IMES DISCUSSION PAPER SERIES

ジャンプ拡散過程を用いたオプション価格付けモデルについて

久田（ひさた） 祥史（よしふみ）

Discussion Paper No. 2002-J-26

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

IMES Discussion Paper Series 2002-J-26

2002 年 7 月

ジャンプ拡散過程を用いたオプション価格付けモデルについて

久田（ひさた） 祥史（よしふみ）*

要　旨

本稿では、ジャンプ拡散過程を用いたオプション価格付けモデル（ジャンプ拡散モデル）の解説を行う。ジャンプ拡散モデルは、ブラック･ショールズ･モデルに代表されるオプション価格付けモデルと異なり、原資産価格の非連続な変動を取り入れることができる上、市場で観察されるオプション価格をよりうまく表現することができるため、近年再び注目されている。

本稿では、代表的なジャンプ拡散モデルであるマートン･モデルを中心に、マートン･モデル以外のジャンプ拡散モデルを含めてサーベイを行い、ジャンプ拡散モデルの整理を行う。また、日経平均株価指数オプションの市場データに基づき、マートン･モデルのキャリブレーションを行い、ジャンプ拡散モデルの特徴を検証する。

キーワード：ジャンプ拡散過程、マートン･モデル、ポアソン過程、複合ポアソン過程、ブラック･ショールズ･モデル、ボラティリティ･スマイル

JEL classification: G13

*日本銀行金融研究所研究第１課（現　人事局）（E-mail: yoshifumi@hisata.org）

―目　次―

1. はじめに

金融派生商品の代表的商品の 1 つであるオプションの理論価格を導出する数学的モデル（オプション価格付けモデル）は、1970 年代初頭に、ブラックとショールズ（Black and Scholes [1973]）によって、またマートン（Merton [1973]）によって、各々独立に開発されたモデル（ブラック･ショールズ･モデルまたはブラック･ショールズ･マートン･モデルと呼ばれる＜以下 BS モデル＞）を基本としている。原資産価格の動きが拡散過程に従う等の仮定を置いた BS モデルでは、オプションの理論価格が比較的簡単な数式で表される。BS モデルの出現が、その後のオプション市場の急速な発展の最大の牽引役となったことはよく知られている。

しかし、BS モデルは、現実の市場が示す種々の特徴を十分に捉え切れないという限界を孕んでいる。このため、BS モデル以降、BS モデルが持つ仮定を緩和ないし変更することにより、現実の市場の特徴をよりうまく表現できるオプション価格付けモデルの開発が多く行われてきた。本稿では、こうした BS モデルの各種拡張モデルの中で、原資産価格の動きが拡散過程にジャンプ過程を加えた複合過程（以下ジャンプ拡散過程）に従うと仮定したオプションの価格付けモデル（以下ジャンプ拡散モデル[1]）に焦点を当てて、モデルの枠組みを解説するほか、モデルのキャリブレーションを行いモデルの有効性等を考察する。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、2章では、金融商品のヒストリカル･データから収益率分布の主要統計量を計算するほか、BS モデルの仮定と相反するボラティリティ･スマイル現象を示す。これにより、BS モデルが仮定している拡散過程が必ずしも妥当でないことを説明する。次に、3章では、ジャンプ拡散過程を説明した後、代表的なジャンプ拡散モデルのマートン･モデル（Merton[1976]）の枠組みを解説し、数値例を通じて同モデルの特徴を考察する。4章では、ジャンプ拡散過程のパラメータを推計し、拡散過程よりも原資産価格変動の表現力が向上することを確認する。またオプション価格データを用いて、マートン･モデルをキャリブレートし、留意点を整理する。さらに、ジャンプ拡散モデルのバリエーションを整理する。5章では、ジャンプ拡散モデルを用いる際に対応が必要となる非完備性を概説し、具体的な対応方法を整理する。6章では、ジャンプ拡散モデル以外で、ボラティリティ･スマイルを表現する等のために開発された各種手法も概説する。なお補論では、本文を補足するための、やや複雑な数式展開を纏める。

[1] 厳密には、本稿では、拡散項を含む複合ポアソン過程（後述）を用いたモデルをジャンプ拡散モデルと呼称する。

2. ブラック･ショールズ･モデルが捉え切れない市場の特徴

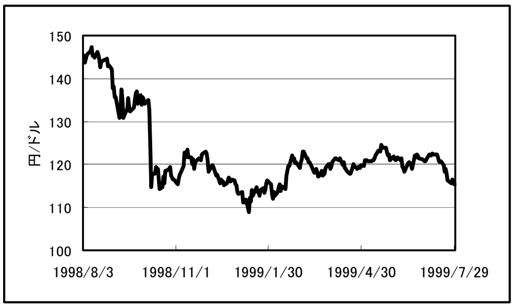
本章では、ジャンプ拡散モデルが考え出されることになった背景にある、BS モデルが捉え切れない市場の特徴をみていく。

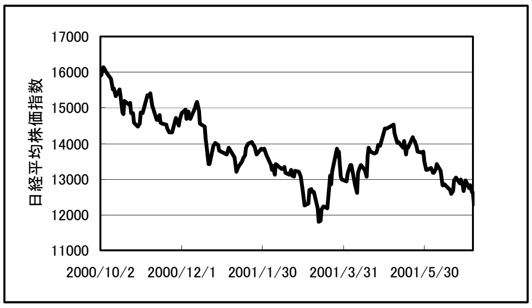
（1） 原資産価格変動の分布

原資産価格の動きが拡散過程に従う、つまり原資産価格の収益率が正規分布に従うという BS モデルの仮定では、現実の市場が示す種々の特徴を十分に捉え切れないという限界が多くの文献によって指摘されている。例えば、金融商品の市場価格は時折大きな変動を起こすといわれている。本章では、まず株式市場や為替市場での現実の原資産価格変動をみてみよう。

円･ドル為替レートの推移（1998 年 8 月～1999 年 7 月、日次）と日経平均株価指数の推移（2000 年 10 月～2001 年 9 月、日次）を図表 1に示す[2]。

図表 1 円･ドル為替レート（1998 年 8 月～1999 年 7 月、左）と
日経平均株価指数（2000 年 10 月～2001 年 9 月、右）





図表 1からは、円･ドル為替レートは、1998 年 10 月の数日間に約 20 円の大きな下落を示した一方[3]、その他の時期にはそれほど大きな変動はないという特徴がみてとれる。同様に、日経平均株価指数も短期間で急激に変動している様子がみられる。短期間に相対的に大きな変動があるということは、これらの収益率分布が正規分布とは異なった分布である可能性を示唆している。実際に、これら収益率分布の主要統計量を図表 2に示す。

[2] 比較的大きな原資産価格変動があった時期を選んだ。
[3] 正確には、10 月 6 日～8 日の間に 18 円下落。

図表 2 円･ドル為替レート（1998 年 8 月～1999 年 7 月）と
日経平均株価指数（2000 年 10 月～2001 年 9 月）の主要統計量

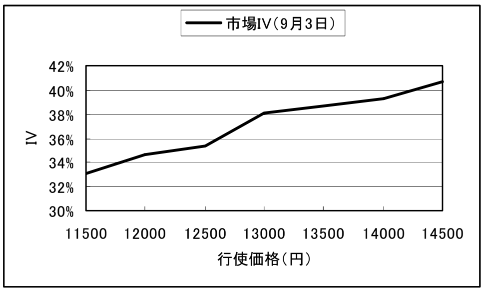
	平均	分散	歪度	尖度
円･ドル為替レート収益率	-0.09	1.56	-1.53	12.01
日経平均株価指数収益率	-0.20	3.15	0.29	4.93

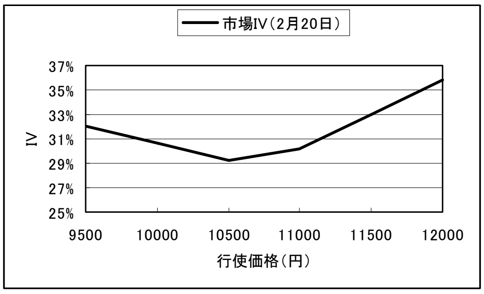
図表 2から、円･ドル為替レートでは尖度が 12.01、日経平均株価指数では尖度が 4.93 となっており、正規分布（尖度 3）とは異なった分布であることが読み取れる。すなわち、この例では、原資産価格が拡散過程に従っているという仮定は必ずしも適当ではないことになる。また、そうした拡散過程を仮定した BS モデルは、オプションを誤って価格付けしてしまう可能性がある。

（2） ボラティリティ･スマイル

株式、為替等のオプション市場では、ボラティリティ･スマイルと呼ばれる構造が観察される。ボラティリティ･スマイルとは、市場で観測されるオプション価格からBSモデルを用いて計算したボラティリティ（インプライド･ボラティリティ）と行使価格との間にみられる関係である。具体例として、図表 3に 2001 年 9 月 3 日（左図）と 2002 年 2 月 20 日（右図）の日経平均株価指数コール･オプションのボラティリティ･スマイルを示す[4]（年率表記）。

図表 3 ボラティリティ･スマイルの例





右図からは、行使価格に対して下に凸となる関数のような関係が、左図からは、行使価格が小さくなるにつれてインプライド･ボラティリティが低くなるという概ね線形の関係があることがわかる。これらの関係がボラティリティ･スマイルである[5]。

[4] ボラティリティ･スマイルが比較的明確に観察された日を選択した。
[5] 図表 3左図のようにオプション価格が行使価格に概ね比例しているように見える形状をボラティリティ･スキューと呼ぶことがある。本稿では、ボラティリティ･スキューを含めイン

BS モデルでは、原資産価格の変動が拡散過程に従い、そのボラティリティは定数であると仮定している。この仮定が実際に正しいとすると、オプションの市場価格から計算されるインプライド・ボラティリティは行使価格の水準に依らず定数となるはずである。ところが、図表 3からわかるように実際の市場価格から計算されるインプライド・ボラティリティは定数ではない。つまり、ボラティリティ・スマイルの存在は、BS モデルの仮定が妥当ではないことを示唆している。

3. ジャンプ拡散モデル

本章では、前章の BS モデルが捉え切れない市場の特徴に対応する方法の 1 つであるジャンプ拡散モデルを説明する。まず、複合ポアソン過程[6]（Compound Poisson Process）を用いたジャンプ拡散過程を説明する。次に、代表的なジャンプ拡散モデルであるマートン・モデル（Merton[1976]）を解説し、数値例を通じてその特徴を整理する。

（1） ジャンプ拡散過程

本節では、複合ポアソン過程を用いたジャンプ拡散過程の定式化を説明する。ここでは、ジャンプ変動を 1 個の複合ポアソン過程で表現することにする。具体的には、原資産価格 S_t の変動（収益率）が、標準ブラウン運動（拡散項） Z_t 、ポアソン過程 N_t を用いて次のようにモデル化されるとする[7,8]。

