質とそのフォワード中立化法を説明する。

（1） アフィン･モデルの基本的性質

リスク中立確率の下でスポットレート過程$\{r(t), t \geq 0\}$が確率微分方程式

$$dr(t) = \mu(r(t),t)dt + \sigma(r(t),t)dW(t), \quad t \geq 0, \tag{A-1}$$

に従うと仮定する。ただし、$W(t)$ は標準ブラウン運動である。ここでドリフト$\mu(r,t)$ と拡散係数$\sigma(r,t)$が

$$\mu(r,t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)r, \quad \sigma^2(r,t) = \beta_1(t) + \beta_2(t)r, \tag{A-2}$$

という形をしているとき、その 1 ファクター･スポットレート･モデルをアフィン･モデル（affine model）という。アフィン･モデルでは、境界条件が$a_T(T) = b_T(T) = 0$である連立微分方程式

$$\begin{cases} b_T'(t) = -\alpha_2(t)b_T(t) - \dfrac{\beta_2(t)b_T^2(t)}{2} + 1, \\ a_T'(t) = -\alpha_1(t)b_T(t) - \dfrac{\beta_1(t)b_T^2(t)}{2}, \end{cases} \tag{A-3}$$

を満たす解$a_T(t)$、$b_T(t)$ によって、割引債価格$v(t,T)$が

$$v(t,T) = \exp\{a_T(t) + b_T(t)r(t)\}, \tag{A-4}$$

で与えられる。この割引債のイールド$Y(t,T)$が

$$Y(t,T) = -\frac{b_T(t)}{T-t}r(t) - \frac{a_T(t)}{T-t}, \tag{A-5}$$

としてスポットレートの 1 次関数（アフィン形）与えられるので、アフィン･モデルと呼ばれている。アフィン･モデルでは、(A-5)式でスポットレートからイールドが簡単に求められるので、例えば期限前償還率モデルの参照金利としてイールドを採用する場合には有用である。その一方で、イールドカーブの変化の中でパラレル･シフトしか表現することができないという欠点を持つ。以下で

はアフィン･モデルの代表例を挙げる。

イ． バシチェック･モデル

スポットレート過程$\{r(t), t \geq 0\}$が確率微分方程式

$$dr(t) = a\left(\bar{r} - r(t)\right)dt + \sigma dW(t), \quad t \geq 0, \tag{A-6}$$

に従うモデルをバシチェック･モデルという。(A-6)式は(A-2)式で

$$\mu(r,t) = a\bar{r} - ar, \quad \sigma^2(r,t) = \sigma^2, \tag{A-7}$$

としたアフィン･モデルであり、

$$\begin{aligned} a_T(t) &= -(b_T(t) + T - t)\left(\bar{r} - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right) - \frac{\sigma^2}{4a} b_T^2(t), \\ b_T(t) &= -\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}, \end{aligned} \tag{A-8}$$

となる。スポットレート$r(t)$はガウス･マルコフ過程で正規分布に従うため、数学的な処理が容易である一方、負値の金利を許容するという問題点がある。

ロ． CIR モデル

スポットレート過程$\{r(t), t \geq 0\}$が確率微分方程式

$$dr(t) = a\left(\bar{r} - r(t)\right)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad t \geq 0, \tag{A-9}$$

に従うモデルを CIR モデルという。(A-9)式は(A-2)式で

$$\mu(r,t) = a\bar{r} - ar, \quad \sigma^2(r,t) = \sigma^2 r, \tag{A-10}$$

としたアフィン･モデルであり、

$$\begin{aligned} a_T(t) &= \frac{2a\bar{r}}{\sigma^2}\ln\frac{2\delta e^{(a+\delta)(T-t)/2}}{(a+\delta)\left(e^{\delta(T-t)} - 1\right) + 2\delta}, \\ b_T(t) &= -\frac{2\left(e^{\delta(T-t)} - 1\right)}{(a+\delta)\left(e^{\delta(T-t)} - 1\right) + 2\delta}, \end{aligned} \tag{A-11}$$