プライド・ボラティリティが行使価格に依存する構造を（広義の意味での）ボラティリティ・スマイルと呼ぶ（ただし、ボラティリティ・スマイルの形状に特に注目する際には、図表 3 右図の形状を狭義のボラティリティ・スマイル、図表 3左図の形状をボラティリティ・スキューと区別する）。なお、本稿では、ボラティリティ・スマイルとボラティリティの期間構造とを区別している点に留意されたい。

[6] ポアソン過程や複合ポアソン過程の詳細は補論を参照。

[7] 本稿では、拡散過程のパラメータは定数であるとする。なお、ここでは 1 次元のジャンプ拡散過程を考える。

[8] なお、(3-1)式中の複合ポアソン過程をより正確に表記すると次のように書ける。本文の(3-1)式は直観的理解を優先するため表現をやや簡略化している点に留意されたい。

$$\frac{dS_t}{S_{t^-}} = (\mu - \lambda k)dt + \sigma_B dZ_t + dY_t\,,\ \ Y_t = \sum_{n=1}^{N_t}(J_n - 1)\,.$$

ただし、$\{J_n; n = 1,2,\cdots\}$ は、互いに独立で同一の分布に従う確率変数の列（ジャンプが起こった際のジャンプ幅率を表す確率変数）であり、 S_t が解を持つための技術的な条件を満たし

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - \lambda k)dt + \sigma_B dZ_t + (J-1)dN_t \,. \tag{3-1}$$

ただし、

- J はジャンプが起こった際のジャンプ幅率を表す確率変数[9]、
- μ は原資産価格の期待収益率[10]（定数）、σ_B は原資産価格の収益率のボラティリティ（定数）、λ はポアソン過程の強度（定数）、 k はジャンプ幅率の期待値（$k = E[J-1]$[11]）、
- Z_t、 N_t、 J は各々独立。

(3-1)式は、確定的なトレンドを示す項（右辺第 1 項）に、連続的な確率変動を示す拡散項（同第 2 項）とジャンプ項（同第 3 項）を加えた形になっている。

ジャンプ拡散過程には､拡散過程にさらに2つの確率変数が加えられている（N と J）。これらの確率変数は、①「ジャンプが起こるか否か」、②ジャンプが起った場合に「どの程度の大きさでジャンプするのか」、を表すものである。

N は強度を λ とするポアソン過程であり、ジャンプ事象が生じる確率的な頻度が λ で与えられている。また、 J はジャンプが起こった際のジャンプの比率を表している（脚注11参照）。

原資産価格のジャンプ項と拡散項による変動のイメージを図表 4に示す。

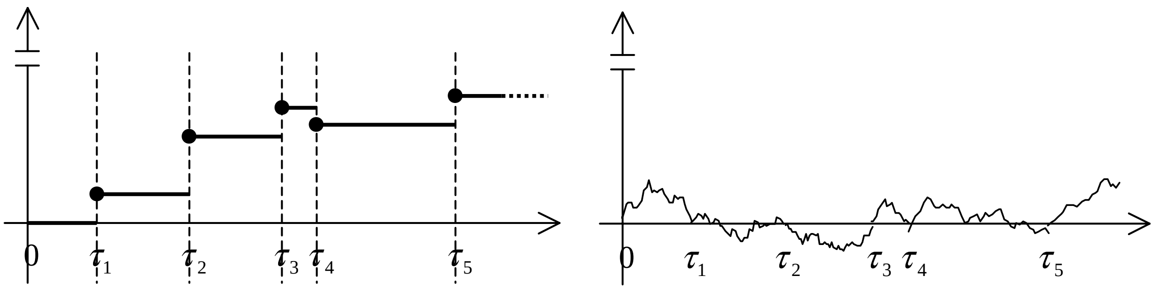
ていると仮定する。また、 Z_t、 N_t、 J_n は各々独立であるとする。

[9] J は S_t が解を持つための技術的な条件を満たしているとする。なお、レオンら（León, Solé, Utzet and Vives [2002]）は、複合ポアソン過程を一般化したレビィ過程で、この J に対する技術的条件を示している（レビィ過程については、佐藤 [1990]が詳しい）。

[10] (3-1)式の右辺第 1 項（ドリフト項）の係数が μ ではなく $(\mu - \lambda k)$ となっているのは、複合ポアソン過程の期待値（$E[(J-1)dN_t] = \lambda kdt$ 、もしくは $E[dY_t] = \lambda kdt$ ）を調整し、ジャンプ拡散過程のドリフト項に対する複合ポアソン過程の影響を平均的に 0 にするためである。

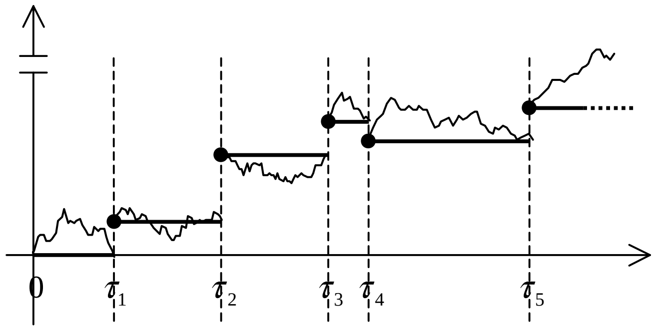
[11] (3-1)式のポアソン過程の係数を $J-1$ としているのは、$J \cdot S$ をジャンプが起こった直後の原資産価格となるようにモデル化するためである。例えば、原資産価格を 100 円とし、ジャンプにより 80 円となるようにモデル化する場合、0.8×100 円=80 円であるため J =0.8 となる。したがって、この場合のポアソン過程の係数 $J-1$ は 0.8-1=-0.2、つまり下側に 20%ジャンプすることを表している。

図表 4 原資産価格のジャンプ項による変動（左）と拡散項による変動（右）



図表 4に示したジャンプ項による変動と拡散項による変動（ブラウン運動）によって、図表 5のようにジャンプ拡散過程（除く確定的なトレンド項）による原資産価格変動が構成されることがわかる。

図表 5 ジャンプ拡散過程による原資産価格の変動



（2） マートン･モデル ― 対数正規分布ジャンプ幅率モデル

本章では、代表的なジャンプ拡散モデルであるマートン･モデルを取り上げ、ボラティリティ･スマイルが本モデルで表現できることを簡単な数値例により示す。

マートン（Merton [1976]）は、株価S_tの変動過程としてジャンプ拡散過程を(3-1)式のように仮定し、同式内のパラメータJが対数正規分布に従う場合（$\ln J \sim \Phi(\mu_J, \sigma_J{}^2)$）を解析解が求められる例として取り上げている。そこでは、「ジャンプのリスクに対するリスク･プレミアムはゼロ」との仮定を置く[12]ことにより、行使価格をK、満期をTとするコール･オプション価格Cの解析解（(3-2)式）を導出できることを示した（導出は補論参照）[13,14]。

[12] この仮定に関しては 5 章でやや詳しく説明する。
[13] 補論ではマートン･モデルの各種感応度の理論式も示す。
[14] BS モデルに比べると解析解は複雑である。近年、再びジャンプ変動を含んだモデルが注目

$$C=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!}[S_0\Phi(d_1)-Ke^{-r_n T}\Phi(d_2)], \qquad (3\text{-}2)$$

$$\lambda'=\lambda(1+k),\ r_n=r-\lambda k+n\ln(1+k)/T,\ \sigma_n{}^2=\sigma_B{}^2+n\sigma_J^2/T,$$

$$d_1=\frac{1}{\sigma_n\sqrt{T}}[\ln(S_0/K)+(r_n+\sigma_n^2/2)T],\ d_2=d_1-\sigma_n\sqrt{T},$$

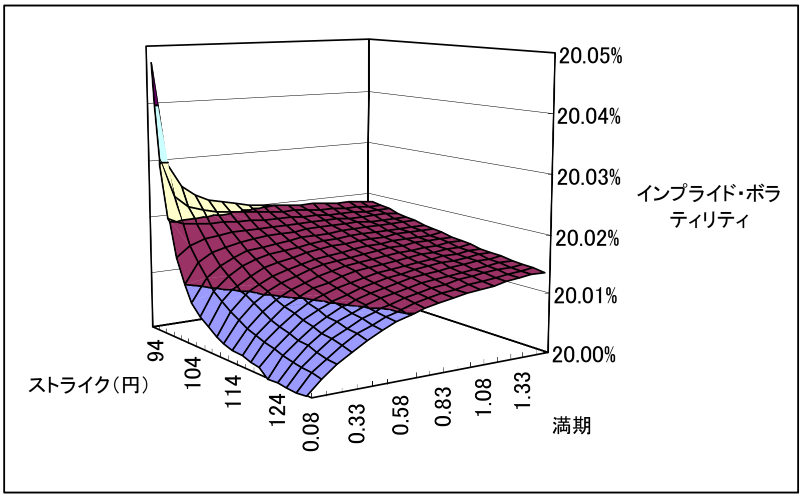
ただし、$\Phi(\cdot)$は標準正規分布の累積確率密度関数、

$$k=E[J-1]=\exp(\mu_J+\sigma_J^2/2)-1.$$

さて、市場で形成されるオプションの価格が、マートン・モデルによる理論価格で、ある程度表現し得るのであれば、マートン・モデルによって求めたオプション価格からBSモデルで逆算したインプライド・ボラティリティは、ボラティリティ・スマイル構造を持つことが予想される。

そこで、マートン・モデルの解析解を用いて算出したコール・オプション価格から、(BSモデルを使って)インプライド・ボラティリティを算出した結果を図表 6に示す[15]。ここでは、$\lambda=1.0\%$、$E[J]=80.0\%$、$\sqrt{V[J]}=5.0\%$、$\sigma=20.0\%$と置いて、0.08〜1.5年まで0.08年毎の満期についてインプライド・ボラティリティを算出した。

図表 6 ボラティリティ・スマイル・サーフェス



されるようになったのには、コンピュータの性能の進歩に伴い、より複雑な数式が比較的容易に扱えるようになったことも背景にあると考えられる。

[15] Merton [1976]のオプション理論価格の挙動を数値例として考察したものに、Navas [2000]がある。

図表 6からは以下のような特徴を指摘できる。まず、満期を一定とすると、インプライド･ボラティリティは､行使価格の水準によって変化するというボラティリティ･スマイルが観察される｡その形状は満期によって変化し､特に満期が長くなると行使価格に徐々に依存しない形状となることがわかる。これは、満期が長いとそれだけジャンプの発生回数が確率的に増え、ジャンプによる価格変動が(3-1)式のトレンド項（dt の項）に平均的に吸収されていき、拡散項（dZ_t の項）による影響が相対的に大きくなるためであると考えられる。こうした特徴は、市場で観測される長期オプションのボラティリティ･スマイルをジャンプ拡散モデルが説明し切れない可能性を示していると考えられる。実際、いくつかの先行研究でも、この可能性が指摘されており（例えば、バクシら＜Bakshi, Cao and Chen [1997]＞）、長期オプションのプライシングには、確率ボラティリティ･モデルを用いることも考えられる。なお、その一方で、短期オプションではジャンプ過程を加えるとモデルの説明力が格段に向上すると指摘されている（Bakshi, Cao and Chen [1997]）。

以上の簡単な数値例により､マートン･モデルは､原資産価格過程にジャンプの効果を織り込むことによって､オプションのボラティリティ･スマイルを表現できる、という利点を持つことが示された。

4. 実際のデータによるジャンプ拡散モデルの検証

本章では、まず、ジャンプ拡散過程のパラメータを推計し、拡散過程よりも原資産価格変動の表現力が向上することを確認する。また、オプション価格データを用いて、マートン･モデルのキャリブレーションを行う。さらに、マートン･モデルを含めた主要なジャンプ拡散モデルを概説する。

（1） ジャンプ拡散過程の推計

本節では、市場データを用いてジャンプ拡散過程の各種パラメータを推計し、ジャンプ拡散過程が、拡散過程に比べ相対的に正確に、原資産価格変動を記述できることを示す。

ジャンプ拡散過程を用いることで原資産価格の収益率分布に関する表現力が向上するか否かを確認するため､日経平均株価指数と円･ドル為替レートの日次変動

に、①ジャンプ拡散過程、②拡散過程[16]の 2 つの過程を仮定して、各々パラメータ推計を行った。ここでは、ジャンプ幅率 J が対数正規分布（$\ln J \sim \Phi(\mu_J, \sigma_J{}^2)$）に従う、複合ポアソン過程を用いたジャンプ拡散過程を用いた（具体的には、(3-1)式に対応した(4-1)式[17]を推計した）。

$$\ln \frac{S_{t+1}}{S_t} = \mu_B + \sigma_B Z_t + \sum_{n=1}^{N_{t+1}-N_t} J_n, \qquad \ln J_n \sim \Phi(\mu_J, \sigma_J{}^2). \tag{4-1}$$

ただし、$\mu_B \equiv \mu - \lambda k - \sigma_B^2/2$である。

その結果を図表 7に示す[18,19]。データは、日経平均株価指数と円･ドル為替レートの過去 5 年間（1997 年 3 月～2002 年 2 月）の日次収益率を用いた。推計は、データ期間の違いによる差の有無も確認するため、1 年間（2001 年 3 月～2002 年 2 月）と 5 年間（1997 年 3 月～2002 年 2 月）の 2 つの期間で行った。

図表 7 ジャンプ拡散過程（上段）と拡散過程（下段）の推計結果

ジャンプ拡散過程				
	日経平均株価指数		円･ドル為替レート	
	1 年間（2001 年 3 月～2002 年 2 月）	5 年間（1997 年 3 月～2002 年 2 月）	1 年間（2001 年 3 月～2002 年 2 月）	5 年間（1997 年 3 月～2002 年 2 月）
μ_B	-0.3950%	-0.0862%	0.0508%	0.0673%
σ_B	1.2042%	1.2032%	0.6014%	0.6027%
λ	0.8155%	0.3189%	0.0000%	0.1516%
μ_J	0.3941%	0.1290%	0.7601%	-0.3937%
σ_J	1.5978%	1.8836%	0.9816%	1.3099%
サンプル数	246	1231	261	1304
対数尤度	-500.71	-2295.5	-236.71	-1482.33

拡散過程				
	日経平均株価指数		円･ドル為替レート	
	1 年間（2001 年 3 月～2002 年 2 月）	5 年間（1997 年 3 月～2002 年 2 月）	1 年間（2001 年 3 月～2002 年 2 月）	5 年間（1997 年 3 月～2002 年 2 月）
μ_B	-0.0737%	-0.0451%	0.0508%	0.0076%
σ_B	1.9057%	1.6081%	0.6014%	0.8082%
サンプル数	246	1231	261	1304
対数尤度	-505.62	-2329.6	-236.71	-1571.4

[16] ここでは、拡散過程として $\ln(S_{t+1}/S_t) = \mu_B + \sigma_B Z_t$ を仮定した。
[17] (3-1)式は連続時点表現であるが、本稿では離散時点表現である(4-1)式を近似的に用いる。
[18] 推計に当たっては、Craine, Lochstoer and Syrtveit [2000]を参考にした。
[19] データは Bloomberg より取得し、推計は GAUSS を用いて行った。

次に、推計されたパラメータを用いたジャンプ拡散過程から算出される主要統計量と実際のデータから計算される統計量を示す（ジャンプ拡散過程の主要統計量の理論式は補論参照）。

図表 8 ジャンプ拡散過程による主要統計量（上段）と実際の統計量（下段）

	日経平均株価指数		円･ドル為替レート	
	1年間（2001年3月～2002年2月）	5年間（1997年3月～2002年2月）	1年間（2001年3月～2002年2月）	5年間（1997年3月～2002年2月）
平均	-0.0736	-0.0451	0.0508	0.0076
	-0.0737	-0.0451	0.0508	0.0076
分散	3.6587	2.5844	0.3617	0.6467
	3.6464	2.5881	0.3630	0.6537
歪度	0.3589	0.1056	0.0000	-0.6083
	0.2229	0.0763	-0.1614	-0.7794
尖度	4.3376	4.8199	3.0000	6.7868
	4.1027	4.8856	3.6289	8.0427

図表 7をみると、ジャンプ拡散過程は、円･ドル為替レートの 1 年間（2001 年 3 月～2002 年 2 月）のデータ･セットを除き、拡散過程に比べて対数尤度がかなり大きい。これより、ジャンプ拡散過程は拡散過程に比べて原資産価格変動に対する表現力が高いことがわかる[20]。一方、円･ドル為替レートの 1 年間（2001 年 3 月～2002 年 2 月）のデータ･セットでは、拡散過程とジャンプ拡散過程で対数尤度に差はなく、通常の拡散過程で十分に原資産価格変動を表現できることを示している。

[20] ジャンプ拡散過程は、拡散過程に比べてパラメータ数が多いため、対数尤度は相対的に大きくなる。ジャンプ拡散過程の表現力の方が優れていることを示すには、ジャンプ拡散過程の対数尤度$\ln L_{JUMP}$と拡散過程の対数尤度$\ln L_{DIFF}$の違いを検討する必要がある。そこで、各データ･セットで$2(\ln L_{JUMP} - \ln L_{DIFF})$という統計量を算出した。統計量をみると、円･ドル為替レートの 2001 年 3 月～2002 年 2 月のデータ･セットでは 0 となった（このデータ･セットでは、ジャンプ拡散過程が拡散過程に比べ説明力が高いとはいえない）ので、これを除き統計量が最も小さい日経平均株価指数の 2001 年 3 月～2002 年 2 月のデータ･セットで尤度比検定を行ってみた。なお、ジャンプ強度（λ）を 0 とすると、ジャンプ拡散過程は拡散過程になり、ジャンプ項の残り 2 つのパラメータ（μ_J, σ_J）が任意となってしまうため、通常の尤度比検定を行うことができない（Garcia [1998]等参照）。このため、本稿では、まず、統計量（$2(\ln L_{JUMP} - \ln L_{DIFF})$）が従う分布をシュミレーションにより算出し、統計量の 10%有意水準を求めた。次に、帰無仮説を拡散過程、対立仮説をジャンプ拡散過程とし、10%水準で尤度比検定を行った。その結果、帰無仮説は棄却された。このことは、統計量が最も小さいデータ･セットで「ジャンプ拡散過程は拡散過程に比べ説明力が高い」ことを示しているので、統計量が相対的に大きいその他のデータ･セットでも同様のことがいえると考えられる（本稿では、その他のデータ･セットの尤度比検定は行っていない）。

また、歪度や尖度は、拡散過程を仮定すると実際の分布に依らず各々0、3 となるが、図表 8では、ジャンプ拡散過程による歪度と尖度は実際の分布のそれらに（拡散過程の場合に比べれば）近い値となることがみてとれる。したがって、ジャンプ拡散過程は、拡散過程が捉え切れない原資産価格変動の特徴を相対的にうまく捉えているといえる。なお、円･ドル為替レートの 1 年間（2001 年 3 月～2002 年 2 月）のデータ･セットでは、この期間の歪度や尖度は正規分布のそれらに比較的近く、この期間にはジャンプ過程で表現されるような大きな価格変動は生じていなかったと解釈できる。

（2） ジャンプ拡散モデル（マートン･モデル）のキャリブレーション

本節では、代表的なジャンプ拡散モデルであるマートン･モデルを用いて、モデルによる理論価格が市場価格に適合するようにパラメータのキャリブレーションを行う[21,22]。

イ.データ

データは、日経平均株価指数オプション（コール）の、2001 年 9 月 3 日（満期 2001 年 10 月 12 日)、2002 年 2 月 20 日（満期 2002 年 3 月 8 日）の取引データを利用した[23]。日経平均株価指数のコール･オプション市場では、極端なイン･ザ･マネー･オプションの流動性が極端に低いという問題点が指摘されている（齋藤･高木[2000]）ことから、ここでは、取引高の少ないデータ[24]は除外した。

ロ.キャリブレーション方法

具体的なキャリブレーションの方法は、S&P500 オプションを対象にキャリブ

---

[21] マートン･モデルを用いたキャリブレーションの具体例を示した文献は少ない。ジャンプ拡散モデルを含む確率ボラティリティ･ジャンプ拡散モデル（後述）のキャリブレーションを行っているものとして Bakshi, Cao and Chen [1997]がある。
[22] 1992 年 6 月以降に満期を迎える日経平均株価指数オプションは、ヨーロピアン･オプションであるので、ヨーロピアン･タイプの価格式であるマートン･モデル（(3-2)式）をそのまま利用できる。
[23] 大阪証券取引所が提供している「デリバティブ取引過去データ」を利用した。
[24] 具体的には、500 単位以下の取引を除いた。なお、1 単位は日経平均株価指数に 1,000 円を乗じた額である。

レーションを行っているバクシらの方法（Bakshi, Cao and Chen [1997]）を参考にした。バクシらは市場価格とジャンプ拡散モデルから算出されるオプション理論価格の誤差の 2 乗和（以下、SSE）、すなわち

$$SSE = \sum_{\substack{\text{キャリブレーションに}\\ \text{使用したオプション}}} \{(\text{市場価格}) - (\text{ジャンプ拡散モデルの理論価格})\}^2, \qquad (4\text{-}2)$$