となる。ここで$\delta = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$とする。CIR モデルでは、$r(t)$は非心カイ二乗分布に従うことが知られており、金利が負値にならないという利点がある。

ハ． ハル=ホワイト･モデル

スポットレート過程$\{r(t), t \geq 0\}$が確率微分方程式

$$dr(t) = \left(\phi(t) - ar(t)\right)dt + \sigma(t)\,dW(t), \quad t \geq 0, \tag{A-12}$$

に従うモデルをハル=ホワイト･モデルという。(A-12)式は(A-2)式で

$$\mu(r,t) = \phi(t) - ar, \quad \sigma^2(r,t) = \sigma(t)^2, \tag{A-13}$$

としたアフィン･モデルであり、

$$\begin{aligned} a_T(t) &= \int_t^T \phi(s) b_T(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(s) b_T^2(s)\,ds, \\ b_T(t) &= -\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}, \end{aligned} \tag{A-14}$$

となる。ハル=ホワイト･モデルでは、適当なパラメータ$\phi(t)$を選ぶことにより、市場で観測されるイールドカーブにモデルをフィットさせることができる。実務上では拡散係数を一定値とすることが多く、この場合にはフォワードレートを用いて解析的に$\phi(t)$を決定することができる。

（２） アフィン･モデルとフォ ワード中立化法

フォワード中立化法とは、先渡価格をマルチンゲールにする確率測度を利用して価格評価を行う方法である。この手法では、現時点での証券価格$X(0)$が

$$X(0) = E\left[\exp\left\{-\int_0^T r(s)\,ds\right\} X(T)\right] = v(0,T)\,E^T\left[X(T)\right], \tag{A-15}$$

と変換される。ただし、$v(0,T)$は現時点での満期Tの割引債価格、$E^T[\cdot]$は先渡価格をマルチンゲールにする確率測度（フォワード中立確率測度と呼ぶ）$\Pr^T$に関する期待値演算子である。(A-15)式では、割引債価格が期待値演算子の外に出ることで、割引率と証券$X(T)$の同時分布を考える必要がなくなる。これがフォワード中立化法の最大のメリットである。

以下では、アフィン･モデルを仮定した場合のフォワード中立化法を説明する。原資産である割引債の満期がτ、受渡時点がTである時点tでの先渡価格を$v_T(t,\tau)$とする。先渡価格は(A-4)式より

$$v_T(t,\tau)=\frac{v(t,\tau)}{v(t,T)}=\exp\{a_\tau(t)-a_T(t)+(b_\tau(t)-b_T(t))r(t)\}, \qquad \text{(A-16)}$$

となる。上式の両辺に対数をとって微分すると

$$\begin{aligned} d\ln v_T(t,\tau) &= (b_\tau(t)-b_T(t))\sigma(r,t) \\ &\quad \times\left(-\frac{b_\tau(t)-b_T(t)}{2}\sigma(r,t)dt+dW(t)\right), \end{aligned} \qquad \text{(A-17)}$$

となり、さらに伊藤の補題を使って変形すると

$$\frac{dv_T(t,\tau)}{v_T(t,\tau)}=(b_\tau(t)-b_T(t))\sigma(r(t),t)\{-b_T(t)\sigma(r,t)dt+dW(t)\}, \qquad \text{(A-18)}$$

が得られる。ただし$\sigma^2(r,t)=\beta_1(t)+\beta_2(t)r$である。したがって、

$$dW^T(t)=-b_T(t)\sigma(r,t)dt+dW(t), \qquad \text{(A-19)}$$

と測度変換することで

$$\frac{dv_T(t,\tau)}{v_T(t,\tau)}=(b_\tau(t)-b_T(t))\sigma(r,t)dW^T(t), \quad 0\le t\le T, \qquad \text{(A-20)}$$

が得られ、正規化条件の下で$W^T(t)$を標準ブラウン運動とする確率測度$\Pr^T$に関して、債券先渡価格$v_T(t,\tau)$はマルチンゲールになる。

補論 B．金利格子とシフト関数

ここでは、金利格子を用いて MBS 価格を評価することを念頭に、スポットレートの 3 項格子（trinomial tree）の一般的な作成方法とシフト関数の導出過程を説明する。