を目的関数とし、これを最小化することでパラメータをキャリブレートしている。これに対し本稿では、以下の SSE（(4-3)式）を最小にするようにキャリブレートした（(4-2)式とは異なり誤差率で計算）。

$$SSE = \sum_{\substack{\text{キャリブレーションに}\\ \text{使用したオプション}}} \left\{ \frac{(\text{市場価格}) - (\text{ジャンプ拡散モデルの理論価格})}{(\text{市場価格})} \right\}^2, \qquad (4\text{-}3)$$

キャリブレートするパラメータは、①ブラウン運動のボラティリティ係数（σ_B）、②ジャンプ強度（λ）、③ジャンプ幅率の平均（μ_J）、④ジャンプ幅率の標準偏差（σ_J）、の 4 つである[25]。

ハ.キャリブレーションの結果

2001 年 9 月 3 日と 2002 年 2 月 2 日の取引データにキャリブレートした各パラメータを図表 9に示す。

図表 9 マートン･モデルのキャリブレーション結果

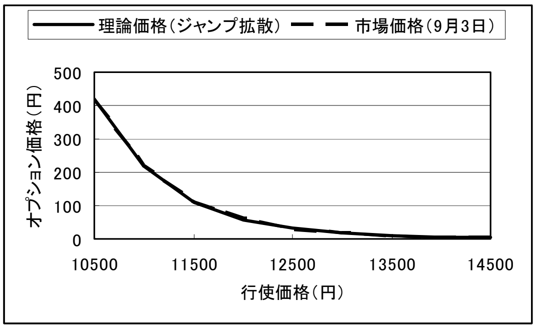
	2001 年 9 月 3 日	2002 年 2 月 20 日
σ_B	0.8486%	1.1898%
λ	2.4358%	1.5544%
μ_J	-4.3252%	-6.2768%
σ_J	10.939%	9.3979%

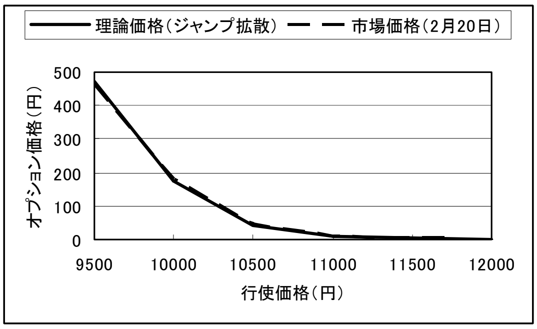
（市場価格との比較）

図表 9のパラメータを用いて算出されるオプション理論価格が市場価格にどの程度適合しているかを図表 10に示す。

[25] キャリブレーションには、Matlab の最適化ルーチン（fmincon）を利用した。なお、パラメータの初期値として、前節の日経平均株価指数の 1 年間（2001 年 3 月～2002 年 2 月）のデータ･セットで推定した値（図表 7参照）を用いた。

図表 10 マートン･モデルから算出される理論価格と市場価格との比較





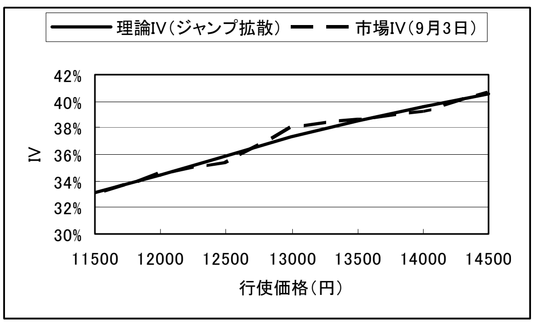
行使価格	2001 年 9 月 3 日		行使価格	2002 年 2 月 20 日	
	市場価格	理論価格		市場価格	理論価格
10,500	415	418.13	9,500	460	485.49
11,000	220	218.05	10,000	180	177.09
11,500	110	110.14	10,500	45	44.49
12,000	60	60.25	11,000	10	10.15
12,500	30	32.43	11,500	3	2.970
13,000	20	17.52	12,000	1	1.002
13,500	10	9.587			
14,000	5	5.315			
14,500	3	2.978			

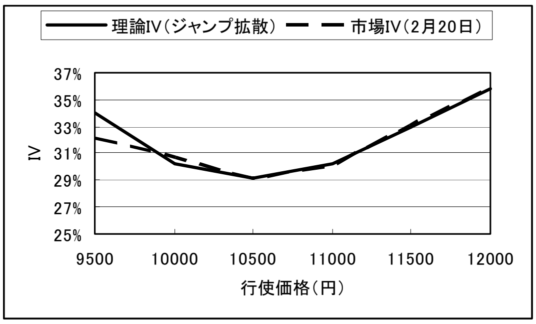
図表 10から、マートン･モデルは、市場価格にかなり適合するようにパラメータをキャリブレートできていることがわかる。

(ボラティリティ･スマイルの比較)

次に、市場で実際に観察される①ボラティリティ･スキュー、②(狭義の)ボラティリティ･スマイル(脚注5参照)を表現できるか否かを確認する。図表 11に市場価格から BS モデルを用いて算出されるインプライド･ボラティリティと、マートン･モデル(図表 9のパラメータを適用した)で算出される理論価格から BS モデルを用いて算出される同ボラティリティ(年率表記)を示す。

図表 11 ボラティリティ･スマイルの表現





図表 11左図は、2001 年 9 月 3 日に観察されたボラティリティ･スキューであり、マートン･モデルはこれを比較的正確に再現している。さらに、図表 11右図は、2002 年 2 月 20 日に観察された狭義のボラティリティ･スマイルであり、やはりマートン･モデルはこれをかなり忠実に再現している。このことから、マートン･モデルは、市場で観察されるボラティリティ･スマイルをある程度正確に表現できることがわかる。

（キャリブレーションの留意点）

上記で示した簡単な事例では、ジャンプ拡散モデル（マートン･モデル）は、市場価格にうまく適合し、ボラティリティ･スマイルをかなりよく表現し得た。

しかし、本稿では具体的には示さなかったが、キャリブレーションの際には、与える初期値によって、キャリブレートされたパラメータが安定しないという問題が生じた。この背景には、SSE（(4-3)式）の複雑な関数形により、キャリブレートされたパラメータがいわゆる局所解となっている可能性を指摘できる。実務で実際にジャンプ拡散モデルを利用する際には、特定の初期値のみではなく、幾つか初期値を変えてキャリブレーションを行い、それらの結果を比較検討する等の手続きが必要であると考えられる[26]。

（3） ジャンプ拡散モデルのバリエーション

ここでは、マートン･モデルを含めたジャンプ拡散モデル（複合ポアソン過程によるオプション価格付けモデル）のバリエーションをみていく。具体的には、ジャンプ拡散モデルのジャンプ幅率 J にどのような確率変数を仮定するかによって、イ．定数ジャンプ幅率モデル、ロ．対数正規分布ジャンプ幅率モデル、ハ．ラプラス分布ジャンプ幅率モデル、という３つのバリエーションに分けて簡単に解説する。

[26] また、本稿の事例では、同一の満期を持つオプションのデータのみでキャリブレーションを行ったが、本来は、市場で観測される、各種の満期を持つオプション･データを同時にキャリブレートすることが望ましい。ただし、本稿の作成過程では実際に各種の満期を持つオプション･データに上記のキャリブレーション方法を適用してみたが、必ずしも良好な結果は得られなかった。このため、実務で実際にキャリブレーションを行う際には、本稿で採用した方法以外の、より効率的な方法を検討する必要があると思われる。

イ．定数ジャンプ幅率モデル

これは、(3-1)式のジャンプ幅率を定数としたモデルであり、ブロックハウスら（Brockhaus *et al*. [1999]）などにより提案された。このモデルの利点は、オプション価格の解析解を求めることができる上、ジャンプ･リスク･プレミアムを定数として簡便に導出できることにある。

ロ．対数正規分布ジャンプ幅率モデル（マートン･モデル）

マートン･モデルは、ジャンプ幅率に対数正規分布を仮定している。このモデルの利点は、「ジャンプ変動は分散可能であり、ジャンプ･リスク･プレミアムは 0 である」との仮定を置く[27]ことで、オプション価格の解析解が求められ、ジャンプ幅率に不確実性を導入し得ることである。また、上述のように市場価格に整合的なボラティリティ･スマイルを表現することが可能である。

ハ．ラプラス分布ジャンプ幅率モデル

これは、コウ（Kou [2001]）によって提案されたモデルで、ジャンプ幅率にラプラス分布（2 重指数分布）を仮定する。このモデルの利点は、ファット･テール性のある分布を作成しやすい上､左右非対称な分布を作ることが可能な点である。なお、リプトン（Lipton [2002]）は、経路依存型のオプション（例えば、バリア･オプションなど）の価格付けに、ラプラス分布ジャンプ幅率モデルが有効であると指摘している。

5. ジャンプ過程を導入することに伴う理論的問題とそれへの対応

前章までは、ジャンプ過程を導入することによるメリット（原資産価格変動分布の表現力向上、およびボラティリティ･スマイルの表現力向上）を解説した。本章では、ジャンプ過程を導入することにより生じる理論的な問題点を整理し、それに対してどのような対応が図られているかを整理する。

BS モデルでは、原資産価格過程の不確実性の根元は拡散項（ブラウン運動）のみである。このため、無リスク資産、原資産、オプションからなる市場では、原

[27] この仮定に関しては 5 章でやや詳しく説明する。

資産と無リスク資産からなるポートフォリオを各時点で組み替えることによりオプションのペイオフを“複製”することが可能である（この組み替え操作をダイナミック･ヘッジと呼ぶ)。つまり BS モデルは、いずれか 2 つの資産を用いて、残りの 1 つの資産を複製することが可能であることを前提としている。

一方、ジャンプ拡散モデル等のジャンプ過程を用いたモデルでは、(3-1)式のように Z_t 以外にポアソン過程 N_t による不確実性が存在する[28]。このため一般的に原資産とそのオプションの 2 つだけでは、不確実性のないポートフォリオを構築することが不可能となる。したがって、無リスク資産、原資産、オプションからなる市場では、いずれか 2 つの資産を用いて、残りの 1 つの資産を複製することができなくなり、自己充足性と無裁定条件[29]を使ってオプション価格を決定することはできない。つまり、ブラウン運動とポアソン過程の 2 つを不確実性の根元に持つ場合、リスク資産が原資産とそのオプションの 2 資産しかないときには、無リスク･ポートフォリオを構築できないという市場の非完備性の問題が生じる。

この問題に対応するため、マートン（Merton [1976]）は、「ジャンプのリスクは分散可能であり、プレミアムは要求されない（ジャンプのリスクに対してリスク中立性を仮定することができる)」というロジックを構築し、そのロジックの下で、オプション価格付けモデルを考案した。これが前章までに検討してきたマートン･モデルである。

しかし、マートン･モデルの「ジャンプのリスクは分散可能であり、プレミアムは要求されない」というロジックの妥当性に関しては議論があり、マートン･モデルの出現後、投資家の要求するリスク･プレミアムを明示的に考慮しようとする各種アプローチが有効な手段として検討されている。

それらのアプローチの基本的な考え方は、確率測度（リスク中立測度）を明示的に扱うということである。リスク中立測度を求めるための幾つかの方法が考えられている。まず、投資家の効用関数を明示的に仮定して、リスク･プレミアムそのものを求めるという方法がある。また、投資家の効用関数を仮定せず、リスク中立測度に特定の仮定を置く形で投資家のリスク･プレミアムを織り込むというアプローチもある。

前者の投資家の効用関数を明示的に仮定するアプローチとしては、例えばベイ

---

[28] 正確には、ジャンプ幅率に関する不確実性も存在している。
[29] ここでは、複製ポートフォリオを構成する各資産の保有高を有限とする。

ツ（Bates [1991]）によるモデルがある[30]。ベイツは、代表的投資家にべき型効用関数（power utility function）を仮定して、オプション価格付けモデルを求めている。

後者のアプローチの例として、宮原（Miyahara [2001]）は最小エントロピー･マルチンゲール測度（Minimal Entropy Martingale Measure <MEMM> [31]）という概念を利用し、より一般的なジャンプ変動を表現できる（幾何）レビィ過程を用いたオプション価格評価モデルを構築している[32]。

6. ジャンプ拡散モデル以外のオプション価格付け手法

本章では、BS モデルが表現し得ないボラティリティ･スマイルを表すことができるオプション価格付け手法のうち､ジャンプ拡散モデル以外の手法を概説する。

（a）ポアソン過程を複数用いたモデル

原資産価格の変動過程に(3-1)式で用いた複合ポアソン過程ではなく[33,34]、ポアソン過程を複数用いるモデルがある。例えば、レオンら（León *et al.* [2002]）は、レ

---

[30] Bates [1991]では、1987 年 10 月の米国株式相場の暴落（いわゆるクラッシュ）を対象に市場参加者が株価暴落を予想していた可能性があるか否かを検証するために、ジャンプ拡散モデルを採用した。そこでは、原資産価格がジャンプ拡散過程に従うとの仮定を置き、1987 年 6 月～8 月の間、S&P500 先物オプション市場価格から求められる将来の予想原資産価格の確率分布にマイナス方向の裾が厚い性質（negative skewed）がみられること（つまりマイナス方向へのジャンプが予想されていたこと）等を示し、クラッシュは市場で予測されていたと結論づけている。

[31] MEMM は、ある情報量（相対エントロピー）を最小とする確率測度である。フリッテリ（Frittelli [2000]）は、相対エントロピーの最小化が指数型効用関数（exponential utility function）の最大化と関連が強いことを示している。なお、BS モデルでのリスク中立測度も MEMM となっている。

[32] チャン（Chan [1999]）も同様の試みを行っている。

[33] これらのほかにも、グラサマンら（Glasserman and Kou [2000]）は、複合ポアソン過程をさらに一般化しマーク付き点過程でモデル化している（マーク付き点過程については、Bremaud [1981]等が詳しい）。ただし、グラサマンらのモデルでは、オプション価格が複雑な表現となるため、解析解は複合ポアソン過程の場合のみ示されている。グラサマンらのモデルは、金利モデルの１つとして近年注目されている BGM モデル（Brace, Gątarek and Musiela [1997]）にジャンプ変動の効果を導入したものである（補論参照）。

[34] また、マダンら（Madan, Carr and Chang [1998]）は原資産価格のジャンプ変動を表現可能なモデルとして、バリアンス･ガンマ過程（Variance Gamma Process）と呼ばれる確率過程を用いたオプション価格付けモデルを提案している。

ビィ過程の上でオプション価格付けモデルを示した後、その具体例として複合ポアソン過程を複数個のポアソン過程で近似できることを利用して、原資産価格過程が複数個のポアソン過程からなるジャンプ変動過程を含んだ場合でのオプション価格の解析解を導出した。また、サミュエリデスら（Samuelides and Nahum [2001]）は、ポアソン過程の個数を 2 つに限定し、各々のポアソン過程に正と負の定数ジャンプ幅率を対応させることで、オプション価格の近似的解析解を提案している[35]。

（b）ボラティリティ変動モデルを用いるアプローチ

ボラティリティが高い時期、低い時期がしばらくの間継続するという金融市場の傾向を踏まえ、ボラティリティに時間変動性を持たせたのがボラティリティ変動モデルである[36]。ボラティリティ変動モデルは、さらに大きく 2 つに分割することができる。1 つは、ある時点のボラティリティを直前の時点までに値がわかっている変数だけの確定的な関数として定式化するもので、ARCH（AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity）モデルとその派生モデルがそれに該当する。もう 1 つは、ボラティリティ自身が確率過程に従い、ある時点のボラティリティが直前の時点までに値がわかっている変数だけではなく当該時点の確率変数の値に依存するというモデルで、確率ボラティリティ・モデル[37]（Stochastic Volatility Model）と呼ばれている。例えば、ヘストン（Heston [1993]）はフーリエ変換を用いて確率ボラティリティ・モデルでのオプション価格を導出している。

なお、ジャンプ拡散モデルと確率ボラティリティ・モデルを合わせたモデル（確率ボラティリティ・ジャンプ拡散モデル）も提案されている（Bates [1996]、Scott [1997]）。

（c）インプライド・ツリー・アプローチ

原資産価格過程に明示的なモデルを仮定しない方法としては、インプライド・

[35] ボラティリティ・スキューだけでなく狭義のボラティリティ・スマイルも表現可能であり、かつ扱いやすいという特徴を持つ。
[36] ボラティリティ変動モデルの詳細は、渡部[2000]を参照。
[37] 確率ボラティリティ・モデルに関しては、Wiggins [1987]や Hull and White [1987]以降多くの研究が行われている。

ツリーによるアプローチが考案されている（Derman and Kani [1994]、Rubinstein [1994]）。インプライド･ツリーによるアプローチは、オプション価格理論における格子法を拡張した手法であり、市場で観測されるオプション価格からリスク中立測度下での満期における原資産価格分布を導出する。新たなオプションを価格付けする際には、この原資産価格分布を用いて、現在の市場価格と整合的にそのオプションの理論価格を算出する手法である。

（d）ファット･テール性を有する分布を仮定するモデル

その他の方法としては、例えば、原資産価格の収益率分布のファット･テール性に注目するモデルがある。デンプスターら（Dempster and Pliska [1997]）やポポヴァら（Popova and Ritchken [1998]）は、原資産価格の収益率分布に直接、ファット･テール性のある分布――例えば安定パレート分布（Stable Paretian Distribution）――を仮定しオプション価格付けを試みている。

7. おわりに

本稿では、BS モデルの各種拡張モデルの中で、原資産価格の動きが拡散過程にジャンプ過程を加えた複合過程（ジャンプ拡散過程）に従うと仮定したモデル（ジャンプ拡散モデル）に焦点を当てて、モデルの枠組みやオプション価格の算出方法の解説、実際のデータを用いたキャリブレーション等を行い、モデルの有効性等を考察した。

ジャンプ拡散モデルは、原資産価格の変動をよりうまく表現できることや BS モデルの仮定と相反するボラティリティ･スマイルを説明し得るという点で、オプション商品等の価格付けには有用であると考えられる。ただし、ジャンプ拡散モデルを実際に実務で利用するに当っては、モデルの妥当性（パラメータに対する仮定等）や具体的なキャリブレーションの扱い（キャリブレーション方法、使用するデータ等）といった点で、留意が必要である。

以　上

補論

（1） ポアソン過程、複合ポアソン過程[38]

ゼロ以上の整数値をとる計数過程[39] $\{N_t\}, (t \geq 0, N_0 = 0)$ が、

$$P(N_t - N_s = n) = \frac{(\int_s^t \lambda(u)du)^n}{n!} \exp\{-\int_s^t \lambda(u)du\}, (n = 0,1,\cdots). \quad \text{(A-1)}$$

を満たすとき、$\{N_t\}_{t \geq 0}$ を「強度関数[40]（intensity function）を $\lambda(\cdot)$ とするポアソン過程（Poisson Process）」と呼ぶ[41]。ただし、$\lambda(\cdot)$ は時間に関する確定的な関数で非負の値をとるものとする。

以下では、簡単化のため強度関数 $\lambda(\cdot)$ を時間に依存しない定数 λ とし、

$$P(N_t - N_s = n) = \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!} \exp\{-\lambda(t-s)\}, (n = 0,1,\cdots). \quad \text{(A-2)}$$

を満たす計数過程 $\{N_t\}$ をポアソン過程と呼ぶ。

ジャンプが生じた回数をポアソン過程に対応させれば、時刻 t までに n 回のジャンプが発生する確率は、

$$P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t), (n = 0,1,\cdots). \quad \text{(A-3)}$$

と計算できることになる。

さて、ポアソン過程では、対象とする事象が生じた際の計数の変化量は 1 と定められている。しかし、毎回のジャンプにおいてそのジャンプ幅が変化を考慮することができればより好ましい。そこで、ポアソン過程 $\{N_t\}_{t \geq 0}$ と互いに独立で同一の確率分布に従う確率変数列 $\{J_n; n = 1,2,\cdots\}$ を用いて、新しい確率過程 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ を次のように定義する（ただし、$\{N_t\}$ と $\{J_n\}$ も互いに独立とする）。

---

[38] ここでの説明は、伏見 [1987]を参考にした。

[39] 計数過程とは、注目している特定の現象が起きた回数（例えば、ある時間内に電話が掛かってくる回数）の経時変化を表すものである。

[40] 強度は、直観的に次のように理解できる。観測対象とする事象が、時間区間 $[t, t + \Delta t)$ に発生する確率の 1 次近似は、$\int_t^{t+\Delta t} \lambda(s)ds$ で与えられる。Δt が微小であるとき、この積分は $\lambda(t)\Delta t$ と近似できる。したがって、強度は各時点でのその事象の「起こりやすさ」を表している。

[41] $\lambda(\cdot)$ が時間の関数になっている場合を非斉次ポアソン過程、$\lambda(\cdot)$ が時間に依らず一定である場合を斉次ポアソン過程と呼び分けることもある。

$$Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} J_n \, . \tag{A-4}$$

$\{Y_t\}_{0\le t}$を「複合ポアソン過程（Compound Poisson Process）」と呼ぶ。複合ポアソン過程は計数過程ではないが、ジャンプ幅の変化をモデル化することができるため、柔軟性が高い。

$\{Y_t\}$の分布を一般的に簡単な形で記述することは難しいが、$\{Y_t\}$の特性関数（$\varphi_{Y_t}(u) = E[\exp(iuY_t)]$）は$\{J_n\}$の特性関数$\varphi_J(u) = E[\exp(iuJ_n)]$を使って、以下のように書くことができる。

$$\varphi_{Y_t}(u) = E[\lambda t\{\varphi_J(u) - 1\}] \, . \tag{A-5}$$

例えば、$\{J_n\}$の従う分布を正規分布とすると、$\varphi_J(u) = \exp(i\mu u - \sigma^2 u^2/2)$であるので、(A-5)式は、

$$\varphi_{Y_t}(u) = E[\lambda t\{e^{i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} - 1\}] \, . \tag{A-6}$$