リスク中立確率の下でのスポットレート過程$\{r(t), t \geq 0\}$が確率微分方程式

$$dr(t) = \big(\phi(t) - a(t)r(t)\big)dt + \sigma(r(t),t)\,dW(t), \quad t \geq 0, \tag{B-1}$$

に従うと仮定する。ただし、$a(t)$、$\phi(t)$、$\sigma(r(t),t)$ は正の関数である。ここで

$$dX(t) = -a(t)X(t)dt + \hat{\sigma}(X(t),t)\,dW(t), \quad t \geq 0, \quad X(0) = 0, \tag{B-2}$$

で定義される確率過程$\{X(t), t \geq 0\}$を考える。これは 0 に回帰する確率過程であり、解過程とよばれる。(B-2)式の解過程に対して、確定的な関数$\theta(t)$ により

$$r(t) = \theta(t) + X(t), \quad t \geq 0, \quad \theta(0) = r(0), \tag{B-3}$$

と置く。(B-3)式の両辺を微分して、(B-2)式を代入すると

$$dr(t) = \{\theta'(t) + a(t)\theta(t) - a(t)r(t)\}dt + \hat{\sigma}(r(t),t)\,dW(t), \tag{B-4}$$

が得られる。(B-1)式と(B-4)式が一致するためには、

$$\phi(t) = \theta'(t) + a(t)\theta(t), \ \text{かつ} \ \ \sigma(r(t),t) = \hat{\sigma}(X(t),t), \tag{B-5}$$

でなければならない。$\phi(t)$ を既知として、(B-5)式の微分方程式を解くと

$$\theta(t) = \exp\left\{-\int_0^t a(u)\,du\right\}\left(\int_0^t \exp\left\{\int_0^s a(u)\,du\right\}\phi(s)\,ds + r(0)\right), \tag{B-6}$$

が得られる。(B-6)式で与えられる$\theta(t)$ をシフト関数（shift function）と呼ぶ。

このように解過程とシフト関数を与えれば、解過程$\{X(t), t \geq 0\}$を近似する格子を作成し[35]、その任意のノード(i, j)（時間t_i で状態 j をとる点）での $X(t)$ の値 $x(i, j)$ に、同じノード上の $r(t)$ の値を、シフト関数を用いて $r(i, j) = x(i, j) + \theta(t_i)$ と与えることで、スポットレート過程を近似する格子を作成することができる。

[35] 解過程を近似する 3 項格子には、ハル=ホワイト格子や一般格子等がある。具体的な作成方法は木島・長山・近江[1995]に詳しい。

補論 C．仮定 6-2 と仮定 6-3 の解の一致

本論６節の仮定 6-3 は、$g(t)=0$とすると、仮定 6-2 に一致する。このとき、仮定 6-3 の解を構成する(6-40)、(6-44)式が、それぞれ仮定 6-2 の(6-20)、(6-21)式と等しくなることを示す。

$g(t)=0$のとき、仮定 6-3 の(6-40)式は

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)ds\right\}S(t_i)\right] &= \exp\left\{-\mu_Y(t_i)+\frac{\sigma_Y^2(t_i)}{2}\right\} \\ &= \exp\left\{-(1-\lambda)\mu_H(t_i)-\lambda L t_i \quad +\frac{(1-\lambda)^2\sigma_H^2(t_i)}{2}\right\}, \end{aligned} \tag{C-1}$$

となる。ここで

$$v(0,t_i)=E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)ds\right\}\right]=\exp\left\{-\mu_H(t_i)+\frac{\sigma_H^2(t_i)}{2}\right\}, \tag{C-2}$$

なので、(C-1)式の右辺は

$$v(0,t_i)\exp\left\{\lambda\mu_H(t_i)-\lambda L t_i+\lambda\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\sigma_H^2(t_i)\right\}, \tag{C-3}$$