となる。

（2） オプション価格の導出方法

ここでは、本論で示したマートン・モデルでの解析解（(3-2)式）の導出方法を簡単に解説する。マートン・モデルでは、原資産価格が(3-1)式に従うと仮定している。

マートンは、原資産S_t（以下、Sと記述することがある）の上に書かれた派生商品の価格$C(S,t)$（以下、C、C_tと記述することがある）に伊藤の公式を利用すると、派生商品価格は次の確率微分方程式を満たさなければならないとした（以下では、(3-1)式のσ_Bをσと置き換えて表記する）。

$$\frac{dC(S,t)}{C(S,t)} = (\mu_C - \lambda k_C)dt + \sigma_C dZ_t + (J_C - 1)dN_t \, . \tag{A-7}$$

ただし、$C(S,t)\mu_C \equiv \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 C(S,t)}{\partial S^2} + (\mu - \lambda k) S \dfrac{\partial C(S,t)}{\partial S}$

$$+ \frac{\partial C(S,t)}{\partial t} + \lambda \mathbf{E}[C(JS,t) - C(S,t)],$$

$$\sigma_C \equiv \frac{\dfrac{\partial C(S,t)}{\partial S}\sigma S}{C(S,t)}, \quad k_C \equiv \mathbf{E}[J_C - 1], \quad J_C \equiv \frac{C(JS,t)}{C(S,t)} \, .$$

次に２つの資産S、Cから構成されるポートフォリオ$V_t(\theta_t)$を考える。BS モデルにおけるデルタ・ヘッジの方法と同様に、

$$\theta_t\sigma+(1-\theta_t)\sigma_C=0, \tag{A-8}$$

となる投資比率$\theta_t:1-\theta_t$のポートフォリオを考えれば、Z_tに関する不確実性はこのポートフォリオから除去することができる。しかし、ポートフォリオは、

$$\frac{dV_t(\theta_t)}{V_t(\theta_t)}=[\theta_t(\mu-\lambda k)+\{1-\theta_t\}(\mu_C-\lambda k_C)]dt+[\theta_t(J-1)+\{1-\theta_t\}(J_C-1)]dN_t,$$

という関係を満たし、ここには、依然としてジャンプに関する不確実性（dN_tの項）が残っている。

そこで、マートンは、「ジャンプ・リスクに対するリスク・プレミアムはゼロ」と仮定し、取引θ_tを行う$V_t(\theta_t)$の収益率は無リスク金利と等しい。すなわち、

$$\theta_t\mu+(1-\theta_t)\mu_C-r=0, \tag{A-9}$$

が成立するとした。よって(A-8)、(A-9)式よりθ_tを消去すれば、

$$\frac{\mu-r}{\sigma}=\frac{\mu_C-r}{\sigma_C}, \tag{A-10}$$

となる。(A-10)式に(A-7)式を代入すると、

$$\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2C(S,t)}{\partial S^2}+(r-\lambda k)S\frac{\partial C(S,t)}{\partial S} \tag{A-11}$$
$$+\frac{\partial C(S,t)}{\partial t}-rC(S,t)+\lambda\mathbf{E}[C(JS,t)-C(S,t)]=0,$$

となる。

後は、境界条件$C(0,t)=0$、$C(S,0)=\{S-K\}_+$を満たすような解を見つければよい。Merton [1976]では、(3-2)式は(A-11)式の偏微分方程式を満たしていることを示している。

次に、「リスク中立化法[42]」によるオプション価格の導出を示す。この手法は、何らかの方法でリスク中立測度を決めることができれば、偏微分方程式を利用しなくてもよいという利点がある[43]。まず、リスク中立測度$\mathbf{Q}^*$の存在を仮定し、リスク中立測度での原資産価格の確率過程を次のように仮定する。

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \lambda^* k^*)dt + \sigma dZ_t^* + (J^* - 1)dN_t^* .$$

ただし、$\mathbf{Q}^*$の下で、Z_t^*は標準ブラウン運動、N_t^*は生起率λ^*のポアソン過程とする（J^*はS_tが解を持つための条件を満たしていると仮定する）。

リスク中立化法によりコール価格は、

$$C_0 = \mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T],$$

であるので（$\mathbf{E}^*[\cdot]$は$\mathbf{Q}^*$の下での期待値演算子を表す）、ジャンプが起った回数で場合分けを行えば、コール価格は、満期Tまでにジャンプが丁度n回起こる確率を$\mathbf{P}_n$として、

$$C_0 = \mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T] = \mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T{}^0]\mathbf{P}_0 + \mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T{}^1]\mathbf{P}_1 + \cdots,$$

となる。したがって、

$$C_0 = \mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T{}^n]\mathbf{P}_n ,$$

と表現することができる。ただし、$C_T{}^n$は満期までにジャンプがn回起こった場合のコール･オプションのペイオフである。

ジャンプは生起率λ^*のポアソン過程に従って起こるため、

$$\mathbf{P}_n = \frac{e^{-\lambda^* T} (\lambda^* T)^n}{n!},$$

となる。したがって、

$$C_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda^* T} (\lambda^* T)^n}{n!} \mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T{}^n], \tag{A-12}$$

となる。

次に、満期までにジャンプがn回起こった場合の原資産価格を$S_T{}^n$、i回目のジ

42 リスク中立化法は、木島 [1999]等を参照。
43 例えば、イェンセン（Jensen [1999]）等を参照。

ャンプ幅率を$J_i^{\ *}$とすると、

$$S_T^{\ n} = S_0 \exp[(r - \lambda^* k^* - \sigma^2/2)T + \sigma Z_T^{\ *} + \sum_{i=0}^{n} \ln J_i^{\ *}]$$

$$= \exp[(r - \lambda^* k^* - \sigma^2/2)T + \sigma Z_T^{\ *} + \sum_{i=0}^{n} \ln J_i^{\ *} + \ln S_0],$$

となる（ラムベルトン・ラペール [2000]参照）。

ここで、$Y = (r - \lambda^* k - \sigma^2/2)T + \sigma Z_T^{\ *} + \sum_{i-0}^{n} \ln J_i^{\ *} + \ln S_0$ と置く。$\ln J_i^{\ *} \sim \Phi(\mu_J^{\ *} - \sigma_J^{\ 2}/2, \sigma_J^{\ 2})$との仮定から、$Y$は正規分布に従う。$Y$の平均と分散をそれぞれ$\mu_Y$、$\sigma_Y^{\ 2}$とすると、

$$\mu_Y = (r - \lambda^* k^* - \sigma^2/2)T + n(\mu_J^{\ *} - \sigma_J^{\ 2}/2) + \ln S_0,$$

$$\sigma_Y^{\ 2} = \sigma^2 T + n\sigma_J^{\ 2},$$

と表せる[44]。

ここで、(A-12)式中の$\mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T^{\ n}]$に注目すると次のようになる。

$$\mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T^{\ n}] = \mathbf{E}^*[e^{-rT}\{S_T^{\ n} - K\}_+] = \mathbf{E}^*[e^{-rT}\{e^Y - K\}_+],$$

ただし、$Y \sim \Phi(\mu_Y, \sigma_Y^{\ 2})$。

以下では、まず$\mathbf{E}^*[e^{-rT}\{e^Y - K\}_+]$を求める。$\sigma_n^{\ 2} = \sigma^2 + n\sigma_J^2/T$とおけば、$\sigma_Y^{\ 2} = \sigma_n^{\ 2} T$より、

$$\mathbf{E}^*[e^{-rT}\{e^Y - K\}_+] = \mathbf{E}^*[e^{-rT}\{e^{\mu_Y + \frac{\sigma_Y}{\sqrt{T}} Z_T^{\ *}} - K\}_+]$$

$$= \mathbf{E}^*[e^{-rT}\{e^{(r - \lambda^* k^* - \frac{1}{2}\sigma^2)T + n(\mu_J^{\ *} - \frac{1}{2}\sigma_J^{\ 2}) + \ln S_0 + \sigma_n Z_T^{\ *}} - K\}_+]$$

$$= \mathbf{E}^*[e^{(-\lambda^* k^* + \frac{n}{T}\mu_J^{\ *})T + \ln S_0}\{e^{-\frac{1}{2}\sigma_n^{\ 2} T + \sigma_n Z_T^{\ *}} - e^{-(r - \lambda^* k^* + \frac{n}{T}\mu_J^{\ *})T - \ln S_0} K\}_+],$$

となる。ここで、$r_n = r - \lambda^* k^* + n\mu_J^{\ *}/T$、$Y_n = -\sigma_n^{\ 2} T/2 + \sigma_n Z_T^{\ *}$、$K_n = e^{-r_n T - \ln S_0} K$と置くと、

$$\mathbf{E}^*[e^{-rT}\{e^Y - K\}_+] = \mathbf{E}^*[e^{(r_n - r)T + \ln S_0}\{e^{Y_n} - K_n\}_+]$$

$$= e^{(r_n - r)T + \ln S_0} \mathbf{E}^*[(e^{Y_n} - K_n) 1_{\{e^{Y_n} \geq K_n\}}]$$

[44] 仮定より、$Z_T^{\ *}$と$\ln J_i^{\ *}$は互いに独立である。

$$= e^{(r_n - r)T + \ln S_0}\mathbf{E}^*[e^{Y_n}1_{\{e^{Y_n} \ge K_n\}}] - e^{(r_n - r)T + \ln S_0}K_n\mathbf{E}^*[1_{\{e^{Y_n} \ge K_n\}}],$$

となる。

右辺第２項は、

$$e^{(r_n-r)T+\ln S_0}K_n\mathbf{E}^*[1_{\{e^{Y_n}\ge K_n\}}] = e^{(r_n-r)T+\ln S_0}K_n\mathbf{P}\{Y_n \ge \ln K_n\}$$

$$= e^{(r_n-r)T+\ln S_0}K_n\mathbf{P}\{\frac{Y_n + \sigma_n{}^2T/2}{\sigma_n\sqrt{T}} \ge \frac{\ln K_n + \sigma_n{}^2T/2}{\sigma_n\sqrt{T}}\}$$

$$= e^{(r_n-r)T+\ln S_0}K_n\Phi(\frac{\ln(1/K_n) - \sigma_n{}^2T/2}{\sigma_n\sqrt{T}}),$$

$\because \quad Y_n \sim \Phi(-\sigma_n{}^2T/2, \sigma_n{}^2T)$

$$= e^{-rT}K\Phi(\frac{\ln(S_0/K) + (r_n + \sigma_n{}^2/2)T}{\sigma_n\sqrt{T}} - \sigma_n\sqrt{T}),$$

となる。

次に右辺第１項を考える。新しい確率変数 $X_n \sim \Phi(\sigma_n{}^2T/2, \sigma_n{}^2T)$ を導入すると、右辺第１項は、

$$e^{(r_n - r)T + \ln S_0}\mathbf{E}^*[e^{Y_n}1_{\{e^{Y_n} \ge K_n\}}] = e^{(r_n - r)T + \ln S_0}\mathbf{P}\{e^{X_n} \ge K_n\},$$

となる[45]。したがって、右辺第２項の場合と同様に、

$$e^{(r_n-r)T+\ln S_0}\mathbf{E}^*[e^{Y_n}1_{\{e^{Y_n}\ge K_n\}}] = S_0e^{(r_n-r)T}\Phi(\frac{\ln(S_0/K) + (r_n + \sigma_n{}^2/2)T}{\sigma_n\sqrt{T}}),$$

となる。

したがって、$d_1 = \dfrac{\ln(S_0/K) + (r_n + \sigma_n{}^2/2)T}{\sigma_n\sqrt{T}}$、$d_2 = d_1 - \sigma_n\sqrt{T}$ とおけば、

$$\mathbf{E}^*[e^{-rT}\{e^Y - K\}_+] = e^{-rT}[e^{r_nT}S_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)],$$

---

45 $\mathbf{E}[e^{Y_n}1_{\{e^{Y_n} \ge K_n\}}] = \mathbf{P}\{e^{X_n} \ge K_n\}$ は次のように示すことができる。

$$\mathbf{E}[e^{Y_n}1_{\{e^{Y_n} \ge K_n\}}] = \int_{\ln K_n}^{\infty} e^y \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma_n}\exp\left\{-(y + \sigma_n^2T/2)^2/(2\sigma_n^2T)\right\}dy$$

$$= \int_{\ln K_n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma_n}\exp\left\{-(y - \sigma_n^2T/2)^2/(2\sigma_n^2T)\right\}dy = \mathbf{P}\{e^{X_n} \ge K_n\}.$$

となる。

この式を(A-12)式に代入することによって、以下のコール価格が求められる。

$$C_0 = e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda^* T} (\lambda^* T)^n}{n!} [e^{r_n T} S_0 \Phi(d_1) - K\Phi(d_2)] .$$

(3) マートン･モデルの各種感応度の理論式

マートン･モデル（(3-2)式）C の S_0、σ_B、T、λ、μ_J、σ_J に対する感応度を計算した（S_0 については、2 次まで計算した）。その結果は以下のとおりである。

$$\frac{\partial C}{\partial S_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T} (\lambda' T)^n}{n!} \Phi(d_1) . \tag{A-13}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial {S_0}^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T} (\lambda' T)^n}{n!} \frac{1}{\sigma_B S_0 \sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{{d_1}^2}{2}} . \tag{A-14}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma_B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T} (\lambda' T)^n}{n!} \frac{\sigma_B}{\sigma_n} \sqrt{\frac{T}{2\pi}} S_0 e^{-\frac{{d_1}^2}{2}} . \tag{A-15}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T} (\lambda' T)^n}{n!} [\{-\lambda' + \frac{n}{T}\}\{S_0 \Phi(d_1) - K e^{-r_n T} \Phi(d_2)\} \\ + \frac{{\sigma_B}^2 S_0}{2\sigma_n \sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{{d_1}^2}{2}} + K e^{-r_n T} (r - \lambda k) \Phi(d_2)] \end{aligned} . \tag{A-16}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T} (\lambda' T)^n}{n!} [\{\frac{n}{\lambda} - (1+k)T\}\{S_0 \Phi(d_1) - K e^{-r_n T} \Phi(d_2)\} \\ - kTK e^{-r_n T} \Phi(d_2)] \end{aligned} . \tag{A-17}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \mu_J} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T} (\lambda' T)^n}{n!} (n - \lambda' T) S_0 \Phi(d_1) . \tag{A-18}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma_J} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T} (\lambda' T)^n}{n!} \sigma_J S_0 \{(n - \lambda' T) N(d_1) + \frac{n}{\sigma_n \sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{{d_1}^2}{2}}\} . \tag{A-19}$$

（4） ジャンプ拡散過程の主要統計量の理論式

(4-1)式の主要統計量の理論式は以下のとおりである。

平均：　$\mu_B + \lambda \mu_J$.　(A-20)

分散：　$\sigma_B{}^2 + \lambda(\mu_J{}^2 + \sigma_J{}^2)$.　(A-21)

歪度：　$\dfrac{\lambda(\mu_J{}^3 + 3\mu_J \sigma_J{}^2)}{(\sigma_B{}^2 + \lambda\sigma_J{}^2 + \lambda\mu_J{}^2)^{\frac{3}{2}}}$.　(A-22)

尖度：　$3 + [\dfrac{\lambda(\mu_J{}^4 + 6\mu_J{}^2\sigma_J{}^2 + 3\sigma_J{}^4)}{(\sigma_B{}^2 + \lambda\sigma_J{}^2 + \lambda\mu_J{}^2)^2}]$.　(A-23)

（5） グラサマン･コウ･モデル（Glasserman and Kou [2000]）

グラサマン･コウ･モデルは、BGM モデル[46]（Brace, Gątarek and Musiela [1997]）を金利のジャンプ変動[47]も勘案するように変更を加えたモデルである。グラサマンらは、マーク付き点過程によりジャンプ変動を記述し、特にその中でもジャンプ変動が複合ポアソン過程で記述される場合における、キャップ･フロア、スワプションの解析解を導出した。また、それらによって、BGM モデルが理論的に表現することができない市場で観測されるスマイル構造を表現できることを計算例を通じて示した。グラサマン･コウ･モデルでは、キャップの解析解とスワプションの解析解はほぼ同一の枠組みで求めることが可能である。本節では、キャップの解析解を紹介し、数値例を通じて考察を行う。

イ．キャップ･フロア価格の解析解

キャップは、キャプレット（コール･オプション）の集合体と考えることができるので、以下では個々のキャプレット価格の解析解を導出する。

まず、期間$[T_n, T_{n+1}]$に対応するフォワード LIBOR を、$L_n(t)$と書く。期間が$[T_n, T_{n+1}]$でストライク･プライスがKのキャプレットとは、時刻T_{n+1}でペイオフ

[46] BGM モデルについては、森本･吉羽 [1999]や石山 [2002]等を参照。

[47] 金利変動にジャンプ変動を仮定したモデルとしては、白川（Shirakawa [1991]）等がある。白川は、短期金利の変動過程に複数のポアソン過程を適用し、HJM モデル（Heath, Jarrow and Morton [1992]）の枠組みをジャンプ過程を含んだ枠組みへ拡張した。

$\delta(L_n(T_n)-K)^+$を得る証券のことである[48]（δは利払い時点間の間隔＜定数＞）。

フォワード LIBOR の過程$L_n(t)(n=1,\dots,M)$が、フォワード測度[49]の下で、以下の確率微分方程式に従うとする。

$$\frac{dL_n(t)}{L_n(t)}=\alpha_n(t)dt+\gamma_n(t)dW_n(t)+dJ_n(t), \qquad 0\le t\le T_n. \tag{A-24}$$

ただし、$\alpha_n(t)$はドリフト[50]、$\gamma_n(t)$は確定的で有界かつ区分的に連続な関数である。また、$J_n(t)$はジャンプを表わす項で、$\ln(Y_n-1)$が平均m_n、分散$s_n{}^2$の正規分布に従う独立な確率変数Y_nを用いて以下の(A-25)式で表わされる。

$$J_n(t)=\sum_{j=1}^{N_{T_n}}\left(Y_j-1\right). \tag{A-25}$$

以上の確率微分方程式に従い、ペイオフ$\delta(L_n(T_n)-K)^+$を持つ証券（キャプレット）の価格を、フォワード中立化法を使って求める。

満期がT_{n+1}の割引債$B(t,T_{n+1})$を基準財とし、時刻tでのn番目のキャプレット価格$C_n(t)$の相対価格がマルチンゲールとなるような測度（フォワード測度と呼ぶ）を選び、これを$\mathbf{P}_{n+1}$と書く。求めるキャプレット価格$C_n(t)$は満期T_{n+1}でのペイオフの期待値をフォワード測度$\mathbf{P}_{n+1}$の下で計算することで得られる。$B(T_{n+1},T_{n+1})=1$に注意すると、

$$\frac{C_n(t)}{B(t,T_{n+1})}=\delta\mathbf{E}^{T_{n+1}}[\frac{C_n(T_{n+1})}{B(T_{n+1},T_{n+1})}\mid\mathcal{F}_t]=\mathbf{E}^{T_{n+1}}[\delta(L_n(T_n)-K)^+\mid\mathcal{F}_t], \tag{A-26}$$

ただし、$\mathbf{E}^{T_{n+1}}[\cdot\mid\mathcal{F}_t]$はフォワード測度$\mathbf{P}_{n+1}$下での時刻$t$での条件付期待値演算を表す[51]。

となる。したがって、キャプレット価格$C_n(t)$は、

$$C_n(t)=\delta B(t,T_{n+1})\mathbf{E}^{T_{n+1}}[(L_n(T_n)-K)^+\mid\mathcal{F}_t], \tag{A-27}$$

と表わせる。

---

48 $(A)^+=\max(A,0)$と定義する。

49 フォワード測度や後述のフォワード中立化法の詳細は、木島 [1999]等を参照。

50 後述する無裁定条件を満たす関数。

51 $\mathcal{F}_t$は時刻tまでに起こり得る事象からなる$\sigma-$加法族で、直観的には時刻tまでに入手可能な情報を表わす。

ジャンプ過程を考慮しない場合には、$L_n(t)$ はフォワード測度 $\mathbf{P}_{n+1}$ の下で対数正規過程となるので、キャプレットの価格は次のブラックによる公式（Black [1976]、以下ブラック式）で表わせる（ただし、F はキャプレットの期間に対応するフォワード･レート、K はストライク･プライス、σ は F の標準偏差、b は満期 T の割引債価格、Φ は標準正規分布の累積密度関数）。

$$BC(F,T,K,\sigma^2,b) = b[F\Phi(\frac{\log(F/K)+\sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}) - K\Phi(\frac{\log(F/K)-\sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}})]. \quad \text{(A-28)}$$

期間 $[T_n, T_{n+1}]$ のキャプレットの時刻 t での価格は(A-28)式を用いて、(A-29)式で表すことができる[52]（ただし、$\hat{\lambda}_n$ はフォワード測度 $\mathbf{P}_{n+1}$ 下でのジャンプ強度を示すパラメータ、$B(t,T_{n+1})$ を $B_{n+1}(t)$ と表記した）。