と書ける。よって、(C-3)式の指数関数部分は

$$\begin{aligned} &\exp\left\{\lambda\mu_H(t_i)-\lambda L t_i+\lambda\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\sigma_H^2(t_i)\right\} \\ &=\exp\left\{\begin{aligned}&\lambda\left(\bar{r}t_i+\left(r(0)-\bar{r}\right)\zeta(t_i)\right)-\lambda L t_i \\ &\quad+\frac{\lambda\sigma^2}{a^2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\frac{\lambda^2\sigma^2}{2a^2}\left(t_i-2\zeta(t_i)+\frac{1}{2}\zeta(2t_i)\right)\end{aligned}\right\} \\ &=\exp\left\{\begin{aligned}&\lambda\left(\bar{r}-L-\frac{\sigma^2}{a^2}\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\right)t_i+\lambda\left(r(0)-\bar{r}+\frac{\sigma^2}{a^2}(2-\lambda)\right)\zeta(t_i) \\ &\quad+\frac{\lambda\sigma^2}{2a^2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\zeta(2t_i)\end{aligned}\right\}, \end{aligned} \tag{C-4}$$

となり、これと仮定 6-2 の(6-20)式が等しくなる。

同様に、仮定 6-3 の(6-44)式は

$$E\left[\exp\left\{-\int_0^{t_i} r(s)ds\right\}S(t_{i-1})\right]=\exp\left\{-\mu_Z(t_i)+\frac{\sigma_Z^2(t_i)}{2}\right\}$$
$$=v(0,t_i)\exp\left\{\lambda\mu_H(t_{i-1})-\lambda Lt_{i-1}+\frac{\lambda^2\sigma_H^2(t_{i-1})}{2}-\lambda\,\mathrm{cov}\big(H(t_i),H(t_{i-1})\big)\right\},\tag{C-5}$$

となるので、(C-5)式の右辺の指数関数部分は

$$\exp\left\{\lambda\mu_H(t_{i-1})-\lambda Lt_{i-1}+\frac{\lambda^2\sigma_H^2(t_{i-1})}{2}-\lambda\,\mathrm{cov}\big(H(t_i),H(t_{i-1})\big)\right\}$$
$$=\exp\left\{\begin{array}{l}\lambda\big(\bar{r}t_{i-1}+\big(r(0)-\bar{r}\big)\zeta(t_{i-1})\big)-\lambda Lt_{i-1}+\dfrac{\lambda^2\sigma^2}{2a^2}\left(t_i-2\zeta(t_i)+\dfrac{1}{2}\zeta(2t_i)\right)\\ \quad -\dfrac{\lambda\sigma^2}{a^2}\left(t_{i-1}-\big(1+e^{-a(t_i-t_{i-1})}\big)\zeta(t_{i-1})+\dfrac{e^{-a(t_i-t_{i-1})}}{2}\zeta(2t_i)\right)\end{array}\right\}$$
$$=\exp\left\{\begin{array}{l}\lambda\left(\bar{r}-L-\dfrac{\sigma^2}{a^2}\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)\right)t_{i-1}\\ +\lambda\left(r(0)-\bar{r}+\dfrac{\sigma^2}{a^2}\big(1-\lambda+e^{-a(t_i-t_{i-1})}\big)\right)\zeta(t_{i-1})\\ +\dfrac{\lambda\sigma^2}{2a^2}\left(\dfrac{\lambda}{2}-e^{-a(t_i-t_{i-1})}\right)\zeta(2t_{i-1})\end{array}\right\},\tag{C-6}$$

となり、これと仮定 6-2 の(6-21)式が等しくなる。以上により、仮定 6-3 で $g(t)=0$ としたときの解は、仮定 6-2 の解に一致することが確認された。