【キャップの評価式】

$$C_n(t) = \delta \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\hat{\lambda}_n (T_n - t)} \frac{(\hat{\lambda}_n (T_n - t))^j}{j!} BC(L_n^{(j)}(t), T_n - t, K, v_j(t)^2, B_{n+1}(t)), \quad \text{(A-29)}$$

ただし、$L_n^{(j)}(t) = L_n(t) \cdot e^{-\hat{\lambda}_n m_n (T_n - t)} \cdot (1+m_n)^j$ 、$v_j(t)^2 = \dfrac{\rho^2(t) + j s_n{}^2}{T_n - t}$、

$$\rho^2(t) = \int_t^{T_n} \|\gamma_n(u)\|^2 du.$$

(A-29)式は、各 n に関して、単一のキャプレットの価格式とよく似た形で表わせている。推定の必要があるパラメータは、ジャンプの強度 $\hat{\lambda}_n$、ジャンプ幅の平均 m_n、ジャンプ幅の分散 s_n^2、及び拡散係数 $\gamma_n(t)$ である。市場で観測されるデータを用いて、これらのパラメータを推定すれば、(A-29)式からキャプレット価格 $C_n(t)$ が求められる。

同様に、キャプレット（コール･オプション）に対応するプット･オプションの価格は、以下のブラック式で表わせるので、

$$BP = (F,T,K,\sigma^2,b) = b[K\Phi(-\frac{\log(F/K)-\sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}) - F\Phi(-\frac{\log(F/K)+\sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}})], \quad \text{(A-30)}$$

フォワード LIBOR に関するフロアの価格 $F_n(t)$ は(A-31)式となる。

---

[52] (A-29)式の導出の詳細は、Birge and Kou [1998]を参照。

【フロアの評価式】

$$F_n(t)=\delta\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\hat{\lambda}_n(T_n-t)}\frac{(\hat{\lambda}_n(T_n-t))^j}{j!}BP(L_n{}^{(j)}(t),T_n-t,K,v_j(t)^2,B_{n+1}(t)) . \qquad \text{(A-31)}$$

ロ. キャップによるボラティリティ･スマイルの数値例

以下では、得られた(A-28)、(A-29)式によって、ボラティリティ･スマイルを表現できることを具体的な数値計算例で示す。

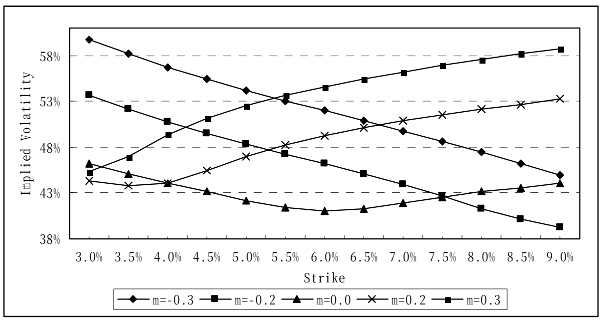
まず事前に各パラメータがモデルに与える影響を調べたところ、ボラティリティ･スマイルの形状に最も影響を与えるのはジャンプ幅の平均 m であったため、ここでは、ジャンプ幅の平均 m を-0.3 から 0.3 までの 5 通りを与えることにした。数値計算に使用したパラメータの具体的な値は、以下のとおりである。

図表 12 数値計算に使用したパラメータ

満期（T）	2 年
利払間隔（δ）	0.5 年
フォワード･レート（一定）	6.0%
ボラティリティ（γ：定数）	0.05
生起率（$\hat{\lambda}$）	1.0
ジャンプ幅平均（m）	-0.30,　-0.20,　0,　0.20,　0.30
ジャンプ幅標準偏差（s）	0.45

図表 12のパラメータを用いて、(A-28)、(A-29)式のジャンプ LIBOR モデルのキャプレット理論価格を算出し、そこからブラック式によってインプライド･ボラティリティを求めた。その結果をプロットしたものが以下の図表 13である。

図表 13 ボラティリティ･スマイル構造



$m=0$、つまりジャンプ幅の平均が 0 であるジャンプを仮定するときには、人が微笑んでいるような形状（狭義のボラティリティ･スマイル）が表れている。

また、$m<0$（$m>0$）のとき、つまりジャンプが平均的に金利下落（上昇）方向に起こると仮定する場合には、右下がり（左下がり）のボラティリティ・スキュー（ストライクが低い＜高い＞方が、ボラティリティが高い）がみられる。

その他のパラメータ$\gamma, \hat{\lambda}, s$の影響も調べた。その結果は、いずれのパラメータでも水準を上げると、インプライド・ボラティリティが形状は殆どそのままで、ほぼ一様に増加するというものである。γはブラウン運動の計数、$\hat{\lambda}$はジャンプ発生の頻度（強度）、sはジャンプ幅の標準偏差であることから、これらが大きくなるとボラティリティも大きくなるのは、直観と整合的である。

以　上

参考文献

石山幸太郎、「LIBOR マーケット・モデルのインプリメンテーションについて ―本邦の金利派生商品データを用いた具体例を基に―」、IMES Discussion Paper Series、No.2002-J-2、日本銀行金融研究所、2002 年.

木島正明、『期間構造モデルと金利デリバティブ』、朝倉書店、1999 年.

佐藤健一、『加法過程』、紀伊国屋書店、1990 年.

齋藤誠・高木真吾、「オプション取引データに基づいた状態価格密度の推計について：大阪証券取引所の事例―1―」、解説資料、大阪証券取引所、2000 年.

伏見正則、『確率と確率過程』、講談社、1987 年.

森本祐司・吉羽要直、「BGM 金利モデルの実用化に向けて」、IMES Discussion Paper Series、No.99-J-39、日本銀行金融研究所、1999 年.

ラムベルトン、D.・B. ラペール、『ファイナンスへの確率解析』、朝倉書店、2000 年.

渡部敏明、『ボラティリティ変動モデル』、朝倉書店、2000 年.

Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen, "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models," *The Journal of Finance*, Vol. 52, pp. 2003-2049, 1997.

Bates, D. S., "The Crash of '87: Was It Expected? The Evidence from Options Markets," *The Journal of Finance*, Vol. 46, pp. 1009-1044, 1991.

――――――, "Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options," *The Review of Financial Studies*, Vol. 9, pp. 69-107, 1996.

Birge, J., and S. Kou, "Pricing of Electricity Options," Working Paper, University of Michigan, 1998.

Black, F., and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637-654, 1973.

―――, "The Pricing of Commodity Contracts," *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, pp. 167-179, 1976.

Brace, A., D. Gątarek, and M. Musiela, "The Market Model of Interest Rate Dynamics," *Mathematical Finance*, Vol. 7, pp. 127-155, 1997.

Bremaud, P., *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1981.

Brockhaus, O., M. Farkas, A. Ferraris, D. Long, and M. Overhaus, *Equity Derivatives and Market Risk Models*, Risk Publishers, 1999.

Chan, T., "Pricing contingent claims on stocks driven by Lévy Processes," *Annals of Applied Probability*, Vol. 9, pp. 504-528, 1999.

Craine, R., L. A. Lochstor and K. Syrtveit, "Estimation of a Stochastic-Volatility Jump-Diffusion Model," Working Paper, University of California at Berkeley, 2001.

Das, S. R. and R. K. Sundaram, "Of Smiles and Smirks: A Term Structure Perspective," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 34, pp. 211-240, 1999.

Dempster, M. A. H., and S. R. Pliska, *Mathematics of Derivative Securities*, Publications of the Newton Institute, October 1997.

Derman, E., and I. Kani, "Riding on a smile," *RISK*, Vol. 7, pp. 32-39, February 1994.

Frittelli, M., "The Minimal Entropy Martingale Measure and the Valuation Problem in Incomplete Markets," *Mathematical Finance*, Vol. 10, pp. 39-52, 2000.

Garcia, R., "Asymptotic Null Distribution of the Likelihood Ratio Test in Markov Switching Models," *International Economic Review*, Vol. 39, pp. 763-788, 1998.

Glasserman, P., and S. G. Kou, "The Term Structure of Simple Forward Rates with Jump Risk," Preprint, http://www.ieor.columbia.edu/~kou/libor.pdf, 2000.

Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure Models: A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, Vol. 60, pp. 77-105, 1992.

Heston, S. L., "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options," *The Review of Financial Studies*, Vol. 6, pp. 327-343, 1993.

Hull, J., and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *The Journal of Finance*, Vol. 42, pp. 281-300, 1987.

Jensen, B., "Option Pricing in the Jump-Diffusion Model with a Random Jump Amplitude: A Complete Market Approach," Working Paper, University of Aarhus, Aarhus School of Business, 1999.

Kou, S. G., "A Jump Diffusion Model for Option Pricing," Preprint, http://www.ieor.columbia.edu/~kou/expo.pdf, 2001.

León, J. A., J. L. Solé, F. Utzet and J. Vives, "On Lévy processes, Malliavin calculus and market models with jumps," *Finance and Stochastics*, Vol. 6, pp. 197–225, 2002.

Lipton, A., “Path-Dependent Option on Assets with Jumps,” *RISK*, forthcoming.

Madan, D., P. Carr and E. Chang, “The Variance Gamma Process and Option Pricing,” *European Financial Review*, Vol. 2, pp. 79-105, 1998.

Merton, R., “Theory of Rational Option Pricing,” *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, pp. 141-183, 1973.

————, “Option Pricing When Underlying Stock Return Are Discontinuous,” *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, pp. 125-144, 1976.

Miyahara, Y., “[Geometric Lévy Processes & MEMM] Pricing Model and Related Estimation Problems,” *Asia-Pacific Financial Markets*, Vol. 8, pp. 45–60, 2001.

Navas, J. F., “On Jump-Diffusion Processes for Asset Returns,” Working Paper, http://papers.ssrn.com/paper.taf?abstract_id=234882, 2000.

Popova, I., and P. Ritchken, “On Bounding Option Prices in Paretian Stable Markets,” *The Journal of Derivatives*, Vol. 5, pp. 32-43, Summer 1998.

Rubinstein, M., “Implied Binomial Trees,” *The Journal of Finance*, Vol. 49, pp. 771-818, 1994.

Samuelides Y., and E. Nahum, “A Tractable Market Model with Jumps for Pricing Short-term Interest Rate Derivatives,” *Quantitative Finance*, Institute of Physics Publishing, Research Paper, Vol. 1, pp.1-14, 2001.

Scott, L. O., “Pricing Stock Options in a Jump-Diffusions Model with Stochastic Volatility and Interest Rates: Applications of Fourier Inversion Methods,” *Mathematical Finance*, Vol. 7, pp. 413-426, 1997.

Shirakawa, H., “Interest Rate Option Pricing with Poisson-Gaussian Forward Rate Curve Processes,” *Mathematical Finance*, Vol. 1, pp. 77-94, 1991.

Wiggins, J., “Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates,” *Journal of Financial Economics*, Vol. 19, pp. 351-377, 1987.