参考文献

青沼君明、木島正明、「プリペイメント・リスク評価モデル」、『日本応用数理学会論文誌』第 8 巻第 1 号、1998 年、45～66 頁

一條裕彦、森平爽一郎、「住宅ローンのプリペイメント分析」、『2001 年度 JAFFE 夏季大会予稿集』、2001 年、221～239 頁

木島正明、『期間構造モデルと金利デリバティブ』、朝倉書店、1999 年

木島正明、小守林克哉、『信用リスク評価の数理モデル』、朝倉書店、1999 年

木島正明、長山いづみ、近江義行、『ファイナンス工学入門 第III部 数値計算法』、日科技連、1996 年

北康利、『ABS 投資入門』、シグマベイスキャピタル、1999 年

楠岡成雄、青沼君明、中川秀敏、『クレジット・リスク・モデル』、金融財政事情研究会、2001 年

柴崎健、中村信弘、「ハザードレートアプローチによる MBS の評価」、『2001 年度 JAFFE 夏季大会予稿集』、2001 年、205～220 頁

森利博、『米国モーゲージ証券投資の実務』、日本経済新聞社、1988 年

Black, F. and P. Karasinski, “Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal,” *Finance Analysts Journal*, 1991, pp. 52-59.

Brigo, D. and F. Mercurio, *Interest Rate Models Theory and Practice*, Springer, 2001.

Collin-Dufresne, P. and R. S. Goldstein, “Do Credit Spreads Reflect Stationary Leverage Ratios?,” *The Journal of Finance* **56**, 2001, pp. 1929-1957.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross, “A Theory of the Term Structure of Interest Rates,” *Econometrica* **53**, 1985, pp. 385-407.

Duffie, D., “First-to-Default Valuation,” Working Paper, 1998.

Dunn, K. B. and J. J. McConnell, “Valuation of GNMA Mortgage-Backed Securities,” *The Journal of Finance* **36**, 1981, pp. 599-617.

Fabozzi, F. J., *The Handbook of Mortgage Backed Securities Fifth Edition*, McGraw-Hill, 2001.

Hayre, L., *Salomon Smith Barney Guide to Mortgage-Backed and Asset-Backed Securities*, John Wiley & Co., 2001.

Hull, J. and A. White, “Pricing Interest Rate Derivative Securities,” *The Review of Financial Studies* **3**, 1990, pp. 573-592.

Jegadeesh, N. and X. Ju, “A Non-Parametric Prepayment Model and Valuation of Mortgage-Backed Securities,” *The Journal of Fixed Income* **10**, 2000, pp. 50-67.

Kariya, T. and M. Kobayashi, “Pricing Mortgage-Backed Securities (MBS) -A Model Describing the Burnout Effect-,” *Asia-Pacific Financial Markets* **7**, 1999, pp. 189-204.

Kijima, M. and Y. Muromachi, “Credit Events and the Valuation of Credit Derivatives of Basket Type,” *Review of Derivatives Research* **4**, 2000, pp. 55-79.

Musiela, M. and M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, 1997.

McConnell, J. J. and M. Singh, “Rational Prepayments and the Valuation of Collateralized Mortgage Obligations,” *The Journal of Finance* **49**, 1994, pp. 891-921.

Nakamura, N., “Valuation of Mortgage-Backed Securities Based upon a Structural Approach,” *Asia-Pacific Financial Markets* **8**, 2001, pp. 259-289.

Sandmann, K. and D. Sondermann, “A Note on the Stability of Lognormal Interest Rate Models and the Pricing of Eurodollar Futures,” *Mathematical Finance* **7**, 1997, pp. 119-125.

Schwartz, E. S. and W. N. Torous, “Prepayment and the Valuation of Mortgage-Backed Securities,” *The Journal of Finance* **44**, 1989, pp. 375-392.

Stanton, R., “Rational Prepayment and the Valuation of Mortgage-Backed Securities,” *The Review of Financial Studies* **8**, 1995, pp. 677-708.

Sugimura, T., “A Prepayment Model for the Japanese Mortgage Loan Market: Prepayment-Type-Specific Parametric Model Approach,” *Asia-Pacific Financial Markets* **9**, 2002, pp. 305-335.

Vasicek, O. A., “An Equilibrium Characterization of the Term Structure,” *Journal of Financial Economics* **5**, 1977, pp. 177-188.